Ecuaciones de diferencia:
Fundamentos y soluciones aproximadas

Diego Martínez Argüello

Métodos de física matemática avanzados
12 *Julio* 2022

Contenido

C.M. Bender, and S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory.* Springer(1999).

CAPÍTULO 2

- Cálculo de diferencias.
- Ecuaciones de diferencia (DE) elementales.
- DE de orden-N.

CAPÍTULO 5

-Ejercicios: Soluciones aproximadas para DE.

Ecuaciones de diferencia (DE)

*Hallar los valores de una secuencia recursivamente

$$S = \{a_n\}_{n=n_0}^{n_{max}}$$

$$DE: \quad a_n = f(a_{n-1}, .., a_{n-k}; n)$$

$$\equiv a(n) \;,\; n \in \mathbb{Z}$$

* Ej: Los coeficientes de una expansión

$$F(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{n!} F'(x_0)$$

* Análogos discretos de las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Los métodos de solución tienen un análogo.

▶

Cálculo discreto

Siendo la ”función”

$$a_n = a(n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

Derivada discreta

$$\begin{aligned} Da_n &\equiv a_{n+1} - a_n \\ &= \lim_{\Delta n \to 1} \frac{\Delta a(n)}{\Delta n} = \frac{a(n+1) - a(n)}{1} \end{aligned}$$

Derivadas de orden superior

$$\begin{aligned} D^2 a_n &= Da_{n+1} - Da_n \\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

$$D^N a_n = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k c_k^N \, a_{n+k}, \qquad c_k^N = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Cálculo discreto (DE)

Integral discreta

$$Ia_n = b_n = \sum_{j=n_o}^{n} a_j$$

* como la integral de una función a trozos con un valor para cada intervalo $[n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{n_o}^{n} a(n)\, dn \to \sum_{m=n_o}^{n} a(m)\Delta m = \sum_{j=n_o}^{n} a_j$$

Teorema fundamental discreto

$$\begin{aligned} I(Da_n) &= \sum_{m=n_o} (a_{m+1} - a_m) \\ &= \sum_{m=n_o} a_{m+1} - \sum_{m=n_o} a_m \end{aligned}$$

$$D(Ia_n) = a_{n+1} - a_{n_o}$$

Cálculo discreto (DE)

Función ejemplo $f(x) = x^k$

$$f'(x) = k\,\frac{x^k}{x}, \qquad f^{(N)}(x) \quad = k(k-1)\cdot\cdot(k-(N-1))\,\frac{x^k}{x^N}$$

Análoga discreta: según la derivada e integral, k-factores

$$f_n^{[k]} \equiv n(n+1)\cdot\cdot(n+(k-1)) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$

$$D\,f_n^{[k]} = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} = k\,\frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$

y en general

$$D^N f_n^{[k]} = k(k-1)\cdot\cdot(k-(N-1))\frac{1}{\frac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)}}\,\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$

Cálculo discreto (DE)

Integral del polinomio simple

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x\, x^k + \mathrm{cte}$$

Análoga discreta: construir una derivada y usar teorema fundamental

$$\begin{aligned}
I\, \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} &= \sum_{n=n_0}^{m} n(n+1)\cdot\cdot(n+(k-1)) \left[\frac{(n+k)-(n-1)}{(k+1)}\right] \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{n=m_0}^{m} \left(\frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m)} - \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m-1)}\right) \\
&= \frac{1}{k+1}\, m\, \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)} + \mathrm{cte}(n_0)
\end{aligned}$$

Generalización de $\log(x)$

Es la función Digamma

$$\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d\Gamma(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$$

Porque su derivada discreta produce $1/n$

$$D^1 \psi_n = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n}$$

En efecto el límite de la función es

$$\lim_{n \to \infty} \psi(n) \sim \frac{1}{n}$$

DE elementales

* Son equivalentes la forma recursiva a la de derivadas.

$$DE: \quad a_n = F(a_{n-1}, .., a_{n-k}; n)$$
$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, .., a_n; n)$$

Usando las derivadas $D^N a_n = a_n^{(k)} = a_{n+N} + A\ a_{n+N-1} + \cdots + a_n$

$$\Leftrightarrow DE: \quad D^k a_n = \tilde{f}(a_n^{(n+k-1)}, .., a_n; n)$$

Solución:

$$sol-DE: \quad a(n), \{c_1, \cdot\cdot, c_k\}$$

constantes de suma!

DE lineales homogeneas de 1^{er} orden

$$a_{n+1} = p(n)\, a_n \quad \Leftrightarrow \quad Da_n = (p(n)-1)a_n$$

Como una ODE separable, usar el cambio de variable $b_n \equiv \log a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\log a_{n+1} &= \log p(n) + \log a_n \\
b_{n+1} - b_n &= \log p(n) \\
I\, Db_n &= \sum_{j=n_0}^{n} \log p(j) \\
a_{n+1} e^{-b_{n_0}} &= \prod_{j=n_0}^{n} p(j) \\
a_{n+1} &= a_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n} p(j) \\
a_m = &= a_{m_0^*} \prod_{j=m_0^*}^{m-1} p(j)
\end{aligned}$$

DE lineales homogeneas de 1^{er} orden

Existe solución por iteración:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= n\, a_n \\
a_1 &= p(0) a_0 \\
a_2 &= p(1) a_1 = p(1) p(0) a_0 \\
a_3 &= p(2) a_2 = p(2) p(1) p(0) a_0 \\
a_m &= a_0 \prod_{j=1}^{m-1} p(j)
\end{aligned}
$$

DE lineales homogeneas de 1^{er} orden

* En particular, si $p(n) = p$ constante,

$$a_{n+1} = p(n)a_n$$
$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n} p = a_{n_0} p^{m-1}$$

* Si $p(n) = n$ la DE factorial. $\Gamma(z)$ no satisface ODE simple, pero sí

$$a_{n+1} = n \; a_n$$
$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n-1} j$$
$$a_n = a_1 \; (m-1)!$$

DE lineales NO homogeneas de 1^{er} orden

En adelante usamos $n_0 = 1$

$$a_{n+1} = p(n)\, a_n + q(n) \quad \Leftrightarrow \quad Da_n = (p(n) - 1)a_n + q(n)$$

También se resuelve por factor integrante $\left(\prod_{j=1}^{n} p(j)\right)^{-1}$ para formar la derivada

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - p(n)\, a_n &= q(n) \\
\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} a_{n+1} - \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)} \frac{p(n)}{p(n)}\; a_n &= \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \\
F_{n+1} - F_n &= \\
F_{n+1} - F_1 &= \sum_{k=1} \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \\
\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} a_{n+1} &= F_1 + \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \\
a_{n+1} &= a_1 + \left[\prod_{j=1}^{n} p(j)\right] \sum_{k=1} \frac{q(k)}{\prod_{j=1}^{k-1} p(j)}
\end{aligned}$$

DE homogeneas de N-orden

En derivadas

$$a_n^{(N)} + \tilde{p}_{N-1}(n)a_n^{(N-1)} + \cdots + \tilde{p}_1(n)a_n^{(1)} + \tilde{p}_0(n)a_n = 0$$

En forma recursiva

$$a_{n+N} + p_{N-1}(n)a_{n+N-1} + \cdots + p_1(n)a_{n+1} + p_0(n)a_n = 0$$

La solución es combinación lineal de $\{a(n)_i\}_{n=1}^{N}$ $l.i.$

$$a(n) = \sum_{k=1}^{N} A_i a(n)_i$$

N constantes de suma, fijadas por las condiciones del problema.

Condiciones iniciales/de borde

Para las N constantes de suma:

* Condiciones iniciales: N derivadas en n_0

$$a_{n_0}^{(N)},\ a_{n_0}^{(N-1)}, .., \ a_{n_0}$$

Equivalente a N valores sucesivos de a_n ¿Sí?

* Condiciones de borde: N valores de a_n o sus derivadas en n´s específos

$$a_{n_1}^{(k_1)},\ a_{n_2}^{(k_2)}, .., \ a_{n_N}^{(k_N)}$$

DE homogeneas con coeficientes constantes

$$a_{n+N} + p_{N-1}a_{n+N-1} + \cdot\cdot + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0$$

Para la ODE análoga la solución venía por $f(x)e^{rx}$ y un polinomio $0 = P_N(r)$. Ahora: $a_n = r^n$

$$r^{n+N} + p_{N-1}r^{n+N-1} + \cdot\cdot + p_1 r^{n+1} + p_0 r^n = 0$$
$$r^N + p_{N-1}r^{N-1} + \cdot\cdot + p_1 r + p_0 = 0 = P_N(r)$$

$r \in \{r_i\}$ raices de $P_N(r)$

$$N \text{ sol´s: } a(n)_i = r_i^n$$

Si r_k tiene multiplicidad m, $P_N(r) \sim (r - r_k)^m$

$$\text{sol´s: } a(n) \to r_k^n,\ nr_k^n, .., \ n^m r_k^n$$

Wronskiano

Independencia lineal para soluciones $\{a(n)_i\}_{n=1}^{N}$ de DE de orden-N

$$A_1 a_n + A_2 b_n + \cdots + A_N [aN]_n = 0 \quad ?$$

$$W_n(\{a(n)_i\}) \equiv \begin{vmatrix} a_n & b_n & \cdot\cdot & [aN]_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+N-1} & b_{n+N-1} & \cdot\cdot & [aN]_{n+N-1} \end{vmatrix}$$

$$W_n \neq 0 \Leftrightarrow \{a(n)_i\} \text{sí es } l.i.$$

También satisface una DE análoga a la ODE de Abel:
$\frac{d}{dx} W(x) = -p_{N-1}(x) W(x)$.

Wronskiano

Como hicimos para ODE homogenea, $\forall N$:

$$\frac{d}{dx}W(x) = -p_{N-1}(x)W(x)$$
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{N-1}(x)dx}$$

Caso discreto $\forall N$-orden DE homogenea :

$$W_{n+1} = -p_0(n)W_n$$
$$W_n = W_{n_0}\prod_{j=n_0}^{n-1} p_0(j)$$

DE NO homogeneas de N-orden

$$a_{n+N} + p_{N-1}(n)a_{n+N-1} + \cdots + p_1(n)a_{n+1} + p_0(n)a_n = q(n)$$

La solución es combinación de la homogénea con una particular

$$a(n) = a(n)_{part} + \left[\sum_{k=1}^{N} A_i a(n)_i\right]_{homog.}$$

Conocidas las N homogeneas, la particular se puede hallar con:

- Variación de parámetros-DE
- Reducción de orden-DE
- Coeficientes indeterminados-DE

SOLUCIONES APROXIMADAS PARA DE

$$n \longrightarrow \infty$$

Referencia principal

C.M. Bender, and S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory.* Springer(1999).