Здесь лежит учебник Круглова, издание 2016 года.

1 Теорема Серпинского (1.2.7)

Обозначение класса всех подмножеств: 2^{Ω}.

Определение 1.1. Класс $\mathcal{E} \in 2^{\Omega}$ называется

- *π-классом*, если он замкнут относительно пересечения своих элементов ($\forall A, B \in \mathcal{E} : A \cap B \in \mathcal{E}$)
- *алгеброй*, если $\Omega, A \cup B, A^c \in \mathcal{E}$
- *σ-алгеброй*, если он является алгеброй и содержит счётное объединение любых своих подмножеств. σ-алгеброй, *порождённой* L, называется минимальная по включению σ-алгебра, содержащая L. Обозначается $\sigma(L)$.
- *монотонным*, если $\forall A_n \uparrow : \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$, $\forall A_n \downarrow : \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$
- *λ-классом*, если $\Omega, A \backslash B, \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$ при $B \subseteq A, A_n \uparrow$.

Если класс является π- и λ-классом, то он σ-алгебра. Кроме того, все эти специальные классы замкнуты относительно пересечения, то есть любое пересечение, например, алгебр является алгеброй.
Если L - один из специальных классов, определённых выше, то $L \cap B$ - класс того же типа, $\forall B \in 2^{\Omega}$. Кроме того, если L - образ некоторого отображения, то его прообраз также является классом того же типа. Если же есть L - прообраз некоторого отображения в Ω', то класс множеств из Ω', прообразы которых лежат в L, является классом того же типа.

Вообще, следующая теорема содержит два утверждения. Круглов пишет, что первое из них - теорема Серпинского, а второе - теорема о монотонном классе. Но раз они сформулированы вместе, думаю, что теормин этого билета содержит оба утверждения.

Теорема 1.2 (Серпинский). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если π-класс $\mathcal{E}$ содержится в λ-классе $\mathcal{D}$, то $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$.*
2. *Если алгебра $\mathcal{A}$ содержится в монотонном классе $\mathcal{M}$, то $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Идея доказательства. 1. Пусть $\lambda(\mathcal{E})$ - минимальный λ-класс, содержащий $\mathcal{E}$. Для произвольного $A \in \mathcal{E}$ вводится класс $\mathcal{L}(A)$ множеств $B \in \lambda(\mathcal{E})$ таких, что $A \cap B \in \lambda(\mathcal{E})$. Доказывается, что $\mathcal{L}(A)$, является λ-классом и проверяется, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(A)$. Поскольку $\mathcal{L}(A) \subseteq \lambda(\mathcal{E})$, получаем, что $\mathcal{L}(A) = \lambda(\mathcal{E})$.
Теперь берём $B \in \lambda(\mathcal{E})$ и класс $\mathcal{M}(B)$ множеств D таких, что $B \cap D \in \lambda(\mathcal{E})$. Это λ-класс и содержит π-класс $\mathcal{E}$. Откуда $\mathcal{M}(B) = \lambda(\mathcal{E})$. Тем самым доказано, что $\lambda(\mathcal{E})$ - π-класс. Тогда по утверждению до теоремы, $\lambda(\mathcal{E})$ - σ-алгебра. А дальше утверждается, что осталось заметить, что $\lambda(\mathcal{E}) \subseteq \lambda(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.

2. Похожие действия. Пусть $m(\mathcal{A})$ - минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, далее, зафиксировав $A \in \mathcal{A}$, вводим класс $\mathcal{L}(A)$ множеств $B \in m(\mathcal{A})$ таких, что $B \backslash A \in m(\mathcal{A})$. Убеждаемся, что $\mathcal{L}(A)$ является монотонным классом, содержащим алгебру $\mathcal{A}$. Поэтому $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{M}$.
   Теперь берём $B \in m(\mathcal{A})$, вводим класс $\mathcal{M}(B)$ множеств $D \in m(\mathcal{A})$ таких, что $D \backslash B \in m(\mathcal{A})$. Убеждаемся, что $\mathcal{M}(B)$ - тоже монотонный класс, содержащий алгебру $\mathcal{A}$. Тогда $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(B)$. Поэтому $m(\mathcal{A})$ - λ-класс, содержащий π-класс $\mathcal{A}$. Тогда по первому утверждению сигма-алгебра $\sigma(\mathcal{A})$ содержится в $m(\mathcal{A})$. Замечаем, что $\mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

$\square$

2 Измеримое пространство, прямое произведение измеримых пространств, цилиндрические множества (1.2.14 - 1.2.18)

Обозначение прямого произведения: $\times_{t \in T} \Omega_t$.

Определение 2.1. Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из некоторого множества Ω и некоторой σ-алгебры $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, называется *измеримым пространством.* Множества из $\mathcal{F}$ называются *измеримыми множествами.*

Определение 2.2. Пусть есть множество измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T$. Тогда прямоугольник $\times_{t \in T} A_t$ называется *измеримым*, если все $A_t \in \mathcal{F}_t$.

Определение 2.3. Сигма-алгебра, порождённая измеримыми прямоугольниками с $A_t = \Omega_t$ для почти всех $t \in T$, называется *прямым произведением* σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ и обозначается $\otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$

Определение 2.4. Измеримое пространство $(\times_{t \in T} \Omega_t, \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t)$ называется *прямым произведением* измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T$.

Определение 2.5. Для любых $U \subset T, A \subseteq \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$ множество $C_U(A)$ функций из $\times_{t \in T} \Omega_t$, сужения которых на U принадлежат A, называется *цилиндрическим множеством с основанием* A. Если U конечное (счётное), то $C_U(A)$ называется цилиндрическим множеством с *конечномерным* (*счётно-конечным*) основанием.

В адекватных обозначениях для конечномерного основания $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$: $C_U(A) = \{\omega \in (\times_{t \in T} \Omega_t \mid (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A\}$. Важны два факта:

1. Прямое произведение $\times_{t \in T} \Omega_t$ является цилиндрическим множеством.

2. Дополнение цилиндрического множества суть цилиндрическое множество.

В обозначениях выше, справедливы следующие теоремы:

Теорема 2.6. *Класс $\mathcal{A}$ цилиндрических множеств с конечномерными основаниями является алгеброй и $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$.*

Идея Доказательства. Учитывая два факта выше, для доказательства, что $\mathcal{A}$ - алгебра, достаточно показать, что в $\mathcal{A}$ содержится любое пересечение $C_U(A) \cup C_V(B)$. Берутся два отображения π_1, π_2, сужающие функцию ω_t на множества U и V соответственно. Дальше доказываются соотношения $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A), C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B)) = C_V(B)$, после чего записывается равенство

$$C_U(A) \cup C_V(B) = C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A) \cup (\pi_2^{-1}(B)) \in \mathcal{A}.$$

Вывод второй части теоремы заключается в том, что $\mathcal{A}$ содержится в $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$, а кроме того в $\mathcal{A}$ содержится любой прямоугольник $\times_{t\in T}A_t$, в том числе и если взять $A_t = \Omega_t$ для всех t, кроме конечного числа. Из этого следует, что $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. □

Теорема 2.7. *Пусть множество $B \subseteq \times_{t\in T}\Omega_t$.*
$B \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t \iff B = C_U(A)$ с конечномерным или счётным основанием A.

Идея Доказательства. Обозначим $\mathcal{L}$ класс цилиндрических множеств со счётно-конечными или конечномерными основаниями. Доказывается, что $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй. Сложность представляет лишь проверка условия для счётного объединения, которая производится так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, вводя сужающие отображения.
В силу того, что все цилиндрические множества с конечномерными основаниями лежат в $\mathcal{L}$, верно вложение $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{L}$. Осталось показать, что любое цилиндрическое множество с основанием U лежит в $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Если основание множества конечное, то утверждение, очевидно, справедливо. Если нет, то вводим класс $\mathcal{L}_U$ множеств $A \in \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$ таких, что $C_U(A) \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Показывается, что $\mathcal{L}_U$ является сигма-алгеброй. Кроме того, класс $\mathcal{L}_U$ содержит все прямоугольники $\times_{t\in U}C_t, C_t \in \mathcal{F}_t$ (это проверяется довольно красиво, вводятся счётномерные прямоугольники D_m, в которых первые m сторон равны $C_k, k = 1, \ldots, m$, а остальные возьмём Ω_t. Такие прямоугольники лежат в $\mathcal{L}_U$, а $\times_{t\in U}C_t = \cap_{m=1}^{\infty}D_m$). Ну значит $\otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{L}_U$, что и приводит нас к нужному утверждению. □

Пример 2.7.1. Существуют множества не из прямого произведения сигма-алгебр. Положим $T = [0,1], \Omega_t = [0,2], \mathcal{F}_t = \mathcal{B}([0,2])$. Множество $B = \{\omega \in \times_{t\in T}\Omega_t \mid \sup_{t\in T}\omega_t = 1\}$ не лежит в $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Доказываем от противного, применяя предыдущую теорему. По ней основание A цилиндрического множества B должно быть прямым произведением счётного числа $\mathcal{F}_{t_n}$. Поскольку мощность T - континуум, можно изменить функцию $\omega \in B$, положив её равной 2 во всех точках $[0,1]\backslash\{t_n\}$. Тогда её принадлежность B не изменится, но супремум уже будет равен 2, что приводит к противоречию.

3 Понятие случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с данными конечномерными распределениями (3.1.1 – 3.1.4)

Мы живём в некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Надо понимать, что у Круглова не случайный вектор является набором случайных величин, а случайная величина является одномерным случайным вектором. А случайный вектор - это измеримое отображение $\Omega \to R^d$. Измеримая функция же в свою очередь определяется точно так же, как мы привыкли, только вместо $\mathcal{B}(R)$ берётся $\mathcal{B}(R^d)$.

Определение 3.1. Произвольное семейство случайных векторов $X_t : \Omega \to R^d, t \in T$ называется *случайным процессом.*

Определение 3.2. *Конечномерным распределением* случайного процесса называется мера $P_{t_1,\dots,t_n}\{A\} = P\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\}, A \in \mathcal{B}(R^{dn})$.

Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса. Дальше в билете формулируем две теоремы о них: простую и фундаментальную(ну ясен пень, это ж Колмогоров! Кто-нибудь видел не оч важную теорему Колмогорова?). Фундаментальность заключается в том, что она, по сути, гласит, что по заданным конечномерным распределениям можно построить случайный процесс.

Теорема 3.3. *Конечномерные распределения удовлетворяют условиям согласованности:*

$$P_{t_1,\dots,t_n}\{\times_{k=1}^n A_k\} = P_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}\{\times_{k=1}^n A_{\pi(k)}\}$$

$$P_{t_1,\dots,t_{n+1}}\{\times_{k=1}^n A_k \times R^d\} = P_{t_1,\dots,t_n}\{\times_{k=1}^n A_k\}$$

, где, очевидно, $t_i \in T$ - любые, $A_i \in \mathcal{B}(R^d)$, π - перестановка.

Идея доказательства. Идеи нет, две строчки, тупо по определению. Не боимся, следующее доказательство отыграется. □

Теорема 3.4 (Колмогоров)**.** *Пусть семейство вероятностей $P_{t_1,\dots,t_n}\{A\}, A \in \mathcal{B}(R^{dn})$ удовлетворяет условиям согласованности из предыдущей теоремы. Тогда существуют вероятность $P^T : \mathcal{B}((R^d)^T) \to [0,1]$ и случайный процесс $X = X_t, t \in T$, определённый на вероятностном пространстве $((R^d)^T, \mathcal{B}((R^d)^T), P^T)$, такие, что*

$$P^T_{t_1,\dots,t_n}\{A\} = P_{t_1,\dots,t_n}\{A\}, \forall t_i \in T, A \in \mathcal{B}(R^{dn})$$

.

Идея доказательства. Оно обосраться какое здоровое, страницы 3, но по сути строится мера $\mu\{C_U(A)\} = P_{t_1,\ldots,t_n}\{A\}$ на алгебре цилиндрических множеств с конечномерными основаниями A, проверяется, что это действительно мера, и потом строится искомая P^T как продолжение этой меры. Построив вероятность, процесс строится тупо полагая $X_t(\omega) = \omega_t, \forall\omega \in (R^d)^T, t \in T$. □

4 Эквивалентные, неотличимые, одинаково распределенные, непрерывные случайные процессы (3.1.6 - 3.1.12)

Определение 4.1. Случайные процессы $\{X_t, t \in T\}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\{X'_t, t \in T\}$ на $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ называются *одинаково распределёнными*, если для любых $t_1, \ldots, t_n, A$ выполнено

$$P\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\} = P'\{(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n}) \in A\}$$

.

Определение 4.2. Пусть случайные процессы X_t, X'_t определены на одном вероятностном пространстве и принимают значения в R^d. Если $\forall t \in T : P\{X_t \neq X'_t\} = 0$, то эти процессы называются *эквивалентными*. Эквивалентные случайные процессы называются *версиями* друг друга.

Если интерпретировать T как время, то эквивалентность означает равенство почти наверное в любой фиксированный момент времени. Понятно, что эквивалентные процессы одинаково распределены.

Определение 4.3. Пусть случайные процессы X_t, X'_t определены на одном вероятностном пространстве и принимают значения в R^d. Пусть есть некое Ω' такое, что $P\{\Omega'\} = 1$ и $\forall\omega \in \Omega'$ совпадают траектории $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega)$. Такие случайные процессы называются *неотличимыми*.

Неотличимые случайные процессы эквивалентны. Неотличимость – самое сильное из возможных свойство двух процессов, далее эквивалентность и только потом одинаковая распределённость. Однако, если потребовать некоторые дополнительные условия на процессы и/или множество T, то можно показать, что и из эквивалентности следует неотличимость. Этому посвящены следующие две теоремы.

Теорема 4.4. *Эквивалентные процессы со счётным множеством T неотличимы.*

Идея доказательства. В качестве Ω' из определения неотличимых процессов возьмём $\cap_{t\in T}\{X_t = X'_t\} \in \mathcal{F}$. □

Для следующей теоремы понадобится ещё одно

Определение 4.5. Случайный процесс называется (*почти*)*непрерывным* (*непрерывным слева/справа*), если (почти) все его траектории непрерывны (непрерывны слева/справа).

Теорема 4.6. *Если эквивалентные процессы почти всюду непрерывны слева/справа, а множество T выпукло, то они неотличимы.*

Идея доказательства. Берём Ω'' как в предыдущей теореме, только на $T \cap Q$, где Q - множество рациональных чисел. Для Ω'' всё хорошо. Все остальные t приближаем последовательностью $\{t_n\}, t_i \in T \cap Q$. □

5 Стохастически непрерывные случайные процессы (3.1.13 - 3.1.14)

Я очень сильно подозреваю, что t^* и t_* - это супремум и инфимум T соответственно. Очень надеюсь, что это правда.

Определение 5.1. Случайный процесс $X = X_t, t \in T$ с выпуклым множеством T называется *стохастически непрерывным слева*, если

$$\lim_{t \uparrow s} P\{\|X_t - X_s\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0, s > t_*$$

Стохастическая непрерывность справа:

$$\lim_{t \downarrow s} P\{\|X_t - X_s\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0, s < t^*$$

Случайный процесс называется *стохастически непрерывным*, если он стохастически непрерывен слева и справа.

Определение 5.2. Случайный процесс называется *равномерно стохастически непрерывным*, если

$$\lim_{h \to 0} \sup_{|t-s|<h} P\{\|X_t - X_s\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0$$

Теорема 5.3. *Стохастически непрерывный случайный процесс равномерно стохастически непрерывен.*

Идея доказательства. Стохастическая непрерывность: $\lim_{t \to s} P\{\|X_t - X_s\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0, s \in T$. Доказываем от противного, отсутствие равномерности означает, что $\sup_{\|t-s\|<h_n} P\{\|X_t - X_s\| > \epsilon\} > \alpha$, для некоторых $\epsilon, \alpha > 0$ и монотонно убывающей последовательности $\{h_n\}, h_n \downarrow 0$. Берём подпоследовательности t_n, s_n, сходящиеся к некоторому числу s, такие, чтобы для них было верно $P\{\|X_{t_n} - X_{s_n}\| > \epsilon\} > \frac{\alpha}{2}$. Противоречие возникает, если устремить $n \to \infty$ в неравенстве

$$P\{\|X_{t_n} - X_{s_n}\| > \epsilon\} \leq P\{\|X_{t_n} - X_s\| > \frac{\epsilon}{2}\} + P\{\|X_{s_n} - X_s\| > \frac{\epsilon}{2}\}$$

□

6 Теорема существования сепарабельных случайных процессов (3.2.1 - 3.2.5)

Рассматривается задача: вычислить вероятность того, что траектории случайного процесса лежат в данном множестве. Фишка в том, что эта задача может оказаться некорректной для некоторого процесса X (например для $X_t(\omega) = 1$ при $\omega \in A$, иначе 0, для неборелевского $A \subset [0,1]$). С другой стороны, можно взять процесс Y, эквивалентный X (в примере выше просто $Y_t = 0$), для которого задача будет звучать корректно. Это утверждение верно для любого X и является теоремой, которую мы сформулируем дальше (доказана Дубом. Даже Дуб что-то может доказать, а ты нет...). Процесс Y называют *сепарабельной версией* X. Определим теперь всё более формально.

Кроме уже надоевшего процесса X, определённого на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в R^d, введём ещё обозначение $\overline{X(U,\omega)}$. Это замыкание множества $X(U,\omega) = \{X_t(\omega) \mid t \in U\}$. Кроме того, назовём *относительным интервалом* пересечение $(a,b) \cap T$ вещественного интервала (a,b) и множества T.

Определение 6.1. Случайный процесс называется *сепарабельным*, если существует конечное или счётное $S \subset T$ и событие $N \in \mathcal{F}, P\{N\} = 0$ такие, что

$$X_u(\omega) \in \cap_{J: u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)}$$

для любых $u \in T$ и $\omega \notin N$, а J - относительный интервал, содержащий u. Пересекаем по всем таким J. S называется *сепарантой*, а N - *исключительным событием* случайного процесса.

Смысл условия в определении заключается в том, что почти каждая траектория случайного процесса определяется своими значениями на счётном множестве S. Понятно, что процесс может быть несепарабельным только в случае несчётного T, иначе можно просто взять $S = T$. Верно также утверждение, что почти всюду непрерывный слева/справа процесс с выпуклым T является сепарабельным. Следующая теорема является критерием сепарабельности случайного процесса.

Теорема 6.2. *Случайный процесс сепарабельный $\Longleftrightarrow$ существуют счётное множество S, событие нулевой вероятности N такие, что для любого замкнутого множества $K \subset \overline{R}^d$ и относительного интервала J*

$$\cap_{t \in J \cap S} \{X_t \in K\} \subseteq \cap_{t \in J} \{X_t \in K\} \cup N$$

или (эквивалентное условие)

$$\cap_{t \in J \cap S} \{X_t \in K\} \subseteq \{X_u \in K\} \cup N, \forall u \in J$$

Идея доказательства. Доказывается цепочка следствий: условие в определении сепарабельного процесса $\Longrightarrow$ первое утверждение теоремы $\Longrightarrow$ второе утверждение теоремы $\Longrightarrow$ условие в определении сепарабельного процесса. Каждое из них несложно и разбирается непосредственно при запоминании доказательства. $\square$

Теорема 6.3. *Для любого случайного процесса найдутся счётное множество $S \subset T$ и события $N^u \in \mathcal{F}, u \in T$ нулевой вероятности такие, что*

$$X_u(\omega) \in \cap_{J:u\in J} \overline{X(J \cap S, \omega)}$$

для любых $u \in T$ и $\omega \notin N^u$.

Идея доказательства. Рассуждая как в доказательстве предыдущей теоремы, получим, что утверждение в этой теореме равносильно

$$\cap_{t\in J\cap S}\{X_t \in K\} \subseteq \{X_u \in K\} \cup N^u$$

Дальше какие-то нее*ические финты ушами для доказательства этого утверждения. $\square$

Теперь самое время для, собственно, основной теоремы. Предварительно только определим *сепарабельную версию* процесса X, как некий эквивалентный процесс Y, обладающий свойством сепарабельности.

Теорема 6.4. *Любой случайный процесс X имеет сепарабельную версию Y, $Y_t : \Omega \to \overline{R}^d$.*

Идея доказательства. Берём S, N^u из предыдущей теоремы. Обозначаем M^u множество всех тех ω, для которых не выполняется утверждение в предыдущей теореме. Очевидно, $M^u \in N^u, P\{M^u\} = 0$. Вводим процесс $Y = \{Y_u, u \in T\}$, где $Y_u(\omega)$ совпадает с $X_u(\omega)$ везде, кроме случая, когда $u \notin S, \omega \in M^u$. В этом случае берём $Y_u(\omega) = x$, где x - любая точка множества $\cap_{J:u\in J}\overline{X(J \cap S, \omega)}$ (хотя бы одна существует, это доказывается в первой главе книги). $\square$

Последнее утверждение касается сепарант сепарабельных стохастически непрерывных процессов с выпуклым множеством T.

Теорема 6.5. *Если процесс сепарабельный и стохастически непрерывный с выпуклым множеством T, то в качестве сепаранты можно взять любое всюду плотное множество счётное множество $S \subset T$.*

Идея доказательства. Берём N, S_0 - некоторые исключительное событие и сепаранта, S - произвольное всюду плотное множество. Приближаем u последовательностью $\{s_n\}, s_n \in S$, чтобы ещё и $\|X_{s_n} - X_u\|$ сходилось к 0 по вероятности. Можно считать, что последовательность сходится тогда почти всюду(иначе выберем подпоследовательность, сходящуюся почти всюду). Вводим событие $N^u = \Omega \backslash \{\lim_{n\to\infty} \|X_{s_n} - X_u\| = 0\}$. Оно нулевой вероятности. Вводим новое событие $N_0 = N \cup \cup_{u\in S_0} N^u$. Оно тоже нулевой вероятности, а дальше показывается, что оно и будет исключительным событием для сепаранты S. $\square$

7 Свойства вещественных сепарабельных процессов (3.2.6)

Обозначим $J(T)$ - класс всех относительных интервалов множества $T \subseteq R$, $\mathcal{E}$ - класс множеств вида $[-\infty, a], [a, b], [a, \infty], a \leq b, a, b \in R$. В формулировке следующей теоремы выбираются любые множества: $J \in J(T), K \in \mathcal{E}, u \in J, \omega \notin N$, где N - исключительное событие.

Теорема 7.1. *Пусть всё так же есть вещественный случайный процесс X, который ещё и сепарабелен с сепарантой S и исключительным событием N. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\cap_{t \in J \cap S}\{X_t \in K\} \subseteq \cap_{t \in J}\{X_t \in K\} \cup N$
2. $\inf_{t \in J} X_t(\omega) = \inf_{t \in J \cap S} X_t(\omega)$;
   $\sup_{t \in J} X_t(\omega) = \sup_{t \in J \cap S} X_t(\omega)$
3. $\inf_{t \in J \cap S} X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq \sup_{t \in J \cap S} X_t(\omega)$
4. $\lim_{J \ni t \to u} \inf X_t(\omega) = \lim_{J \cap S \ni t \to u} \inf X_t(\omega)$;
   $\lim_{J \ni t \to u} \sup X_t(\omega) = \lim_{J \cap S \ni t \to u} \sup X_t(\omega)$
5. $\lim_{J \cap S \ni t \to u} \inf X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq \lim_{J \cap S \ni t \to u} \sup X_t(\omega)$

Эти пять условий на самом деле довольно просто запоминаются мнемонически, достаточно помнить, что 1 - это просто из теоремы предыдущего билета, 2 - два одинаковых утверждения для точных нижних и верхних граней, меняется (сужается) лишь множество, в котором мы смотрим t, третье - тупо неравенство для инфимума и супремума из второго, а 4 и 5 - по сути 2 и 3, только с добавленными пределами при $t \to u$.

Идея доказательства. Доказываем цепочку следствий: $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 1$. □

8 Достаточные условия непрерывности случайных процессов (3.3.1 - 3.3.4)

Теорема 8.1. *Сепарабельный случайный процесс с выпуклым множеством T почти всюду непрерывен, если*

$$\lim_{h \downarrow 0} P\{\sup_{|s-t|<h} \|X_s - X_t\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0$$

.

Идея доказательства. То, что должно быть больше эпсилона, – убывающая последовательность Z_h. Тогда есть её предел. В силу условия теоремы, этот предел Z равен нулю почти всюду. Тогда траектории непрерывны в любом $\omega \in Z$. □

Теорема 8.2. *Сепарабельный случайный процесс с $T = [a, b]$ почти всюду непрерывен $\iff$ выполнено условие из предыдущей теоремы.*

Идея доказательства. По предыдущей теореме следствие в одну сторону верно. В другую пользуемся теоремой Кантора, по которой из непрерывности почти всюду следует равномерная непрерывность почти всюду, а из сходимости почти всюду вытекает сходимость по вероятности. □

Разница между первой и следующей теоремой в том, что в первой мы берём любые $s, t \in T$ внутри вероятности, а в этой смотрим супремум по s вероятностей, где s уже фиксированное.

Теорема 8.3. *Сепарабельный случайный процесс с выпуклым множеством T почти всюду непрерывен, если*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \sup_{s \in T} P\{\sup_{|s-t|<h} \|X_s - X_t\| > \epsilon\} = 0, \forall \epsilon > 0$$

Идея доказательства. □

Последняя теорема - какой-то пи**ец, запомнить можно, доказывать не советую. Выглядит полезно и классно, и оценка скорости равномерной сходимости, и все дела, но это всё вплоть до доказательства.

Теорема 8.4. *Пусть случайный процесс с выпуклым множеством T удовлетворяет условию:*

$$P\{\|X_s - X_t\| \geq p(|t-s|)\} \leq q(|t-s|)$$

для любых $s, t \in T : |t - s| < \delta, \delta > 0$ и для некоторых функций $p, q : [0, \delta] \to R_+$ таких, что

$$\int_0^\delta \frac{p(u)}{u} du < \infty, \int_0^\delta \frac{q(u)}{u^2} du < \infty.$$

Тогда существует непрерывная версия Y процесса X. Более того, для любого конечного отрезка $[a, b] \subseteq T$ существует функция $H : \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$ такая, что $\forall \omega \in \Omega, h \in (0, 2^{-H(\omega)} \wedge \delta)$ выполнено неравенство

$$\sup_{s,t \in [a,b] : |t-s| < \frac{h}{2}} \|Y_s(\omega) - Y_t(\omega)\| \leq \frac{2}{\ln 2} \int_0^h \frac{p(u)}{u} du$$

Идея доказательства. Эта жопа разбивается на 5 пунктов, каждый из которых всё больше обобщает теорему. □

9 Теорема Колмогорова о непрерывных случайных процессах (3.3.5)

Какая-то странная теорема Колмогорова... Во-первых потому, что Круглов не упомянул в учебнике, что это именно Колмогоров, во-вторых почему-то она не очень фундаментально звучит, в-третьих, всего-то страница доказательства, а я с трудом верю, что Колмогоров называл своим именем то, что Тыртышникову очевидно. Ну да ладно, собственно, сама

Теорема 9.1 (Колмогоров)**.** *Если случайный процесс с выпуклым множеством T удовлетворяет условию*

$$\mathsf{E}\|X_t - X_s\|^\alpha \leq c|s-t|^{1+\beta}$$

для любых s, t и каких-то положительных a, b, c, то он имеет непрерывную версию Y со свойством

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sup_{s,t\in[a,b]:|t-s|<h} \|Y_t - Y_s\| = 0$$

для любого $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ и любого сегмента $[a, b] \in T$.

Идея доказательства. □

10 Функции без разрывов второго рода (3.4.1 - 3.4.5)

Определение 10.1. Функция $f : T \to R^d$ *не имеет разрывов второго рода*, если есть $f(t-)\forall t > t_*$ и $f(t+)\forall t < t^*$.

Доопределим $f(t_*-) = f(t_*), f(t^*+) = f(t^*)$. Разность $\Delta f(t) = f(t+) - f(t-)$ назовём *скачком* функции f в точке $t \in T$, а $\|\Delta f(t)\|$ - *величиной скачка*.

Теорема 10.2. *Пусть дана функция без разрывов второго рода. Тогда $\forall c > 0, a, b \in T, a < b$ множество $E_{c,a,b} = \{t \in [a, b] \mid \|\Delta f(t)\| \geq c\}$ конечно, а множество $E = \{t \in [a, b] \mid \|\Delta f(t)\| \geq 0\}$ конечно или счётно.*

Идея доказательства. □

Теорема 10.3. *Если нет разрывов второго рода, то $\sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\| \leq \infty, \forall a, b \in T$. Если, ко всему прочему, ещё и $\|\Delta f(t)\| \leq c$ для некоторого $c > 0$ и всех t, то $\forall \epsilon > 0, a, b \exists \delta(\epsilon, a, b) > 0$ такое, что $\|f(t) - f(s)\| < c + \epsilon$ при любых $s, t \in [a, b], |t - s| < \delta$.*

По сути утверждается, что точная верхняя грань конечна, а если скачки ограничены какой-то константой, то на любом сегменте для наперёд заданного эпсилона можно выбрать дельту так, чтобы функция за время, не большее, чем дельта, (всё ещё интерпретируем T как время) изменилась меньше, чем на ограничивающую константу плюс эпсилон.

Идея доказательства. □

Определение 10.4. Функция называется *регулярной справа(слева)*, если она непрерывна справа(слева) в каждой точке $t \in T, t < t^*(t > t_*)$ и имеет предел слева(справа) в каждой точке $t \in T, t > t_*(t < t^*)$.

Теорема 10.5. *Пусть функция определена на всюду плотном подмножестве S множества T. Предположим, что существуют $\lim_{S \ni s \uparrow t} f(s) = g(t-) \in R^d, \forall t \in T, t > t_*$ и $\lim_{S \ni s \downarrow t} f(s) = g(t+) \in R^d, \forall t \in T, t < t^*$. Тогда функция $g(t-), t \in T, t > t_*$ регулярна слева, функция $g(t+), t \in T, t < t^*$ регулярна справа и $\sup_{t \in [a,b] \cap S} \|f(t)\| < \infty, \forall a, b \in T, a < b$.*

Идея доказательства. □

11 Случайные процессы без разрывов второго рода: знать формулировки теорем (3.4.7 - 3.4.8)

Спасибо Круглову за отсутствие необходимости знать доказательства, в противном случае можно было бы сразу идти на пересдачу.

Теорема 11.1. *Пусть случайный процесс с выпуклым множеством $T, t_* \in T$ удовлетворяет условию*

$$P\{\|X_{t_1} - X_{t_2}\| \|X_{t_2} - X_{t_3}\| \geq p(t_3 - t_1)\} \leq q(t_3 - t_1)$$

для любых $t_i \in T, t_1 < t_2 < t_3, t_3 - t_1 < \delta, \delta > 0$ и для некоторых неубывающих функций $p, q : [0, \delta] \to R_+$ таких, что

$$\int_0^\delta \frac{p(u)}{u} du < \infty, \int_0^\delta \frac{q(u)}{u^2} du < \infty.$$

Тогда процесс X имеет версию Y без разрывов второго рода.

Теорема выше является обобщённым случаем второй теоремы.

Теорема 11.2 (Ченцов)**.** *Пусть случайный процесс с выпуклым множеством $T, t_* \in T$ удовлетворяет условию*

$$\mathsf{E}(\|X_{t_1} - X_{t_2}\| \|X_{t_2} - X_{t_3}\|)^\alpha \leq c|t_3 - t_1|^{1+\beta}$$

для некоторых $\alpha, \beta > 0, t_i \in T, t_1 < t_2 < t_3$. Тогда процесс X имеет версию Y без разрывов второго рода.

В некотором роде эти две теоремы являются аналогами теорем 8.4 и 9.1(Колмогорова), только там непрерывные, а здесь без разрывов второго рода.

12 Фильтрации и их свойства, естественные фильтрации случайных процессов (3.5.1 - 3.5.6)

Определение 12.1. Семейство $\mathrm{F}_T = \{\mathcal{F}_t \mid \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$ сигма-алгебр называется *фильтрацией*, если $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для любых $s < t, s, t \in T$.

Определение 12.2. Фильтрация называется *расширенной*, если любое множество $A \in \mathcal{F}$ нулевой вероятности принадлежит всем сигма-алгебрам $\mathcal{F}_t$.

Введём обозначения $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s, s < t)$.

Определение 12.3. Фильтрация называется *непрерывной справа(слева)*, если $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}(\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t), \forall t \in T$.

Фильтрация со счётным T непрерывна слева $\Longleftrightarrow$ все сигма-алгебры равны между собой.

Пусть дана фильтрация F_T с выпуклым параметрическим множеством T. Введём следующие классы: $\mathcal{N} = \{A \mid A \in \mathcal{F}, P(A) = 0\}, \mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N}), \mathcal{G}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{G}_s, \forall t < t^*, \mathcal{G}_{t^*+} = \mathcal{G}_{t^*}$.

Теорема 12.4. *В обозначениях выше, для определённой выше фильтрации F_T справедливо, что фильтрация $\mathcal{G}_{T+}$ непрерывна справа, расширена и обладает минимальным свойством в том смысле, что $\mathcal{G}_{t+} \subseteq \mathcal{H}_t, \forall t \in T$ для любой расширенной, непрерывной справа фильтрации $\{\mathcal{H}_t \mid \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t, \forall t \in T\}$.*

Идея доказательства. □

Определение 12.5. Случайный процесс называется *согласованным* с фильтрацией, если для любого t случайный вектор X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$.

Определение 12.6. Фильтрация $\mathcal{F}_T^{(X)}, \mathcal{F}_t^{(X)} = \sigma(X_s, s \leq t)$ называется *естественной фильтрацией* случайного процесса X.

Определение 12.7. Фильтрация $\mathcal{G}_T^{(X)}, \mathcal{G}_t^{(X)} = \sigma(\mathcal{F}_t^{(X)}, \mathcal{N})$ называется *расширенной естественной фильтрацией* случайного процесса X.

Случайный процесс согласован с каждой из своих естественных фильтраций. Если вспомнить, что мы привыкли интерпретировать T как время, то $\mathcal{F}_t^{(X)}$ содержит информацию о поведении процесса вплоть до времени $t \in T$.

Теорема 12.8. *Если случайный процесс с выпуклым множеством T непрерывен слева, то его естественные фильтрации $\mathcal{F}_T^{(X)}, \mathcal{G}_T^{(X)}$ тоже непрерывны слева.*

Идея доказательства. □

Теорема 12.9. *Если случайный процесс с выпуклым множеством T стохастически непрерывен слева, то его расширенная естественная фильтрация $\mathcal{G}_T^{(X)}$ тоже непрерывна слева.*

Идея доказательства. □

13 Марковские моменты (3.6.1 - 3.6.7)

Определение 13.1. Функция $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется F_T*-марковским моментом* или *марковским моментом относительно фильтрации* F_T, если $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T$.

Пример 13.1.1. Функция, тождественная равная $u \in T$, является марковским моментом, потому что множество $\{\tau \le t\}$ либо $\emptyset$, либо Ω, а оба они лежат в любой сигма-алгебре.

Теорема 13.2. *Если τ - марковский момент, то $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T$.*

Идея доказательства. □

Теорема 13.3. *Пусть множество T - счётное. Тогда функция τ является марковским моментом $\iff \{\tau = t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in T$.*

Идея доказательства. □

Теорема 13.4. *Функция τ является марковским моментом относительно непрерывной справа фильтрации с выпуклым множеством $T \iff \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T$ и $\{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$, если $t^* \in T$.*

Идея доказательства. □

Теорема 13.5. *Пусть $\tau, \sigma : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Если τ - марковский момент относительно расширенной фильтрации F_t и почти всюду $\tau = \sigma$, то σ - марковский момент относительно F_t.*

Идея доказательства. □

Теорема 13.6. *Если τ - марковский момент, то функция $\tau \wedge t$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.*

Идея доказательства. □

Теорема 13.7. *Если τ, σ - марковские моменты, то $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma$ - тоже марковские моменты.*

Идея доказательства. □

14 Сигма-алгебры, связанные с марковскими моментами (3.6.8 - 3.6.9)

Определение 14.1. С каждым F_T-марковским моментом τ связаны две σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ и $\mathcal{F}_{\tau-}$.
Сигма-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ состоит из множеств $A \in \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$, для которых $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Она называется *сигма-алгеброй событий, предшествующих марковскому моменту τ.*

Сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau-}$ порождается множествами $A \cap \{t < \tau\}, A \in \mathcal{F}_t$. Если дополнительно $t_* \in T$, то к классу порождающих множеств добавляются ещё все множества $A \in \mathcal{F}_{t_*}$.

Теорема 14.2. *Пусть τ, σ - марковские моменты. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.
2. $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$ *при* $\tau \le \sigma$.
3. $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.
4. $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$ *при* $\tau < \sigma$.
5. $\{\tau \le \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$
   $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.
6. *Если* $A \in \mathcal{F}_\tau$, *то* $A \cap \{\tau \le \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$.
7. *Если* $A \in \mathcal{F}_\tau$, *то* $A \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.

Идея доказательства. □

15 Измеримость марковских моментов и другие из свойства (3.6.10 - 3.6.15)

Теорема 15.1. *Любой марковский момент τ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$.*

Идея доказательства. □

Теорема 15.2. *Пусть дан марковский момент τ и $\mathcal{F}_\tau$-измеримая функция $\sigma : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Тогда:*

1. *Если* $\tau \le \sigma$, *то* σ *- марковский момент.*
2. $\forall A \in \mathcal{F}_\tau$ *функция* $\tau_A = \tau\mathbf{1}_A + \infty\mathbf{1}_{A^c}$ *является марковским моментом.*

Идея доказательства. □

Теорема 15.3. *Для любого марковского момента τ относительно фильтрации F_T с выпуклым множеством T существуют такие марковские моменты τ_n, что каждый из них принимает конечное число значений и $\tau_n \downarrow \tau$.*

Идея доказательства. □

Теорема 15.4. *Пусть дана последовательность марковских моментов $\{\tau_n\}$. Если она убывает и $\forall \omega \in \Omega$ найдётся номер m, начиная с которого все $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$, то функция $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ является марковским моментом.*

Идея доказательства. ☐

Теорема 15.5. *Пусть даны марковские моменты τ_n. Если $\forall t_n \in T \sup_{n\to\infty} t_n \in T \cup \{\infty\}$, то $\tau = \sup_{n\to\infty} \tau_n$ - марковский момент и $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.*

Идея доказательства. ☐

Теорема 15.6. *Пусть даны марковские моменты τ_n относительно фильтрации F_T. Если фильтрация непрерывна справа, а $T = 1, 2, \dots$ или $T = [a, b]$, или $T = [a, \infty)$, то функции*

$$\limsup \tau_n, \liminf \tau_n, \sup \tau_n, \inf \tau_n, n \to \infty$$

являются марковскими моментами и $\mathcal{F}_{\inf \tau_n} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}$.

Идея доказательства. ☐

16 Предсказуемые марковские моменты (3.7.1 - 3.7.7)

Теперь у нас $T = [0, \infty)$ и фильтрация $\mathrm{F} = \{\mathcal{F}_t \mid \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Соответственно, все марковские моменты берутся относительно этой фильтрации, теперь это функции вида $\tau : \Omega \to \overline{R}_+$.

Определение 16.1. Марковский момент называется *предсказуемым*, если $\exists \tau_n \uparrow, \tau_n < \tau$ на множестве $\{\tau > 0\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Сама последовательность называется *предвещающей*.

Дальше идут три примера:

1. $\forall \alpha \geq 0, A \in \mathcal{F}_\alpha : \tau = \alpha \mathbf{1}_A + \infty \mathbf{1}_{A^c}$ - предсказуемый марковский момент. Марковский момент - потому что теорема в предыдущем билете, предсказуемый - потому что если $\alpha > 0$, то есть $\alpha_n \uparrow$ такая, что $\alpha_n \to \alpha$, ну и предвещающей последовательностью берём $\{\tau_n \wedge n\}$, где $\tau_n = \alpha_n \mathbf{1}_A + \infty \mathbf{1}_{A^c}$. А если $\alpha = 0$, то возьмём $\{\tau_A \wedge n\}$.

2. Сумма $\tau + \sigma$, где τ - марковский момент, а σ - предсказуемый марковский момент, является предсказуемым марковским моментом. В качестве предвещающей последовательности берём $\{\tau + \sigma_n\}$, где σ_n - предвещающая последовательность для σ. Каждая из таких сумм - марковский момент, потому что была такая задача в предыдущем параграфе, причём без решения, так что, видимо, просто потому что.

3. X - случайный процесс: F-согласованный, непрерывный, вещественный (нашедший своё место в жизни, самореализовавшийся, семья, дети, все дела. Кто-нибудь помнит, что эти слова вообще значат?). Тогда $\forall c \in R : \tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq c\}$ - предсказуемый марковский момент. Потому что, бл*ть, гладиолус, дальше на страницу чё-то расписано, но сводится к тому, что предвещающая последовательность - $\{\tau_n \wedge n\}$, где $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq c - \frac{1}{n}\}$.

Настало время теорем. Особенно неожиданным результатом кажется первое утверждение следующей теоремы.

Теорема 16.2. *Предсказуемый марковский момент является марковским моментом;* $\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$ *для любой предвещающей последовательности* τ_n.

Идея доказательства. □

Теорема 16.3. *Пусть* τ, σ *- предсказуемые марковские моменты. Тогда:*

1. $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma$ *- предсказуемые марковские моменты.*
2. $\{\tau \le \sigma\}, \{\tau < \sigma\}, \{\tau \ge \sigma\}, \{\tau > \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.
3. $A \cap \{\tau \le \sigma\}, A \cap \{\tau < \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$ *для любого* $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$

Идея доказательства. □

Теорема 16.4. *Пусть даны предсказуемые марковские моменты* τ_n.

1. *Если* $\tau_n \uparrow$, *то* $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ *- предсказуемый марковский момент.*
2. *Если* $\tau_n \downarrow$ *и для любого* $\omega \in \Omega$ *найдётся номер* m, *начиная с которого* $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$, *то* $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ *- предсказуемый марковский момент.*

Идея доказательства. □

Теорема 16.5. *Пусть* τ *- предсказуемый марковский момент. Тогда* $\forall A \in \mathcal{F}_{\tau-}$ *функция* $\tau_A = \tau \mathbf{1}_A + \infty \mathbf{1}_{A^c}$ *- предсказуемый марковский момент.*

Идея доказательства. □