Mecánica Cuántica 1

Tarea # 9

Solución

Problema # 16

Tenemos un pozo infinito con dos partículas, por ende, el hamiltoniano es

$$H = H_1 + H_2$$

Los estados propios de cada partícula son $|\varphi^1_n\rangle$ y $|\varphi^2_q\rangle$ con energías $n^2\xi$ y $q^2\xi$ respectivamente $\left(\xi = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)$.

a) Los estados propios serán $|\varphi^1_n \varphi^2_q\rangle \equiv |n\, q\rangle$.

Los valores propios serán $\epsilon_{nq} = (n^2+q^2)\xi$

Como se trata de un pozo infinito, los niveles más bajos de energía son

$\epsilon_{11} = 2\xi$ con deg. $g_{11} = 1$

$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 5\xi \Rightarrow g_{12} = 2$

+0,2

b)

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|22\rangle$$

α) $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\epsilon_{11}t/\hbar}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\epsilon_{12}t/\hbar}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\epsilon_{21}t/\hbar}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\epsilon_{22}t/\hbar}|22\rangle$

β) Podemos encontrar:

$\epsilon_{11} = 2\xi \to P = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{6}$

$\epsilon_{12} = 5\xi \to P = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\epsilon_{22} = 8\xi \to P = \frac{1}{3}$

+0,2

γ) $\epsilon_1 = \xi \to P = 1/6 + 1/3 = 1/2$

$\epsilon_2 = 4\xi \to P = 1/6 + 1/3 = 1/2$

c) α) $\underbrace{(a_1|1\rangle + b_1|2\rangle}_{\text{Part 1}} \otimes \underbrace{a_2|1\rangle + b_2|2\rangle)}_{\text{Part. 2}} = |\chi\rangle$

+0,2

$|\chi\rangle = a_1a_2|11\rangle + a_1b_2|12\rangle + b_1a_2|21\rangle + b_1b_2|22\rangle$

$a_1a_2 = 1/\sqrt{6}$; $a_1b_2 = 1/\sqrt{3}$; $b_1a_2 = 1/\sqrt{6}$; $b_1b_2 = 1/\sqrt{3}$

$a_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow a_1b_2 = 1/\sqrt{3} \Rightarrow b_2 = \sqrt{2/3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{1/3}$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle)$, un estado producto tensorial.

Si S_1 es el subespacio de dim2 de la primera partícula y S_2 el de la segunda, el espacio de ambas se denomina $S = S_1 \otimes S_2$. Si $S_1 = \text{span}(|1\rangle, |2\rangle) = S_2 \Rightarrow$ una base de S será $B = \{|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$. Para que un estado "sea" un producto tensorial (pertenezca a S), debe ser una combinación lineal de los elementos en B, por ende, el estado $|\Psi(0)\rangle \in S$.

En In[2] se calculan las cantidades:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{5}{2}\xi \; ; \; \langle H_2 \rangle = 3\xi \; ; \; \langle H_1 H_2 \rangle = \frac{15}{2}\xi^2 ; \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle = \frac{15}{2}\xi^2 .$$

El hecho de que $\langle H_1 H_2 \rangle = \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle$ refleja que $|\Psi(0)\rangle$ "es" un producto tensorial.

β) Estas cantidades permanecen invariantes cuando tomamos $|\Psi(t)\rangle$, como se muestra en In[3].

d) Tomamos ahora

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|11\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle$$

+0,2

Note que este vector no lo podemos expresar en la forma de $|\chi\rangle$, ya que falta $|22\rangle$. Este estado podría verse como una combinación lineal de los elementos de B con $c_{22} = 0$, pero la alta correlación entre los c_{ij} (a_i, b_j) nos muestra que ni aún así podemos asegurar que sea un estado prod. tensorial.

En In[4] vemos que

$$\langle H_1 \rangle = \frac{8}{5}\xi \; ; \langle H_2 \rangle = \frac{14}{5}\xi \; ; \langle H_1 H_2 \rangle = \frac{112}{25}\xi^2 \; ; \; \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle = \frac{17}{5}\xi^2 .$$

En este caso $\langle H_1 H_2 \rangle \neq \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle$, ya que $|\Psi(0)\rangle$ NO es un estado prod. tens.

Cuando tomamos $|\Psi(t)\rangle$ obtenemos los mismos resultados (In[5]). Esto es debido a que tenemos una combinación lineal de estados propios de H.

e. En In[7] se calculan los resultados. Note que en el primer caso $\rho = \rho(1) \otimes \rho(2)$, ya que ese $|\Psi(0)\rangle$ es prod. tens. En el segundo caso, $\rho \neq \rho(1) \otimes \rho(2)$ porque $|\Psi(0)\rangle$ no es p.t. ρ muestra la correlación existente entre las partículas 1 y 2, mientras $(\rho(1) \otimes \rho(2))$ no lo hace.

El In[8] muestra los resultados.

+0,2

PROBLEMA #1

Recordemos las fórmulas para spin en una dirección arbitraria:

La matriz de spin es

$\vec{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_1 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \sigma_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \sigma_3\cos\theta)$, de donde vemos que los valores propios son $\lambda_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}$.

Los estados propios son

$$|\chi_n^+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2 \, e^{i\varphi}\end{pmatrix} ; \quad |\chi_n^-\rangle = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \, e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

a) Si el estado inicial es $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$ y medimos S_x $(\theta = \pi/2 ; \varphi = 0)$ obtendremos $S^x_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}$, con probabilidades

+0,3

$$|\langle\chi_x^+|+\rangle|^2 = 1/2$$
$$|\langle\chi_x^-|+\rangle|^2 = 1/2$$

b) Si tenemos $H = \gamma\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{\gamma B_0\hbar}{2} S_y$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$$

+0,3

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0}{2}\begin{pmatrix} -b \\ a\end{pmatrix}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma B_0}{2} b ; \quad \frac{db}{dt} = \frac{\gamma B_0}{2} a \Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{-\frac{2}{\gamma B_0}\frac{da}{dt}\right\} = \frac{\gamma B_0}{2} a$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left\{\frac{\gamma B_0}{2}\right\}^2 a \Rightarrow a = A\cos\omega t + B\sin\omega t ; \quad \omega \equiv \frac{\gamma B_0}{2}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{\omega}\left\{-A\omega \operatorname{sen}\omega t + B\omega\cos\omega t\right\} = A\operatorname{sen}\omega t - B\cos\omega t$$

$$b(0) = 0 = A\cancel{\operatorname{sen}(0)}^{0} - \cancel{B}^{0}\cancel{\cos(0)}^{1} ; \quad a(0) = 1 = \cancel{A}^{1}\cancel{\cos(0)}^{1} + \cancel{B}^{0}\cancel{\operatorname{sen}(0)}^{0}$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \operatorname{sen}\omega t\end{pmatrix} = \cos\omega t\,|+\rangle + \operatorname{sen}\omega t\,|-\rangle$$

+0,4

c) Es claro que en los tres casos obtendremos $\pm\frac{\hbar}{2}$.

En In[10] se muestran las probabilidades. Si $\omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow \frac{\gamma B_0}{2} = \frac{2\pi}{t}$

$\Rightarrow B_0 = \frac{4\pi}{\gamma t}$, por ejemplo, la medición de S_z será $+\frac{\hbar}{2}$ con 100% de seguridad.

En general, el periodo de la precesión será $T = \frac{4\pi}{\gamma B_0}$ y en nT (entero) habrá mediciones "seguras".

Sol_HW_9

May 13, 2018

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing()
from IPython.display import display
from sympy.physics.matrices import msigma
from sympy.physics.quantum.dagger import Dagger
from sympy.physics.quantum import Ket, Bra
from sympy.physics.quantum.state import Wavefunction
from sympy.physics.quantum import TensorProduct as TP
```

1 Problema 16

In [2]:
```
z = symbols('xi', real=True, positive=True)
Ket_1 = Matrix([[1],[0]])
Ket_2 = Matrix([[0],[1]])
Ket_11 = TP(Ket_1,Ket_1)
Ket_12 = TP(Ket_1,Ket_2)
Ket_21 = TP(Ket_2,Ket_1)
Ket_22 = TP(Ket_2,Ket_2)
psi_0_B=1/sqrt(6) *Ket_11 + 1/sqrt(3)* Ket_12 + 1/sqrt(6) *Ket_21 + 1/sqrt(3) * Ket_22

def E(n,q):
    return (n**2 + q**2)*z
H1 = Matrix([[E(1,0),0],[0,E(2,0)]])
H1_TP = TP(H1,eye(2))
H2 = Matrix([[E(0,1),0],[0,E(0,2)]])
H2_TP = TP(eye(2),H2)
def do_HW(psi):
    avg_H1 = Dagger(psi)*H1_TP*psi
    display('avg_H1', avg_H1)
    avg_H2 = Dagger(psi)*H2_TP*psi
    display('avg_H2', avg_H2)
    display('avg_H1*avg_H2', avg_H1*avg_H2)
    avg_H1H2 = Dagger(psi)*TP(H1,H2)*psi
    display('avg_H1H2', avg_H1H2)
do_HW(psi_0_B)
#Como el estado psi_0 es un producto tensorial, los valores esperados son iguales.
```

```
'avg_H1'
```

$$\left[\frac{5\xi}{2}\right]$$

'avg_H2'

$$\left[3\xi\right]$$

'avg_H1*avg_H2'

$$\left[\frac{15\xi^2}{2}\right]$$

'avg_H1H2'

$$\left[\frac{15\xi^2}{2}\right]$$

In [3]:
```
t,h = symbols('t hbar', real=True, positive=True)
t_vec_B = Matrix([[exp(-I*E(1,1)*t/h)],[exp(-I*E(1,2)*t/h)],[exp(-I*E(2,1)*t/h)],[exp(-I
psi_t=t_vec_B.multiply_elementwise(psi_0_B)
do_HW(psi_t)
#Es claro que es igual a cuando el ket no depende del tiempo.
```

'avg_H1'

$$\left[\frac{5\xi}{2}\right]$$

'avg_H2'

$$\left[3\xi\right]$$

'avg_H1*avg_H2'

$$\left[\frac{15\xi^2}{2}\right]$$

'avg_H1H2'

$$\left[\frac{15\xi^2}{2}\right]$$

```
In [4]: psi_0_D=1/sqrt(5) *Ket_11 + sqrt(3)/sqrt(5)* Ket_12 + 1/sqrt(5) *Ket_21
        do_HW(psi_0_D)
        #Como en este caso no se trata de un estado producto tensorial, el producto de los valor
```

'avg_H1'

$$\left[\frac{8\xi}{5}\right]$$

'avg_H2'

$$\left[\frac{14\xi}{5}\right]$$

'avg_H1*avg_H2'

$$\left[\frac{112\xi^2}{25}\right]$$

'avg_H1H2'

$$\left[\frac{17\xi^2}{5}\right]$$

```
In [5]: psi_t_D = t_vec_B.multiply_elementwise(psi_0_D)
        do_HW(psi_t_D)
```

'avg_H1'

$$\left[\frac{8\xi}{5}\right]$$

'avg_H2'

$$\left[\frac{14\xi}{5}\right]$$

'avg_H1*avg_H2'

$$\left[\frac{112\xi^2}{25} \right]$$

'avg_H1H2'

$$\left[\frac{17\xi^2}{5} \right]$$

```
In [6]: def do_HW_2(psi,t_vec=t_vec_B):
            rho_0 = psi*Dagger(psi)
            display('rho_0',rho_0)
            psi_t = t_vec.multiply_elementwise(psi)
            rho_t = psi_t*Dagger(psi_t)
            display('rho_t',rho_t)
            one_kets = [Ket_1, Ket_2]
            two_kets = [Ket_1, Ket_2]
            rho_1 = MutableMatrix(zeros(2))
            for n in range(2):
                for np in range(2):
                    summ=0
                    for p in range(2):
                        summ += (Dagger(TP(one_kets[n],two_kets[p]))*rho_0*TP(one_kets[np],two_k
                    rho_1[n,np]=summ
            display('rho_1',rho_1)

            rho_2 = MutableMatrix(zeros(2))
            for p in range(2):
                for pp in range(2):
                    summ=0
                    for n in range(2):
                        summ += (Dagger(TP(one_kets[n],two_kets[p]))*rho_0*TP(one_kets[n],two_ke
                    rho_2[p,pp] = summ
            display('rho_2',rho_2)
            display('rho1 x rho_2',TP(rho_1,rho_2))
            display('rho1 x rho_2 == rho_0',TP(rho_1,rho_2)==rho_0)

In [7]: do_HW_2(psi_0_B)
```

'rho_0'

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

'rho_t'

$$\left[\begin{matrix}\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} e^{\frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{1}{6} e^{\frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{\sqrt{2}}{6} e^{\frac{6i}{\hbar} t \xi}\\\frac{\sqrt{2}}{6} e^{- \frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} e^{\frac{3i}{\hbar} t \xi}\\\frac{1}{6} e^{- \frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} e^{\frac{3i}{\hbar} t \xi}\\\frac{\sqrt{2}}{6} e^{- \frac{6i}{\hbar} t \xi} & \frac{1}{3} e^{- \frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{\sqrt{2}}{6} e^{- \frac{3i}{\hbar} t \xi} & \frac{1}{3}\end{matrix}\right]$$

'rho_1'

$$\left[\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

'rho_2'

$$\left[\begin{matrix}\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3}\end{matrix}\right]$$

'rho1 x rho_2'

$$\left[\begin{matrix}\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3}\end{matrix}\right]$$

'rho1 x rho_2 == rho_0'

True

```
In [8]: do_HW_2(psi_0_D)
```

'rho_0'

$$\left[\begin{matrix}\frac{1}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{1}{5} & 0\\\frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} & 0\\\frac{1}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{1}{5} & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right]$$

'rho_t'

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5}e^{\frac{3i}{\hbar}t\xi} & \frac{1}{5}e^{\frac{3i}{\hbar}t\xi} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{5}e^{-\frac{3i}{\hbar}t\xi} & \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} & 0 \\ \frac{1}{5}e^{-\frac{3i}{\hbar}t\xi} & \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

'rho_1'

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

'rho_2'

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

'rho1 x rho_2'

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{25} & \frac{4\sqrt{3}}{25} & \frac{2}{25} & \frac{\sqrt{3}}{25} \\ \frac{4\sqrt{3}}{25} & \frac{12}{25} & \frac{\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{\sqrt{3}}{25} & \frac{2}{25} & \frac{\sqrt{3}}{25} \\ \frac{\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{25} & \frac{\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix}$$

'rho1 x rho_2 == rho_0'

False

2 Problema 1

```
In [9]: th, phi, w = symbols('theta phi omega', real=True)
        chi_n_up = Matrix([[cos(th/2)],[sin(th/2)*exp(I*phi)]])
        chi_n_dn = Matrix([[sin(th/2)],[-cos(th/2)*exp(I*phi)]])
        sx_up = chi_n_up.subs(th,pi/2).subs(phi,0)
        sx_dn = chi_n_dn.subs(th,pi/2).subs(phi,0)
        sy_up = chi_n_up.subs(th,pi/2).subs(phi,pi/2)
        sy_dn = chi_n_dn.subs(th,pi/2).subs(phi,pi/2)
        sz_up = Matrix([[1],[0]])
        sz_dn =Matrix([[0],[1]])
        display('Px+', abs(Dagger(sx_up)*sz_up)**2)
        display('Px-', abs(Dagger(sx_dn)*sz_up)**2)
```

'Px+'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

'Px-'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

```
In [10]: psi_t = cos(w*t)*sz_up + sin(w*t)*sz_dn
         display('sx=+h/2',abs(Dagger(sx_up)*psi_t)**2)
         display('sx=-h/2',abs(Dagger(sx_dn)*psi_t)**2)
         display('sy=+h/2',abs(Dagger(sy_up)*psi_t)**2)
         display('sy=-h/2',abs(Dagger(sy_dn)*psi_t)**2)
         display('sz=+h/2',abs(Dagger(sz_up)*psi_t)**2)
         display('sz=-h/2',abs(Dagger(sz_dn)*psi_t)**2)
```

'sx=+h/2'

$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega t\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\omega t\right)\right)^2\right]$$

'sx=-h/2'

$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega t\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\omega t\right)\right)^2\right]$$

'sy=+h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\sin^2\left(\omega t\right) + \frac{1}{2}\cos^2\left(\omega t\right)\right]$$

'sy=-h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\sin^2\left(\omega t\right) + \frac{1}{2}\cos^2\left(\omega t\right)\right]$$

'sz=+h/2'

$$\left[\cos^2\left(\omega t\right)\right]$$

'sz=-h/2'

$$\left[\sin^{2}\left(\omega t\right)\right]$$

```
In [11]: T=2*pi/w
         n=4
         display('sx=+h/2',abs(Dagger(sx_up)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
         display('sx=-h/2',abs(Dagger(sx_dn)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
         display('sy=+h/2',abs(Dagger(sy_up)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
         display('sy=-h/2',abs(Dagger(sy_dn)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
         display('sz=+h/2',abs(Dagger(sz_up)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
         display('sz=-h/2',abs(Dagger(sz_dn)*psi_t.subs(t,n*T))**2)
```

'sx=+h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

'sx=-h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

'sy=+h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

'sy=-h/2'

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

'sz=+h/2'

$$\left[1\right]$$

'sz=-h/2'

$$\left[0\right]$$