Sol_HW_2

February 9, 2018

1 Mecánica Cuántica 1 -201810

1.1 Tarea # 2 - Solución

Elaborada por Daniel Forero.

```
In [1]: from sympy import *
        init_printing()
```

1.2 Problema 2.1

Recordemos la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

Y definimos $\mu^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$.

```
In [2]: xi, ki, om, mu=\
        symbols('x_i k_i omega mu',real=True)
        h,m,c,t = symbols('hbar m c t', real=True,\
                              positive=True,polar=True)
        psi = exp(-I*(ki*xi-om*t))
        laplace = Derivative(psi,xi,xi)
        eq = Equality((1/c**2)*Derivative(psi,t,t)-\
                          laplace - mu**2*psi).doit()
        condition = simplify(factor(eq))
        condition
```

```
Out[2]:
```

$$\frac{1}{c^2}\left(c^2k_i^2 - c^2\mu^2 - \omega^2\right)e^{i(-k_ix_i+\omega t)} = 0$$

De la anterior celda entendemos que

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0$$

Esta expresión es equivalente a

$$p^2c^2 + m^2c^4 = E^2,$$

es decir, la relación momento-energía relativista debe satisfacerse para que $\psi = \exp(-i(k_i x_i - \omega t))$ sea solución. Más generalmente una combinación de funciones de este tipo para todo k formará el campo de Klein-Gordon que posteriormente se utilizará para describir partículas de spin 0.

Es además claro que fue necesario tomar $p = \hbar k$ y $E = \hbar\omega$.

```
In [3]: disp_rel =simplify(solve(condition,om)[-1])[0]
        group_v = simplify(diff(expand(disp_rel),ki))
        group_v
```

```
Out[3]:
```

$$\frac{ck_i}{\sqrt{k_i^2 - \mu^2}}$$

Entonces, la velocidad de grupo es

$$v_g = \frac{ck}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} = \frac{ck}{\omega}.$$

Por otro lado, la velocidad de fase es

$$v_p = \frac{\omega}{k}.$$

PS. El problema hubiera sido más sencillo recordando las condiciones de primera cuantización:

$$E \rightarrow\sim \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p \rightarrow\sim -\hbar\nabla.$$

De hecho, la ecuación de KG es el primer acercamiento a ecuaciones de onda relativistas y viene de, precisamente, realizar "primera cuantización" en la relación energía-momentum relativista.

1.3 Problema 2.3

Tenemos la representación de momentum

$$\langle p|\psi\rangle = \varphi(p) = \frac{1}{(\pi\sigma^2\hbar^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right).$$

Para obtener la representación de posición $\langle x|\psi\rangle = \phi(x)$ tomamos la transformada de Fourier, para evitar ambiguedades la definimos de la forma usual:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p = \hbar k = 2\pi\hbar\nu) \exp(2\pi i\nu x) d\nu.\ 2\pi\nu = k.$$

Con esta formulación de la transformada no se tiene unitareidad, por lo que es necesario volver a normalizarla.

```
In [4]: p, p0,nu,x,k = symbols('p p_0 nu x k',\
                               real=True)
        s = Symbol('sigma', real=True, \
                   positive=True)
```

```
mom_repr = nsimplify(1./(pi*s**2*h**2)**(1./4)\
                    * exp(-(p-p0)**2/(2*s**2*h**2)))
mom_repr
pos_repr = \
inverse_fourier_transform(mom_repr.subs(p, \
                                    2*pi*nu*h), nu,x)
norm = \
simplify(integrate(pos_repr*conjugate(pos_repr),\
                   (x,-oo,oo),conds='none'))
pos_repr*=1/sqrt(norm)
simplify(pos_repr)
```

Out[4]:

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x}{2\hbar}\left(\hbar\sigma^2 x - 2ip_0\right)}$$

Ahora se debe calcular la varianza de la variable $\lambda = x, p$ según

$$\Delta\lambda^2 = \int \lambda^2 |\phi(\lambda)|^2 d\lambda$$

y comprobar que

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

```
In [5]: delta_p_sq = integrate(p**2 * mom_repr*\
                               conjugate(mom_repr),\
                               (p,-oo,oo),conds='none')
        re(delta_p_sq)
```

Out[5]:

$$\frac{\hbar^2\sigma^2}{2} + p_0^2$$

```
In [6]: delta_x_sq = integrate(x**2 * pos_repr*\
                               conjugate(pos_repr),\
                               (x,-oo,oo),conds='none')
        re(delta_x_sq)
```

Out[6]:

$$\frac{1}{2\sigma^2}$$

```
In [7]: simplify(Abs(delta_p_sq.subs(p0,0)*delta_x_sq))
```

Out[7]:

$$\frac{\hbar^2}{4}$$

Entonces, vemos que el paquete de onda gaussiano cumple con la relación de incertidumbre.

Ahora bien, para la siguiente parte debemos hacer que el estado $|\psi\rangle$ evolucione en el tiempo, para lo cual debemos, como es usual, aplicar el operador de evolución temporal, definido como $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$, siendo $H = \frac{p^2}{2m}$ el hamiltoniano. Ya que estamos en representación de momentum (inicialmente), y tratamos partículas libres. Tenemos que el paquete de onda en un tiempo t será

$$\varphi(p,t) = U(t)\varphi(p) = \exp\left(-i\frac{p^2t}{2m\hbar}\right)\varphi(p)$$

In [8]:
```
mom_repr = \
nsimplify(simplify(exp(-I*p**2*t/(2*m*h))\
                   *1./(pi*s**2*h**2)**(1./4)\
                   * exp(-(p-p0)**2/(2*s**2*h**2))))
mom_repr
pos_repr = \
inverse_fourier_transform(mom_repr.subs(p,\
                                   2*pi*nu*h), \
                          nu,x, noconds=True)
re(conjugate(pos_repr)*pos_repr)
norm = \
simplify(integrate(re(conjugate(pos_repr)\
                    *pos_repr),(x,-oo,oo),conds='none'))
#simplify(Abs(norm))
pos_repr*=1/sqrt(norm)
pos_repr=simplify(cancel(pos_repr))
```

In [9]:
```
delta_x_sq = \
integrate(x**2 * re(cancel(pos_repr\
                     *conjugate(pos_repr))),\
          (x,-oo,oo),conds='none')
collect(simplify(delta_x_sq),t)
```

Out[9]:

$$t^2\left(\frac{\hbar^2\sigma^2}{2m^2} + \frac{p_0^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2\sigma^2}$$

De esta forma vemos que se obtiene la expresión deseada (si tomamos $p_0 = 0$. En general tenemos

$$\Delta x^2(t) = t^2\left(\frac{\hbar^2\sigma^2}{2m^2} + \frac{p_0^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Que era lo que se quería demostrar.