Mecánica Cuántica 1

Tarea # 9

Solución

Problema #16

Tenemos un pozo infinito con dos partículas, por ende, el hamiltoniano es

$$H = H_1 + H_2$$

Los estados propios de cada partícula son $|\varphi^1_n\rangle$ y $|\varphi^2_q\rangle$ con energías $n^2\xi$ y $q^2\xi$ respectivamente $\left(\xi = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)$.

a) Los estados propios serán $|\varphi^1_n \varphi^2_q\rangle \equiv |n\, q\rangle$.

Los valores propios serán $\epsilon_{nq} \equiv (n^2+q^2)\xi$

Como se trata de un pozo infinito, los niveles más bajos de energía son

$\epsilon_{11} = 2\xi$ con deg. $g_{11} = 1$

$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 5\xi \Rightarrow g_{12} = 2$

+0,2

b)

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|22\rangle$$

α) $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i\epsilon_{11}t}{\hbar}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i\epsilon_{12}t}{\hbar}}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i\epsilon_{21}t}{\hbar}}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i\epsilon_{22}t}{\hbar}}|22\rangle$

β) Podemos encontrar:

$\epsilon_{11} = 2\xi \rightarrow P = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{6}$

$\epsilon_{12} = 5\xi \rightarrow P = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\epsilon_{22} = 8\xi \rightarrow P = \frac{1}{3}$

+0,2

γ) $\epsilon_1 = \xi \rightarrow P = 1/6 + 1/3 = 1/2$

$\epsilon_2 = 4\xi \rightarrow P = 1/6 + 1/3 = 1/2$

c) α) $\underbrace{(a_1|1\rangle + b_1|2\rangle}_{\text{Part 1}} \otimes \underbrace{a_2|1\rangle + b_2|2\rangle)}_{\text{Part. 2}} = |\chi\rangle$

+0,2

$|\chi\rangle = a_1a_2|11\rangle + a_1b_2|12\rangle + b_1a_2|21\rangle + b_1b_2|22\rangle$

$a_1a_2 = 1/\sqrt{6}$; $a_1b_2 = 1/\sqrt{3}$; $b_1a_2 = 1/\sqrt{6}$; $b_1b_2 = 1/\sqrt{3}$

$a_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow a_1b_2 = 1/\sqrt{3} \Rightarrow b_2 = \sqrt{2/3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{1/3}$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle)$, un estado producto tensorial.

Si S_1 es el subespacio de dim2 de la primera partícula y S_2 el de la segunda, el espacio de ambas se denomina $S = S_1 \otimes S_2$. Si $S_1 = \text{span}(|1\rangle, |2\rangle) = S_2 \Rightarrow$ una base de S será $B = \{|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$. Para que un estado "sea" un producto tensorial (pertenezca a S), debe ser una combinación lineal de los elementos en B, por ende, el estado $|\Psi(0)\rangle \in S$.

En In [2] se calculan las cantidades:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{5}{2}\xi \; ; \; \langle H_2 \rangle = 3\xi \; ; \; \langle H_1 H_2 \rangle = \frac{15}{2}\xi^2 ; \; \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle = \frac{15}{2}\xi^2.$$

El hecho de que $\langle H_1 H_2 \rangle = \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle$ refleja que $|\Psi(0)\rangle$ "es" un producto tensorial.

β) Estas cantidades permanecen invariantes cuando tomamos $|\Psi(t)\rangle$, como se muestra en In[3].

d) Tomamos ahora

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|11\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|12\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle$$

+0,2

Note que este vector no lo podemos expresar en la forma de $|\chi\rangle$, ya que falta $|22\rangle$. Este estado podría verse como una combinación lineal de los elementos de B con $c_{22} = 0$, pero la alta correlación entre los c_{ij} (a_i, b_j) nos muestra que ni aún así podemos asegurar que sea un estado prod. tensorial.

En In[4] vemos que

$$\langle H_1 \rangle = \frac{8}{5}\xi \; ; \langle H_2 \rangle = \frac{14}{5}\xi \; ; \langle H_1 H_2 \rangle = \frac{112}{25}\xi^2 \; ; \; \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle = \frac{17}{5}\xi^2.$$

En este caso $\langle H_1 H_2 \rangle \neq \langle H_1 \rangle \langle H_2 \rangle$, ya que $|\Psi(0)\rangle$ NO es un estado prod. tens.

Cuando tomamos $|\Psi(t)\rangle$ obtenemos los mismos resultados (In[5]). Esto es debido a que tenemos una combinación lineal de estados propios de H.

e. En In[7] se calculan los resultados. Note que en el primer caso $\rho = \rho(1) \otimes \rho(2)$, ya que ese $|\Psi(0)\rangle$ es prod. tens. En el segundo caso, $\rho \neq \rho(1) \otimes \rho(2)$ porque $|\Psi(0)\rangle$ no es p.t. ρ muestra la correlación existente entre las partículas 1 y 2, mientras $(\rho(1) \otimes \rho(2))$ no lo hace.

El In [8] muestra los resultados.

+0,2

PROBLEMA #1

Recordemos las fórmulas para spin en una dirección arbitraria:

La matriz de spin es

$\vec{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_1 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \sigma_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \sigma_3\cos\theta)$, de donde vemos que los valores propios son $\lambda_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}$.

Los estados propios son

$$|\chi_n^+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2\, e^{i\varphi} \end{pmatrix} ; \quad |\chi_n^-\rangle = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta/2 \\ -\cos\theta/2\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

a) Si el estado inicial es $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$ y medimos S_x $(\theta = \pi/2 ; \varphi = 0)$ obtendremos $S^x_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}$, con probabilidades

+0,3

$$|\langle\chi_x^+|+\rangle|^2 = 1/2$$

$$|\langle\chi_x^-|+\rangle|^2 = 1/2$$

b) Si tenemos $H = \gamma\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{\gamma B_0\hbar}{2}S_y$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$$

+0,3

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\gamma B_0}{2}\begin{pmatrix} -b \\ a\end{pmatrix}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma B_0}{2}b ; \quad \frac{db}{dt} = \frac{\gamma B_0}{2}a \Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{-\frac{2}{\gamma B_0}\frac{da}{dt}\right\} = \frac{\gamma B_0}{2}a$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left\{\frac{\gamma B_0}{2}\right\}^2 a \Rightarrow a = A\cos\omega t + B\sin\omega t ; \quad \omega \equiv \frac{\gamma B_0}{2}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{\omega}\{-A\omega\operatorname{sen}\omega t + B\omega\cos\omega t\} = A\operatorname{sen}\omega t - B\cos\omega t$$

$$b(0) = 0 = A\,\cancel{\operatorname{sen}(0)}^{\,0} - \cancel{B\cos(0)}^{\,0,\,1} ; \quad a(0) = 1 = \cancel{A\cos(0)}^{\,1,\,1} + \cancel{B\operatorname{sen}(0)}^{\,0,\,0}$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \operatorname{sen}\omega t\end{pmatrix} = \cos\omega t\,|+\rangle + \operatorname{sen}\omega t\,|-\rangle$$

+0,4

c) Es claro que en los tres casos obtendremos $\pm\frac{\hbar}{2}$.

En In[10] se muestran las probabilidades. Si $\omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow \frac{\gamma B_0}{2} = \frac{2\pi}{t}$

$\Rightarrow B_0 = \frac{4\pi}{\gamma t}$, por ejemplo, la medición de S_z será $+\frac{\hbar}{2}$ con 100% de seguridad.

En general, el periodo de la precesión será $T = \frac{4\pi}{\gamma B_0}$ y en nT (entero) habrá mediciones "seguras".