MECÁNICA CUÁNTICA I

TAREA #10 (4,3 ; 4,7)

SOLUCIÓN

PROBLEMA #43

a) $\mathcal{I}_n[2]$; $\omega_0 \equiv \gamma B_0$

b) Podemos usar la fórmula para spin en dirección arbitraria. En este caso tendremos $\theta = \pi/4$, $\varphi = 0$.

$$|\chi_n^+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \pi/8 \\ \operatorname{sen} \pi/8 \end{pmatrix} ; \quad |\chi_n^-\rangle = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \pi/8 \\ -\cos \pi/8 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ v.p. $S_n = +\hbar/2$ $\qquad$ $\hookrightarrow$ $S_n = -\hbar/2$.

c) Expandimos $|-\rangle$ en la base $\{|\chi_n^\pm\rangle\}$:

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos \pi/8 \\ \operatorname{sen} \pi/8 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \pi/8 \\ -\cos \pi/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b \cos \pi/8 + a \operatorname{sen} \pi/8 &= 0 \\ b \operatorname{sen} \pi/8 - a \cos \pi/8 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b &= \operatorname{sen} \pi/8 \\ a &= -\cos \pi/8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\hbar\omega_0/2) = |b|^2 \simeq 0{,}15$$

$$P(-\hbar\omega_0/2) = |a|^2 \simeq 0{,}85$$

c) $$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t} \operatorname{sen} \pi/8 \begin{pmatrix} \cos \pi/8 \\ \operatorname{sen} \pi/8 \end{pmatrix} - \cos \pi/8 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \pi/8 \\ -\cos \pi/8 \end{pmatrix} e^{+i\omega_0 t}$$

$$\langle S_x \rangle = \langle \Psi(t) | S_x | \Psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\omega_0 t}{2} \right\}$$

El valor esperado oscila, de manera que se puede interpretar como una precesión alrededor de $\hat{x}$.

PROBLEMA #7

a) En tal base, la matriz será $S_{1y} = S_y \otimes id$

$$S_{1y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \cdot id \\ i \cdot id & 0 \end{pmatrix}$$

Los vec. prop. son

$$S_{1y} = -\frac{\hbar}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} (i, 0, 1, 0)^T ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (0, i, 0, 1)^T$$

$$S_{1y} = +\frac{\hbar}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} (-i, 0, 1, 0)^T ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -i, 0, 1)^T$$

b) Tenemos 2 bases: una es la canónica $\mathcal{E}=\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ y la otra es $\mathcal{B}=\{|+_x+_y\rangle, |+_x-_y\rangle, |-_x+_y\rangle, |-_x-_y\rangle\}$. Construimos la matriz $T=[|+_x+_y\rangle \ |+_x-_y\rangle \ |-_x+_y\rangle \ |-_x-_y\rangle]$ de tal forma que

$$T^\dagger|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle +_x+_y|\psi\rangle \\ \langle +_x-_y|\psi\rangle \\ \langle -_x+_y|\psi\rangle \\ \langle -_x-_y|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

las amplitudes de probabilidad de obtener mediciones de

S_{1x}	S_{2y}
$+\hbar/2$	$+\hbar/2$
$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
$-\hbar/2$	$+\hbar/2$
$-\hbar/2$	$-\hbar/2$.

Los valores se muestran en In[11], con las amplitudes podemos calcular la probabilidad.

Si $|\psi\rangle = (l|+\rangle + m|-\rangle)\otimes(n|+\rangle + o|-\rangle)$ tenemos que las amplitudes deben ser $\alpha = ln$, $\beta = lo$, $\delta = mo$, $\gamma = mn$.

c) Con el mismo procedimiento anterior, se obtienen los valores mostrados en In[13]. Si $|\psi\rangle$ es prod. tensorial, los coeficientes deben relacionarse de igual manera que en (b). (In[14])

d) En In[15] se calculan las probabilidades. Note que éstas son iguales, como se esperaría.

$$P_{S_{y-},b} = |\langle +_x -_y|\psi\rangle|^2 + |\langle -_x, -_y|\psi\rangle|^2$$

$$P_{S_{y-},c} = |\langle +_y -_y|\psi\rangle|^2 + |\langle -_y -_y|\psi\rangle|^2$$