MECÁNICA CUÁNTICA I

TAREA # 8 – Ej: 3, 9, 14 cap III Cohen.

Solución

PROBLEMA #3

En el código adjunto:

a)
$$\mathcal{P}(p_1,0) = 2\int_0^{p_1} \frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{N^2}\,dp \overset{[3]}{=} 1 - e^{-\frac{2p_1}{\hbar k_0}}$$

$N^2 \to \hbar k_0$

La gráfica se muestra en la celda siguiente a In[3].

+0,3

b) Hallamos $\langle p|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{ip^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}\langle p|\psi(0)\rangle$

de acá es claro que

$$|\langle p|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle p|\psi(0)\rangle|^2 \longrightarrow \text{In}[2]$$

+0,3

c) La gráfica de la forma del paquete de onda está en el In[4].

En el In[5] se calcula

$$\langle p^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} p^2\langle p|\psi\rangle\langle\psi|p\rangle\,dp = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2}$$

$$\langle p\rangle = 0 = \langle x\rangle$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} x^2\langle x|\psi\rangle\langle\psi|x\rangle\,dx = \frac{1}{k_0^2}$$

+0,4

$$\Delta x\Delta p = \sqrt{\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar \geq \frac{\hbar}{2} \to$$ Como es de esperar, ya que no se trata de un paquete de ondas gaussiano.

En el In[6] se calcula

$\Delta p(t) = \Delta p \Rightarrow$ el ancho en el esp. de momentum no cambia con el t.

$\Downarrow$

el paquete de ondas no se dispersa. $\Leftarrow$ el ancho en el espacio (x) tampoco lo hace.

PROBLEMA #9

No estoy seguro de qué tan general o correcta sea esta solución, pero fue la que se calificó como correcta.

a)

Partimos de $\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})}\, e^{i\xi(\vec{r})}$

$$\vec{J} = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi \right\} \Rightarrow J^i = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i \Psi \right\} \quad (\ast)$$

$$\partial^i \Psi = \partial^i (\sqrt{\rho})\, e^{i\xi} + \sqrt{\rho}\, \partial^i e^{i\xi}$$
$$= -\frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}}\, i \partial^i \xi\, e^{i\xi}$$

$$-i\hbar \Psi^* \partial^i \Psi = \hbar \Psi^* \left\{ +i \frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \partial^i \xi\, e^{i\xi} \right\}$$

$$= \hbar \left\{ \sqrt{\rho}\, e^{-i\xi} \right\} \left\{ +i \frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \partial^i \xi\, e^{i\xi} \right\}$$
$$= \hbar \left\{ i \partial^i \rho + \rho \partial^i \xi \right\}$$

$$\Rightarrow J^i = \frac{\hbar}{m} \rho \partial^i \xi \quad ✓ \qquad (\square)$$

+0,3

Es claro de $(\ast)$ que para obtener corrientes equivalentes $\Psi' = e^{i\theta}\Psi$, ya que $J'^i = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left\{ e^{-i\theta} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i e^{i\theta} \Psi \right\} = \frac{1}{m} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i \Psi \right\} = J^i$. ✓

θ es un parámetro global. Para la densidad tenemos que una transf. $U(1)$, hace que $\rho' = e^{-i\theta} \Psi^* e^{i\theta} \Psi = \Psi^* \Psi = \rho$. Es por esto que los conjuntos $\{ e^{i\theta} \Psi \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ son vistos como estados.

b) $\quad v^i = \frac{J^i}{\rho}$

+0,3

Un estado cuántico puede expresarse como $\Psi = \sqrt{\rho}\, e^{i\xi}$, hallamos ya que

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \xi \Rightarrow \nabla \times \vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times (\nabla \xi) = \emptyset \quad ✓$$

c) En la presencia de un campo magnético, tendremos que el lagrangiano de la partícula será

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + q \dot{x}_i A_i \; ; \; B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

Si sacamos del lagrangiano los momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

De forma que el Hamiltoniano será

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$$

(implícita

$$= (m\dot{x}_i + \cancel{qA_i})\dot{x}_i - \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - \cancel{qA_i\dot{x}_i}$$

$$= \frac{m\dot{x}_i^2}{2} = \frac{(P_i - qA_i)^2}{2m}$$ → Acople mínimo

→ vemos que solo debemos reemplazar

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

$$\Rightarrow J_0^i = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* \frac{\hbar}{i}\partial^i\Psi\right\} = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* \hat{p}^i \Psi\right\}$$

$$\Rightarrow J^i = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* (p^i - qA^i)\Psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\rho\,\partial^i\xi - \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* q A^i \Psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\rho\,\partial^i\xi - \frac{1}{m}qA^i\rho$$

$$= \frac{\rho}{m}(\hbar\partial^i\xi - qA^i) \checkmark$$

+0,4

Por ende: $\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \left\{\frac{1}{m}(\hbar\nabla\xi - q\vec{A})\right\}$

$$= -\frac{q}{m}\nabla\times\vec{A} = -\frac{q}{m}\vec{B} \checkmark$$

PROBLEMA # 14

a) Se pueden medir $E_1 = \hbar\omega_0 \rightarrow P = 1/2$

$E_2 = E_3 = 2\hbar\omega_0 \rightarrow P = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Se calculan en In[8]:

+0,2

$$\langle H \rangle = \frac{3\omega_0\hbar}{2} \quad ; \quad \Delta H = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

b) En In[9] se calcula.

Podemos escribir

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)\right)$$

Si se mide A se obtiene a con $P=1$, el estado tras la medición es el mismo.

+0,2

c) $|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{e^{-2\omega_0 t}}{2}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$ In[10]

+0,2

d) En In[11]: $\langle A\rangle_t = a$

$$\langle B\rangle_t = \frac{\sqrt{2}\,b}{4}e^{i\omega_0 t} + \frac{b}{4} + \frac{\sqrt{2}\,b}{4}e^{-i\omega_0 t}$$

$\hookrightarrow$ evidentemente, $|\Psi(t)\rangle$ no es estado propio de B

+0,2

e) Si se mide A se obtiene a, siempre (In[12])

Si se mide B:

Se obtiene $-b$ con $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{8}$

$+b$ con $P = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{5}{8}$

+0,2

Al propagarse, el estado $|\Psi(t)\rangle$ oscila entre estados propios de B. Esto ocurre en la naturaleza, por ejemplo, los neutrinos interactúan en estados propios de sabor $|\alpha\rangle$, pero se propagan en estados propios de masa $|a\rangle$, estos estados no son equivalentes $\Rightarrow$ oscilaciones de neutrinos $\rightarrow$ Nobel 2015 (creo).