MECÁNICA CUÁNTICA I - 201810

TAREA # 7 - Ej 6, 12, 13 cap III Cohen - Tannoudji

SOLUCIÓN

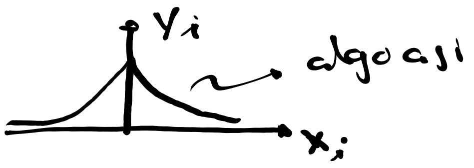
PROBLEMA #6

Tenemos $\langle \vec{r}|\psi\rangle = \psi(x,y,z) = N \exp\left\{-\frac{|x|}{2a} - \frac{|y|}{2b} - \frac{|z|}{2c}\right\}$

a) Para hallar N:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r\, N^2 \exp\left\{-\frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b} - \frac{|z|}{c}\right\}$$

Note que $\exp(-|x_i|)$ es simétrico respecto al origen



$$\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = 2^3 \int_{\mathbb{R}_+} dx\, e^{-\frac{x}{a}} \int_{\mathbb{R}_+} dy\, e^{-\frac{y}{b}} \int_{\mathbb{R}_+} dz\, e^{-z/c}\, N^2$$

miremos $\displaystyle\int_0^\infty dx_i\, e^{-x_i/\alpha} = -\alpha\, e^{-x_i/\alpha}\Big|_0^\infty = +\alpha$

$$\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = N^2\, 8\,abc = 1 \Rightarrow \boxed{N = (8abc)^{-1/2}}$$

b) Para calcular la probabilidad, integremos la densidad $|\langle\vec{r}|\psi\rangle|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$ en el dominio de interés: $x \in [0,a]$; $y \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$.

$$P = \frac{1}{8abc}\int_0^a e^{-\frac{x}{a}} dx\, (2b)(2c) = -\frac{a}{2a}\left\{e^{-1} - 1\right\} = \boxed{\frac{1-e^{-1}}{2}}$$

c) Análogo al caso anterior, tenemos

$$P = \frac{1}{8abc}\, 8a \int_0^b\int_0^c e^{-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}} dz\,dy = \frac{1}{\cancel{b}\cancel{c}}\left\{-\cancel{b}(e^{-1}-1)\right\}\left\{-\cancel{c}(e^{-1}-1)\right\}$$
$$= \boxed{(1-e^{-1})^2}$$

d) Resultará más fácil trabajar en espacio de momentum.

$$\langle\vec{p}|\psi\rangle = \int d^3r\, \langle\vec{p}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle \; ; \quad |\vec{p}\rangle = |p_x = 0, p_y = 0, p_z = \hbar/c\rangle$$

$$= \int d^3r \left\{\frac{e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}\, i}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\right\}\left\{\frac{e^{-\frac{|x|}{2a}-\frac{|y|}{2b}-\frac{|z|}{2c}}}{\sqrt{8abc}}\right\}$$

$$= \int d^3r \left\{\frac{e^{-\frac{iz}{\hbar}\frac{\hbar}{c}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\right\}\left\{\frac{e^{-\frac{|x|}{2a}-\frac{|y|}{2b}-\frac{|z|}{2c}}}{\sqrt{8abc}}\right\} = \frac{8\sqrt{8abc}}{5(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow dP(0,0,\hbar k) = |\langle \vec{p}|\vec{r}\rangle|^2 d^3p$$

$$= \frac{64abc}{25(\pi\hbar)^3} d^3p$$

PROBLEMA #12

Tenemos un estado

$$|\Psi\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle + a_3|\varphi_3\rangle + a_4|\varphi_4\rangle$$

Como $|\Psi\rangle$ describe un estado cuántico, $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2 = 1$.

a) Hallar n tq $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} < 6\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \Rightarrow n^2 < 6 \Rightarrow n = 1, 2$

$$P = |\langle\varphi_1|\Psi\rangle|^2 + |\langle\varphi_2|\Psi\rangle|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$$

b) $\langle H\rangle = |a_1|^2 E_1 + |a_2|^2 E_2 + |a_3|^2 E_3 + |a_4|^2 E_4 = \xi(|a_1|^2 1^2 + |a_2|^2 2^2 + |a_3|^2 3^2 + |a_4|^2 4^2)$

$$(\Delta H)^2 = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 \quad ; \quad \xi = \pi^2\hbar^2/2ma^2$$

$$\langle H^2\rangle = a_1^2 E_1^2 + a_2^2 E_2^2 + a_3^2 E_3^2 + a_4^2 E_4^2 = \xi^2(a_1^2 1^4 + a_2^2 2^4 + a_3^2 3^4 + a_4^2 4^4)$$

c) $|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i|\varphi_i\rangle e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}} = \sum_{i=1}^{4} a_i'|\varphi_i\rangle$

Como $|a_i'|^2 = |a_i|^2$, los resultados no cambian.

d) $8\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} = 16\xi \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$

El estado colapsa a $|\varphi_4\rangle$, una medición de energía sobre este estado será, nuevamente, $\underline{\underline{16\xi = E}}$.

PROBLEMA #13

Tenemos un pozo infinito cuadrado.

a) $\{H_x, H_y\}$

$\{H, H_i\}$

b) $\langle r|\Psi\rangle = N\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\,\text{sen}\frac{2\pi x}{a}\,\text{sen}\frac{2\pi y}{a}$

$$= \frac{N}{4}\left\{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right\}\left\{\text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi y}{a}\right)\right\}$$

$$\langle \vec{r}|\psi\rangle = \langle \vec{r}|\frac{N}{4}\left\{\sqrt{\frac{a}{2}}|1\rangle_x + \sqrt{\frac{a}{2}}|3\rangle_x\right\}\left\{\sqrt{\frac{a}{2}}|1\rangle_y + \sqrt{\frac{a}{2}}|3\rangle_y\right\})$$

$$\langle \vec{r}|\psi\rangle = \frac{N}{4}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right\}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi y}{a}\right)\right\}$$

Como sabemos que los estados propios de este sistema son

$$\langle \vec{r}|n\,m\rangle = \frac{2}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

$$|\psi\rangle = \frac{N}{4}\left\{\frac{a}{2}|11\rangle + \frac{a}{2}|13\rangle + \frac{a}{2}|31\rangle + \frac{a}{2}|33\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{Na}{8} = \frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow N = \frac{8a}{\sqrt{4}} = 4a$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\left\{|11\rangle + |13\rangle + |31\rangle + |33\rangle\right\}$$

α) $\langle H\rangle = \frac{\xi}{4}\left((1^2+1^2) + (1^2+3^2) + (3^2+1^2) + (3^2+3^2)\right)$

$$= \frac{\xi}{4}(2 + 10 + 10 + 18) = \frac{\xi}{4}(40) = \underline{\underline{10\xi}}$$

β) se encuentran

$$\epsilon_1 = \xi 1^2 \; ; \; \epsilon_3 = \xi(3)^2$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$P = \frac{1}{2} \qquad\qquad P = \frac{1}{2}$$

Si se obtuvo $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \xi 1^2$ para H_x, al medir H_y sobre el nuevo estado, se pueden obtener los mismos valores

$$\epsilon_1 = \xi \quad ; \quad \epsilon_3 = 9\xi$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$P = 1/2 \qquad\qquad P = 1/2$$

γ) $\epsilon_x = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \xi(3)^2$

Si queremos medir simultáneamente H_x y P_y, deberíamos construir una representación en la cual ambos sean diagonales. Para ello, hacemos una transformada de Fourier para $y \,(\to p_y)$. Queremos construir

$$\langle x, p_y|\psi\rangle = \sum c_{mn}\langle x, p_y|nm\rangle_a \quad \text{resolvemos}$$

$$\langle p_y|m\rangle = \int dy\,\langle p|y\rangle\langle y|m\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}\int_0^a e^{-ip_y y/\hbar}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{m\pi a\hbar^{3/2}}{p_y^2 a^2 - m^2\pi^2\hbar^2}\left((-1)^n e^{ip_y a/\hbar} - 1\right)$$

Ahora, tenemos el estado representado como

$$\langle x, p_y | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left\{ \langle x, p_y | 11 \rangle + \langle x, p_y | 13 \rangle + \langle x, p_y | 31 \rangle + \langle x, p_y | 33 \rangle \right\}$$

Las amplitudes C_{mn} permanecen invariantes, entonces la probabilidad de medir $E_x = 9\xi$ es $1/2$.