MECÁNICA CUÁNTICA I

TAREA # 8 – Ej: 3, 9, 14 cap III Cohen.

Solución

PROBLEMA #3

En el código adjunto:

a) $$\mathcal{P}(p_1,0) = 2\int_0^{p_1} \frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{N^2}\, dp \overset{[3]}{=} 1 - e^{-\frac{2p_1}{\hbar k_0}}$$

$N^2 \to \hbar k_0$

La gráfica se muestra en la celda siguiente a In[3].

+0,3

b)

Hallamos $\langle p|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{ip^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}\langle p|\psi(0)\rangle$

de acá es claro que

$$|\langle p|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle p|\psi(0)\rangle|^2 \to \text{In}[2]$$

+0,3

c) La gráfica de la forma del paquete de onda está en el In[4].

En el In[5] se calcula

$$\langle p^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} p^2 \langle p|\psi\rangle\langle\psi|p\rangle\, dp = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2}$$

$$\langle p\rangle = \emptyset = \langle x\rangle$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} x^2 \langle x|\psi\rangle\langle\psi|x\rangle\, dx = \frac{1}{k_0^2}$$

+0,4

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$ → Como es de esperar, ya que no se trata de un paquete de ondas gaussiano.

En el In[6] se calcula

$\Delta p(t) = \Delta p \Rightarrow$ el ancho en el esp. de momentum no cambia con el t.

$\Downarrow$

el paquete de ondas no se dispersa. $\Leftarrow$ el ancho en el espacio (x) tampoco lo hace.

PROBLEMA #9

No estoy seguro de qué tan general o correcta sea esta solución, pero fue la que se calificó como correcta.

a)

Partimos de $\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})}\, e^{i\xi(\vec{r})}$

$$\vec{J} = \frac{1}{m} \operatorname{Re}\left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi \right\} \Rightarrow J^i = \frac{1}{m} \operatorname{Re}\left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i \Psi \right\} \qquad (\star)$$

$$\partial^i \Psi = \partial^i(\sqrt{\rho})\, e^{i\xi} + \sqrt{\rho}\, \partial^i e^{i\xi}$$
$$= -\frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}}\, i\partial^i \xi\, e^{i\xi}$$

+0,3

$$-i\hbar\, \Psi^* \partial^i \Psi = \hbar \Psi^* \left\{ +i \frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \partial^i \xi\, e^{i\xi} \right\}$$
$$= \hbar \left\{ \sqrt{\rho}\, e^{-i\xi} \right\} \left\{ +i \frac{\partial^i \rho}{\sqrt{\rho}} e^{i\xi} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \partial^i \xi\, e^{i\xi} \right\}$$
$$= \hbar \left\{ i\partial^i \rho + \rho \partial^i \xi \right\}$$

$$\Rightarrow J^i = \frac{\hbar}{m} \rho \partial^i \xi \quad ✓ \qquad (\square)$$

Es claro de $(\star)$ que para obtener corrientes equivalentes $\Psi' = e^{i\theta}\Psi$, ya que $J'^i = \frac{1}{m} \operatorname{Re}\left\{ e^{-i\theta} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i e^{i\theta} \Psi \right\} = \frac{1}{m} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{i} \partial^i \Psi \right\} = J^i$. ✓

θ es un parámetro global. Para la densidad tenemos que una transf. $U(1)$, hace que $\rho' = e^{-i\theta} \Psi^* e^{i\theta} \Psi = \Psi^* \Psi = \rho$. Es por esto que los conjuntos $\{ e^{i\theta}\Psi \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ son vistos como estados.

b) $\quad v^i = \frac{J^i}{\rho}$ $\qquad$ +0,3

Un estado cuántico puede expresarse como $\Psi = \sqrt{\rho}\, e^{i\xi}$, hallamos ya que

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \nabla \xi \Rightarrow \nabla \times \vec{J} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times (\nabla \xi) = \emptyset \quad ✓$$

c) En la presencia de un campo magnético, tendremos que el lagrangiano de la partícula será

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + q \dot{x}_i A_i \; ; \; B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

Si sacamos del lagrangiano los momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

De forma que el Hamiltoniano será

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$$

(implícita)

$$= (m\dot{x}_i + \cancel{qA_i})\dot{x}_i - \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - \cancel{qA_i\dot{x}_i}$$

$$= \frac{m\dot{x}_i^2}{2} = \frac{(P_i - qA_i)^2}{2m}$$ → Acople mínimo

→ vemos que solo debemos reemplazar

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

$$\Rightarrow J_0^i = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* \frac{\hbar}{i}\partial^i\Psi\right\} = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* \hat{p}^i \Psi\right\}$$

$$\Rightarrow J^i = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* (p^i - qA^i)\Psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\rho\,\partial^i\xi - \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\Psi^* q A^i \Psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\rho\,\partial^i\xi - \frac{1}{m}qA^i\rho$$

+0,4

$$= \frac{\rho}{m}(\hbar\partial^i\xi - qA^i)$$ ✓

Por ende: $\nabla\times\vec{v} = \nabla\times\left\{\frac{1}{m}(\hbar\nabla\xi - q\vec{A})\right\}$

$$= -\frac{q}{m}\nabla\times\vec{A} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$ ✓

PROBLEMA # 14

a) Se pueden medir $E_1 = \hbar\omega_0 \rightarrow P = 1/2$

$E_2 = E_3 = 2\hbar\omega_0 \rightarrow P = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Se calculan en In[8] :

+0,2

$$\langle H\rangle = \frac{3\omega_0\hbar}{2} \quad ; \quad \Delta H = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

b) En In[9] se calcula.

Podemos escribir

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)\right)$$

Si se mide A se obtiene a con $P=1$, el estado tras la medición es el mismo. $+0,2$

c) $|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_0\rangle + \frac{e^{-2\omega_0 t}}{2}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$ In[10] $+0,2$

d) En In[11]: $\langle A\rangle_t = a$

$$\langle B\rangle_t = \frac{\sqrt{2}\,b}{4}e^{i\omega_0 t} + \frac{b}{4} + \frac{\sqrt{2}\,b}{4}e^{-i\omega_0 t}$$

↳ evidentemente, $|\Psi(t)\rangle$ no es estado propio de B $+0,2$

e) Si se mide A se obtiene a, siempre (In[12])

Si se mide B:

Se obtiene $-b$ con $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{8}$

$+b$ con $P = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{5}{8}$ $+0,2$

Al propagarse, el estado $|\Psi(t)\rangle$ oscila entre estados propios de B. Esto ocurre en la naturaleza, por ejemplo, los neutrinos interactúan en estados propios de sabor $|\alpha\rangle$, pero se propagan en estados propios de masa $|a\rangle$, estos estados no son equivalentes $\Rightarrow$ oscilaciones de neutrinos $\rightarrow$ Nobel 2015 (creo).

Sol_HW_8

May 11, 2018

```
In [1]: from sympy import *
        init_printing()
        from IPython.display import display
        from sympy.functions import Abs
```

0.1 Problema 3

```
In [2]: p,x,k = symbols('p x k',\
                              real=True)
        s, h, m, t, k0, p1 = symbols('sigma hbar m t k_0 p_1', real=True, \
                     positive=True)
        mom_repr = nsimplify(exp(-Abs(p)/(h*k0)))
        Nsq=integrate(mom_repr*mom_repr, (p,-oo,oo), conds='none')
        mom_repr/=sqrt(Nsq)

        mom_repr_t = exp(-I*(p**2/(2*m))*t/h)*mom_repr
        display(simplify(mom_repr_t))
        abs(mom_repr)**2==abs(mom_repr_t)**2
```

$$\frac{1}{\sqrt{\hbar}\sqrt{k_0}}e^{\frac{1}{\hbar}\left(-\frac{ip^2t}{2m}-\frac{|p|}{k_0}\right)}$$

```
Out[2]: True
```

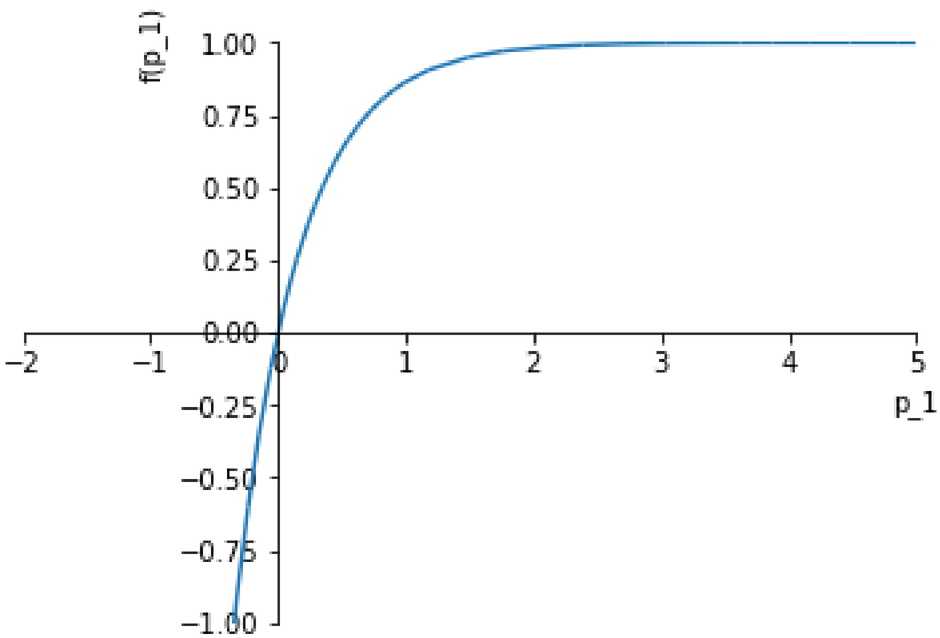
```
In [3]: P_p1 = 2*integrate(exp(-2*p/(h*k0))/Nsq, (p, 0, p1), conds='none')
        pl=plot(P_p1.subs(h,1).subs(k0,1), xlim=(-2,5), ylim=(-1,1))
        display(P_p1)
```

```
<matplotlib.figure.Figure at 0x7f7f6deeb490>
```

$$1-e^{-\frac{2p_1}{\hbar k_0}}$$

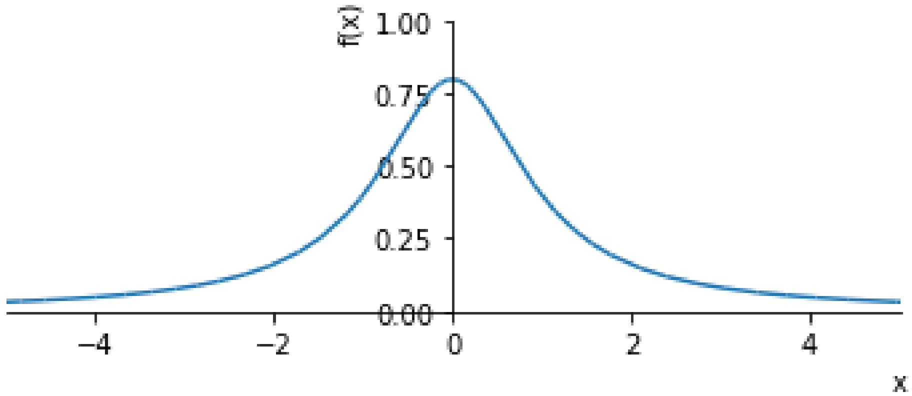
```
<matplotlib.figure.Figure at 0x7f7f691f1f90>
```

```
In [ ]: pl.show()
```



In [4]:
```
pos_repr = (1/sqrt(2*pi*h))*integrate(simplify(mom_repr*exp(I*p*x/h)), (p,-oo,oo), conds
display(simplify(cancel(pos_repr)))
Nsq = integrate(abs(pos_repr)**2, (x,-oo,oo), conds='none')
pos_repr/=sqrt(Nsq)
pt=plot(simplify(pos_repr.subs(k0,1)), xlim=(-5,5), ylim=(-1,1))
```

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_0}}{\sqrt{\pi}\left(k_0^2x^2+1\right)}$$




```
In [5]: delta_p_sq = integrate(mom_repr*mom_repr*p**2, (p,-oo,oo), conds='none')
        avg_p = integrate(mom_repr*mom_repr*p, (p,-oo,oo), conds='none')
        display(avg_p)
        delta_x_sq = integrate(pos_repr*pos_repr*x**2, (x,-oo,oo), conds='none')
        display(sqrt(delta_x_sq), sqrt(delta_p_sq))
        sqrt(delta_x_sq*delta_p_sq)>=h/2
```

$$0$$

$$\frac{1}{k_0}$$

$$\frac{\hbar k_0}{2}\sqrt{2}$$

Out[5]:

$$\frac{\sqrt{2}\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

```
In [6]: delta_p_t_sq = integrate(Abs(mom_repr_t)**2*p**2, (p,-oo,oo), conds='none')
        display(delta_p_t_sq)
```

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2}$$

1 Punto 14

```
In [7]: from sympy.physics.matrices import msigma
        a,b, w = symbols('a b omega_0', real=True)
        H = h*w*diag(1, 2, 2)
        A = a*diag(1,msigma(1))
        B = b*diag(msigma(1), 1)
```

```
In [8]: display(H.eigenvects())
        Psi_0 = nsimplify(1/sqrt(2))*H.eigenvects()[0][2][0]+nsimplify(0.5)*H.eigenvects()[1][2]
        display(Psi_0)
        display('avg E', nsimplify(0.5*H.eigenvects()[0][0] + 2*0.25*H.eigenvects()[1][0]))

        display('delta E', sqrt(simplify(nsimplify(0.5*H.eigenvects()[0][0]**2 + 2*0.25*H.eigenv
               nsimplify(0.5*H.eigenvects()[0][0] + 2*0.25*H.eigenvects()[1][0])**2))
```

$$\left[\left(\hbar\omega_0, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \right), \quad \left(2\hbar\omega_0, \quad 2, \quad \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

'avg E'

$$\frac{3\omega_0}{2}\hbar$$

'delta E'

$$\frac{\hbar\left|\omega_0\right|}{2}$$

```
In [9]: A.eigenvects()
        #Note que los vectores propios de A son u1 (vp a), N*(u2+u3) (vp a) y N*(-u2+u3) (vp -a)
```

Out[9]:

$$\left[\left(-a, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \quad \left(a, \quad 2, \quad \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

```
In [10]: Psi_t = Matrix([[exp(-I*t*H.eigenvects()[0][0])*Psi_0[0]],\
                         [exp(-I*t*H.eigenvects()[1][0])*Psi_0[1]],[exp(-I*t*H.eigenvects()[1][0
         display(Psi_t)
         Psi_t_T = adjoint(Psi_t)
         display(Psi_t_T)
```

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\hbar\omega_0 t}\\ \frac{1}{2}e^{-2i\hbar\omega_0 t}\\ \frac{1}{2}e^{-2i\hbar\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\hbar\omega_0 t} & \frac{1}{2}e^{2i\hbar\omega_0 t} & \frac{1}{2}e^{2i\hbar\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

```
In [11]: display(Psi_t_T*A*Psi_t)
         display(Psi_t_T*B*Psi_t)
```

$$\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}b}{4}e^{i\hbar\omega_0 t}+\frac{b}{4}+\frac{\sqrt{2}b}{4}e^{-i\hbar\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

```
In [12]: simplify((A*Psi_t)) #Se mide a, note que A*Psi_t = a* Psi_t
```

Out[12]:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}a}{2}e^{-i\hbar\omega_0 t}\\ \frac{a}{2}e^{-2i\hbar\omega_0 t}\\ \frac{a}{2}e^{-2i\hbar\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

```
In [13]: B.eigenvects()
```

Out[13]:

$$\left[\left(-b,\quad 1,\quad \left[\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right]\right),\quad \left(b,\quad 2,\quad \left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

```
In [14]: #Medir -b
         display(simplify((abs((nsimplify(1/sqrt(2))*adjoint(B.eigenvects()[0][2][0])*Psi_t)[0])
         #Medir b
         display(simplify((abs(nsimplify(1/sqrt(2))*adjoint(B.eigenvects()[1][2][0])\
                              *Psi_t)[0]**2+abs(adjoint(B.eigenvects()[1][2][1])*Psi_t)[0]**2).r
```

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\hbar\omega_0 t\right)+\frac{3}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\hbar\omega_0 t\right)+\frac{5}{8}$$