Examen Final
Solución

Daniel Felipe Forero Sánchez
201415069

29 de mayo de 2018

Problema 1

Tenemos un pozo infinito con una perturbación

$$H' = (1 - \Theta(x - L/2))V_0.$$

a

Utilizando teoría de perturbaciones, la corrección a primer orden está dada por

$$E_n^{(1)} \langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle = \int_0^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2V_0}{L} dx = \frac{V_0}{2}. \tag{1}$$

Entonces

$$E_n \approx \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{2}. \tag{2}$$

b

Para WKB, tendremos lo siguiente:

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} dx, \qquad V(x) = (1 - \Theta(x - L/2))V_0, \tag{3}$$

donde $x_1 = 0,\ x_2 = L.$

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{L/2} \sqrt{2m(E - V_0)} dx + \int_{L/2}^{L} \sqrt{2mE} dx \tag{4}$$

$$\sqrt{2m(E - V_0)}\frac{L}{2} + \sqrt{2mE}\frac{L}{2} \tag{5}$$

Después de un poco de (mucha) álgebra, tenemos que

$$E_n = \frac{\left(L^2V_0m + 8\pi^2\hbar^2n^2 + 8\pi^2\hbar^2n + 2\pi^2\hbar^2\right)^2}{8\pi^2L^2\hbar^2m\,(2n+1)^2}. \tag{6}$$

No es inmediatamente obvia la relación entre las aproximaciones, veamos el primer nivel de energía:

$$E_1^P \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{2} \tag{7}$$

$$E_1^{WKB} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{2} + \frac{L^2V_0^2m}{8\pi^2\hbar^2}. \tag{8}$$

Veamos entonces que la aproximación WKB otorga una corrección extra de segundo orden en V_0. De otra forma, pudimos haber hecho un poco menos de álgebra y aproximar, en WKB,

$$\sqrt{1-\frac{V_0}{E}} \approx 1 - \frac{V_0}{2E}.$$

De esta forma obtenemos solamente la aproximación a primer orden. Lo importante a notar acá es que ambos métodos proveen el mismo resultado.

Problema 2

Un rotor rígido libre, por analogía con el movimiento lineal, está descrito por un hamiltoniano

$$H_0 = \frac{L^2}{2I}, \tag{9}$$

en este caso, ya que el movimiento está restringido al plano $x-y$, el hamiltoniano toma la forma

$$H_0 = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}. \tag{10}$$

Ahora, el campo eléctrico $\vec{E} = \epsilon\hat{x}$ causa una perturbación

$$H' = -\vec{\mu}\cdot\vec{E} = -\mu\epsilon\cos(\theta), \tag{11}$$

con $\vec{\mu}$ el momento dipolar eléctrico del rotor. De la ec. de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}\psi = E\psi,$$

podemos ver que las funciones propias del hamiltoniano no perturbado son

$$\psi_k = Ae^{im\theta} \equiv \langle\theta|m\rangle\,, \qquad E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I} \tag{12}$$

Al normalizar, obtenemos que $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Una vez tenemos estos estados, podemos calcular las correcciones a la energía. A primer orden tenemos

$$\begin{aligned}\langle m|\,H'\,|m\rangle &= -\mu\epsilon\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\theta}\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\theta} &(13)\\ &= -\frac{\mu\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta &(14)\\ &= 0. &(15)\end{aligned}$$

Debemos irnos entonces a segundo orden, en este caso debemos integrar

$$
\begin{aligned}
E_n^{(2)} &= \sum_{m' \neq m} \frac{|\langle m'| H' |m\rangle|^2}{E_m - E_{m'}} && (16)\\
&= \mu^2 \epsilon^2 \sum_{m' \neq m} \frac{|\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im'\theta} \cos\theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\theta}|^2}{E_m - E_{m'}} && (17)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2}{4} \sum_{m' \neq m} \frac{|\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im'\theta} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\theta}|^2}{E_m - E_{m'}} && (18)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2}{4} \sum_{m' \neq m} \left[\frac{|\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im'\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(m-1)\theta}|^2}{E_m - E_{m'}} + \frac{|\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im'\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(m+1)\theta}|^2}{E_m - E_{m'}} \right] && (19)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2}{4} \sum_{m' \neq m} \left[\frac{|\langle m'|m-1\rangle|^2}{E_m - E_{m'}} + \frac{|\langle m'|m+1\rangle|^2}{E_m - E_{m'}} \right] && (20)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2}{4} \sum_{m' \neq m} \left[\frac{\delta_{m',m-1}}{E_m - E_{m'}} + \frac{\delta_{m',m+1}}{E_m - E_{m'}} \right] && (21)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2}{4} \left[\frac{1}{E_m - E_{m-1}} + \frac{1}{E_m - E_{m+1}} \right] && (22)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2 I}{2\hbar^2} \left[\frac{1}{m^2 - (m-1)^2} + \frac{1}{m^2 - (m+1)^2} \right] && (23)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2 I}{2\hbar^2} \left[\frac{1}{m^2 - m^2 + 2m - 1} + \frac{1}{m^2 - m^2 - 2m - 1} \right] && (24)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2 I}{2\hbar^2} \left[\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right] && (25)\\
&= \frac{\mu^2 \epsilon^2 I}{2\hbar^2} \left[\frac{2m+1}{4m^2-1} - \frac{2m-1}{4m^2-1} \right] && (26)\\
E_n^{(2)} &= \frac{\mu^2 \epsilon^2 I}{\hbar^2} \frac{1}{4m^2-1} && (27)
\end{aligned}
$$

Problema 3

Partimos de átomos en el estado $2s$, es decir $|200\rangle$. Un campo eléctrico $\vec{E} = E\hat{z}$ es producido por un condensador de longitud l. Los átomos se mueven con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$.
Para el estado $2s$, la velocidad aproximada del electrón estará dada por

$$
\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{m v_e^2}{2},
$$

de donde obtenemos un valor de $v_e \sim 10^6\ m/s$, de forma que podemos asumir que la velocidad del átomo es despreciable a comparación de la del electrón. En este caso, tendremos que habrá una perturbación

$$
H' = e\vec{r} \cdot \vec{E} = eEz = eEr\cos\theta. \tag{28}
$$

a

Para transiciones (dipolares), es claro que los estados "conectados" por la perturbación (aquellos entre los cuales hay transiciones permitidas) son los que cumplan $\Delta l = \pm 1$ y $\Delta m = 0, \pm 1$. De esta forma, si tenemos $n = 2$, los estados con $l = 1$ y $l = 0$ están conectados. De $|00\rangle$ es posible llegar a $|1-1\rangle$, $|11\rangle$, y a $|10\rangle$. De éste último puedo llegar a cualquiera de los otros dos $|1m\rangle$, mientras que de $|1-1\rangle$ no es posible llegar a $|11\rangle$ y viceversa.

b

Con $n =$ tenemos el conjunto de estados $\mathcal{B} = |200\rangle, |21-1\rangle, |210\rangle, |211\rangle$ (que forman una base), expresemos la perturbación en esta base. El elemento matricial está dado por

$$\begin{aligned}
\langle 2l'm'| H' |2lm\rangle &= eE \int_0^\infty r^2 dr r R^*_{2l'}(r) R_{2l}(r) \int_\Omega Y^*_{l'm'} \cos\theta Y_{lm} d\Omega &(29)\\
&= eE\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r^2 dr r R^*_{2l'}(r) R_{2l}(r) \int_\Omega Y^*_{l'm'} Y_{10} Y_{lm} d\Omega &(30)\\
&= (-1)^{m'} eE\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r^2 dr r R^*_{2l'}(r) R_{2l}(r) \int_\Omega Y_{l'-m'} Y_{10} Y_{lm} d\Omega &(31)\\
&= (-1)^{m'} eE\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r^2 dr r R^*_{2l'}(r) R_{2l}(r) \sqrt{\frac{(2l'+1)(2\cdot 1+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix}. &(32)
\end{aligned}$$

Note que la integral exige el conocimiento de la fórmula para la integral del producto de 3 armónicos esféricos, así como el de los $3-j$ símbolos de Wigner. Como los desconozco y no están en la hoja de fórmulas, se calcularon en computador. Se obtiene entonces, que la perturbación en la base escogida es

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3Ea_0e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3Ea_0e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Si diagonalizamos la matriz, obtendremos los estados que rompen el degeneramiento. Nuevamente en el computador se calculan. Cada tupla es de la forma (valor propio, multiplicidad algebráica, vector(es) propios).

$$\left[\left(0, \quad 2, \quad \left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right]\right), \quad \left(-3Ea_0e, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right]\right), \quad \left(3Ea_0e, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right]\right)\right] \tag{34}$$

Teniendo en cuenta que la base de estados escogida es isomorfa a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, podemos decir que $|200\rangle = \hat{e}_1, |21-1\rangle = \hat{e}_2, |210\rangle = \hat{e}_3, |211\rangle = \hat{e}_4$. En este orden de ideas, para los vectores propios con valor propio no nulo, tenemos que

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|200\rangle + |210\rangle), \qquad E_- = -3Eea_0 \tag{35}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|200\rangle + |210\rangle), \qquad E_+ = 3Eea_0 \tag{36}$$

c

Suponiendo que en $t = 0$ un átomo entra en el condensador, en $t = l/v$ sale de este; en este tiempo, se tiene la perturbación, constante, H'. El estado estará dado, en un principio, por

$$|\psi\rangle = |200\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle - |+\rangle). \tag{37}$$

Al aplicar el operador de evolución temporal, tendremos que

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}(e^{\frac{3iEea_0t}{\hbar}}|-\rangle - e^{-\frac{3iEea_0t}{\hbar}}|+\rangle), \tag{38}$$

cabe resaltar que la fase global correspondiente a la energía común para todos los estados E_2 no afectará la probabilidad y, por lo tanto, la ignoraremos de ahora en adelante. Un poco de álgebra nos muestra que

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{3iEea_0t}{\hbar}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-|200\rangle + |210\rangle)\right) - e^{-\frac{3iEea_0t}{\hbar}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-|200\rangle + |210\rangle)\right)\right], && (39)\\
&= \frac{1}{2}\left[e^{\frac{3iEea_0t}{\hbar}}(-|200\rangle + |210\rangle) - e^{-\frac{3iEea_0t}{\hbar}}(-|200\rangle + |210\rangle)\right], && (40)\\
&= \frac{1}{2}\left[|200\rangle\left(e^{\frac{3iEea_0t}{\hbar}} + e^{-\frac{3iEea_0t}{\hbar}}\right) + |210\rangle\left(e^{\frac{3iEea_0t}{\hbar}} - e^{-\frac{3iEea_0t}{\hbar}}\right)\right], && (41)\\
&= \cos\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right)|200\rangle + i\sin\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right)|210\rangle\,, && (42)
\end{aligned}$$

d

Finalmente, para hallar la probabilidad solo debemos observar la expansión de $|\psi(t)\rangle$ en términos de la base $\mathcal{B}$ y tomar la norma al cuadrado de cada coeficiente:

$$|\langle 200|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\cos\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right) \tag{43}$$

$$|\langle 210|\psi(t)\rangle|^2 = \left|i\sin\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right)\right|^2 = \sin^2\left(\frac{3Eea_0t}{\hbar}\right). \tag{44}$$

Problema 4

Dada una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{(\mathcal{D}_\mu\phi)^*\mathcal{D}^\mu\phi}_{\text{I}} - \underbrace{m^2\phi^*\phi}_{\text{II}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{III}}, \tag{45}$$

con $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, g un parámetro y $F = dA$, el tensor de Maxwell.

a

Debemos mostrar que el lagrangiano, $\mathcal{L}'(\mathcal{D}'_\mu, \phi', A'_\mu)$, es invariante bajo $U(1)$ local. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi &\to \phi' = \exp(ig\theta(x))\phi && (46)\\
A_\mu &\to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta(x) && (47)\\
\mathcal{D}_\mu &\to \mathcal{D}' = \partial_\mu + igA_\mu - ig\partial_\mu\theta(x) = \mathcal{D}_\mu - ig\partial_\mu\theta(x). && (48)
\end{aligned}$$

Veamos cada término:
I:

$$\mathcal{D}'_\mu\phi' = ig\partial_\mu\theta(x)\exp(ig\theta(x))\phi + \exp(ig\theta(x))\partial_\mu\phi + igA_\mu\exp(ig\theta(x))\phi - ig\exp(ig\theta(x))\partial_\mu\theta(x) \tag{49}$$

$$= \exp(ig\theta(x))\partial_\mu\phi + igA_\mu\exp(ig\theta(x))\phi = \exp(ig\theta(x))\mathcal{D}_\mu\phi. \tag{50}$$

En este orden de ideas, tenemos

$$\mathrm{I} = (\exp(ig\theta(x))\mathcal{D}_\mu\phi)^*\exp(ig\theta(x))\mathcal{D}^\mu\phi, \tag{51}$$

$$= (\mathcal{D}_\mu\phi)^*\exp(-ig\theta(x))\exp(ig\theta(x))\mathcal{D}^\mu\phi, \tag{52}$$

$$= (\mathcal{D}_\mu\phi)^*\mathcal{D}^\mu\phi. \tag{53}$$

II:

Obviamente, este término es invariante ya que no contiene derivadas

$$\mathrm{II} = -m^2\phi'^*\phi', \tag{54}$$

$$= -m^2\exp(-ig\theta(x))\exp(ig\theta(x))\phi^*\phi, \tag{55}$$

$$= -m^2\phi^*\phi. \tag{56}$$

III:

Miremos como se transforma el tensor de Maxwell F. Para esto podemos utilizar la identidad $d^2 = 0$ para derivadas exteriores:

$$F' = dA' = d(A - d\Theta) = dA - d^2\Theta = dA = F, \tag{57}$$

claro que también puede demostrarse de la forma usual, teniendo en cuenta que las derivadas conmutan (teorema de Clairaut-Schwartz):

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\theta(x)) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\theta(x)) = F_{\mu\nu}. \tag{58}$$

Una vez demostrado esto, vemos que

$$\mathrm{III} = \frac{1}{4}F'^2 = \frac{1}{4}F^2, \qquad F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{59}$$

De esta manera, finalmente concluimos que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, es decir, es invariante bajo $U(1)$ local.

b

Expandimos la derivada covariante del lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \phi^*{}_{,\mu}\,\phi{}_{,}{}^{\mu} + g^2A^2\phi^*\phi - m^2\phi^*\phi. \tag{60}$$

Si aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange (EL) para el campo ϕ^*, tendremos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*{}_{,\mu}} = \phi{}_{,}{}^{\mu}\,, \tag{61}$$

$$\frac{\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = g^2A^2\phi - m^2\phi, \tag{62}$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu - g^2A^2 + m^2)\phi = 0. \tag{63}$$

Consideremos el término $\partial_\mu \partial^\mu - g^2 A^2$ como una norma al cuadrado:

$$\partial_\mu \partial^\mu - g^2 A^2 = (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial^\mu + igA^\mu) = (\mathcal{D}_\mu)(\mathcal{D}^\mu)^*$$

de forma que

$$((\mathcal{D}_\mu)(\mathcal{D}^\mu)^* + m^2)\phi = 0 \tag{64}$$

Problema 5

Dado el lagrangiano para un campo vectorial masivo A:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{m^2}{2}A^2 \tag{65}$$

Para hallar la ecuación de movimiento aplicamos la ecuación de EL:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = m^2 A \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\sigma,\lambda}} &= -\frac{1}{4}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial}{\partial A_{\sigma,\lambda}}((\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)F_{\mu\nu})) && (67)\\
&= -\frac{1}{4}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A_{\sigma,\lambda}}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial A_{\sigma,\lambda}}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)) && (68)\\
&= -\frac{1}{4}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}(g^\lambda_\alpha g^\sigma_\beta - g^\lambda_\beta g^\sigma_\alpha) + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}(g^\lambda_\mu g^\sigma_\nu - g^\lambda_\nu g^\sigma_\mu)) && (69)\\
&= -\frac{1}{4}(F^{\alpha\beta}(g^\lambda_\alpha g^\sigma_\beta - g^\lambda_\beta g^\sigma_\alpha) + F^{\mu\nu}(g^\lambda_\mu g^\sigma_\nu - g^\lambda_\nu g^\sigma_\mu)) && (70)\\
&= -\frac{1}{4}(F^{\lambda\sigma} - F^{\sigma\lambda} + F^{\lambda\sigma} - F^{\sigma\lambda}) && (71)\\
&= -F^{\lambda\sigma}. && (72)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(-F^{\mu\nu}) - m^2 A^\nu &= 0 && (73)\\
\partial_\mu(F^{\mu\nu}) + m^2 A^\nu &= 0 && (74)\\
\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu &= 0 && (75)\\
\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu + m^2 A^\nu &= 0 && (76)\\
g_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - g_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial^\nu A^\mu + g_{\nu\alpha}m^2 A^\nu &= 0 && (77)\\
g_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial_\alpha A^\mu + g_{\nu\alpha}m^2 A^\nu &= 0 && (78)\\
(g_{\nu\alpha}(\partial_\mu\partial^\mu + m^2) - \partial_\nu\partial_\alpha)A^\nu &= 0, && (79)
\end{aligned}$$

que era lo que se quería obtener.

final

May 29, 2018

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing()
from IPython.display import display
from sympy.physics.matrices import msigma
from sympy.physics.quantum.dagger import Dagger
from sympy.physics.quantum import Ket, Bra
from sympy.physics.quantum.state import Wavefunction
from sympy.physics.quantum import TensorProduct as TP
```

In [2]:
```
x, L, V0 = symbols('x L V_0')
n = symbols('n', integer=True)
psi_n = sqrt(2/L)*sin(n*pi*x/L)
perturb = V0*integrate(psi_n*psi_n, (x,0,L/2), conds='none')
display(simplify(perturb))
```

$$\frac{V_0}{2}$$

In [3]:
```
h, En, m = symbols('hbar E_n m')
np = symbols("n'")
wkb_cond = Eq(2*pi*h*(n + S(1)/2), sqrt(2*m*(En-V0))*L/2 + sqrt(2*m*En)*L/2)
E = collect(factor(solve(wkb_cond, En)[0]),V0)
display(E.subs(n-1,np))
```

$$\frac{\left(L^2 V_0 m + 8\pi^2\hbar^2 n^2 + 8\pi^2\hbar^2 n + 2\pi^2\hbar^2\right)^2}{8\pi^2 L^2\hbar^2 m\,(2n+1)^2}$$

In [4]:
```
expand(E.subs(n,1))
```

Out[4]:

$$\frac{L^2 V_0^2 m}{72\pi^2\hbar^2} + \frac{V_0}{2} + \frac{9\pi^2\hbar^2}{2L^2 m}$$

1 Problema 2

In [5]:
```
e, mu, k, In, kp, E, th = symbols("epsilon mu k I k' E theta", real=True, positive=True)
A,B = symbols('A B', real=True, positive=True)
m,mp = symbols("m m'", integer=True)
psi = Function('psi')
Psi=(dsolve(Derivative(psi(th),th,th)+k**2*psi(th), psi(th)).rhs).expand(exp)
display(Eq(psi(th),Psi))
other_psi = A*exp(I*k*th) #+ B*exp(-I*k*th)

display(Eq(psi(th),other_psi))
```

$$\psi(\theta) = C_1 \sin(k\theta) + C_2 \cos(k\theta)$$

$$\psi(\theta) = Ae^{ik\theta}$$

In [6]:
```
Nsq = integrate(other_psi*other_psi.conjugate(), (th,0,2*pi), conds='none')
other_psi/=sqrt(Nsq)
#solve(Eq(intg, 1))
display(simplify(other_psi))
```

$$\frac{\sqrt{2}e^{ik\theta}}{2\sqrt{\pi}}$$

In [7]:
```
PD = expand(other_psi*other_psi.conjugate())
integrand = expand(PD*(-e*mu*(exp(I*th)+exp(-I*th))/2))
display(integrand)
```

$$-\frac{\epsilon\mu e^{i\theta}}{4\pi} - \frac{\epsilon\mu}{4\pi}e^{-i\theta}$$

In [8]:
```
#Primer orden

correction1 =integrate(integrand,(th,0,2*pi), conds='none')/Nsq
```

In [9]:
```
display(simplify(correction1.subs(k,m)))
```

$$0$$

In [10]:
```
#Segundo orden
PD = expand(other_psi.subs(k,kp)*other_psi.conjugate())
integrand = expand(PD*(-e*mu*(exp(I*th)+exp(-I*th))/2))
display(integrand)
```

$$-\frac{\epsilon\mu e^{i\theta}}{4\pi}e^{-ik\theta}e^{ik'\theta} - \frac{\epsilon\mu}{4\pi}e^{-i\theta}e^{-ik\theta}e^{ik'\theta}$$

```
In [11]: correction2 =integrate(integrand,(th,0,2*pi), conds='none')
```

```
In [12]: display(abs(simplify(correction2))**2)
```

$$\frac{\epsilon^2\mu^2}{4\pi^2\left(k^2-2kk'+k'^2-1\right)^2}\left(-k^2e^{2i\pi k}e^{-2i\pi k'}+2k^2-k^2e^{-2i\pi k}e^{2i\pi k'}+2kk'e^{2i\pi k}e^{-2i\pi k'}-4kk'+2kk'e^{-2i\pi k}e^{2i\pi k'}-k'^2e^{2i\right.$$

2 Problema 3

```
In [13]: from sympy.physics.hydrogen import R_nl
         from sympy.physics.wigner import gaunt
         from sympy import var
         a, e=symbols('a_0 e', real=True, positive=True)
         var("r")
         display(R_nl(2,0,r/a))
         states = [(0,0), (1,-1), (1,0), (1,1)]
         Hp = MutableMatrix(zeros(4))
         for i in range(len(states)):
             for k in range(len(states)):
                 to_use_1 = R_nl(2, states[i][0], r/a)
                 to_use_2 = R_nl(2, states[k][0], r/a)
                 norm_1 = integrate(to_use_1**2 * r**2, (r, 0, oo))
                 norm_2 = integrate(to_use_2**2 * r**2, (r, 0, oo))
                 to_use_1/=sqrt(norm_1)
                 to_use_2/=sqrt(norm_2)
                 integr = integrate(r**3*to_use_1*to_use_2, (r,0,oo))
                 angular = gaunt(states[i][0], 1, states[k][0], -states[i][1], 0, states[k][1])
                 comp = (-1)**(states[i][1])*e*E*sqrt(4*pi/3)*integr*angular
                 Hp[i,k] = comp
```

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

```
In [14]: display(Hp)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3Ea_0e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3Ea_0e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
In [15]: Hp.eigenvects()
```

Out[15]:

$$\left[\left(0,\quad 2,\quad \left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right]\right),\quad \left(-3Ea_0e,\quad 1,\quad \left[\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right]\right),\quad \left(3Ea_0e,\quad 1,\quad \left[\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

In [16]:
```
t=symbols('t', positive=True, real=True)
plus = Hp.eigenvects()[2][2][0]
plus/=sqrt(2)
plus_val = Hp.eigenvects()[2][0]
minus = Hp.eigenvects()[1][2][0]
minus/=sqrt(2)
minus_val = Hp.eigenvects()[1][0]
psi_t = simplify(S(1)/sqrt(2) *(exp(-I*minus_val*t/h)*minus-exp(-I*plus_val*t/h)*plus))
display(simplify(psi_t))
```

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3E}{\hbar}a_0et\right) \\ 0 \\ i\sin\left(\frac{3E}{\hbar}a_0et\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$