Consecuencias de la covarianza geométrica del tensor de Maxwell en la electrodinámica

Daniel Felipe Forero Sánchez
Gustavo Ardila
Fabio Pablo Miguel Méndez Córdoba
Diego Felipe Silvera Vega

Departamento de Física, Universidad de los Andes

29 de septiembre de 2017

1. Introducción

La relatividad especial puede escribirse en un formalismo determinado por vectores covariantes y contravariantes que transforman según una métrica de Minkowski. También hay definidas transformaciones de Lorentz como aquellas que dejan la métrica invariante.

La electrodinámica es una teoría ”invariante de Lorentz“ y relativista, por lo cual su formulación ”tensorial“ es de mucha utilidad. De lo anterior, sumado al hecho de que se exige invarianza gauge de los campos, dan como resultado una teoría de la que desprenden objetos que denominamos derivadas covariantes D_μ.

No obstante, en geometría diferencial tambien encontramos tales objetos, que denominaremos ∇_μ. En este proyecto se pretende ver las diferencias inducidas por la diferencia en la definición de derivada covariante, en la teoría electrodinámica.

2. Marco teórico

La teoría a tener en cuenta para el proyecto tiene puede dividirse en los dos puntos de vista mencionados anteriormente.

2.1. Electrodinámica Relativista

Una de las principales motivaciones por las cuales Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad especial era haber observado que las leyes que rigen la electrodinámica no eran invariantes bajo transformaciones de Galileo. Basado en esto último postuló que las transformaciones apropiadas de coordenadas eran las de Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1}$$

donde Λ^{μ}_{ν} es la matriz de transformación definida para un boost en una dirección como

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dentro de la teoría de Maxwell relativista se define el tensor de campo electromagnético como

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{3}$$

donde $A_{\mu} = (\phi, \vec{A})$. Este tensor transforma bajo transformaciones de Lorentz como uno de tipo 2-0 con la regla

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta} \tag{4}$$

De la electrodinámica clásica se sabe que el potencial electromagnético puede sufrir transformaciones tales que las ecuaciones de Maxwell permanezcan invariantes. Estas transformaciones se conocen como transformaciones gauge o de calibre[1]. En la electrodinámica relativista, las transformaciones gauge de la forma

$$A^{\mu} \to A^{\mu} + \partial^{\mu} f(x) \tag{5}$$

de forma que al reemplazar en la expresión del tensor de campo se tiene que

$$F'_{\mu\nu} = \partial^{\mu} A\nu + \partial^{\mu}\partial^{\nu} f(x) - \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\nu}\partial^{\mu} f(x) \tag{6}$$

pero por el teorema de Clairaut las derivadas conmutan por lo cual el tensor de campo es invariante. Dado el tensor de campo electromagnético, la dinámica va a estar contenida dentro de un Lagrangiano invariante Lorentz el cual es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{7}$$

2.2. Relatividad General

La discusión, y el proyecto en general, se centran en el concepto geométrico de derivada covariante; es entonces fundamental definirla. En una cierta base e_a, la derivada covariante de un vector v^a se define como:

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \Gamma^{a}{}_{bk} v^k, \tag{8}$$

donde $\Gamma^{a}{}_{bk}$ corresponde a las componentes de la conexión.

La conexión o los símbolos de Christoffel de segundo tipo se definen como

$$\Gamma^{m}{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left[\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} \right], \tag{9}$$

para una métrica $g_i j$ dada. Esta métrica, para casos de nuestro interés, corresponde a un espacio-tiempo sin torsión, es decir, la única conexión compatible es la de Levi-Civita.

En relatividad general, podemos definir la acción material S_M como

$$S_M = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)dx^\mu, \tag{10}$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana, que en electrodinámica corresponde a F, la traza de $F_{\mu\nu}$.
A partir de la acción definida, tenemos que es posible tomar una variación de esta y exigir $\delta SM = 0$. Esto nos permitirá calcular el tensor $T^{\mu\nu}$ de energía-momento. Para ello tomamos la relación de la referencia [2]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{11}$$

en la cual, la derivada $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$ se denomina derivada variacional de $\mathcal{L}$ respecto a $g^{\mu\nu}$ y se define como

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + \partial_\sigma\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right) + \partial_\sigma\partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu})}\right) \tag{12}$$

Todo lo anterior permite ver que la redefinición de la ecuación 13,

$$F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu \tag{13}$$

tiene consecuencias, que exploraremos, sobre el tensor de energía-momentum, en especial, las que conciernen a la invarianza gauge de la teoría.

3. Objetivo General

Se quiere redefinir el tensor electromágnetico en términos de derivadas covariantes geométricas y encontrar el tensor de energía momentum en una métrica esférica de Minkowski, a partir de la acción material que se deriva de esta redefinición. Se buscará hacer algo similar con la métrica de un agujero negro.

4. Objetivos Específicos

- Promover la teoría electromágnetica clásica a un espacio tiempo plano o Minkowski, descrito por la métrica en coordenadas esféricas.
- Hallar el tensor F bajo derivadas covariantes geométricas.
- Aplicar una transformación gauge al tensor F, para observar si es invariante.
- Identificar la invarianza(si existe), del lagrangiano y la acción definida de esta manera.
- Calcular el tensor de energía-momentum a partir de la acción material que surge del campo electromagnético.
- Aplicar todos estos mismos objetivos para una métrica de agujero negro.

5. Metodología

A lo largo del semestre se utilizarán métodos computacionales (Mathematica, Python, C++, etc) para encontrar los coeficientes de Cristoffel de acuerdo a la métrica usada, el tensor de curvatura de Ricci y el escalar de curvatura. Algunos cálculos se realizarán a mano.

Se realizarán, para una métrica dada, los cálculos correspondientes a los distintos objetos geométricos, de forma que se llegue a una derivada covariante que permita definir F según 13. Esto se hará, como se ha mencionado, computacionalmente, en lo posible.

Posteriormente, se obtendrá la densidad lagrangiana electromagnética y, con ésta, la acción. Se harán los cálculos correspondientes para ver si estas cantidades son invariantes gauge. De la misma forma, se verá si la teoría muestra mayores cambios y si éstos tienen algún significado geométrico profundo.

Referencias

[1] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Pearson, 2015).

[2] D. Lehmkuhl, "Mass-Energy-Momentum in General Relativity. Only there because of Spacetime?", (2008).