

# Modelo de distribución de riqueza con ahorro de producción

B.E. Castiblanco Ortigoza, J.A. Cocunubo Pulido, D.F. Ortiz Gutiérrez

Dpto. de Física  
Universidad Nacional de Colombia

18 de Enero de 2021

---

## Resumen

En este trabajo se replica un modelo de intercambio de riqueza que extiende el modelo cinético de Chakraborti-Chakrabarti de distribución de riqueza de un sistema conservativo a uno no conservativo, introduciendo los parámetros exógenos de aversión al intercambio  $\lambda$  y guardado de producción  $s$ . Para realizar lo anterior, se describen analíticamente las reglas de intercambio por las cuales se rigen las transacciones de riqueza entre agentes microeconómicos del sistema usando las funciones de utilidad que describen las preferencias de los mismos. Se procedió a usar la aproximación de campo medio y la ecuación de Boltzmann para encontrar el primer y segundo momento de la distribución de riqueza del sistema, y así describir la evolución de la riqueza promedio por agente en el tiempo. Luego, se realizó una simulación computacional del cambio de la distribución de riqueza del sistema según las reglas de intercambio, obteniendo un comportamiento que se ajusta a una distribución gamma para distintos valores de  $\lambda$  y  $s$ . Adicionalmente, se calcula el cambio del índice de Gini según varía  $s$  para distintos valores fijos de  $\lambda$ , con lo que se obtiene que el índice aumenta según disminuya la aversión al intercambio y/o aumente el guardado de producción. Por último, se obtuvo la distribución de riqueza para un sistema donde se diferencia entre agentes productores y trabajadores, encontrando que el rate de crecimiento de la riqueza promedio por productor depende de la fracción de riqueza que deba destinar al pago de salarios.

---

## 1. Introducción

El primer acercamiento entre la física y la economía fue hecho en 1960 por Mandelbrot [12], y surgió en el contexto de modelar la distribución de riqueza y dinero de una población como una analogía a la distribución de la energía promedio en un gas de partículas, lo cual se conoció como *modelos cinéticos de intercambio* en el mercado, sentando los inicios de una nueva rama que se conoció como *Econofísica*. Dicho primer acercamiento fue posteriormente ampliado por A. Dragulescu y V.M. Yakovenko en el 2000 [4] (modelo DY), donde consideraron un sistema cerrado de  $N$  (constante) agentes económicos con dinero total  $M$  (constante). El intercambio económico sucede como una interacción que ocurre aleatoriamente entre pares de agentes que intercambian una cierta cantidad de dinero, de tal forma que el dinero total en la transacción se conserva, por lo que dada su analogía al ensamble microcanónico de la mecánica estadística se encuentra que la distribución de dinero promedio por agente sigue la distribución de Gibbs-Boltzmann. Ese mismo año, A. Chakraborti

y B.K. Chakrabarti [2] (modelo CC) generalizaron el modelo DY introduciendo la “propensión marginal al ahorro” como un parámetro adicional del sistema, el cual limita la cantidad de dinero transferida entre un par de agentes en una transacción. En este modelo se sigue exigiendo la conservación del dinero total por transacción, obteniendo simulaciones que mostraban cómo la distribución de dinero se aleja del tipo Gibbs-Boltzmann. No fue sino hasta el año 2004 que Marco Patriarca, Anirban Chakraborti y Kimmo Kaski [14] mostraron que la distribución del dinero para este sistema anterior se ajusta a una función tipo Gamma de tal forma que, haciendo nulo el parámetro de propensión marginal al ahorro, se recuperaba el modelo DY.

Sin embargo, dichos modelos fueron altamente criticados por los expertos en economía de la época. En particular, en 2006 Mauro Gallegati, Steve Keen, Thomas Lux y Paul Ormerod publican un artículo [5] donde exponen sus argumentos del porqué los modelos DY, CC y similares, fallan en describir adecuadamente un sistema económico real. Aluden que debe existir una diferencia clara entre dinero y riqueza, conceptos diferentes en economía, y que deben tener en cuenta que en los modelos económicos empíricos la cantidad total de dinero en un sistema no se conserva.

En este contexto, surge la necesidad de realizar una extensión al modelo CC que se adecue de mejor manera a un sistema económico más real. El artículo publicado en 2020 por Quevedo, D.S. y Quimbay, C.J [15] (modelo QQ) es orientado en esta dirección, donde además se incluye un nuevo parámetro asociado al guardado o consumo de producción de un cierto agente. Como resultado principal se encuentra que la cantidad total de riqueza del sistema no se conserva, implicando la necesidad de usar el formalismo de la mecánica estadística fuera del equilibrio, y lo cual está en concordancia con las exigencias impuestas por Gallegati y demás. Dicho nuevo modelo QQ es el artículo principal a desarrollar en el presente, donde se pretende reproducir un modelo de distribución de riqueza en el cual los agentes económicos presentan una propensión al ahorro así como a la acumulación de producción. Además, se busca a partir de estos dos parámetros definir el índice de desigualdad de Gini y realizar un contraste con modelos económicos ya establecidos. Finalmente, se estudia una aplicación de este modelo a un sistema con dos tipos de agentes económicos: productores y trabajadores.

El presente informe está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se plantea el problema a resolver, y se establece el objetivo general y objetivos específicos del presente; en la sección 3 se presenta el marco conceptual donde se introducen las distintas herramientas teóricas necesarias para la formulación del modelo; la sección 4 explica brevemente la lógica detrás del código escrito para la simulación, detallando las librerías y los métodos numéricos empleados en el mismo; en la sección 5 se desarrolla todo el modelo desde primeros principios, detallando su formulación analítica, luego se muestran las gráficas obtenidas como resultado de la simulación de dicho modelo, y finalmente se presenta una aplicación del modelo al caso de dos tipos de agente en un mismo sistema; en la sección 6 se exponen las conclusiones que se pueden derivar de este modelo; y finalmente la sección 7 es un Anexo donde se muestran a detalle pasos y cálculos hechos en la parte analítica de la sección 5.

## 2. Problema a responder

El modelo QQ para la distribución de riqueza surge en el contexto de una extensión al modelo CC planteado anteriormente, debido a la necesidad de introducir más parámetros y leyes de intercambio que lo hagan ser una aproximación más realista a lo que sucede en un sistema económico, y que prediga el crecimiento económico que había sido bien estudiado en algunos países, o en otras palabras, que muestre cómo la evolución en el tiempo de la distribución de riqueza lleva a la no conservación de la misma.

En este contexto, una primera pregunta que oriente el trabajo hacia dicha dirección es: ¿Cómo puede modelarse el ahorro y el guardado de producción dentro de un modelo de distribución de riqueza descrito por la mecánica estadística y que incluya leyes de intercambio dictadas por la economía?

En el presente se mostrará cómo el desarrollo de dicha pregunta, que implica la introducción de un nuevo parámetro del guardado y/o consumo de producción al modelo CC, junto con la implementación de reglas de intercambio para los agentes bien conocidas de la microeconomía, conllevan a un modelo de distribución para la riqueza donde la misma no se conserva.

## 2.1. Objetivo general

Extender el modelo cinético de Chakraborti–Chakrabarti de la distribución de riqueza en un sistema de agentes económicos cerrado y conservativo, a un sistema no-conservativo mediante la implementación de parámetros exógenos como la aversión al intercambio de riqueza (ahorro) y la acumulación de la producción.

## 2.2. Objetivos específicos

1. Describir analíticamente las reglas de intercambio y los momentos de la distribución de riqueza en el modelo.
2. Simular computacionalmente las interacciones de los agentes económicos según el modelo de intercambio.
3. Implementar el modelo a un sistema con dos tipos de agentes económicos: productores y trabajadores.

## 3. Marco conceptual

### 3.1. Gas ideal

En el modelo de riqueza el sistema de  $N$  agentes económicos se modela como un sistema de  $N$  partículas distinguibles de un gas ideal de moléculas monoatómicas. En un gas ideal las partículas no interactúan por medio de fuerzas intermoleculares, y solo se considera su interacción por medio de colisiones elásticas [16]. En un gas ideal de este tipo, se tienen las siguientes relaciones para las variables termodinámicas macroscópicas del sistema:

$$P = \frac{NK_B T}{V} \quad (1)$$

$$E = \frac{3}{2} NK_B T \quad (2)$$

$$T = \frac{2}{3NK_B} \bar{E} \quad (3)$$

Donde  $P$  es la presión,  $E$  la energía cinética,  $\bar{E}$  es la energía promedio, y  $K_B$  es la constante de Boltzmann. Teniendo en cuenta estas relaciones, para el caso del sistema económico se consideran las siguientes analogías con un sistema de gas ideal [15]:

Sistema de un gas ideal	Sistema económico
$N$ partículas distinguibles	$N$ agentes económicos
Temperatura ( $T$ )	Riqueza promedio ( $\bar{w} = w/N$ )
Energía del sistema	Riqueza del Sistema
Colisión elástica	Transacción económica

### 3.2. Funciones de utilidad y funciones de demanda

Para la realización de un modelo de riqueza en un sistema económico se hace necesario relacionar las preferencias de un agente por ahorrar o por consumir bienes. Desde la microeconomía una función de utilidad permite relacionar matemáticamente las preferencias de un consumidor. Las preferencias pueden ser por diferentes conceptos como bienes, consumo, ahorro, etc. Existen diferentes funciones de este tipo, en particular las funciones de utilidad de Cobb-Douglas son usadas frecuentemente y tienen la siguiente forma:

$$U(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad (4)$$

En esta ecuación las preferencias del consumidor por  $x$  y  $y$  están representadas por los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente [3]. A partir de estas funciones de utilidad se pueden encontrar las funciones de demanda, que determinan la cantidad demandada de un bien [17]. Por ejemplo, cuando los agentes del sistema maximizan la utilidad se tendrá que cambiar el precio de venta según haya demanda por cierto bien o servicio. Esto último se evidencia en los “clearing prices” o precios de liquidación, en los cuales la oferta es igual a la demanda [10].

### 3.3. Multiplicadores de Lagrange

En general, cada agente económico en el modelo intentará maximizar su utilidad, esto se modela maximizando la función de utilidad sujeta a alguna restricción del mercado. El método de multiplicadores de Lagrange permite maximizar o minimizar una función de varias variables  $f(x, y)$  sujeta a una condición  $g(x, y) = c$ , donde  $c$  es una constante. Siendo que  $f$  y  $g$  sean funciones de clase  $C^1$  con valores reales y que  $f$  alcanza un máximo o un mínimo local en  $g$  en el punto  $\vec{x}_0$ , se cumple [9]:

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0) \quad (5)$$

### 3.4. Curva de Lorenz e Índice de Gini

La curva de Lorentz es una curva paramétrica  $(X(w), Y(w))$  que relaciona un porcentaje de población con la riqueza que posee dicho porcentaje de población, de forma que:

$$X(w) = \int_0^w P(w')dw' \quad Y(w) = \frac{\int_0^w w' P(w')dw'}{\int_0^\infty w' P(w')dw'} \quad (6)$$

El índice de Gini es una medida de la desigualdad en el sistema dada por el área entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz:

$$G = 2 \int_0^1 (X - Y)dX = 2 \int_{w_0}^\infty (X(w) - Y(w)) \frac{dX}{dw} dw \quad (7)$$

Donde se nota que cuando  $G = 1$  la desigualdad en el sistema es máxima y cuando  $G = 0$  la igualdad es máxima [8].

### 3.5. Aproximación de campo medio

Las aproximaciones de campo medio son usadas en el estudio del comportamiento de modelos estocásticos de muchos cuerpos que interactúan entre sí, y consiste en plantear y estudiar un modelo más simple que se aproxime al original. El efecto de todo los cuerpos sobre uno en particular es aproximado como un efecto promedio que actúa sobre dicho componente, reduciéndose así un problema de muchos cuerpo a un problema de un cuerpo en presencia de un campo [1].

### 3.6. Ecuación de Boltzmann

La ecuación de Boltzmann permite expresar matemáticamente la evolución de la función de distribución  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  de un sistema tipo gas que se encuentra en  $(\vec{r}, \vec{v})$  del espacio de fase. En general, considerando que las partículas del sistema colisionan y que existe una fuerza externa, y asumiendo que el tiempo de interacción entre partículas es mucho menor que el tiempo en que se encuentran en un movimiento libre, la ecuación cinética de Boltzmann para el sistema estará dada por [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} \left( \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{colisión} \quad (8)$$

El segundo y el tercer término de la izquierda se hacen cero cuando se considera sistema de un gas libre diluido en el que no actúan fuerzas externas, de forma que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{colisión} \quad (9)$$

En esta última ecuación el término  $(\delta f / \delta t)_{colisión}$  se conoce como el operador de colisión  $Q(f)$ , de forma que la ecuación de Boltzmann queda escrita de la siguiente manera [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f) \quad (10)$$

### 3.7. Distribución Gamma

El ajuste más ampliamente aceptado para la distribución de riqueza obtenida en los modelos CC es la distribución Gamma, con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(w) = \frac{1}{a\Gamma(b)} \left( \frac{w}{a} \right)^{b-1} \exp \left( -\frac{w}{a} \right) \quad (11)$$

donde  $a$  es el parámetro de escala y el  $b$  el parámetro de forma.

Una propiedad de las funciones de densidad de probabilidad Gamma es que los momentos  $r$ -ésimos pueden obtenerse a partir de los factores de forma [6]:

$$M_r = \frac{a^r \Gamma(r+b)}{\Gamma(b)} \quad (12)$$

Por lo que en particular, los primeros dos momentos de la distribución están dados por:

$$M_1 = ab \quad M_2 = a^2 b(b+1) \quad (13)$$

Las distribuciones obtenidas en el modelo QQ para cada paso de tiempo puede ajustarse mediante esta misma distribución. Así mismo se tiene que el índice de Gini para una distribución de riqueza Gamma está dado por [7]:

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(b + \frac{1}{2})}{\Gamma(b+1)} \quad (14)$$

## 4. Herramientas computacionales

Se realizó una simulación computacional con la que se buscó conocer la evolución de la densidad de probabilidad de riqueza de que un agente del sistema tenga un determinado nivel de riqueza. Para esto, se escribió un código en Python, usando librerías básicas de matemáticas y análisis de datos como lo son `numpy`, `matplotlib` y `scipy`, siendo esta última con la cual se hicieron los ajustes por mínimos cuadrados a las distintas curvas encontradas. En particular, se usó la librería `random` para generar el arreglo de números aleatorios que se usó, empleados para las simulaciones de Montecarlo Implementadas

El esquema de computo consistió en tres simulaciones para un sistema de  $N = 1000$  agentes, en un número de pasos  $t = 20000$ , y tomando una muestra cada 100 pasos de tiempo.

La primera simulación, y la principal, consistió en aplicar simultáneamente la simulación un número de veces (ensambles) igual a  $5 \times 10^3$  para luego promediar sobre el número de ensambles. Se usan las reglas de intercambio de riqueza entre dos agentes aleatorios, encontradas del modelo analítico, para distintas configuraciones del sistema determinadas por diferentes valores de los parámetros de exógenos  $\lambda$  y  $s$ . La simulación se realiza para una gran cantidad ensambles con el fin de tener la cantidad suficiente de datos para disminuir las variaciones estadísticas que se obtienen para la evolución en el tiempo de la densidad de probabilidad del nivel de riqueza por agente para una sola simulación, con lo cual se procedió a ajustar por una distribución Gamma.

La segunda simulación se realizó con el objetivo de determinar el comportamiento del índice de Gini variando  $s$  para distintas configuraciones de  $\lambda$ . En este caso, se consideró un número de ensambles menor, de  $1 \times 10^2$ , debido a la exigencia computacional de dicho cálculo. Posteriormente, se procedió a realizar un ajuste con el valor esperado de dicho índice para una distribución gamma.

La tercera y última simulación se hizo para la aplicación al modelo de trabajadores y productores, donde los primeros corresponden al 90 % de la población y los segundos al 10 %. Para este caso se toma un número de ensambles de  $1 \times 10^3$ , y se estudia el cambio de la distribución para distintas configuraciones del sistema.

## 5. Resultados y análisis

### 5.1. Resultados analíticos

Para describir analíticamente las reglas de intercambio entre los agentes se considera que en cada paso de tiempo solo interactúan dos agentes  $i$  y  $j$ , que son escogidos aleatoriamente del sistema de  $N$  agentes. La riqueza de cada agente en un tiempo  $t$  se denota como  $w_{i,j} = w_{i,j}(t)$ , mientras que para el tiempo después de la interacción se denota como  $w_{i,j}^* \equiv w_{i,j}(t+1)$ . Para cada paso de tiempo  $t \rightarrow t+1$  el cambio de la riqueza después de la interacción entre dos agentes  $i, j$  se escribe como:

$$w_i^* = w_i + \Delta w_i \quad w_j^* = w_j + \Delta w_j \quad (15)$$

Se considera que cada agente económico produce cierta cantidad de un bien antes de cada interacción, de forma que el agente  $i$  produce  $X$  cantidad de su bien y el agente  $j$  produce  $Z$  cantidad de su propio bien. La interacción entre los agentes se da de forma que cada agente paga por una parte de la producción del otro con parte de su riqueza y parte de su propia producción. Teniendo esto en cuenta, al final de cada transacción el agente  $i$  quedará con parte de su producción  $x_i$  y parte de la producción del otro agente  $z_i$ . De igual manera, el agente  $j$  terminará con producciones  $x_j$  y  $z_j$ . Como la producción se conserva durante la transacción se cumplen las siguientes relaciones:

$$X = x_i + x_j \quad Z = z_i + z_j \quad (16)$$

Las preferencias de los agentes por cada bien y por la riqueza se definen a través de las funciones de utilidad de Cobb-Douglas:

$$\mathcal{U}_i(x_i, z_i, w_i^*) = [Ax_i]^\theta [Az_i]^\phi [w_i^*]^\lambda \quad (17)$$

$$\mathcal{U}_j(x_j, z_j, w_j^*) = [Ax_j]^\theta [Az_j]^\phi [w_j^*]^\lambda \quad (18)$$

Donde  $A = 1 - s$  determina la parte de la producción que ya no queda a disposición para una futura transacción, de forma que si  $A = 1$  entonces no queda producción disponible para la siguiente transacción. Los términos  $[Ax_i]^\theta$ ,  $[Az_i]^\phi$ ,  $[Ax_j]^\theta$  y  $[Az_j]^\phi$  establecen las preferencias por el consumo de las respectivas producciones, de manera que son determinados por los parámetros estocásticos  $\theta$  y  $\phi$ . De igual manera, los términos  $[w_i^*]^\lambda$  y  $[w_j^*]^\lambda$  establecen las preferencias de los agentes por la riqueza, que están determinados por

$\lambda$ . Como las preferencias se establecen con las potencias se normalizan a 1 de forma que  $\theta + \phi + \lambda = 1$ . Es importante notar que en estas funciones de utilidad se implementan los parámetros exógenos de aversión al intercambio  $\lambda$  y guardado de producción  $s$ , que cumplen  $\lambda \in [0, 1]$  y  $s \in [0, 1]$ .

Un agente económico en el sistema buscará maximizar su utilidad en cada tiempo  $t$ . Para ello se usa el método de multiplicadores de Lagrange donde las funciones de utilidad se encuentran restringidas a las ecuaciones (20) dadas por las características de la interacción, y donde ya se define un precio de venta  $p_x$  y  $p_z$  para los bienes  $x$  y  $z$ , respectivamente.

$$Ap_x x_i + Ap_z z_i + w_i^* = w_i + p_x X \quad (19)$$

$$Ap_x x_j + Ap_z z_j + w_j^* = w_j + p_z Z \quad (20)$$

Se definen entonces las funciones que se muestran a continuación, donde ya se introducen los multiplicadores de Lagrange  $\mu_i$  y  $\mu_j$ .

$$\mathcal{L}_i(x_i, z_i, w_i^*, \mu_i) = [Ax_i]^\theta [Az_i]^\phi [w_i^*]^\lambda - \mu_i [Ap_x x_i + Ap_z z_i + w_i^* - w_i - p_x X] \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_j(x_j, z_j, w_j^*, \mu_j) = [Ax_j]^\theta [Az_j]^\phi [w_j^*]^\lambda - \mu_j [Ap_x x_j + Ap_z z_j + w_j^* - w_j - p_z Z] \quad (22)$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange como se muestra en la ecuación (5), se realiza la maximización y se llega a las funciones de demanda de los agentes:

■ Para el agente  $i$ :

$$x_i = \frac{\theta}{\lambda Ap_x} w_i^* \quad z_i = \frac{\phi}{\lambda Ap_z} w_i^* \quad w_i^* = \lambda [w_i + p_x X] \quad (23)$$

■ Para el agente  $j$ :

$$x_j = \frac{\theta}{\lambda Ap_x} w_j^* \quad z_j = \frac{\phi}{\lambda Ap_z} w_j^* \quad w_j^* = \lambda [w_j + p_z Z] \quad (24)$$

Tomando las condiciones del mercado (16) y las funciones de demanda se obtienen los *Clearing Prices* o precios de liquidación del mercado:

$$p_x = \frac{\varepsilon(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{X[\lambda - s]} \quad (25)$$

$$p_z = \frac{(1 - \varepsilon)(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{Z[\lambda - s]} \quad (26)$$

Reemplazando los precios de liquidación en las funciones de demanda se obtiene el cambio en la riqueza de cada agente después de una interacción:

$$\Delta w_i = \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} \lambda [\varepsilon(w_i + w_j) - w_i] + \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} s w_i \quad (27)$$

$$\Delta w_j = \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} \lambda [-\varepsilon(w_i + w_j) + w_i] + \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} s w_j \quad (28)$$

Las variables estocásticas  $\theta$  y  $\phi$  se recogen en el parámetro aleatorio  $\varepsilon$ , tal que  $\varepsilon = \frac{\theta}{\theta + \phi}$ . Los detalles de los cálculos realizados para llegar a los cambios de riqueza por agente desde las funciones de utilidad se realizan

en la sección 7.1 del Anexo.

Es interesante resaltar que las funciones dadas por (22) se pueden interpretar como un lagrangiano para cada agente, en analogía a una partícula del gas ideal, pues tomando las ecuaciones (17) y (18) se evidencia que la función de utilidad depende de una potencia de la riqueza de cada agente, esto tiene sentido al compararlo con el lagrangiano de una partícula del gas ideal donde la función depende de una potencia de la energía, que en la analogía realizada, correspondería con la riqueza. Adicionalmente, se puede ver como al maximizar la utilidad de cada agente con el método de multiplicadores de Lagrange se llega a las funciones de demanda y finalmente a las ecuaciones que describen como cambia la riqueza. Esto último permite establecer el paralelismo con la utilización de un lagrangiano para encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en un gas ideal.

Se puede encontrar la riqueza total en el sistema después de una transacción al tomar la riqueza total antes de la transacción y sumarle el cambio de riqueza de los dos agentes que interactuaron:

$$W(t+1) = W(t) + \Delta w_i + \Delta w_j \quad (29)$$

$$= W(t) + \frac{1-\lambda}{\lambda-s} s(w_i + w_j) \quad (30)$$

De esta ecuación se nota que la riqueza total del sistema no se conserva en el tiempo. En particular, para el caso  $\lambda > s$  se presenta un crecimiento en la riqueza del sistema.

Debido a lo anterior, se realiza una aproximación de campo medio para conocer la evolución en el tiempo de la riqueza promedio por agente. Para esto se considera la interacción efectiva entre un agente  $i$  con todo el resto del sistema, por lo que se promedia sobre todas las riquezas de los  $N$  agentes, y se reemplaza este valor en las ecuaciones encontradas anteriormente para el cambio de cada agente. Encontrando las ecuaciones:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \quad (31)$$

Reemplazando en la forma de los intercambios:

$$\Delta w'_k = \frac{1-\lambda}{\lambda-s} \lambda [\varepsilon(w_k + \langle w \rangle) - w_k] + \frac{1-\lambda}{\lambda-s} s w_k \quad (32)$$

$$\Delta w''_k = \frac{1-\lambda}{\lambda-s} \lambda [-\varepsilon(\langle w \rangle + w_k) - \langle w \rangle] + \frac{1-\lambda}{\lambda-s} s w_k \quad (33)$$

Con esto es posible determinar el comportamiento en el tiempo de la riqueza individual por agente luego de cada intercambio:

$$w_k^* = w_k + \frac{1}{N} (\Delta w'_k + \Delta w''_k) \quad (34)$$

$$= w_k + \frac{2}{N} \frac{(1-\lambda)}{(\lambda-s)} s w_k + \frac{1}{N} \frac{(1-\lambda)}{(\lambda-s)} \lambda [\langle w \rangle - w_k] \quad (35)$$

Luego, esto es un intercambio puramente discreto, pero se puede extender el límite al continuo si el número de pasos es lo suficientemente grande y en intervalos pequeños, y como  $w_k^* - w_k = \frac{w_k(t+1) - w_k(t)}{t+1-t}$ , al llevar al continuo se obtiene:

$$\Rightarrow \frac{dw_k}{dt} = g \frac{2}{N} w_k(t) + \frac{J}{N} [\langle w \rangle - w_k(t)] \quad (36)$$



Con  $g$  el rate de crecimiento de la riqueza promedio, y  $J$  el rate de intercambio, definidos como:

$$g = \frac{(1 - \lambda)}{(\lambda - s)} s \quad J = \frac{(1 - \lambda)}{(\lambda - s)} \lambda \quad (37)$$

Tomando un promedio sobre  $k$  se integra la ecuación (36), y se obtiene:

$$\langle w \rangle = \langle w_0 \rangle \exp \left( g \cdot \frac{2t}{N} \right) = \langle w_0 \rangle \exp(g\tau) \quad (38)$$

donde la amplitud  $\langle w_0 \rangle$  estará dada por la riqueza promedio por agente en el instante inicial, y el tiempo está discretizado a una interacción por unidad de tiempo.

Por la naturaleza no conservativa del modelo, el sistema no está en equilibrio termodinámico, por lo que es necesario usar la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f(w_i), f(w_j)) \quad (39)$$

Donde el lado derecho de la ecuación corresponde al llamado factor de colisión  $Q$ , que en este contexto se puede escribir como una diferencia entre las ganancias y las pérdidas en una transacción de  $i$  a  $j$  y el proceso inverso, i.e., la cantidad  $Qdw$  corresponde al incremento del número total de agentes con riqueza  $dw$  debido a una transacción [13].

La dinámica del sistema puede ser pensada como una colisión entre partículas clásicas, de forma que cuando ocurre una interacción, la riqueza del par de agentes se transforma como  $[w_i, w_j] \rightarrow [w_i^*, w_j^*]$ . Es decir:

$$w_i^* = p_1 w_i + q_1 w_j \quad (40)$$

$$w_j^* = p_2 w_i + q_2 w_j \quad (41)$$

Comparando con los resultados anteriores obtenidos en (35), se encuentra:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda - s} [\lambda + \epsilon(1 - \lambda) - s] \quad q_1 = \frac{\lambda}{\lambda - s} [\epsilon(1 - \lambda)] \quad (42)$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\lambda - s} [(1 - \epsilon)(1 - \lambda)] \quad q_2 = \frac{\lambda}{\lambda - s} [\lambda + (1 - \epsilon)(1 - \lambda) - s]$$

Luego, es posible conocer la función de distribución sin necesidad de encontrar la solución analítica a la ecuación de Boltzmann, y esto se hace considerando la formulación débil con funciones de prueba de la forma  $\Phi(w) = w^r$ , i.e., calculando los momentos de la distribución:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int f(w_i, \tau) w_i^r dw_i &= \frac{1}{2} \left\langle \int f(w_i, \tau) f(w_j, \tau) [(w_i^*)^r + (w_j^*)^r \right. \\ &\quad \left. - w_i^r - w_j^r] dw_i dw_j dw_i^* dw_j^* \right\rangle \end{aligned} \quad (43)$$

Con lo que es posible hallar la evolución en el tiempo del momento  $r$ -ésimo de la distribución reemplazando los  $w_{i,j}^*$  con las reglas encontradas anteriormente y usando el binomio de Newton para reescribir lo obtenido, encontrando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} M_r(\tau) &= \langle p_i^r + q_i^r - 1 \rangle_+ M_r(\tau) \\ &+ \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \langle p_i^k q_i^{r-k} \rangle_+ M_k(\tau) M_{r-k}(\tau) \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $\langle \psi(p_i, q_i) \rangle_+ := 1/2 \langle \psi(p_1, q_1) + \psi(p_2, q_2) \rangle$ . Los detalles de este resultado se muestran en el Anexo 7.2 cuya solución para los dos primeros momentos  $r = 1, 2$  será:

$$M_1(\tau) = \exp \left( \frac{(1-\lambda)}{(\lambda-s)} s\tau \right) \quad M_2(\tau) = m_2 \exp \left( 2 \frac{(1-\lambda)}{(\lambda-s)} s\tau \right) \quad (45)$$

Donde la amplitud  $m_2$  depende de los parámetros exógenos del modelo:

$$m_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + 2 - 3s)}{3(\lambda - 2)(\lambda + s - \lambda s) - 2\lambda^2(1 - \lambda)} \quad (46)$$

Ahora bien, comparando estos dos primeros momentos encontrados con los esperados para una función de densidad de probabilidad Gamma (13), se encuentra que los parámetros de escala  $a$  y de forma  $b$  están dados por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{M_1(\tau)}{b} = (m_2 - 1) \exp(g\tau) \\ &= \frac{\lambda(\lambda^2 + \lambda + 3s(1 + \lambda) - s^2) + s^2}{2\lambda^2(1 - \lambda) - 3(\lambda - s)(\lambda + s - \lambda s)} \exp(g\tau) \end{aligned} \quad (47)$$

y

$$b = \frac{1}{m_2 - 1} = \frac{2\lambda^2(1 - \lambda) - 3(\lambda - s)(\lambda + s - \lambda s)}{\lambda(\lambda^2 + \lambda + 3s(1 + \lambda) - s^2) + s^2} \quad (48)$$

Aunque se espera que la distribución de riqueza para el modelo se comporte como una distribución gamma, por efecto de la no conservación de la riqueza total no se espera que sea estacionaria. Si se introduce una riqueza normalizada tal que  $\tilde{w} = w/\langle w \rangle$  se puede estudiar un caso cuasi-estacionario, donde la función de densidad de probabilidad Gamma está dada por:

$$f(w) = \frac{1}{\tilde{a}\Gamma(b)} \left( \frac{\tilde{w}}{\tilde{a}} \right)^{b-1} \exp \left( -\frac{\tilde{w}}{\tilde{a}} \right) \quad (49)$$

Tomando la ecuación (38) y (47) se tiene que el parámetro de escala para este caso es:

$$\tilde{a} = \frac{a_0 \exp(g\tau)}{\langle w_0 \rangle \exp(g\tau)} = \frac{a_0}{\langle w_0 \rangle} \quad (50)$$

Con lo que se evidencia que  $a$  es una constante en el tiempo, puesto que  $a_0$  y  $\langle w_0 \rangle$  también lo son.

## 5.2. Resultados de la simulación

El enlace al código que realiza las simulaciones y análisis numérico mostrados a continuación se encuentra en el anexo 7.3

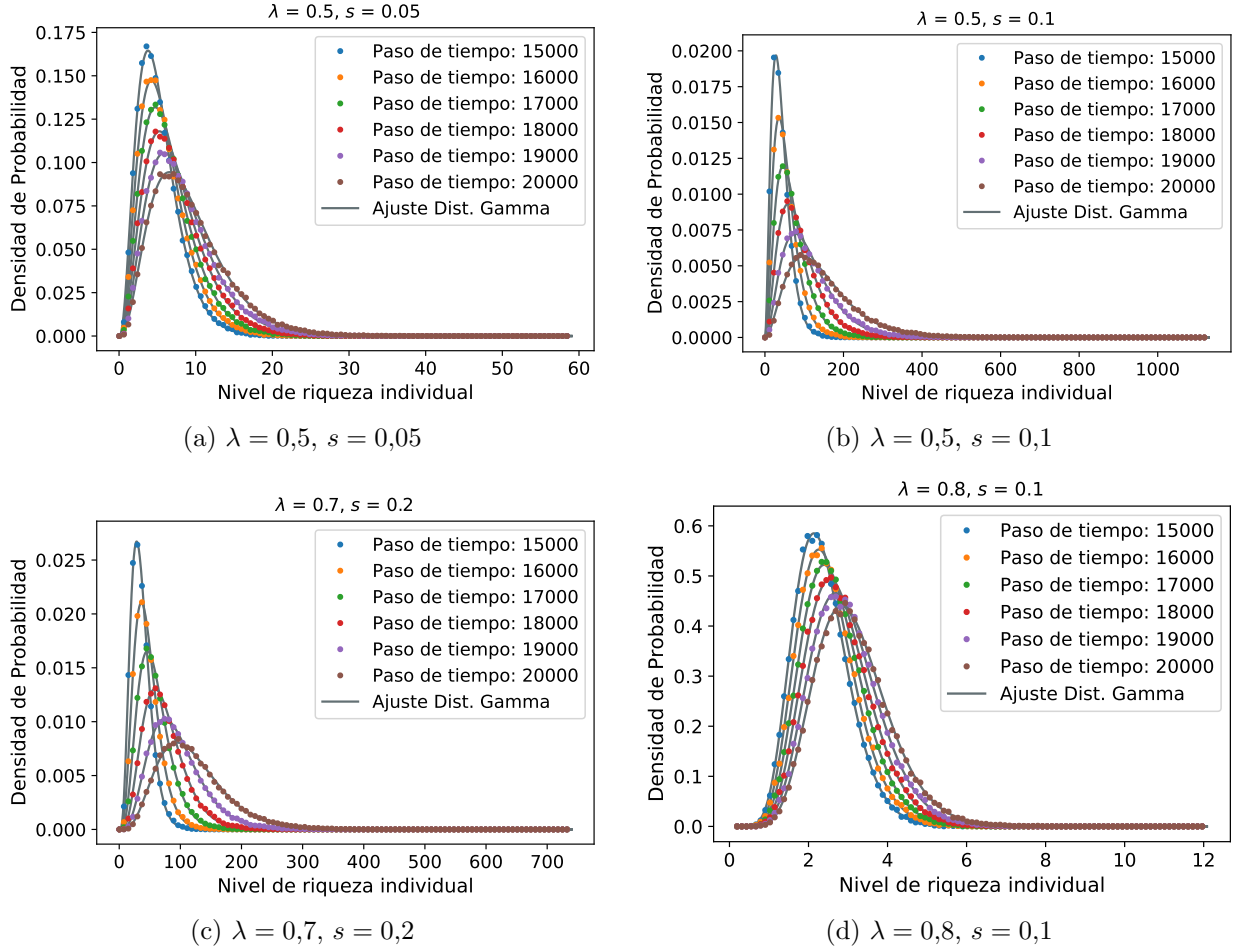
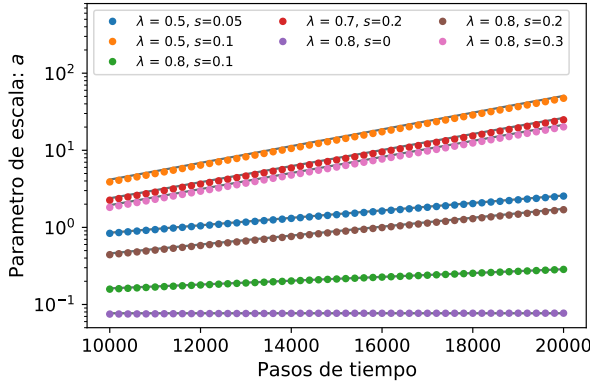


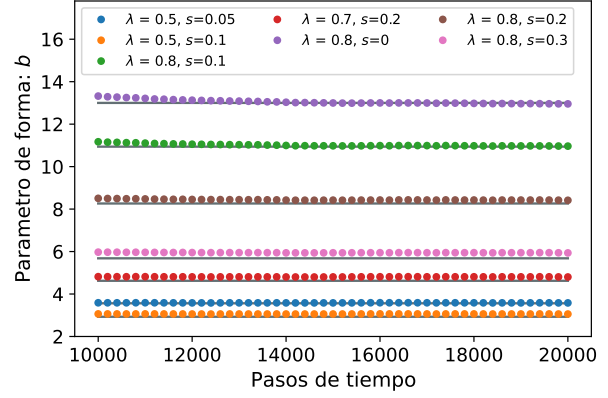
Figura 1: Densidad de probabilidad para la distribución de riqueza obtenida mediante datos simulados para distintos parametros  $\lambda$  y  $s$ . Ensambls:  $5 \cdot 10^3$

En la figura 1 se muestran las distribuciones obtenidas a partir de los datos simulados para distintos valores de  $\lambda$  y  $s$ , y diferentes valores de tiempo. Las distribuciones fueron ajustadas a la distribución Gamma de la ecuación (11), ajustando los parámetros  $a$  y  $b$  en ella. Mediante el estudio de la ecuación de Boltzmann, la aproximación de campo medio y la distribución Gamma, se encontraron los parámetros  $a$  y  $b$  en términos de los parámetros exógenos  $\lambda$ ,  $s$  y el tiempo. La comparación entre los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos de los ajustes de las distribuciones y lo esperado teóricamente en las ecuaciones (47) y (48) se muestra en la figura 2.

Pese a que los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos de la simulación corresponden con lo esperado de la expresión teórica, se verá más adelante mediante el índice de Gini que la correspondencia entre los datos simulados y el ajuste con distribuciones Gamma pierde precisión cuando  $s \rightarrow \lambda$ .



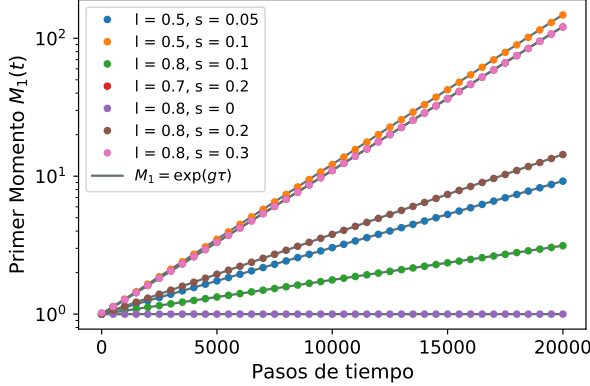
(a) Evolución temporal de parámetro de escala  $a$



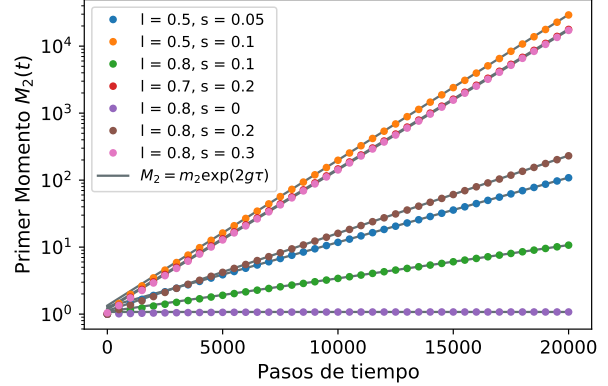
(b) Evolución temporal parámetro de forma  $b$

Figura 2: Parámetros de escala y forma  $a$  y  $b$  obtenidos a partir del ajuste a distribuciones Gamma de los datos simulados. Las líneas continuas corresponden a los valores de  $a$  y  $b$  dados por las expresiones (47) y (48)

De la aproximación de campo medio y ecuación de Boltzmann se encontraron las expresiones para el primer y segundo momento dadas por las ecuaciones (38) y (45), respectivamente. En la figura 3 se muestra el primer y segundo momento junto a los resultados esperados del desarrollo teórico. En estas figuras se comprueba el crecimiento exponencial de la riqueza total tal como se espera del modelo.



(a) Primer momento  $M_1(t)$   $a$



(b) Segundo momento  $M_2(2)$

Figura 3: Primer y segundo momento de las distribuciones obtenidos para los datos simulados con distintas combinaciones de  $\lambda$  y  $s$ . Las líneas continuas corresponden al comportamiento esperado según la aproximación de campo medio y la ecuación de Boltzmann (ecuaciones (38) y (45))

### 5.2.1. Distribución Cuasi-estacionaria

Realizando el cambio en la riqueza al dividir entre la riqueza promedio como  $w/\langle w \rangle$  y multiplicando las distribuciones por  $\langle w \rangle$  para mantener la normalización se obtiene una distribución que se estabiliza en el tiempo. En la figura 4 (a) se muestra la evolución temporal del caso  $\lambda = 0,7$ ,  $s = 0,2$  de la distribución cuasi-estacionaria. En la figura 4 (b) se tiene la evolución en el tiempo del índice de Gini para dicha distribución, comprobando que el sistema alcanza una distribución estable tras un tiempo.

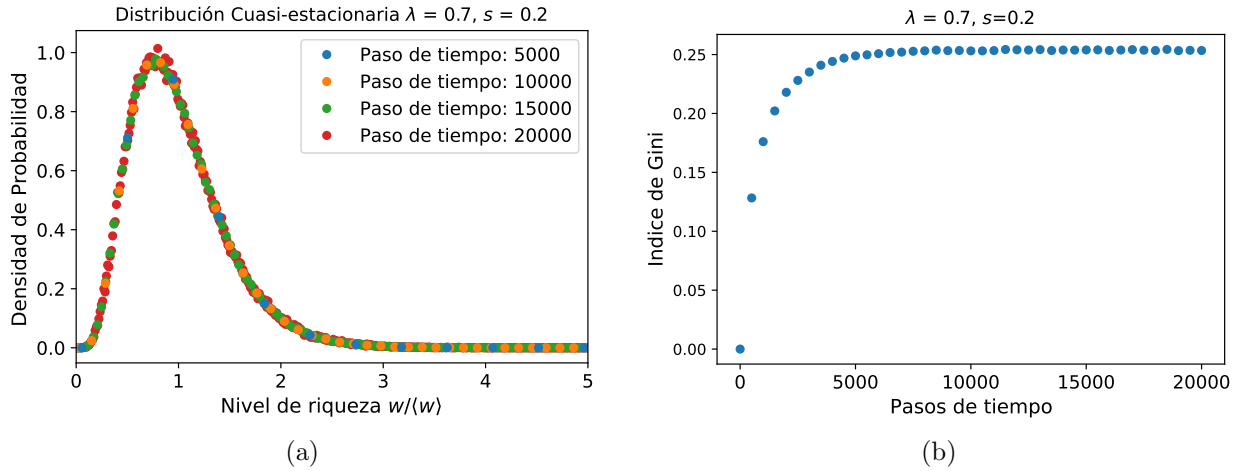


Figura 4: (a) Evolución de la distribución cuasi-estacionaria.  $\lambda = 0,7$ ,  $s = 0,2$ . (b) Evolución del índice de Gini para las distribución cuasi-estática mostrada en (a)

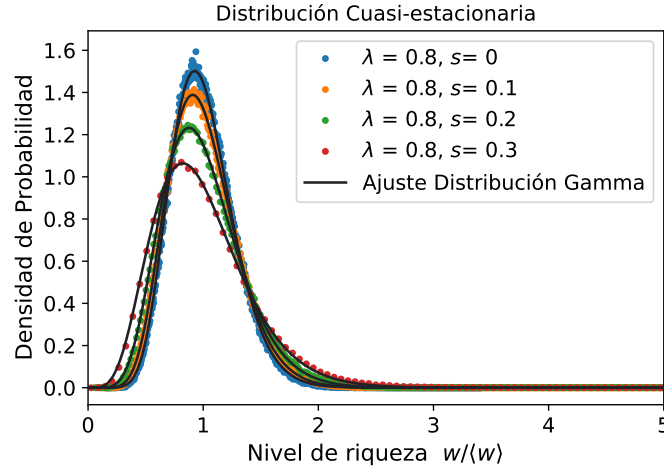


Figura 5: Distribuciones cuasi-estacionarias para distintos valores de  $s$  con  $\lambda = 0,8$

De la distribución cuasi-estacionaria se observa que para valores mayores de  $s$  el ancho de la distribución aumenta, es decir, aumenta la desigualdad entre mayor es el valor de  $s$ . El aumento de la desigualdad se ve reflejado en el índice de Gini, tal como se verá a continuación, donde se evidencia la dependencia del índice de Gini con  $\lambda$  y  $s$ . En la figura 5 los ajustes se realizaron para la distribución Gamma cuasi-estática mostrada en la ecuación (49).

### 5.2.2. Índice de Gini

En la figura 5 se encontró que aumenta la desigualdad conforme aumenta  $s$ . Al simular el índice de Gini para distintos valores de  $s$  y  $\lambda$  se encuentra la figura 6. En esta se observa que la desigualdad aumenta conforme aumenta  $s$  y disminuye al aumentar  $\lambda$ .

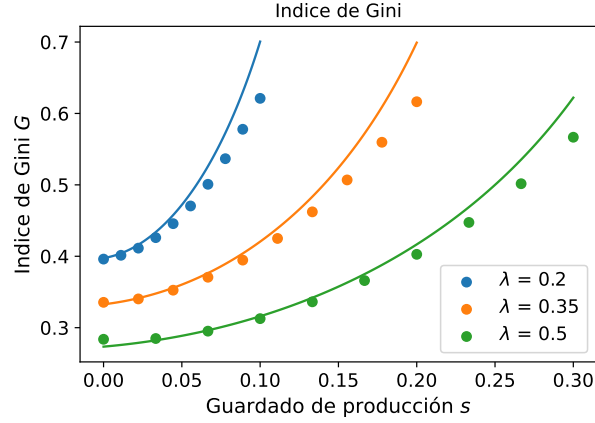


Figura 6: Datos simulados del índice de Gini para algunos valores de  $\lambda$  y  $s$ . La curva continua corresponde al índice de Gini para distribuciones Gamma dado por la ecuación 14.

En la figura 6 se comparan los valores del índice de Gini esperado para una distribución Gamma, dado por la ecuación (14), y para los parámetros  $a$  y  $b$  dados por (47) y (48). Sin embargo, conforme  $s$  se aproxima a  $\lambda$  se observa que el índice de Gini obtenido de la simulación se aleja del valor teórico para la distribución Gamma. Esto muestra que el ajuste a distribuciones Gamma es válido únicamente en cierto rango, lejos del límite  $s \rightarrow \lambda$ , para dichos rangos la distribución de riqueza obtenida no corresponde a una distribución Gamma.

### 5.3. Aplicación dos tipos de agentes: Trabajadores y productores

En este modelo se distingue entre trabajadores y productores, pidiendo que para cada productor se tenga una misma cantidad de trabajadores. Los productores pueden interactuar con otros productores, y obviamente con sus trabajadores al pagarles un salario, por lo que los trabajadores sólo pueden interactuar con sus productores. Así, para dos productores que interactúan entre sí:

$$w_i^* = w_i + \alpha \Delta w_i \quad w_j^* = w_j + \alpha \Delta w_j \quad (51)$$

Donde el factor  $\alpha$  va de 0 a 1, lo que significa que no todo es ganancia para los productores, y de su ingreso  $\Delta\omega$  deben destinar una parte al pago de los salarios.

El salario promedio para un trabajador del total asociado a los dos productores está dado por:

$$\langle Y_l \rangle = \frac{N_p}{2N_l} (1 - \alpha) (\Delta w_i + \Delta w_j) \quad (52)$$

Por otro lado, el salario promedio de un trabajador  $l$  tomado del conjunto del total de trabajadores asociados a ambos productores se puede escribir como se muestra en la anterior ecuación, por lo que su riqueza después del pago de dicho salario incrementa como:

$$w_l^* = w_l + \langle Y_l \rangle \quad (53)$$

De forma análoga, por medio de una aproximación de campo medio es posible encontrar la evolución en el tiempo de la riqueza promedio para un productor, y ya se sabe que dicha solución es de tipo exponencial en el tiempo, con un rate de crecimiento de riqueza dado por:

$$g_e = \frac{(1 - \lambda)}{(\lambda - s)} \alpha s \quad (54)$$

Donde se evidencia que se reduce en una fracción  $\alpha$  debido precisamente al pago de los salarios. De esta forma la riqueza promedio evoluciona como

$$\langle w \rangle = \langle w_0 \rangle e^{g_e \frac{2t}{N_p}} \quad (55)$$

Al simular los dos tipos de agentes, teniendo 10% de productores y 90% de trabajadores del total de agentes, se obtienen las distribuciones cuasi-estáticas que se muestran en la figura 7. En esta se tiene en general una mayor desigualdad (cuantificada por el índice de Gini  $G$ ) para los productores. Así mismo se encuentra que entre menor es la porción que se quedan los productores, es decir menores valores de  $\alpha$ , menor es la desigualdad, tanto entre productores como entre trabajadores.

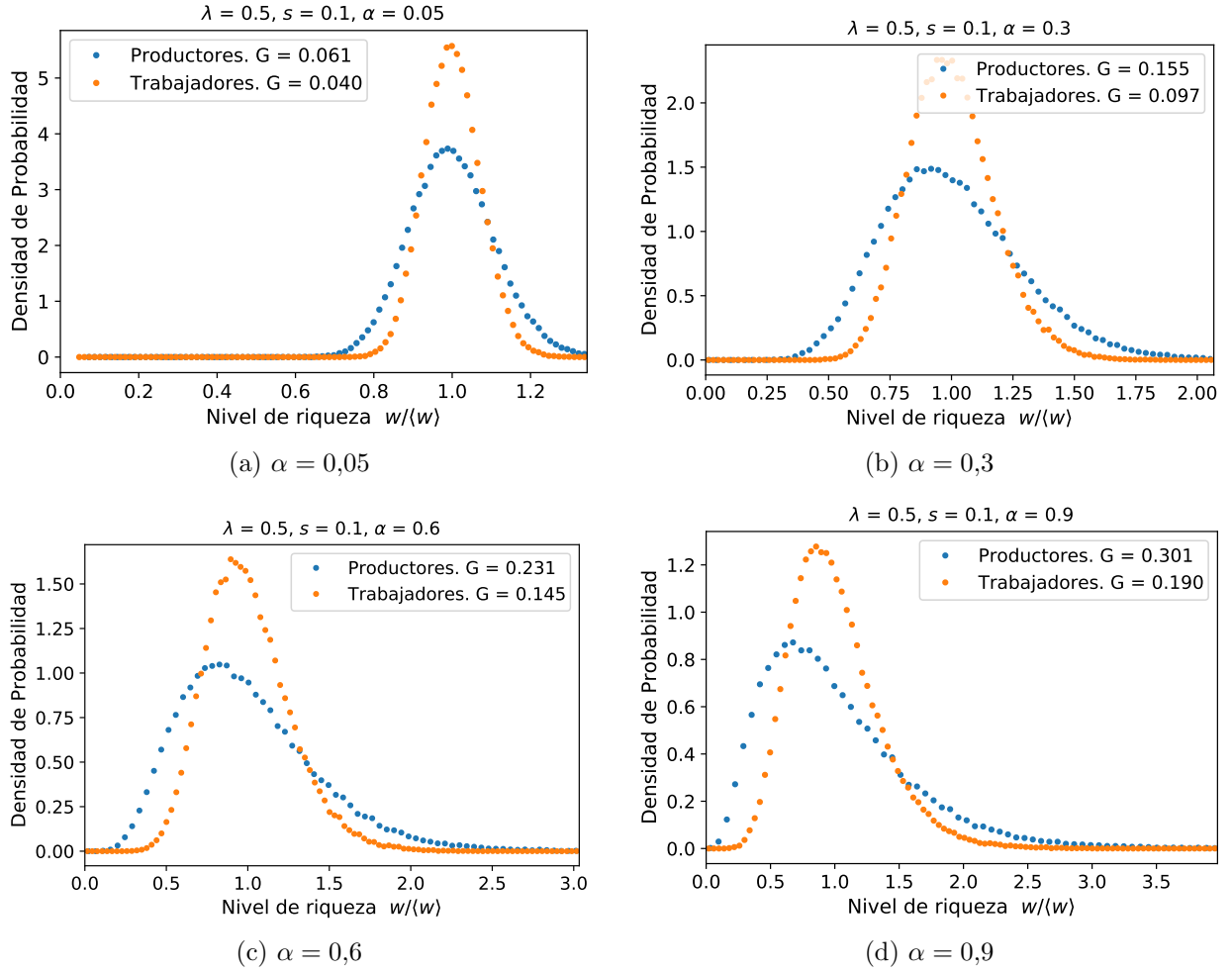


Figura 7: Distribuciones cuasi-estacionarias de riqueza de trabajadores y productores para distintos parámetros  $\lambda$  y  $s$

Finalmente se tiene la comprobación de la ecuación (55) y el rate de crecimiento (54). En este se comprueba que el crecimiento de riqueza de los productores se ve reducida por el factor  $\alpha$ , tal como se esperaba.

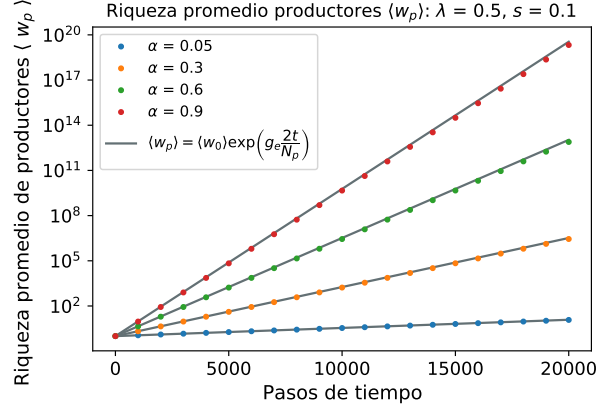


Figura 8: Evolución temporal de la riqueza promedio de los productores para distintos valores de  $\alpha$ , con  $\lambda = 0.5$ ,  $s = 0.1$ . En líneas continuas se tiene el comportamiento obtenido en la ecuación (55)

## 6. Conclusiones

A partir de incluir la maximización de la función de utilidad, que depende de dos parámetros exógenos definidos como la aversión al intercambio  $\lambda$  y el guardado de producción  $s$ , se realizó una extensión del modelo CC donde el sistema de agentes económicos evoluciona fuera del equilibrio, debido a que la riqueza promedio por agente aumenta exponencialmente, por lo que la riqueza total también lo hará de la misma manera, siendo así una cantidad no conservada en el tiempo. Además, la introducción del parámetro  $s$  permite que los agentes puedan capitalizar, guardando una parte de su producción y dejándola por fuera de los intercambios económicos, siendo así una característica que hace que este modelo se aproxime más a la realidad que lo que lo hace el modelo CC.

En el límite en el que  $s = 0$  se tiene que el modelo recupera el comportamiento del modelo CC, por lo que el sistema vuelve al equilibrio, conservándose la riqueza total. Por otro lado, en el que caso fuera del equilibrio donde  $s \neq 0$ , se tiene que la distribución de la riqueza sigue una distribución gamma para valores de  $\lambda$  y  $s$  fijos.

Se estudió el comportamiento del índice de Gini como función del guardado de producción  $s$ , para valores de  $\lambda$  fijo, encontrándose que a medida que aumenta  $s$  el índice crece. Esto indica que entre más capitalizan los agentes guardando su producción (acumulando riqueza) más desigualdad hay en el sistema. También, a medida que la aversión al intercambio  $\lambda$  aumenta, la curva que sigue el índice de Gini es más baja que la anterior, lo que significa que si los agentes intercambian menos dinero en cada transacción entonces la desigualdad en el sistema es menor. Un resultado adicional que se encontró es que los valores obtenidos con la simulación discrepan del ajuste del comportamiento esperado para el índice de Gini de una distribución de riqueza, que sigue una gamma a medida que  $\lambda \rightarrow s$ .

Por último, se aplicó dicho modelo al caso donde la población de agentes económicos se divide en trabajadores y productores, imponiendo la condición de que los únicos intercambios económicos sean entre distintos productores, como puede ocurrir en un negocio entre empresas, y de éstos con sus trabajadores, lo que vendría a ser el pago de los salarios. Se encontró que se puede estudiar el comportamiento de la distribución de riqueza de los productores a parte de la de los trabajadores, y que el rate de crecimiento exponencial de la primera se reduce en una fracción, con respecto a un agente que no tiene trabajadores. Adicionalmente, el rate de crecimiento es directamente proporcional a la cantidad de dinero que va destina al pago del salario de sus trabajadores. Por otro lado, se evidenció que el índice de Gini aumenta para ambos tipos de agente según aumenta la porción de ganancias que se quedan los productores, y en general, la desigualdad es mayor para los agentes productores que para los trabajadores.



## 7. Anexo

### 7.1. Maximización de las funciones de utilidad

Se busca maximizar la funciones de utilidad dadas por las ecuaciones (17) y (18) sujetas a las restricciones de las ecuaciones (20). Para utilizar el método de multiplicadores de Lagrange se definen las funciones (22). Al derivar e igualar estas funciones a cero se puede llegar a la ecuación (5) para cada agente, de forma que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i} = A\theta[Ax_i]^{\theta-1}[Az_i]^\phi[w_i^*]^\lambda - \mu_i Ap_x = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial x_j} = A\theta[Ax_j]^{\theta-1}[Az_j]^\phi[w_j^*]^\lambda - \mu_j Ap_x = 0 \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial z_i} = A\phi[Ax_i]^\theta[Az_i]^{\phi-1}[w_i^*]^\lambda - \mu_i Ap_z = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial z_j} = A\phi[Ax_j]^\theta[Az_j]^{\phi-1}[w_j^*]^\lambda - \mu_j Ap_z = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial w_i^*} = \lambda[Ax_i]^\theta[Az_i]^{\phi-1}[w_i^*]^{\lambda-1} - \mu_i = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial w_j^*} = \lambda[Ax_j]^\theta[Az_j]^{\phi-1}[w_j^*]^{\lambda-1} - \mu_j = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mu_i} = Ap_x x_i + Ap_z z_i + w_i^* - w_i - p_x X = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \mu_j} = Ap_x x_j + Ap_z z_j + w_j^* - w_j - p_z Z = 0 \quad (63)$$

Es evidente que las ecuaciones (62) y (63) corresponden a la restricción de la función de utilidad que se quieren maximizar. De las ecuaciones (56) y (60) se puede despejar el termino  $\mu_i$  respectivamente, y dividir una ecuación sobre la otra, obteniendo:

$$\frac{\mu_i}{\mu_i} = \frac{\theta[Ax_i]^{\theta-1}[Az_i]^\phi[w_i^*]^\lambda}{p_x \lambda[Ax_i]^\theta[Az_i]^{\phi-1}[w_i^*]^{\lambda-1}} \quad (64)$$

Luego:

$$1 = \frac{\theta[w_i^*]}{p_x \lambda[Ax_i]} \quad (65)$$

Y se reescribe como:

$$x_i = \frac{\theta}{\lambda A p_x} w_i^* \quad (66)$$

Con las parejas de ecuaciones (58,60), (57,61), y (59,61) se realiza un procedimiento análogo y se llega a las funciones de demanda:

$$z_i = \frac{\phi}{\lambda A p_z} w_i^* \quad z_j = \frac{\phi}{\lambda A p_z} w_j^* \quad x_j = \frac{\theta}{\lambda A p_x} w_j^* \quad (67)$$

Ahora bien, reemplazando los resultados obtenidos para  $x_i$  y  $z_i$  en la restricción dada por la ecuación (62), se tiene:

$$A p_x \left( \frac{\theta}{\lambda A p_x} w_i^* \right) + A p_z \left( \frac{\phi}{\lambda A p_z} w_i^* \right) + w_i^* - w_i - p_x X = 0 \quad (68)$$

$$\implies \frac{\theta}{\lambda} w_i^* + \frac{\phi}{\lambda} w_i^* + w_i^* - w_i - p_x X = 0 \quad (69)$$

$$\implies (\theta + \phi + \lambda) \frac{w_i^*}{\lambda} - w_i - p_x X = 0 \quad (70)$$

Tomando en cuenta que las potencias de la función de demanda están normalizadas a 1, se tiene que  $\theta + \phi + \lambda = 1$ . Por lo tanto:

$$\frac{w_i^*}{\lambda} - w_i - p_x X = 0 \quad (71)$$

$$\implies w_i^* = \lambda[w_i + p_x X] \quad (72)$$

Se realiza el proceso análogo para la ecuación (63), donde se reemplaza los resultados de  $x_j$  y  $z_j$  para obtener:

$$w_j^* = \lambda[w_j + p_z Z] \quad (73)$$

Se puede utilizar estas funciones de demanda para encontrar una relación entre el valor de las producciones de cada agente. Para ello se toma la ecuación (16) y los resultados para  $x_{i,j}$  y  $z_{i,j}$  para obtener:

$$p_x X = p_x(x_i + x_j) = \frac{\theta}{\lambda A} [w_i^* + w_j^*] \quad p_z Z = p_z(z_i + z_j) = \frac{\phi}{\lambda A} [w_i^* + w_j^*] \quad (74)$$

Dividiendo una ecuación entre la otra:

$$\frac{p_x X}{p_z Z} = \frac{\theta}{\phi} \quad (75)$$

$$\implies p_z Z = \frac{\phi}{\theta} p_x X \quad (76)$$

Ahora bien, para encontrar los precios  $p_x$  y  $p_z$ , correspondientes a los precios de liquidación, se toman las ecuaciones (20) y se suman, obteniendo:

$$A p_x(x_i + x_j) + A p_z(z_i + z_j) + w_i^* + w_j^* = w_i + w_j + p_x X + p_z Z \quad (77)$$

$$\implies A p_x X + A p_z Z + w_i^* + w_j^* = w_i + w_j + p_x X + p_z Z \quad (78)$$

Teniendo en cuenta que  $A = 1 - s$ , se puede reorganizar de forma que:

$$w_i^* + w_j^* - s(p_x X + p_z Z) = w_i + w_j \quad (79)$$

Reemplazando los resultados obtenidos en las funciones de demanda para  $w_i^*$  y  $w_j^*$  se tiene:

$$\lambda(w_i + w_j + p_x X + p_z Z) - s(p_x X + p_z Z) = w_i + w_j \quad (80)$$

$$\implies (1 - \lambda)[w_i + w_j] = (\lambda - s)[p_x X + p_z Z] \quad (81)$$

$$\implies p_x X + p_z Z = \frac{(1 - \lambda)}{(\lambda - s)}[w_i + w_j] \quad (82)$$

Usando la relación dada por (76) y definiendo el factor aleatorio  $\varepsilon = \frac{\theta}{\theta + \phi}$  se obtienen los siguientes resultados para los precios:

$$p_x = \frac{\varepsilon(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{X[\lambda - s]} \quad (83)$$

$$p_z = \frac{(1 - \varepsilon)(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{Z[\lambda - s]} \quad (84)$$

Por último, se puede expresar la riqueza de cada agente después de la interacción como  $w_{i,j}^* = w_{i,j} + \Delta w_{i,j}$ . De esta manera se puede expresar el cambio de riqueza por agente como:

$$\Delta w_i = w_i^* - w_i = \lambda[w_i + p_x X] - w_i \quad (85)$$

$$\Delta w_j = w_j^* - w_j = \lambda[w_j + p_z Z] - w_j \quad (86)$$

Donde ya se utilizaron los resultados para  $w_{i,j}^*$  de las funciones de demanda. Reemplazando los precios de liquidación encontrados se encuentra entonces para el agente i:

$$\Delta w_i = \lambda \left[ w_i + \frac{\varepsilon(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{[\lambda - s]} \right] - w_i \quad (87)$$

$$= \frac{\lambda(\lambda - s)w_i}{[\lambda - s]} + \frac{\varepsilon\lambda(1 - \lambda)[w_i + w_j]}{[\lambda - s]} - w_i \quad (88)$$

$$= \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} \lambda[\varepsilon(w_i + w_j) - w_i] + \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} s w_i \quad (89)$$

Y para el agente j:

$$\Delta w_k = \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} \lambda[-\varepsilon(w_i + w_j) + w_i] + \frac{1 - \lambda}{\lambda - s} s w_j \quad (90)$$

## 7.2. Ecuación de Boltzmann para la evolución de la distribución de riqueza

La ecuación de Boltzmann (39) describe la evolución en el tiempo para una función distribución  $f$  definida para un sistema fuera del equilibrio, donde dicha evolución está dada por el parámetro de colisión  $Q(f(w_i), f(w_j))$  entre dos agentes del sistema. Ahora bien, las colisiones en este sistema vendrían a ser las transacciones que ocurren entre agentes se pueden entender como las que ocurren en un gas de partículas clásico donde las velocidades finales de cada partícula después de la colisión corresponderán a una fracción de las velocidades iniciales, tal y como se establece en las ecuaciones (40) y (41). Luego, el número total de transacciones  $[w_i, w_j] \longrightarrow [w_i^*, w_j^*]$  se puede escribir como:

$$\beta_{[w_i, w_j] \longrightarrow [w_i^*, w_j^*]} f(w_i, \zeta, t) f(w_j, \zeta, t) dw dv dw^* dv^* \quad (91)$$

Donde el coeficiente  $\beta_{[w_i, w_j] \rightarrow [w_i^*, w_j^*]}$  es el rate de transacciones por unidad tiempo, análogo al rate de colisión para un gas diluido en una dimensión. Luego, en general, la variación de la densidad de probabilidad  $f(w, \zeta, t)$ , con  $\zeta$  un parámetro estocástico, depende de dos tipos de transacciones, denominadas como pérdidas  $L$  y ganancias  $G$ , las cuales están dadas por:

$$L = dw \int \beta_{[w, v] \rightarrow [w^*, v^*]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) dv dw^* dv^* \quad (92)$$

$$G = dw \int \beta_{[w^*, v^*] \rightarrow [w, v]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) dv dw^* dv^* \quad (93)$$

De este modo, el incremento de la distribución de densidad debido a las transacciones se puede calcular como las ganancias menos las pérdidas  $Qdw = G - L$ , por lo que la ecuación de Boltzmann en este sistema queda escrita como:

$$\frac{df(w, \zeta, t)}{dt} = \int [\beta_{[w^*, v^*] \rightarrow [w, v]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) - \beta_{[w, v] \rightarrow [w^*, v^*]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t)] dv dw^* dv^* \quad (94)$$

Por lo tanto, en el estado de equilibrio se debe cumplir que las ganancias igualan a las pérdidas, y la anterior expresión se anula.

Luego, para aplicar la formulación débil de la ecuación de Boltzmann se introduce una función de prueba del tipo  $\Phi(w)$ , y suponiendo que se tiene una simetría temporal, i.e., que el proceso es reversible, se tiene la simetría de intercambio entre las variables  $w, v \rightarrow w^*, v^*$ , por lo que la ecuación de Boltzmann se puede reescribir como:

$$\frac{df(w, \zeta, t)}{dt} = \int \beta_{[w^*, v^*] \rightarrow [w, v]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) [\Phi(w) - \Phi(w^*)] dw dv dw^* dv^* \quad (95)$$

Ahora, simetrizando la anterior ecuación mediante el intercambio  $w, w^* \rightarrow v, v^*$ , sumando este resultado al anterior y dividiendo por dos se tiene:

$$\int Q(f, f) \Phi(w) dw = \frac{1}{2} \int \beta_{[w, v] \rightarrow [w^*, v^*]} f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) [\Phi(w^*) + \Phi(v^*) - \Phi(w) - \Phi(v)] dw dv dw^* dv^* \quad (96)$$

Luego, el rate de transacciones (interacción)  $\beta$  se espera que depende del parámetro estocástico  $\zeta$ , de tal forma que  $d\zeta$  sea proporcional a la sección eficaz de la interacción. Además, la dinámica del sistema fue definida de tal forma que en cada paso de tiempo sólo dos agentes interactúan en el mercado, i.e., sólo una pareja de las  $N/2$  posibles. Bajo ambas consideraciones, el rate de transacciones por unidad de tiempo puede ser modelado como  $\beta_{[w, v] \rightarrow [w^*, v^*]} = \frac{2}{N} d\zeta$ . Con base a lo anterior, se obtiene:

$$\int \frac{df(w, \zeta, t)}{dt} \Phi(w) dw = \frac{1}{N} \langle \int f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) [\Phi(w^*) + \Phi(v^*) - \Phi(w) - \Phi(v)] dw dv dw^* dv^* \rangle \quad (97)$$

Ahora bien, si se reemplazan las funciones de prueba de la forma  $\Phi(w) = w^r$  lo que obtiene es la evolución de los momentos de la distribución:

$$\int \frac{df(w, \zeta, t)}{dt} \Phi(w) dw = \frac{1}{N} \langle \int f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) [(w^*)^r + (v^*)^r - w^r - v^r] dw dv dw^* dv^* \rangle \quad (98)$$

Por lo que al reemplazar las reglas de interacción dadas por (40) y (41) se obtiene la siguiente expresión:

$$\int \frac{df(w, \zeta, t)}{dt} w^r dw = \frac{1}{N} \langle \int f(w, \zeta, t) f(v, \zeta, t) \left[ \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (p_1^k q_1^{r-k} + p_2^k q_2^{r-k}) w^k v^{r-k} - w^r - v^r \right] dw dv dw^* dv^* \rangle \quad (99)$$

De esta forma, definiendo los momentos de la distribución como:

$$M_r = \int f(w, \zeta, t) w^r dw \quad (100)$$

y factorizando los términos  $k = 0$  y  $k = r$ , se obtiene la ecuación (44).

### 7.3. Código

El código realizado para el presente informe se encuentra en el siguiente repositorio en [GitHub](https://github.com/dfortizgu/investigacio-teorica/blob/main/investigacion_teorica.py):

[https://github.com/dfortizgu/investigacio-teorica/blob/main/investigacion\\_teorica.py](https://github.com/dfortizgu/investigacio-teorica/blob/main/investigacion_teorica.py)

Además, fue enviado como anexo en el formulario que se dispuso para ello.

### Referencias

- <sup>1</sup>P. Chaikin y T. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics (4th print edition)*, 2007.
- <sup>2</sup>A. Chakraborti y B. K. Chakrabarti, “Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution”, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **17**, 167-170 (2000).
- <sup>3</sup>D. G. R. Claudia Aburto Rancano, *Preferencias y utilidad del consumidor* (Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2011), págs. 9-16.
- <sup>4</sup>A. Dragulescu y V. M. Yakovenko, “Statistical mechanics of money”, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **17**, 723-729 (2000).
- <sup>5</sup>M. Gallegati, S. Keen, T. Lux y P. Ormerod, “Worrying trends in econophysics”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **370**, 1-6 (2006).
- <sup>6</sup>Z. Hao y V. P. Singh, “Entropy-based parameter estimation for extended Burr XII distribution”, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **23**, 1113-1122 (2009).
- <sup>7</sup>J.-i. Inoue, A. Ghosh, A. Chatterjee y B. K. Chakrabarti, “Measuring social inequality with quantitative methodology: analytical estimates and empirical data analysis by gini and k indices”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **429**, 184-204 (2015).
- <sup>8</sup>J.-i. Inoue, A. Ghosh, A. Chatterjee y B. K. Chakrabarti, “Measuring social inequality with quantitative methodology: Analytical estimates and empirical data analysis by Gini and k indices”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **429**, 184-204 (2015).
- <sup>9</sup>A. T. Jerrold Marsden, *Cálculo Vectorial* (Pearson, 2004), págs. 217-222.
- <sup>10</sup>W. Kenton, *Clearing Price*, (2021) <https://www.investopedia.com/terms/c/clearingprice.asp>.
- <sup>11</sup>H. J. Lee, *Fundamentals of Theoretical Plasma Physics* (Hanyang University, 2019).
- <sup>12</sup>B. Mandelbrot, “The Pareto-Levy law and the distribution of income”, *International economic review* **1**, 79-106 (1960).
- <sup>13</sup>L. Pareschi y G. Toscani, “Self-similarity and power-like tails in nonconservative kinetic models”, *Journal of statistical physics* **124**, 747-779 (2006).
- <sup>14</sup>M. Patriarca, A. Chakraborti y K. Kaski, “Statistical model with a standard  $\Gamma$  distribution”, *Physical Review E* **70**, 016104 (2004).

- <sup>15</sup>D. S. Quevedo y C. J. Quimbay, “Non-conservative kinetic model of wealth exchange with saving of production”, *The European Physical Journal B* **93**, 1-12 (2020).
- <sup>16</sup>P. D. B. R. K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Elsevier, 2004), págs. 217-222.
- <sup>17</sup>G. Westreicher, *Función de demanda*, (2019) <https://economipedia.com/definiciones/funcion-de-demanda.html>.