Asignación digital de algebra moderna

Daniel Fabian Osorio Valencia, Código: 8946508

October 2020

1 Ejercicio

Considere el anillo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Determine si este anillo es dominio entero, anillo de división y cuerpo.

2 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es dominio entero

Se quiere demostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un dominio entero, es decir, que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un anillo conmutativo y no tiene divisores de ceros. Inicialmente sabemos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$, ya que $a, b \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y por cerradura de $\cdot, +$ en $\mathbb{R}$, el elemento $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$. De este modo, como la operacion $\cdot$ es conmutativa en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$, se concluye que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un anillo conmutativo por herencia. Se quiere demostrar ahora que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ no tiene divisores de cero. Supongamos entonces por contradiccion, que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tiene divisores de ceros, es decir que $\exists_{x,y}(x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ tal que $xy = 0$, con $x, y \neq 0$:

$$xy = 0$$

Haciendo las sustituciones $x = (a + b\sqrt{2})$ y $y = (c + d\sqrt{2})$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ se tiene:

$$\begin{gathered}
(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 0 \\
(a + b\sqrt{2}) = 0 \vee (c + d\sqrt{2}) = 0 \text{ (propiedad ecuaciones)} \\
a = -b\sqrt{2} \vee c = -d\sqrt{2} \text{ (despeje)}
\end{gathered}$$

En ambos casos se tiene la igualdad:

$$\text{(racional)} = -\text{(racional)(irracional)}$$

Ahora como $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $a + b\sqrt{2} \neq 0$ y $c + d\sqrt{2} \neq 0$, por lo cual $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$. por lo cual, los numeros racionales de la ecuacion (racional) = -(racional)(irracional) son distintos de cero, es decir que no existe la posibiliad de que la formula sea:

$$\begin{aligned} 0 &= -(0)(\text{irracional}) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned} (\text{racional}) &= -(\text{racional})(\text{irracional}) \\ (\text{racional}) &= -(\text{irracional}) \text{ (propiedad irracionales)} \\ (\text{racional}) &= (\text{irracional}) \text{ (propiedad irracionales)} \end{aligned}$$

Asi se llega a una contradiccion en ambos casos, es decir, que nuestra suposicion inicial es falsa, por lo cual, $\neg\exists_{x,y}(x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ tal que $xy = 0$, con $x, y \neq 0$. Finalemente se concluye que como $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es conmutativo y no tiene divisores de cero, entonces $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un dominio entero. $\square$

3 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es anillo con division

Se quiere demostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un anillo con division, es decir, que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ es un grupo con la operacion $\cdot$. Se debe demostrar entonces las propiedades de clausura, asociacion, modulativa e invertiva para $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$:

3.1 Clausurativa:

Sea $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ (esto implica que $a, b, c, d \neq 0$ ya que $0 = 0 + 0\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned} &(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) \\ &ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + bd\sqrt{2}\sqrt{2} \text{ (distributiva)} \\ &(ac + 2bd) + (ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2}) \text{ (simplificacion y asociativa)} \\ &k + (ad + cb)\sqrt{2} \text{ (clausurativa } +, \cdot \text{ en } \mathbb{Q} \text{ y factorizacion)} \\ &k + l\sqrt{2} \text{ (clausurativa } +, \cdot \text{ en } \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

como $k, l \in \mathbb{Q}$ y $k, l \neq 0$ (ya que $a, b, c, d \neq 0$) , entonces $k + l\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ por lo cual se cumple la propiedad clausurativa.

3.2 Asociativa:

Anteriormente se demostro que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$, por lo cual $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^* \subset \mathbb{R}$. De este modo la asociatividad en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ se hereda de $\mathbb{R}$.

3.3 Modulativa:

Como el modulo para $\cdot$ en $\mathbb{R}$ es el 1, y $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ en la forma $1 + 0\sqrt{2}$, la propiedad modulativa en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ tambien se hereda de $\mathbb{R}$.

3.4 Invertiva:

Sea $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ (esto implica que $a, b \neq 0$ ya que $0 = 0 + 0\sqrt{2}$):

$$a + b\sqrt{2} \cdot \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = 1$$

por lo cual, el inverso de $a + b\sqrt{2}$ es $\frac{1}{a+b\sqrt{2}}$, que en la forma $x + y\sqrt{2}$ con $x, y \in \mathbb{Q}$, seria:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \\
\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot &\frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} \text{ (multiplicacion por 1)} \\
&\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - b^2 2} \text{ (diferencia de cuadrados)} \\
\frac{a}{a^2 - b^2 2} - &\frac{b\sqrt{2}}{a^2 - b^2 2} \text{ (propiedad fraccion)} \\
\frac{a}{a^2 - b^2 2} + &\frac{-b}{a^2 - b^2 2}\sqrt{2} \\
&k + l\sqrt{2} \text{ } (a, b \neq 0 \text{ y clausurativa } +, \cdot, \div \text{ en } \mathbb{Q})
\end{aligned}$$

como $k, l \in \mathbb{Q}$ y $k, l \neq 0$ (ya que $a, b, c, d \neq 0$), entonces $k + l\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$, por lo cual $a + b\sqrt{2}$ tiene inverso.

Como se cumplen todas las propiedades, es posible concluir que $\mathbb{Q}$ es un anillo con division. $\square$

4 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un cuerpo

Como $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es conmutativo y es un anillo con division, entonces por definicion de cuerpo, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un cuerpo. $\square$