

---

Apontamentos de **Análise Matemática II**

---

Raquel Barreira

**ESTBarreiro/IPS**

2011/2012

# Prefácio

Estes apontamentos foram produzidos com o intuito de servirem de apoio às aulas de Análise Matemática II para os cursos de Engenharia Civil e Engenharia Química da ESTBarreiro/IPS. Não se pretendeu produzir um documento formal e completo mas sim sintetizar conceitos e ilustrá-los através de exemplos pelo que as demonstrações dos teoremas e proposições apresentados foram omitidas. Assim, o leitor deverá sempre entender este texto apenas como base de partida para um estudo mais aprofundado para o qual deverá consultar demais bibliografia sobre os temas abordados.

Quaisquer sugestões e/ou correções por parte do leitor são bem-vindas e serão tidas em conta numa próxima revisão do texto.

Bom estudo!

Raquel Barreira, 2012

# Conteúdo

<b>Prefacio</b>	<b>i</b>
<b>1 Funções reais definidas em <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Domínios . . . . .	2
1.3 Gráficos . . . . .	3
<b>2 Limites e continuidade</b>	<b>7</b>
2.1 Noções topológicas . . . . .	7
2.2 Limite . . . . .	10
2.2.1 Propriedades dos limites . . . . .	12
2.2.2 Limites direccionais . . . . .	13
2.3 Continuidade . . . . .	16
<b>3 Diferenciabilidade</b>	<b>19</b>
3.1 Derivadas parciais de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	19
3.1.1 Gradiente . . . . .	22
3.2 Derivadas direccionais . . . . .	24
3.3 Diferenciabilidade . . . . .	25
3.4 Derivada da função composta . . . . .	32
3.5 Extremos livres . . . . .	34
3.6 Extremos condicionados . . . . .	36
3.6.1 Método analítico de determinar a natureza de um ponto crítico de $L$ . . . . .	37
<b>4 Integração</b>	<b>39</b>
4.1 Integrais duplos . . . . .	39
4.1.1 Regiões retangulares . . . . .	39
4.1.2 Regiões elementares . . . . .	40
4.1.3 Aplicação do integral duplo ao cálculo de áreas . . . . .	44
4.1.4 Aplicação do integral duplo ao cálculo de volumes . . . . .	44

4.1.5	Coordenadas polares . . . . .	46
4.2	Integrais triplos . . . . .	48
4.2.1	Coordenadas cilíndricas . . . . .	51
4.2.2	Coordenadas esféricas . . . . .	53
4.2.3	Aplicação do integral triplo ao cálculo de volumes . . .	55
4.2.4	Aplicação do integral triplo ao cálculo do centro de massa	57
<b>5</b>	<b>Equações diferenciais</b>	<b>58</b>
5.1	Introdução . . . . .	58
5.2	Equações diferenciais de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	60
5.2.1	Equações de variáveis separáveis . . . . .	60
5.2.2	Equações diferenciais lineares de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	62
5.2.3	Equações diferenciais totais exatas . . . . .	63
5.3	Equações diferenciais lineares de ordem $n$ . . . . .	66
5.3.1	Equações lineares de coeficientes constantes . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Breves revisões de Geometria Analítica</b>	<b>74</b>
A.1	Em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	74
A.1.1	Equação geral da circunferência . . . . .	74
A.1.2	Equação geral da elipse . . . . .	74
A.1.3	Equação geral da hipérbole . . . . .	75
A.1.4	Equação geral da parábola . . . . .	75
A.2	Em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	76
A.2.1	Recta e plano . . . . .	76
A.2.2	Quádricas . . . . .	76
A.2.3	Classificação das quádricas . . . . .	76

# Capítulo 1

## Funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$

### 1.1 Introdução

Em Análise Matemática I foram estudadas funções reais de (uma) variável real, isto é, funções definidas num subconjunto real,  $D$ , com valores em  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

abordando aspectos como continuidade, diferenciabilidade e integração.

Em Análise Matemática II vamos proceder a uma generalização desse mesmo estudo no sentido em que vamos considerar funções reais de duas ou mais variáveis reais. Neste caso, as funções vão estar definidas num subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  e vão tomar valores em  $\mathbb{R}$ .

**Obs.** *Relembremos (da disciplina de Álgebra Linear) que*

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

com  $n \in \mathbb{N}$ .

Considerando  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , as funções com que iremos trabalhar podem definir-se, genericamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Muitas vezes, utilizamos a simplificação de notação  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  devendo ficar claro, pelo contexto, se  $x$  se trata de uma única variável real ou

de um elemento em  $\mathbb{R}^n$ . Note ainda que as letras escolhidas para variáveis são completamente arbitrárias. Por exemplo, em vez de  $(x_1, x_2, x_3)$  podemos utilizar  $(x, y, z)$  ou qualquer outra escolha de letras.

Esta generalização a funções de várias variáveis tem imensa importância em muitas aplicações. Imagine, por exemplo, que pretende considerar a temperatura do chão de uma sala. Admitindo que o chão é plano, podemos considerá-lo como um subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  e precisamos apenas de 2 variáveis para definir cada ponto  $(x, y)$ . Assim, a função temperatura seria uma função  $T$  que a cada ponto  $(x, y)$  faria corresponder um determinado valor real  $z$ , isto é:

$$\begin{aligned} T : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = T(x, y). \end{aligned}$$

Um exemplo de uma tal função poderia ser

$$\begin{aligned} T : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = T(x, y) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Se pretendessemos agora considerar a temperatura em toda a sala,  $D$  já seria um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  e a função temperatura poderia ser definida, genericamente, como:

$$\begin{aligned} T : D \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto w = T(x, y, z). \end{aligned}$$

No que se segue (até final do Capítulo e próximos) serão introduzidas definições e teoremas para funções  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $n = 2$ , isto é, funções reais de duas variáveis apenas, uma vez que simplificará muito as notações utilizadas e a adaptação ao caso de mais do que duas variáveis não introduz, geralmente, dificuldades. No entanto, poderão também aparecer no texto referências ao caso mais geral de funções de três ou mais variáveis.

## 1.2 Domínios

### Definição 1.2.1

Considere  $f$  uma função real de 2 variáveis. Chama-se **domínio da função** ao subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  para o qual a função está definida.

### Exemplo 1.2.2

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . A função só

está bem definida se  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$  uma vez que a raiz quadrada não está definida para valores reais negativos<sup>1</sup>.

Cálculo auxiliar:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

Logo,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Concluimos assim que  $D$ , o domínio desta função, é um círculo, centrado na origem, de raio 1.

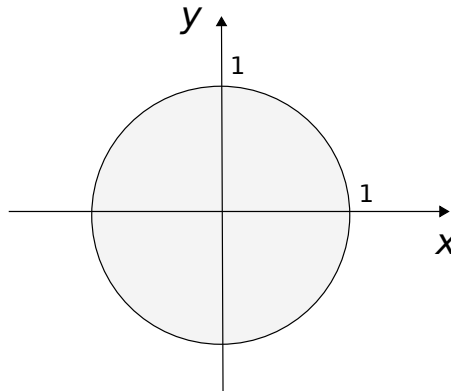


Figura 1.1: Representação do domínio da função do Exemplo 1.2.2.

## 1.3 Gráficos

### Definição 1.3.1

Consideremos uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Chama-se **gráfico de  $f$**  ao conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Relembremos que o gráfico de uma função real de variável real era representado num plano. A definição anterior indica-nos já que o gráfico de uma função de duas variáveis é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Em geral, trata-se de uma superfície no espaço tridimensional. A sua representação gráfica torna-se assim mais complicada.

Por vezes, para termos uma ideia de como é o gráfico da função, podemos recorrer a linhas de nível, tal como as usadas nas cartas topográficas para

<sup>1</sup>Importante rever domínios de funções estudadas em AMI.

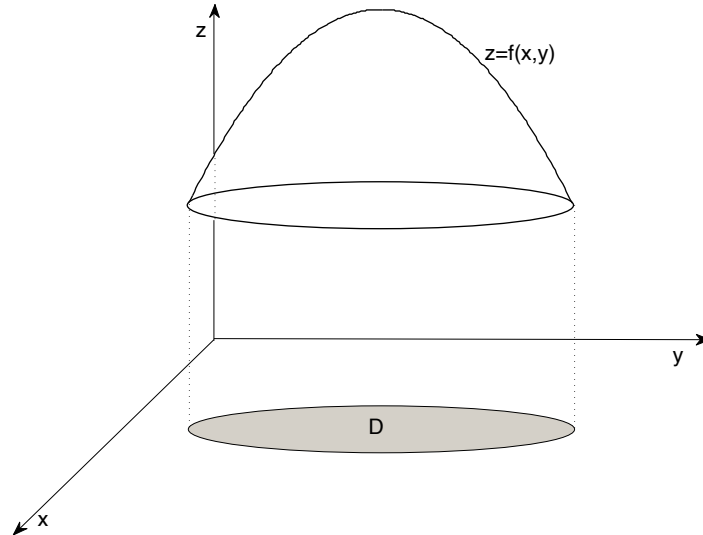


Figura 1.2: Exemplo da representação gráfica de uma função real de 2 variáveis.

indicar a altitude dos terrenos e que não são mais do que cortes em determinadas cotas. A projecção no plano dessas linhas de nível dão-nos a indicação do declive do terreno já que, se as cotas seguirem uma progressão aritmética de razão constante, em zonas em que estejam mais próximas o terreno terá um declive mais acentuado como acontece em picos montanhosos.

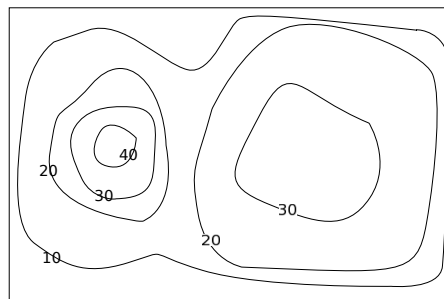


Figura 1.3: Consegue imaginar qual o relevo correspondente a esta carta topográfica?

Apresentamos a definição mais geral de conjunto de nível para funções de  $n$  variáveis e a definição particular das linhas de nível quando  $n = 2$ .



### Definição 1.3.2

Chama-se **conjunto de nível**  $k$ ,  $L(k)$ , de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ao conjunto de pontos do domínio nos quais a função toma um valor constante  $k$ , isto é,

$$L(k) = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x) = k\}.$$

No caso particular  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  chamamos **linha (ou curva) de nível de cota**  $k$  e representa-se por

$$L(k) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}.$$

**Obs.** Os conjuntos de nível podem ser vazios ou reduzirem-se a um ponto.

### Exemplo 1.3.3

Consideremos uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Pela expressão que define a função reconhecemos logo o gráfico como sendo um parabolóide. Mas vamos supôr que não o reconhecíamos como tal. Como poderíamos ter uma ideia de como é o gráfico desta função?

Repare que, se considerarmos as linhas de nível de cota  $k$ , obtemos

$$L(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\} = \begin{cases} \emptyset, & k < 0 \\ \{(0, 0, 0)\}, & k = 0 \\ \text{circunferência de raio } \sqrt{k}, & k > 0. \end{cases}$$

Informalmente, podemos então concluir que o gráfico desta função se encontra acima do plano  $z = 0$  e consiste em “empilhar” circunferências, centradas no eixo dos  $zz$  e tais que, para cada  $z = k$ , o seu raio é  $\sqrt{k}$ .

Poderemos ver um esboço do gráfico e algumas curvas de nível na Figura 1.4.

### Exemplo 1.3.4

Poderemos ver um outro exemplo na figura 1.5 onde estão representados o gráfico de uma função e alguns das suas curvas de nível.

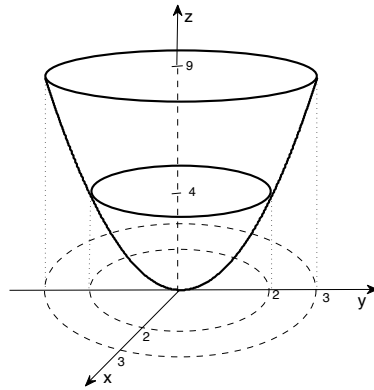


Figura 1.4: Esboço da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e linhas de nível para  $k = 4$  e  $k = 9$ .

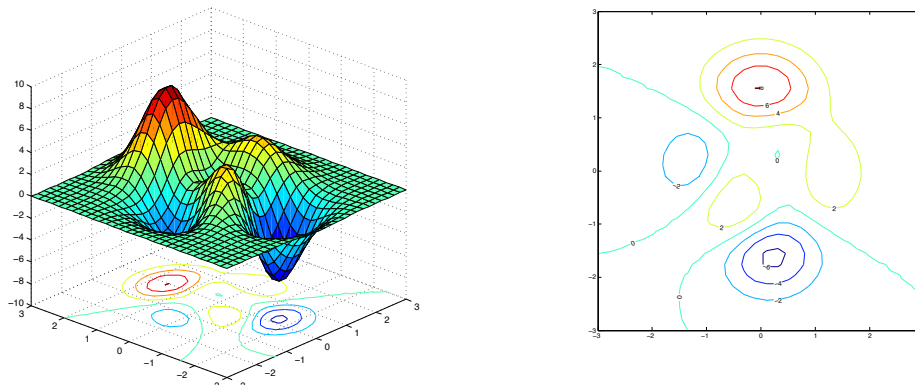


Figura 1.5: À esquerda, o gráfico de uma função e algumas linhas de nível; à direita, representação apenas das curvas de nível representadas no gráfico da esquerda.

# Capítulo 2

## Limites e continuidade

### 2.1 Noções topológicas

Para estudar limites, continuidade, diferenciabilidade, etc., vamos necessitar de introduzir a noção de proximidade entre dois pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Apresentaremos as definições para  $n = 2$  sendo trivial a sua generalização a  $n \in \mathbb{N}$ .

Vamos utilizar a norma euclideana, já nossa conhecida, para medir a distância entre dois pontos. Recordemos que a norma euclideana, em  $\mathbb{R}^2$ , é definida por

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

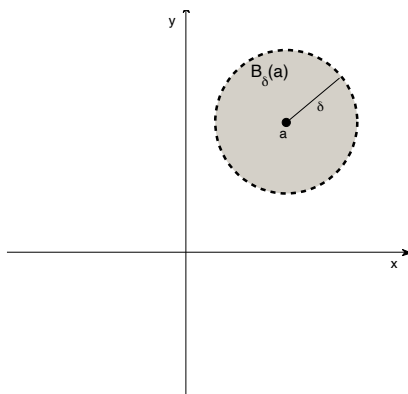
e a distância entre dois pontos  $x = (x_1, x_2)$  e  $a = (a_1, a_2)$  é dada por

$$d(x, a) = \|x - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}.$$

#### Definição 2.1.1

Sejam  $a \in \mathbb{R}^2$  e  $\delta > 0$ . Chama-se **bola aberta de centro em  $a$  e raio  $\delta$**  ao conjunto

$$B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \delta\}.$$



Esta definição de bola aberta vai permitir introduzir alguns conceitos topológicos. No que se segue, todas as bolas consideradas serão bolas abertas, a menos que haja indicação explícita do contrário.

### Definição 2.1.2

Sejam  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ .

- $\mathbf{a}$  diz-se um ponto **interior** a  $X$  se, e só se, existir uma bola de centro em  $\mathbf{a}$  contida em  $X$ ;
- $\mathbf{a}$  diz-se um ponto **exterior** a  $X$  se, e só se, existir uma bola de centro em  $\mathbf{a}$  contida no complementar de  $X$ ;
- $\mathbf{a}$  diz-se um ponto **fronteiro** de  $X$  se, e só se, qualquer bola de centro em  $\mathbf{a}$  conter pelo menos um ponto de  $X$  e um ponto do seu complementar;
- Chama-se, respetivamente, **interior**, **exterior** e **fronteira** de  $X$  ao conjunto dos pontos interiores, exteriores e fronteiros de  $X$  e representam-se, respetivamente, por  $\text{int } X$ ,  $\text{ext } X$  e  $\text{fr } X$ ;
- Chama-se **aderência** ou **fecho** de  $X$  e representa-se por  $\bar{X}$  a

$$\bar{X} = \text{int } X \cup \text{fr } X;$$

- Um ponto  $\mathbf{a}$  diz-se **ponto de acumulação de  $X$**  se, e só se, qualquer bola de centro em  $\mathbf{a}$  contém um número infinito de elementos de  $X$ ;
- Chama-se **derivado de  $X$** , e representa-se por  $X'$ , ao conjunto dos pontos de acumulação de  $X$ ;
- Um ponto  $\mathbf{a} \in X$  diz-se **ponto isolado de  $X$**  se, e só se, existir uma bola de centro em  $\mathbf{a}$  cuja intersecção com  $X$  seja apenas o próprio  $\mathbf{a}$ .

**Obs.** Os pontos fronteiros e os pontos de acumulação de um conjunto  $X$  podem pertencer ou não a  $X$ .

### Definição 2.1.3

Um conjunto  $X$  diz-se

- **aberto** se, e só se,  $X = \text{int } X$ ;
- **fechado** se, e só se,  $X = \bar{X}$ ;
- **limitado** se, e só se, existir uma bola que o contenha;

- **compacto** se, e só se, for fechado e limitado.

**Obs.** Há conjuntos que não são abertos nem fechados.

#### Exemplo 2.1.4

Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ .

Para representarmos graficamente este conjunto, observemos primeiro que

$$xy > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x > 0 \wedge y > 0)}_A \vee \underbrace{(x < 0 \wedge y < 0)}_B.$$

Recorde-se que o símbolo  $\wedge$  representa a operação lógica de **conjunção** e conduz à **intersecção** de conjuntos e que o símbolo  $\vee$  representa a operação lógica de **disjunção** e à **união** de conjuntos.

Posto isto, para representar a região  $A$  temos de intersectar as regiões definidas por  $x > 0$  e  $y > 0$  e para representar  $B$  temos de intersectar as regiões definidas por  $x < 0$  e  $y < 0$ .

A região  $X$  corresponde à união das duas regiões, isto é,  $X = A \cup B$ .

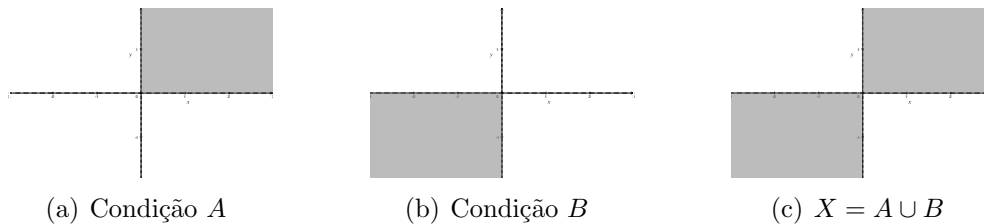


Figura 2.1: Representação gráfica de  $X$  (note que os eixos coordenados  $xx$  e  $yy$  não pertencem a  $X$ ) .

- (i)  $\text{int } X = X$  o que implica que  $X$  é aberto;
- (ii)  $\text{fr } X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$ ;
- (iii)  $X$  não é limitado porque não existe nenhuma bola que o contenha;
- (iv)  $\bar{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$  o que implica que  $X$  não é fechado pois  $\bar{X} \neq X$ ;
- (v)  $X$  não é compacto pois não é fechado (nem limitado);
- (vi)  $X' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ .

#### Exercício

Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y > 0\}$ .

Determine o interior, fronteira, e fecho de  $X$ . Diga se se trata de um conjunto aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto. Determine  $X'$ .

## 2.2 Limite

Recordemos a definição de limite para funções reais de uma variável, isto é, para  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

ou seja, a distância de  $f(x)$  a  $L$  pode ser arbitrariamente pequena desde que a distância de  $x$  a  $a$  seja suficientemente pequena.

A generalização desta definição de limite para funções  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a seguinte:

### Definição 2.2.1

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  um ponto de acumulação de  $D$ . Diz-se que **limite de  $f$**  quando  $(x, y)$  tende para  $(a, b)$  é  $L$ , isto é, que

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y),$$

se, e só se,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \quad (2.1)$$

Mostrar, por definição, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

significa que para um valor arbitrário  $\epsilon > 0$  temos de encontrar um outro valor  $\delta > 0$  (que dependerá de  $\epsilon$ ) tal que todos os pontos  $(x, y)$  a uma distância de  $(a, b)$  inferior a  $\delta$  são transformados em pontos cuja distância a  $L$  é inferior a  $\epsilon$ .

**Obs.** Para aplicar a definição de limite, é útil recordar as seguintes desigualdades:

- $|x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2$
- $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $|\sin(x)| \leq |x|$

- $|\sin(x)| \leq 1$
- $|\cos(x)| \leq 1$
- $|\arctg(x)| < \frac{\pi}{2}$

### Exemplo 2.2.2

Prove, por definição, que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

Antes de começar, comecemos por observar que, neste caso,

$$L = 0, (a, b) = (0, 0), \text{ e } \|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário.

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta. \quad \text{por hipótese}$$

Logo, se tomarmos  $\delta = \epsilon$ , fica provado que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$$

como queríamos demonstrar.

NOTA: A estratégia utilizada foi majorar  $|f(x, y) - L|$  por uma quantidade que dependesse de  $\|(x, y) - (a, b)\|$  (o que, no caso deste exemplo, é simplesmente  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ). Deverá ser esta a estratégia a seguir neste tipo de demonstrações.

### Exemplo 2.2.3

Prove, por definição, que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário.

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{x^2 \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{x^2 |\sin(x)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\underset{(*)}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{por hipótese}$$

Logo, se tomarmos  $\delta = \epsilon$ , fica provado que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$$

como queríamos demonstrar.

Note que para obter a desigualdade (\*) utilizámos as seguintes desigualdades

$$|\sin(x)| \leq 1 \quad \text{e} \quad x^2 \leq x^2 + y^2.$$

E se em vez de  $|\sin(x)| \leq 1$  tivéssemos utilizado a desigualdade  $|\sin(x)| \leq |x|$ ?

### Resolução alternativa

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário.

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{x^2 \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 |x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x^2 + y^2 < \delta^2$$

por hipótese

Logo, basta tomar  $\delta$  tal que  $\delta^2 = \epsilon \Leftrightarrow \delta = \sqrt{\epsilon}$  para provar o que pretendemos, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon.$$

NOTA: Ainda que ambas as desigualdades que utilizámos para majorar  $|\sin(x)|$  possam ser utilizadas (e neste exemplo em particular tenham permitido chegar a uma conclusão) por vezes apenas uma delas nos permite tirar conclusões. Terá de ser avaliado, caso a caso, qual a desigualdade que mais nos interessa utilizar.

## 2.2.1 Propriedades dos limites

Da definição de limite resulta imediatamente que o limite de uma função constante é a própria constante.

### Proposição 2.2.4

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b)$  um ponto de acumulação de  $D$ . Tem-se que

- (i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y);$
- (ii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c f(x, y) = c \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y),$  para qualquer  $c \in \mathbb{R};$
- (iii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y);$
- (iv)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)}$  desde que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \neq 0$  e

$g(x, y) \neq 0$  numa vizinhança de  $(a, b);$

- (v)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = \left| \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f((x, y)) \right|.$



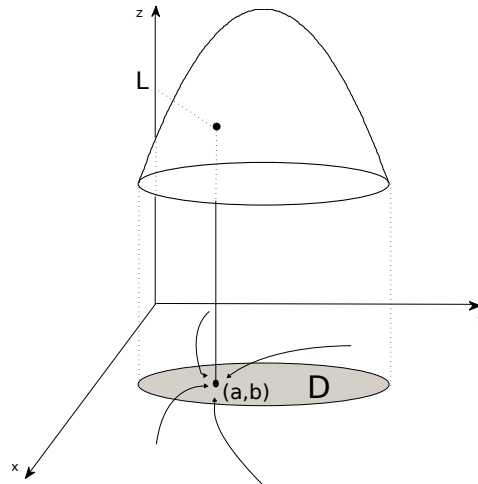
### 2.2.2 Limites direccionais

A definição 2.2.1 parte do princípio de que temos já um candidato a limite  $L$ . O que fazer quando, por simples substituição do ponto para o qual estamos a calcular o limite na expressão da função, obtemos uma indeterminação como é o caso do exemplo 2.2.2 apresentado anteriormente?

Recordemos que, para funções de uma variável, a existência de limite fica garantida pela existência dos limites laterais (à direita e à esquerda) do ponto para o qual o limite está a ser calculado, isto é, existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  se, e só se, existem  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

No entanto, para funções de duas variáveis,  $(x, y)$  pode aproximar-se de  $(a, b)$  ao longo de infinitas trajetórias! Mas no caso de existir  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , os valores de  $f$  estarão próximos de  $L$  independentemente da forma como  $(x, y)$  se aproxima de  $(a, b)$ .



Assim, se encontrarmos duas trajetórias de aproximação a  $(a, b)$  segundo as quais  $f(x, y)$  tem limites diferentes, podemos concluir que não existe limite. Organizando estas considerações:

#### Definição 2.2.5

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C \subset D$  uma trajetória e  $(a, b)$  um ponto de acumulação de  $C$ . Diz-se que  $L$  é o limite direccional de  $f$  relativamente a  $C$  quando  $(x, y)$  tende para  $(a, b)$  e escreve-se

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C}} f(x, y) = L$$

se o limite da restrição de  $f$  a  $C$  quando  $(x, y)$  tende para  $(a, b)$  é  $L$ .

### Proposição 2.2.6

Nas condições da definição anterior,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C}} f(x, y) = L,$$

para qualquer trajetória  $C$  admissível.

### Corolário 2.2.7

Se os limites direccionais forem diferentes, então não existe limite.

Estas proposições são úteis para:

- Encontrar um candidato a limite, calculando um qualquer limite direccional (e tentar provar, por definição, que esse é efectivamente o limite da função);
- Provar que uma dada função não tem limite (quando, calculando o limite ao longo de trajetórias distintas, obtemos valores distintos).

**Obs.** O cálculo de limites direccionais, por si só, nunca permite concluir que uma dada função tem limite!

### Exemplo 2.2.8

Suponhamos que queremos calcular o seguinte limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Por simples substituição de  $x$  por 0 e  $y$  por 0 na expressão, obtemos uma indeterminação  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

Consideremos como trajetórias admissíveis retas que passam em  $(0, 0)$ . As retas não verticais<sup>1</sup> que passam por  $(0, 0)$  têm equação<sup>2</sup>  $y = mx$ , onde  $m$  representa o declive da recta. Calculemos os limites direccionais ao longo dessas retas:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Concluimos que o limite depende do declive da recta escolhida o que implica que o limite inicial não existe.

<sup>1</sup>A recta vertical que passa por  $(0, 0)$  tem equação  $x = 0$  mas para este efeito basta recorrermos às não verticais

<sup>2</sup>Se o ponto em causa fosse  $(a, b) \neq (0, 0)$  a equação das retas a passarem por  $(a, b)$  seriam da forma  $y = m(x - a) + b$

### Exemplo 2.2.9

Suponhamos que não conhecíamos ainda o candidato a limite do Exemplo 2.2.2.

Mais uma vez, consideremos como trajetórias admissíveis as retas de equação  $y = mx$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1 + m^2)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{|x| \sqrt{1 + m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m|x|^2}{|x| \sqrt{1 + m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m|x|}{1 + m^2} = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Obtivemos, através do cálculo destes limites direccionais, o candidato a limite 0. Ficou já provado por definição, no Exemplo 2.2.2, que este é efetivamente o limite da função quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Note que, mesmo que o limite direccional segundo retas não dependa da recta escolhida, pode acontecer que utilizando uma trajetória diferente se obtenha um limite direccional distinto. Para ilustrar esta situação, apresentamos o exemplo seguinte.

### Exemplo 2.2.10

Consideremos a função  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{(y + x^2)^2}$ .

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$$

Procuremos um candidato a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  e, para tal, comecemos por calcular o limite direccional ao longo de retas que passam pela origem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{x^2 y}{(y + x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{(mx + x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 m}{(x(m + x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{(m + x)^2} = 0$$

Como o limite não depende do declive, nada podemos concluir acerca do limite em  $(0, 0)$ . Apenas podemos concluir que o limite, se existir, é zero. No entanto, da relação entre  $x$  e  $y$  somos levados a calcular primeiro o limite ao longo da parábola  $y = x^2$  antes de tentar provar por definição que o limite é zero.

Assim,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{(y + x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4}.$$

Como o limite ao longo da parábola deu um valor diferente do obtido para o limite ao longo de retas, podemos concluir que não existe limite da função no ponto  $(0, 0)$ .

## 2.3 Continuidade

### Definição 2.3.1

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in D$  um ponto de acumulação de  $D$ . Diz-se que  $f$  é **contínua em**  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Esta condição é equivalente a

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon.$$

Diz-se que  $f$  é contínua em  $D$  se for contínua em todos os pontos de  $D$ .

Das propriedades dos limites resulta que

- As funções polinomiais são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ ;
- As funções trigonométricas, exponencial e logaritmo são contínuas nos seus domínios;
- As funções racionais são contínuas em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  que não anulam o denominador;
- Somas, produtos e quocientes de funções contínuas são contínuas nos seus domínios;
- O módulo de uma função contínua ainda é uma função contínua.

### Teorema 2.3.2 (Função composta)

Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(D_f) \subset D_g$ ,  $f$  contínua em  $(a, b)$  e  $g$  é contínua em  $f(a, b)$ . Então  $g \circ f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $(a, b)$ .

### Exemplo 2.3.3

Do que foi dito anteriormente, é fácil justificar a continuidade de algumas funções:

- $f(x, y) = x^2 + xy^3$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$  visto ser uma função polinomial;

- $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$  é uma função contínua em todos os pontos para os quais  $x^2+y^2 \neq 0$ , isto é, em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , visto tratar-se de uma função racional;
- $e^{x^2-y}$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$  visto ser a composição da função  $f(x, y) = x^2 - y$ , contínua em  $\mathbb{R}^2$ , com a função  $g(x) = e^x$ , contínua em  $\mathbb{R}$ .

Apesar do exposto, para estudar a continuidade de uma função é, por vezes, necessário recorrer à definição de continuidade como no exemplo que se segue.

#### Exemplo 2.3.4

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  trata-se de uma função contínua por ser uma função racional para a qual o denominador não se anula.
- Para  $(x, y) = (0, 0)$  temos de estudar o comportamento da função recorrendo à definição de continuidade num ponto. A função será contínua em  $(0, 0)$  se, e só se,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0 \quad (2.3)$$

Como já tínhamos visto no Exemplo 2.2.2 que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , concluimos que (2.3) é verificado pelo que  $f$  é contínua também em  $(0, 0)$ .

Atendendo a (i) e (ii), concluimos que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

#### Definição 2.3.5

Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **prolongável por continuidade a um ponto**  $(a, b)$  se, e só se,  $(a, b)$  for um ponto de acumulação de  $D$  e existir  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ .

Chama-se **prolongamento por continuidade de  $f$  ao ponto  $(a, b)$**  à função  $g$  que coincide com  $f$  nos pontos onde  $f$  já está definida e que no ponto  $(a, b)$  toma o valor  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ , isto é,

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in D \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y), & \text{se } (x, y) = (a, b). \end{cases}$$

**Exemplo 2.3.6**

Considerando a função  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , cujo domínio é

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

dado que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , podemos concluir que  $f$  é prolongável por continuidade ao ponto  $(0, 0)$  e o seu prolongamento por continuidade é

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

# Capítulo 3

## Diferenciabilidade

### 3.1 Derivadas parciais de 1<sup>a</sup> ordem

Começemos por relembrar que, para funções reais de uma variável, isto é,  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o conceito de derivada é o que nos permite medir, localmente, a taxa de variação de uma função. Uma das formas de definir a derivada de  $f$  num ponto  $a$  é através de

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

caso este limite exista, o que nos dá a indicação da maior ou menor rapidez com que a função varia quando nos afastamos um pouco do ponto  $a$ . Relembramos ainda que  $f'(a)$  é o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ .

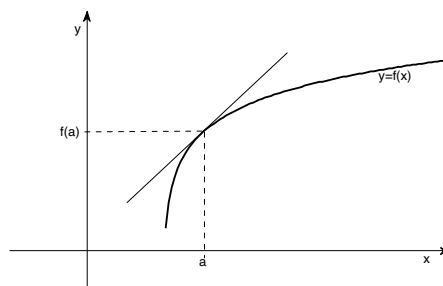


Figura 3.1: Gráfico de uma função  $f$  e reta tangente ao seu gráfico no ponto  $(a, f(a))$ .

Vamos agora estender esta noção a funções reais de duas variáveis (sendo simples a generalização a três ou mais variáveis).

Consideremos  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e um ponto  $(a, b)$  interior a  $D$ . Se pretendermos avaliar a variação da função quando nos afastamos um pouco do ponto  $(a, b)$ , deparamo-nos com uma dificuldade: há uma infinidade de direções possíveis, ao contrário das funções de uma variável em que a direção era apenas uma - o eixo das abcissas - embora houvessem dois sentidos (à direita e à esquerda do ponto em causa).

Se imaginarmos  $f(x, y)$  como representando a temperatura no chão de uma sala onde existe uma fonte de calor (uma lareira, por exemplo), é natural que partir de um ponto fixo, se avançarmos na direção e sentido da lareira a função vá aumentar e se avançarmos na direção e sentido de uma porta aberta a função vá diminuir. A taxa de variação depende, pois, da direção e sentido considerados.

Vamos começar por introduzir a definição de derivada ao longo de duas direções privilegiadas: a dos eixos coordenados:

**Definição 3.1.1** (Derivadas parciais)

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$ . Chama-se **derivada parcial (de 1ª ordem) da função  $f$  em ordem a  $x$  no ponto  $(a, b)$**  a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

e **derivada parcial (de 1ª ordem) da função  $f$  em ordem a  $y$  no ponto  $(a, b)$**  a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h},$$

caso estes limites existam.

As derivadas parciais também se podem representar por  $f'_x(a, b)$  e  $f'_y(a, b)$ .

O valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  representa a taxa de variação de  $f$  no ponto  $(a, b)$  na direção do eixo dos  $xx$  e o valor de  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  representa a taxa de variação de  $f$  no ponto  $(a, b)$  na direção do eixo dos  $yy$ .



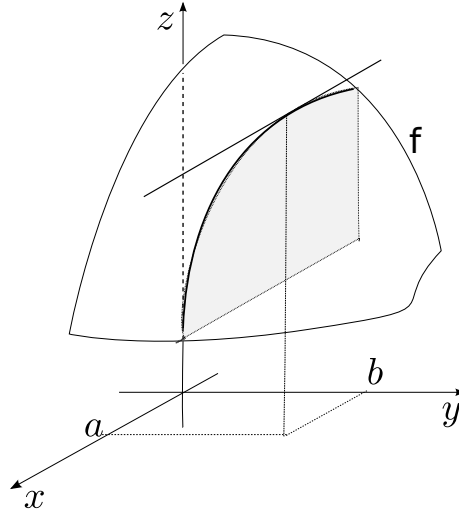


Figura 3.2: Esboço da taxa de variação de  $f$  em  $(a, b)$  segundo a direção do eixo dos  $xx$ .

### Exemplo 3.1.2

Considere  $f(x, y) = x^2 - 2y$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 4 - (-3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+h) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^2 - 2(2+h) - (-3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2\end{aligned}$$

Nem sempre precisamos recorrer à definição para calcular as derivadas parciais. Desde que a função esteja definida por uma única expressão na vi-

zinhança do ponto em causa, odemos recorrer às regras de derivação para funções de uma variável, considerando a outra variável como uma constante.

### Exemplo 3.1.3

Seja  $f(x, y) = \ln(xy) + \frac{y}{x}$ .

Para derivar em ordem a  $x$ , consideramos que  $y$  é uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{xy} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$$

Para derivar em ordem a  $y$ , consideramos que  $x$  é uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{xy} + \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

No entanto, há situações em que as derivadas parciais só podem ser calculadas por definição. Vejamos um exemplo:

### Exemplo 3.1.4

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(2x^2-1)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Neste caso, se quisermos calcular as derivadas parciais no ponto  $(0, 0)$ , só o podemos fazer recorrendo à definição uma vez que a função está definida em  $(0, 0)$  com o valor 0 mas em todos os outros pontos de uma sua vizinhança está definida por uma outra expressão.

A título de exemplo, determinemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \times (2h^2-1)}{h^2+0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0 \end{aligned}$$

## 3.1.1 Gradiente

### Definição 3.1.5

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$  tais que  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  existem.

Chamamos **gradiente** de  $f$  no ponto  $(a, b)$ , e representamos por  $\nabla f(a, b)$  ou  $\text{grad } f(a, b)$  ao vector

$$\nabla f(a, b) = \text{grad } f(a, b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

### Exemplo 3.1.6

Seja  $f(x, y) = \arctg(xy)$ .

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{y}{1 + (xy)^2}, \frac{x}{1 + (xy)^2} \right)$$

### Definição 3.1.7 (Plano tangente ao gráfico)

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int} D$ .

Admitindo que existem ambas as derivadas parciais num ponto  $(a, b)$  e que existe plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , a sua equação é dada por

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

### Exemplo 3.1.8

Considerando novamente a função  $f(x, y) = x^2 - 2y$ , já vimos num anterior exemplo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -2 \text{ e } f(1, 2) = -3.$$

Logo, a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 2, \underbrace{f(1, 2)}_{-3})$  é

$$z = -3 + 2(x - 1) - 2(y - 2) \Leftrightarrow z = -1 + 2x - 2y$$

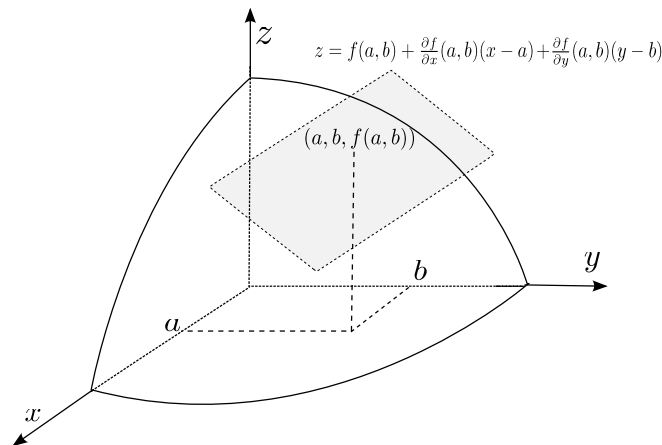


Figura 3.3: Esboço do plano tangente ao gráfico de uma função  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

## 3.2 Derivadas direcionais

Generalizando o conceito de derivadas parciais, definimos agora as derivadas direcionais segundo a direção e sentido de um dado vector.

### Definição 3.2.1

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \text{int } D$  e  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  um vector unitário (isto é,  $\|\vec{u}\| = 1$ ).

Definimos **derivada direcional** de  $f$  no ponto  $(a, b)$  segundo o vector  $\vec{u}$  como sendo

$$f'_{\vec{u}}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}.$$

$f'_{\vec{u}}(a, b)$  representa a taxa de variação de  $f$  no ponto  $(a, b)$  segundo a direção e sentido do vector  $\vec{u}$ .

**Obs.** As derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , são casos particulares de derivadas direcionais em que os vectores em causa são  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respetivamente.

### Exemplo 3.2.2

Seja  $f(x, y) = x^2 - 2y$ . Para calcular a derivada direcional no ponto  $(1, 2)$  segundo a direção do vector  $(1, -1)$  temos de verificar primeiro se este vector é unitário.

$$\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1 \Rightarrow (1, -1) \text{ não é unitário}$$

Isto significa que, para podermos utilizar a definição de derivada direcional, temos então de encontrar um vector unitário com a mesma direção e sentido do vector  $(1, -1)$ . Para tal, dividimos cada uma das componentes pela sua norma:

$$\vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Este processo é designado por *normalização* do vector.

Estamos agora em condições de calcular a derivada direcional.

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right)^2 - 2\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - (-3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}h + \frac{1}{2}h^2 - 4 + \frac{2}{\sqrt{2}}h + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}h\right)}{h} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

### 3.3 Diferenciabilidade

#### Definição 3.3.1

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$ .  $f$  diz-se **diferenciável** em  $(a, b)$  se são verificadas ambas as condições:

- (i) Existem  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ;
- (ii) 
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)\right)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

**Obs.** A 2ª condição da definição de diferenciabilidade garante que para pontos próximos de  $(a, b)$  o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  é uma boa aproximação linear do gráfico de  $f$ .

#### Exemplo 3.3.2

Consideremos a seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para verificar se a função é diferenciável em  $(0, 0)$ , temos de começar por calcular as derivadas parciais de 1ª ordem o que, neste caso, tem de ser feito recorrendo à definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \times 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Dada a simetria da função e das coordenadas do ponto  $(0, 0)$ , concluímos logo que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Falta verificar a segunda condição de diferenciabilidade, isto é, calcular

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (0(x-0) + 0(y-0) + 0)}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Começamos por calcular este limite segundo retas que passam por  $(0,0)$  da forma  $y = mx$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{(x^2 + m^2x^2)\sqrt{x^2 + m^2x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{(1 + m^2)\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \infty \end{aligned}$$

Daqui resulta que o limite da 2ª condição de diferenciabilidade não é zero (nem existe, como comprovámos) pelo que  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

### Exemplo 3.3.3

Consideremos a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se quisermos analisar a diferenciabilidade na origem, temos de começar por calcular as derivadas parciais nesse ponto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \times 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

e, novamente por questões de simetria, podemos concluir que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

Falta verificar a 2ª condição de diferenciabilidade. Substituindo  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  por 0,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  por 0 e  $f(0,0)$  por 0, fica:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (0(x-0) + 0(y-0) + 0)}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Para calcular este limite, começamos por calcular os limites direcionais segundo retas que passam por  $(0,0)$  da forma  $y = mx$ :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^2 x^2}{(x^2 + m^2 x^2) \sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^2(1 + m^2) |x| \sqrt{1 + m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| m^2}{(1 + m^2) \sqrt{1 + m^2}} = 0 \end{aligned}$$

Podemos apenas concluir, para já, que 0 é o limite direcional segundo as retas da forma  $y = mx$  e que é um candidato a limite. Mas para provar que 0 é, de facto, o limite, temos de recorrer à definição de limite. Ou seja, temos de provar que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon. \quad (3.1)$$

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário.

$$\left| \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{por hipótese} \end{matrix}$$

Basta tomar  $\delta = \epsilon$  para ficar provado (3.1).

Verificámos, assim, a 2ª condição de diferenciabilidade pelo que  $f$  é diferenciável em  $(0,0)$ .

### Teorema 3.3.4

*Se  $f$  é diferenciável num ponto, então é contínua nesse ponto.*

Deste teorema podemos concluir ainda que se  $f$  não é contínua num dado ponto, então não é diferenciável nesse ponto. No entanto, do facto de  $f$  ser contínua num ponto, nada podemos concluir acerca da diferenciabilidade nesse ponto.

### Teorema 3.3.5

*Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $(a,b) \in \text{int} D$ , então existe plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a,b, f(a,b))$  e é dado pela fórmula apresentada em (3.1.7).*

### Teorema 3.3.6

*Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $(a,b) \in \text{int} D$ , então existe  $f'_u(a,b)$ , para qualquer  $\vec{u}$  unitário, e*

$$f'_u(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}.$$

### Exemplo 3.3.7

Retomando o exemplo (3.2.2), uma vez que  $f(x, y) = x^2 - 2y$  é uma função polinomial e, por isso, diferenciável (veremos mais adiante porque é que o podemos afirmar), podemos agora calcular a derivada direcional recorrendo ao gradiente:

$$\begin{aligned} f'_u(1, 2) &= \nabla f(1, 2) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (2, -2) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Teorema 3.3.8

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(a, b) \in \text{int}D$  e tal que  $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ . Então  $\nabla f(a, b)$  aponta no sentido de crescimento máximo da função em  $(a, b)$  e o valor máximo da derivada direcional de  $f$  em  $(a, b)$  é igual a  $\|\nabla f(a, b)\|$ .

### Definição 3.3.9 (Derivadas de ordem superior)

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $D$  um conjunto aberto e tal que existem as derivadas parciais de 1ª ordem de  $f$ . As derivadas parciais são também funções reais definidas em  $D$  pelo que, se forem diferenciáveis, também podemos calcular as suas derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Estas são designadas por derivadas parciais de segunda ordem e utilizamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$



Também se costumam representar as derivadas parciais de 2<sup>a</sup> ordem por  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  e  $f_{yy}$ , respetivamente.

Às derivadas parciais  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  damos o nome de derivadas *mistas* ou *cruzadas*.

### Exemplo 3.3.10

Considerando  $f(x, y) = x^2 \cos(y)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (2x \cos(y)) = 2 \cos(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (2x \cos(y)) = -2x \sin(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 \sin(y)) = -2x \sin(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 \sin(y)) = -x^2 \cos(y)\end{aligned}$$

### Definição 3.3.11 (Matriz Hessiana)

Admitindo que existem todas as derivadas parciais de 2<sup>a</sup> ordem de  $f$  num ponto  $(a, b)$ , definimos a matriz Hessiana de  $f$  no ponto  $(a, b)$  e representamos por  $H_f(a, b)$  como

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, podemos definir as derivadas parciais de ordem  $n$  como sendo as derivadas parciais de 1<sup>a</sup> ordem das derivadas parciais de ordem  $n - 1$ . No entanto, em termos práticos, limitaremos o cálculo das derivadas parciais à 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens no decurso desta unidade curricular.

### Definição 3.3.12

Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se de *classe*  $C^1$  num subconjunto aberto  $A$  de  $D$  e escreve-se  $f \in C^1(A)$  se existirem e forem contínuas em  $A$  as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Analogamente, define-se  $f \in C^2(A)$ ,  $f \in C^3(A)$ , etc, se, respetivamente, as derivadas parciais até à 2<sup>a</sup> ordem, 3<sup>a</sup> ordem, etc., forem contínuas em  $A$  e dizemos que  $f \in C^\infty(A)$  se as derivadas parciais de qualquer ordem forem contínuas em  $A$ .

### Teorema 3.3.13

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A \subset D$  aberto. Se  $f \in C^1(A)$  então  $f$  é diferenciável

em todos os pontos de  $A$ . Em particular, se  $f \in C^1(D)$  então  $f$  é diferenciável em  $D$ .

**Teorema 3.3.14**

As funções polinomiais, exponencial, logaritmo, seno e cosseno são de classe  $C^\infty$  nos seus domínios.

**Exemplo 3.3.15**

A função  $f(x, y) = 1 + x + x^2y$  é uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  por ser uma função polinomial. Em particular,  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  pelo que é diferenciável em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

Note-se que, no exemplo (3.3.10),  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  coincidem. Na verdade, não é apenas uma coincidência. Vejamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.16** (Teorema de Schwarz)

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2(D)$ , com  $D$  um conjunto aberto.

Então as derivadas mistas coincidem, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \forall (x, y) \in D.$$

**Exemplo 3.3.17**

Seja  $f(x, y) = e^{x^2-y}$ . Se quisermos determinar a matriz Hessiana no ponto  $(1, 0)$ , por exemplo, temos de começar por calcular todas as derivadas parciais de 2ª ordem. No entanto, como  $f$  é a composição de uma função exponencial com uma função polinomial, então  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Em particular,  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  pelo que estamos nas condições do Teorema de Schwarz o que nos permite calcular apenas uma das derivadas mistas (à nossa escolha).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{x^2-y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2e^{x^2-y} + 4x^2e^{x^2-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2e + 4e = 6e \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -2xe^{x^2-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = -2e \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= e^{x^2-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = e \end{aligned}$$

Logo,

$$H_f(1, 0) = \begin{bmatrix} 6e & -2e \\ -2e & e \end{bmatrix}$$

Ainda a propósito do Teorema de Schwarz, a hipótese de  $f$  ser uma função de classe  $C^2$  é fundamental. Para o ilustrar, apresenta-se de seguida um exemplo em que as derivadas parciais de segunda ordem existem em  $(0, 0)$  e, no entanto não são contínuas em  $(0, 0)$  (ou seja,  $f$  não é de classe  $C^2$  neste ponto) e neste caso as derivadas mistas não coincidem. Este exemplo tem como destinatário um leitor mais interessado em aprofundar estes assuntos.

### Exemplo 3.3.18

Considere  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^3}, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Para calcular as derivadas parciais de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens no ponto  $(0, 0)$  temos de o fazer por definição, dada a forma como a função está definida.

Para tal, vamos precisar dos seguintes cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, k) - f(0, k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hk \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^3} = -k \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(k, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k, 0 + h) - f(k, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kh \frac{k^2 - h^2}{k^2 + h^3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{k^2 - h^2}{k^2 + h^3} = k \end{aligned}$$

Passemos agora ao cálculo das derivadas parciais de 2<sup>a</sup> ordem mistas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k}{k} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(k, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = 1 \end{aligned}$$

Para ver porque é que este resultado não contraria o Teorema de Schwarz temos de avaliar a continuidade das derivadas mistas em  $(0, 0)$  e, para tal, temos de calcular as derivadas mistas para  $(x, y) \neq (0, 0)$  o que já podemos fazer recorrendo às regras da derivação.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}$$

Calculemos  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}$  ao longo de retas que passam pela origem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - x^6 m^6 + 9x^4 x^2 m^2 - 9x^2 m^4 x^4}{(x^2 + m^2 x^2)^3} = \frac{1 - m^6 + 9m^2 - 9m^4}{(1 + m^2)^3}$$

Como este limite depende do declive da reta, concluímos que o limite não existe, pelo que a derivada de 2ª ordem mista não é contínua na origem e, portanto, não está nas condições do Teorema de Schwarz.

Para  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  provaríamos de forma análoga que não é contínua na origem.

## 3.4 Derivada da função composta

### Teorema 3.4.1

Sejam  $z = f(u, v)$  uma função diferenciável,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  funções reais de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem. Então, as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  de  $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  existem e

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

a que damos o nome de *Regra da Cadeia*.

Podemos omitir os pontos em que as derivadas parciais estão a ser calculadas para tornar a regra um pouco mais “legível”:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

**Obs.** Na verdade, este teorema é apenas um caso particular em que todas as funções envolvidas dependem de duas variáveis. A generalização a funções de mais variáveis não traz, no entanto, grandes dificuldades.

### Exemplo 3.4.2

Consideremos  $f(u, v) = ve^u$ , com  $u(x, y) = 2x - y$  e  $v(x, y) = x + 2y$ .

Começamos por calcular as derivadas de 1ª ordem de todas estas funções:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = ve^u \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) = (x + 2y)e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = e^u \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) = e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Aplicando agora a Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = (x+2y)e^{2x-y} \times 2 + e^{2x-y} \times 1 = e^{2x-y}(1+2x+4y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = (x+2y)e^{2x-y} \times (-1) + e^{2x-y} \times 2 = e^{2x-y}(-x-2y+2)$$

Claro que, neste exemplo, também poderíamos ter obtido a função composta explicitamente

$$f(u(x, y), v(x, y)) = (x+2y)e^{2y-x}$$

e calculado as derivadas parciais da forma habitual. No entanto, há casos em que tal não é possível por não se conhecer a expressão de uma (ou mais) das funções envolvidas, como no exemplo que se segue.

### Exemplo 3.4.3

Seja  $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ , com  $f$  uma função diferenciável.

Esta função  $g$  satisfaz a equação  $y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ .

Para o mostrar, comecemos por calcular  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  através da Regra da Cadeia.

Se considerarmos  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = y^2 - x^2$ , então

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} (-2x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v} 2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} &= y \left( \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} (-2x) \right) + x \left( \frac{\partial f}{\partial u} (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v} 2y \right) \\ &= (2xy - 2xy) \frac{\partial f}{\partial u} + (-2xy + 2xy) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

## 3.5 Extremos livres

### Definição 3.5.1

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$ .

Diz-se que:

- $f$  tem um *máximo local* em  $(a, b)$  se, e só se, existir uma bola  $B_\epsilon(a, b)$  tal que

$$f(x, y) \leq f(a, b), \forall (x, y) \in B_\epsilon(a, b) \cap D;$$

Se  $f(x, y) \leq f(a, b), \forall (x, y) \in D$ , então diz-se que  $f$  tem um *máximo absoluto*.

O ponto  $(a, b)$  diz-se um maximizante local/global de  $f$  (o ponto para o qual o máximo é atingido);

- $f$  tem um *mínimo local* em  $(a, b)$  se, e só se, existir uma bola  $B_\epsilon(a, b)$  tal que

$$f(x, y) \geq f(a, b), \forall (x, y) \in B_\epsilon(a, b) \cap D;$$

Se  $f(x, y) \geq f(a, b), \forall (x, y) \in D$ , então diz-se que  $f$  tem um *mínimo absoluto*.

O ponto  $(a, b)$  diz-se um minimizante local/global de  $f$  (o ponto para o qual o mínimo é atingido);

### Definição 3.5.2

Ao ponto  $(a, b)$  maximizante ou minimizante de  $f$  chamamos *extremante* de  $f$  e  $f(a, b)$  diz-se *extremo* de  $f$ .

### Definição 3.5.3

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$ . O ponto  $(a, b)$  diz-se um *ponto crítico* ou *ponto de estacionaridade* de  $f$  se existirem e forem nulas em  $(a, b)$  as derivadas parciais de 1ª ordem de  $f$ .

### Teorema 3.5.4 (Condição necessária para a existência de extremos)

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \text{int } D$ . Se  $f$  atinge um extremo local em  $(a, b)$  e se as derivadas parciais de 1ª ordem de  $f$  existem em  $(a, b)$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

ou seja,  $(a, b)$  é um ponto crítico.

A condição anterior é necessária mas não suficiente para a existência de extremos. Pode acontecer que as derivadas parciais de 1ª ordem sejam nulas num dado ponto  $(a, b)$  sem que exista um extremo da função nesse ponto. Nesse caso, diz-se então que  $(a, b)$  é um *ponto sela* e significa que numa vizinhança do ponto crítico  $(a, b)$  a função toma valores inferiores e superiores a  $f(a, b)$ . Na figura 3.4 está representado parte do gráfico da função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  para a qual o ponto  $(0, 0)$  é um ponto de sela. Repare-se que, para esta função tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ou seja,  $(0, 0)$  é um ponto crítico mas, no entanto,  $f(0, 0) = 0$  não é máximo nem mínimo local porque, numa vizinhança de  $(0, 0)$ , para pontos da forma  $(a, 0)$  tem-se  $f(a, 0) = a^2 > 0$  e para pontos da forma  $(0, a)$  tem-se  $f(0, a) = -a^2 < 0$ .

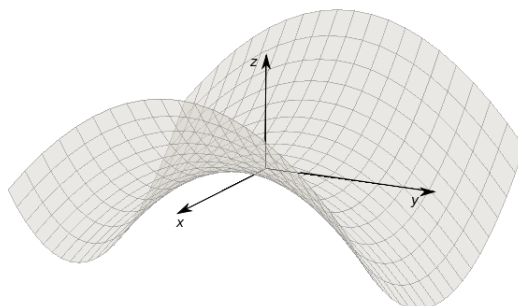


Figura 3.4: Gráfico da função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  para a qual a origem é um ponto de sela.

**Obs.** Também pode haver extremos em pontos que não são críticos: pontos do domínio que não são pontos interiores ou em pontos interiores do domínio mas para os quais a função não seja diferenciável. Por exemplo, a função  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  tem um mínimo na origem e, no entanto,  $(0, 0)$  não é um ponto crítico já que esta função não possui sequer derivadas parciais na origem (fica ao cuidado do leitor verificar).

**Teorema 3.5.5** (Teorema de Weierstrass)

Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua num conjunto fechado e limitado (ou seja, num compacto) possui máximo e mínimo absolutos nesse conjunto.

Para determinar a natureza dos pontos críticos, poderá ser útil o seguinte teorema:

### Teorema 3.5.6

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2$  e  $(a, b) \in \text{int}D$  um ponto crítico. Se existirem e forem contínuas as derivadas parciais de 2ª ordem, consideremos a matriz Hessiana

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Seja  $d_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$  e  $d_2 = \det(H_f(a, b))$ .

Então,

$$d_2 \begin{cases} > 0 \begin{cases} d_1 < 0 \Rightarrow f(a, b) \text{ é um máximo local} \\ d_1 > 0 \Rightarrow f(a, b) \text{ é um mínimo local} \end{cases} \\ = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui} \\ < 0 \Rightarrow f(a, b) \text{ é um ponto de sela} \end{cases}$$

**Obs.** Note que quando se diz que  $d_2 = 0$  nada permite concluir, o que se quer dizer é que este teorema nada permite concluir. Nessa situação, teremos de encontrar outro processo de averiguar a natureza do ponto crítico.

### Exemplo 3.5.7

Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Para encontrar os pontos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{há um único ponto crítico: } (0, 0).$$

Para determinar a natureza do ponto crítico:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H_f(0, 0)) = 4$$

Como  $d_2 = 4 > 0$  e  $d_1 = 2 > 0$ , concluímos que  $(0, 0)$  é um ponto no qual a função atinge um mínimo local. Neste caso, poderíamos até concluir que se trata de um mínimo global uma vez que  $f(0, 0) = 0$  e  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dada a sua expressão.

## 3.6 Extremos condicionados

Suponhamos que queremos agora encontrar os máximos (ou mínimos) de uma função  $f(x, y)$  sujeita a uma condição que se possa expressar como  $g(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante. Este é um problema de *extremos condicionados*.



Como exemplo de um problema deste tipo, suponhamos que queríamos encontrar as dimensões de um retângulo, de perímetro 2, que maximizam a sua área. Considerando que  $x$  e  $y$  representam as dimensões dos lados do retângulo, este problema pode traduzir-se na procura do máximo da função  $f(x, y) = xy$  (que representa a área) sujeita à condição  $g(x, y) = 2x + 2y = 2$  (para que o perímetro do retângulo seja 1). Trata-se de um problema de extremos condicionados.

Para resolver este tipo de problema, vamos utilizar *Método dos Multiplicadores de Lagrange* para o qual precisamos de definir uma função auxiliar a que chamamos *função Lagrangeana*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k).$$

À variável auxiliar  $\lambda$  damos o nome de *multiplicador de Lagrange*.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange consiste em:

1. Construir a função Lagrangeana;
2. Determinar os pontos críticos de  $L$  que serão os potenciais extremos condicionados de  $f$ ;

Este método permite localizar, apenas, os “candidatos” a extremos condicionados. Para avaliar a natureza dos pontos críticos de  $L$ , temos de fazer algo mais que poderá ser uma análise física, geométrica e/ou analítica.

### 3.6.1 Método analítico de determinar a natureza de um ponto crítico de $L$

Um método analítico de avaliar se um ponto crítico  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  da função Lagrangeana vai corresponder a um máximo ou mínimo de  $f$  consiste na construção da seguinte matriz

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{bmatrix}$$

Numa forma mais condensada, pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & H_L \end{bmatrix},$$

onde  $A = \begin{bmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$  e  $H_L$  é a matriz Hessiana de  $L$  em  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ .

### Proposição 3.6.1

Seja  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  um ponto crítico da função Lagrangeana  $L$ . Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0)) < 0 &\Rightarrow f(x_0, y_0) \text{ é mínimo} \\ \det(\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0)) > 0 &\Rightarrow f(x_0, y_0) \text{ é máximo.} \end{aligned}$$

### Exemplo 3.6.2

Para exemplificar a aplicação deste método, retomemos o exemplo de encontrar o(s) retângulo(s) de perímetro 2 que tornam máxima a sua área.

Neste caso, queremos resolver

$$\text{maximizar } f(x, y) = xy, \text{ sujeita a } g(x, y) = 2x + 2y = 2.$$

Função Lagrangeana:  $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x + 2y - 2)$ .

Pontos críticos da função Lagrangeana:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\lambda = 0 \\ x - 2\lambda = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ - - - \\ 4\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Existe um único ponto crítico da função Lagrangeana: o ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .

Para determinar a natureza do ponto crítico:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2, \frac{\partial g}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

Logo,

$$\mathcal{H}_L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz pode ser calculado recorrendo, por exemplo, à Regra de Sarrus (uma vez que é uma matriz do tipo  $3 \times 3$ ).

$$\left| \mathcal{H}_L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \right| = 8 > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ é o ponto máximo de } f.$$

Conclusão: o retângulo de perímetro 2 que tem a área máxima é o quadrado de lado  $\frac{1}{2}$  uma vez que  $x = y = \frac{1}{2}$  é o ponto para o qual o máximo da função que calcula a área é atingido.

**Teorema 4.1.1** (Teorema de Fubini)

Seja  $D = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.

Então,  $f$  é integrável em  $D$  e tem-se

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Obs.** O integral que se calcula primeiro é o que está dentro dos parêntesis. No entanto, eles aparecem aqui apenas como auxílio à compreensão da prioridade no cálculo de cada um dos integrais. De futuro, esses parêntesis serão omitidos.

**Exemplo 4.1.2**

Sejam  $D = [-1, 1] \times [0, 2]$  e  $f(x, y) = 2x^2y$ .

Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 2x^2y dy dx = \int_{-1}^1 [x^2y^2]_0^2 dx = \int_{-1}^1 4x^2 - 0 dx = \\ &= \left[ \frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} - \left( -\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

A escolha da ordem de integração foi arbitrária. Poderíamos ter optado por calcular  $\int_0^2 \int_{-1}^1 2x^2y dx dy$  o que conduziria ao mesmo resultado. Alerta-se, no entanto, que isto acontece porque o domínio é retangular. Para um domínio não retangular, em geral, não basta trocar a ordem de integração: é necessário alterar os extremos de integração também.

## 4.1.2 Regiões elementares

Para estender a noção de integral duplo a outros domínios que não os retangulares, vamos começar por definir dois tipos de regiões elementares.

**Definição 4.1.3**

Dizemos que  $D \subset \mathbb{R}^2$  é uma região elementar se for:

- do tipo I

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

onde  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$  são funções contínuas;

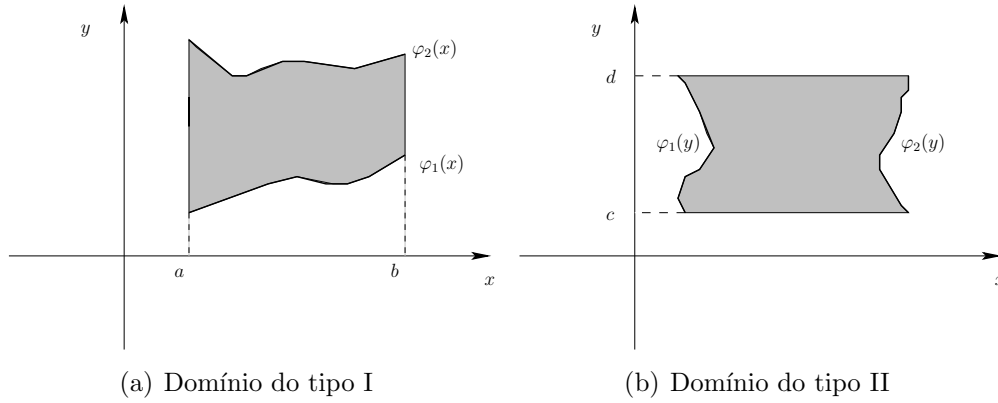


Figura 4.1: Regiões elementares

- do tipo II

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

onde  $\varphi_1(y)$  e  $\varphi_2(y)$  são funções contínuas.

#### Teorema 4.1.4

Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua num conjunto elementar  $D$ , então  $f$  é integrável em  $D$  e

- se  $D$  é do tipo I

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

- se  $D$  é do tipo II

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

#### Exemplo 4.1.5

Seja  $f(x, y) = 2x^2y$  e  $D \subset \mathbb{R}^2$  a região limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $y = -1$  e  $y = 1 - 2x$ .

# Capítulo 4

## Integração

Neste capítulo será estendida a noção já conhecida de integral de uma função real de uma variável à de integral de funções reais com domínio em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ .

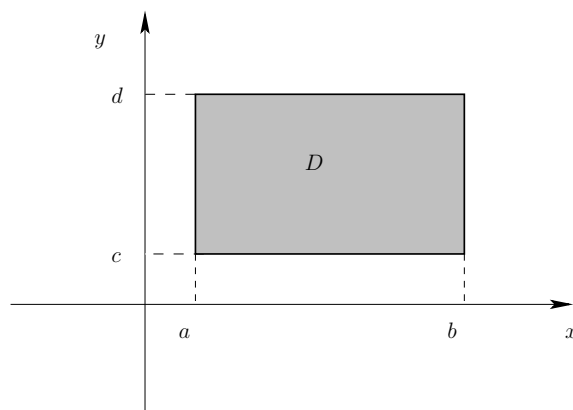
### 4.1 Integrais duplos

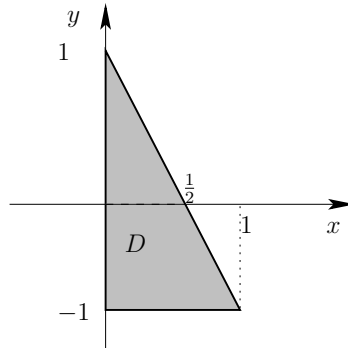
Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $f$  uma função real, de duas variáveis, tal que  $D$  é um subconjunto do seu domínio.

Representamos, genericamente, o integral duplo num domínio de integração  $D$  por  $\iint_D f(x, y) dA$  ou por  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

#### 4.1.1 Regiões retangulares

Vamos começar por introduzir o integral duplo para um tipo muito específico de domínio de integração em que o cálculo fica particularmente simples: os retângulos.





$D$  pode ser considerada uma região elementar do tipo I:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 - 2x\}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \iint_D 2x^2y \, dA &= \int_0^1 \int_{-1}^{1-2x} 2x^2y \, dy \, dx = \int_0^1 [x^2y^2]_{-1}^{1-2x} \, dx = \\ &= \int_0^1 x^2(1-2x)^2 - x^2 \, dx = \left[-x^4 + \frac{4}{5}x^5\right]_0^1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Neste caso (embora nem sempre seja assim) o domínio  $D$  também pode ser considerado como região elementar do tipo II. Para encontrar os limites para  $x$  e para  $y$ , reparemos que, para a região em causa, o valor mínimo para  $y$  é  $-1$  e o valor máximo é  $1$ . Para cada valor de  $y$  fixo, os valores em  $x$  variam entre  $x = 0$  e a reta  $y = 1 - 2x$ . No entanto, esta última tem de se reescrever agora como função de  $y$ , ou seja,

$$y = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{2}.$$

Podemos assim concluir que

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1-y}{2}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \iint_D 2x^2y \, dA &= \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{1-y}{2}} 2x^2y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left[ \frac{2}{3}x^3y \right]_0^{\frac{1-y}{2}} \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} \left( \frac{1-y}{2} \right)^3 y \, dy = \int_{-1}^1 y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 \, dy = \\ &= \frac{1}{12} \left[ \frac{y^2}{2} - y^3 + \frac{3}{4}y^4 - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

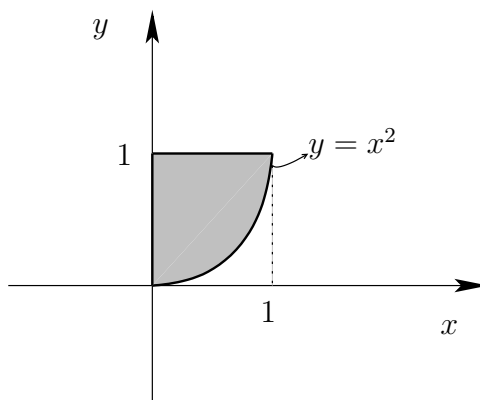
Neste exemplo vimos que o domínio de integração pode ser encarado como uma região do tipo I ou uma região do tipo II (e voltemos a sublinhar que nem sempre é o caso). No entanto, podemos reparar que, neste exemplo em particular, considerando o domínio como sendo do tipo I os cálculos vêm simplificados.

Para reforçar esta ideia de que a ordem de integração pode fazer diferença em termos de cálculo, vejamos mais um exemplo em que, escolhendo uma determinada ordem de integração, nem é possível calcular a primitiva e escolhendo a outra ordem de integração o integral fica relativamente simples de calcular.

#### Exemplo 4.1.6

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \sin(y^2) dy dx$$

A primitiva de  $x \sin(y^2)$ , em ordem a  $y$ , não é imediata nem dá para ser calculada por partes nem por substituição. Por este motivo, vamos inverter a ordem de integração, na expectativa de que consigamos dessa forma efetuar o cálculo. Para tal, façamos a representação gráfica do domínio de integração, como forma de auxílio.



Para inverter a ordem de integração, temos de estabelecer primeiro os limites para  $y$ . Ora, para a região em causa, o valor mínimo para  $y$  é 0 e o valor máximo é 1. Para cada valor de  $y$  fixo, o  $x$  varia entre 0 e a parábola. No entanto, esta tem de ser agora reescrita como função de  $y$ :

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}.$$

Para esta região, estamos apenas interessados na solução positiva,  $x = \sqrt{y}$ .

Podemos agora inverter a ordem de integração:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \sin(y^2) dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} \sin(y^2) \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2} \sin(y^2) dy = \frac{1}{4} [-\cos(y^2)]_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} (-\cos(1) - (-\cos(0))) = \frac{1}{4} (-\cos(1) - 1).\end{aligned}$$

### 4.1.3 Aplicação do integral duplo ao cálculo de áreas

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  uma região elementar. Então,

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1 dA$$

#### Exemplo 4.1.7

Se considerarmos  $D$  o domínio de integração do exemplo 4.1.6, então

$$\text{Área}(D) = \int_0^1 \int_{x^2}^1 1 dy dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 1 - x^2 dx = \frac{2}{3}$$

### 4.1.4 Aplicação do integral duplo ao cálculo de volumes

Começemos por recordar que o integral simples é utilizado para o cálculo de áreas, como se ilustra na figura 4.2.

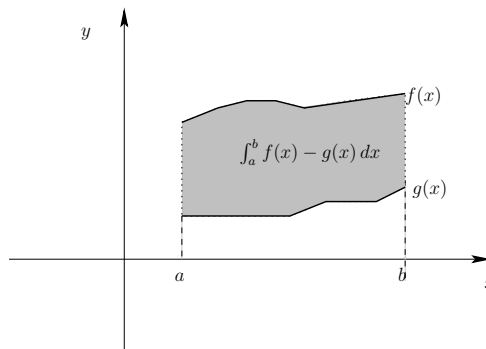


Figura 4.2: Cálculo de área através de um integral simples.



De forma análoga, o volume de uma região do espaço  $\mathbb{R}^3$  que esteja compreendida entre os gráficos de duas funções,  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , pode ser dado através do cálculo do seguinte integral duplo:

$$\text{Volume} = \iint_D f(x, y) - g(x, y) dA.$$

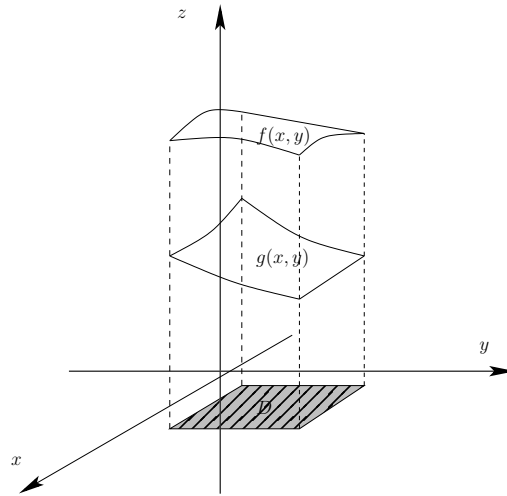


Figura 4.3: Região compreendida entre os gráficos de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  e domínio de integração  $D$  para o cálculo do volume através de um integral duplo.

#### Exemplo 4.1.8

Seja  $D$  o sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  e por  $z = 4$ . A primeira equação define um parabolóide, centrado na origem, com a concavidade “voltada para cima”. A segunda equação define um plano.

Como auxílio aos nossos cálculos, façamos um esboço do sólido em causa (figura 4.4).

Podemos considerar que, neste caso, a região é limitada pelos gráficos de  $g(x, y) = x^2 + y^2$  e  $f(x, y) = 4$  pelo que o volume é dado por:

$$\iint_D f(x, y) - g(x, y) dA = \iint_D 4 - (x^2 + y^2) dA,$$

onde  $D$  é a projeção do sólido no plano  $xOy$ .

Para calcular o integral, precisamos de saber qual o seu domínio de integração  $D$ , que é a projeção do sólido no plano  $xOy$ . Fazendo a intersecção entre o

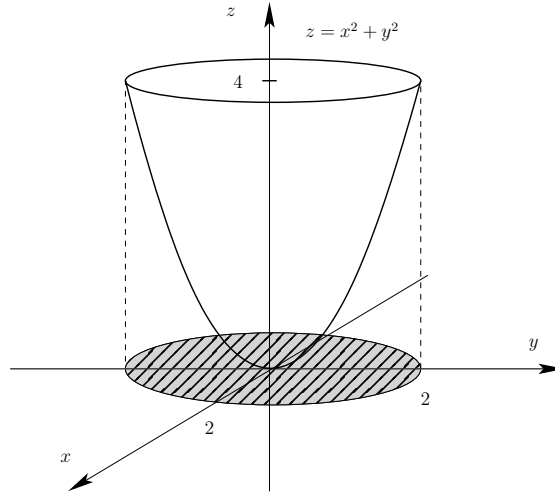


Figura 4.4: Esboço do volume definido no exemplo 4.1.8.

parabolóide  $x^2 + y^2$  e o plano  $z = 4$ , obtemos uma circunferência de raio 2, pelo que concluímos que  $D$  é o círculo no plano  $xOy$ , de centro na origem e raio 2. Estamos, assim, em condições de explicitar o integral a calcular:

$$\iint_D 4 - (x^2 + y^2) dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4 - x^2 - y^2 dy dx.$$

O cálculo deste integral, não sendo impossível, é bastante trabalhoso. Uma mudança de coordenadas adequada, como vamos ver de seguida, facilitará esta tarefa.

### 4.1.5 Coordenadas polares

Geralmente utilizamos coordenadas cartesianas,  $(x, y)$ , para referenciar um ponto do plano. Mas esta não é a única forma de referenciar um ponto, como vamos ver.

Seja  $P$  um ponto de coordenadas (cartesianas)  $(x, y)$ ,  $\rho$  a distância entre  $P$  e a origem e  $\theta$  o ângulo que o vetor  $\vec{OP}$  faz com o eixo dos  $xx$  (ver figura 4.5). Ao par  $(\rho, \theta)$  chamamos *coordenadas polares* de  $P$ .

#### Exemplo 4.1.9

O ponto  $(0, 1)$  tem coordenadas polares  $(1, \frac{\pi}{2})$ , o ponto  $(0, 2)$  tem coordenadas polares  $(2, \frac{\pi}{2})$  e o ponto  $(0, 1)$  tem coordenadas polares  $(1, 0)$ .

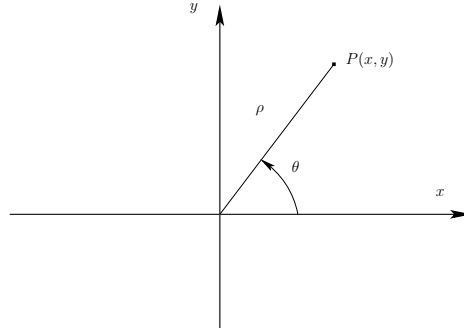


Figura 4.5: Coordenadas polares

### Mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

### Mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Algumas regiões do plano ficam de descrição mais simples quando expressas em coordenadas polares, como é o caso dos círculos e das circunferências. Reparemos que uma circunferência de raio  $r$  fica definida por

$$\rho = r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

e um círculo de raio  $r$  fica definido por

$$0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

O teorema que se segue permite que passemos da integração em coordenadas cartesianas para a integração em coordenadas polares.

#### **Teorema 4.1.10** (Mudança para coordenadas polares)

Sejam  $D' \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto elementar em coordenadas polares e  $D$  o mesmo conjunto em coordenadas cartesianas. Então, se  $f$  é contínua em  $D$ , tem-se

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

A mudança de variável para coordenadas polares é conveniente quando o domínio de integração tem uma descrição simples em coordenadas polares (circunferências, círculos ou porções destes, etc...) e a função integranda depende de  $x^2 + y^2$  ou tem uma expressão simples quando escrita em coordenadas polares.

### Exemplo 4.1.11

Vamos retomar o cálculo do exemplo 4.1.8, que tinha ficado pendente. O domínio de integração,  $D$ , tínhamos visto que é um círculo de raio 2 o que, em coordenadas polares, se expressa por:

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_D 4 - x^2 - y^2 dA &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 4\rho - \rho^3 d\theta d\rho \\ &= \int_0^2 4\rho - \rho^3 [\theta]_0^{2\pi} d\rho \\ &= 2\pi \left[ 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 2\pi(8 - 4) = 8\pi \end{aligned}$$

## 4.2 Integrais triplos

Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  e  $f(x, y, z)$  uma função real com  $D$  é um subconjunto do seu domínio.

Representamos, genericamente, o integral triplo num domínio de integração  $D$  por  $\iiint_D f(x, y, z) dV$  ou por  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ .

Tal como para o integral duplo, em que começámos por abordar a integração em domínios retangulares, vamos começar por introduzir o integral triplo num domínio de integração simples: um paralelepípedo.

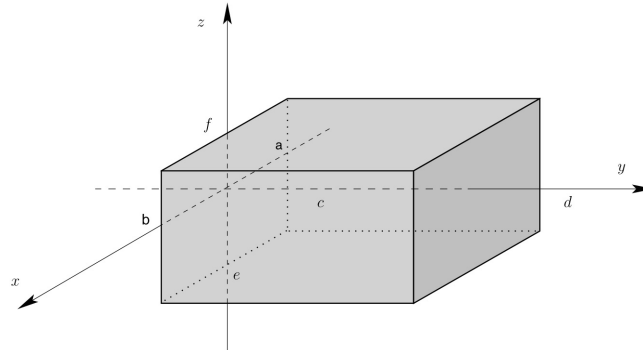


Figura 4.6: Paralelepípedo  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ .

### Teorema 4.2.1

Seja  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$  um paralelepípedo e  $f(x, y, z)$  uma função real, contínua, tal que  $D$  está contido no seu domínio.

Então

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx = \\ &= \dots \\ &= \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \end{aligned}$$

**Obs.** As reticências indicam que se pode fazer qualquer troca na ordem de integração.

### Exemplo 4.2.2

Se  $f(x, y, z) = x + y + z$  e  $D = [0, 1] \times [-1, 0] \times [-2, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dV &= \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-2}^1 x + y + z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 \left[ (x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{-2}^1 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 3x + 3y - \frac{3}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 3xy + \frac{3y^2}{2} - \frac{3}{2}y \right]_{-1}^0 dx \\ &= \int_0^1 3x - 3 dx = \left[ \frac{3x^2}{2} - 3x \right]_0^1 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vejamos agora como calcular o integral triplo noutra tipo de regiões, que não os paralelepípedos, recorrendo a alguns exemplos.

### Exemplo 4.2.3

$$\iiint_D f(x, y, z) dV$$

onde  $D$  é o sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 4$ .

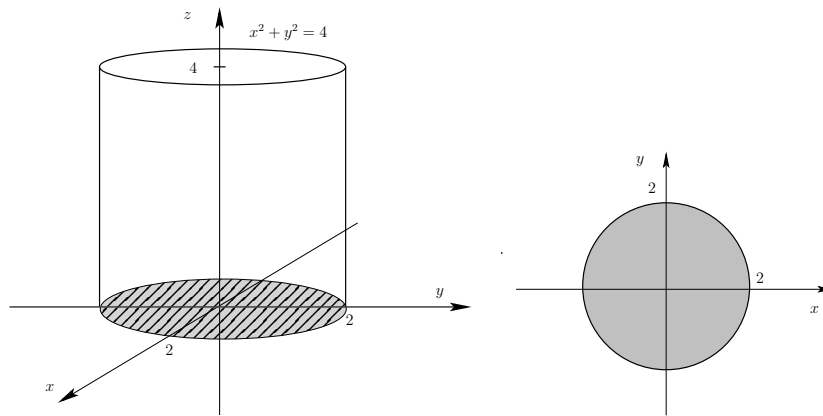


Figura 4.7: Esboço do sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 4$  e projeção do sólido no plano  $xOy$  (a cinzento).

Note que o cilindro tem raio 2 pelo que a projeção do sólido no plano  $xOy$  é um círculo de raio 2.

Uma forma de determinar os limites de integração é, a partir dessa projeção, encontrar os limites para  $x$  e para  $y$ . Para cada ponto  $(x, y)$  da projeção, obter posteriormente os limites de integração para  $z$ .

Se começarmos por fixar os limites de integração para  $x$ , então  $x \in [-2, 2]$  e, para cada  $x$  fixo, os limites para  $y$  são a porção da circunferência para valores negativos de  $y$  ( $y = -\sqrt{4 - x^2}$ ) e a porção da circunferência para valores positivos de  $y$  ( $y = \sqrt{4 - x^2}$ ).

Para cada  $(x, y)$  pertencente à projeção do volume, o  $z$  correspondente varia entre 0 e 4.

Então,

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 f(x, y, z) dz dy dx$$

Embora não tenhamos explicitado a função  $f(x, y, z)$  no exemplo anterior, mesmo que esta seja muito simples, o integral que obtivemos poderá não ser muito fácil de calcular por causa dos extremos de integração para  $y$ .

Vamos ver de seguida que, recorrendo a uma mudança de coordenadas conveniente, o cálculo fica muito mais simplificado.

### 4.2.1 Coordenadas cilíndricas

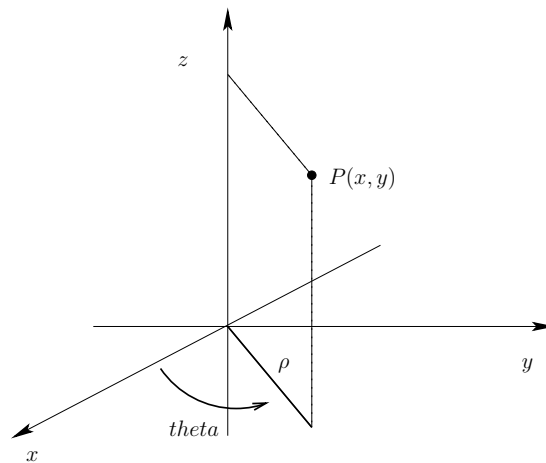


Figura 4.8: Coordenadas cilíndricas.

Um ponto  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  fica bem referenciado pelas coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , onde  $\rho$  representa a distância da projeção do ponto no plano  $xOy$  à origem,  $\theta$  é o ângulo que a projeção do ponto no plano  $xOy$  faz (entendida como vetor) com o eixo dos  $xx$  e  $z$  mantém o seu valor.

$$\rho \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}.$$

Para passar de coordenadas cilíndricas para cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

Estas coordenadas são particularmente úteis quando o domínio de integração é limitado por um cilindro, por um parabolóide ou por uma esfera e quando a função integranda depende de  $x^2 + y^2$  ou tem uma expressão simples quando expressa em coordenadas cilíndricas.

Por exemplo, o cilindro do exemplo anterior, expresso em coordenadas cilíndricas, fica:

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 4$$

**Teorema 4.2.4** (Mudança para coordenadas cilíndricas)

Sejam  $D' \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto descrito em coordenadas cilíndricas e  $D$  o mesmo conjunto em coordenadas cartesianas. Então, se  $f$  é contínua em  $D$ , tem-se

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho dz d\rho d\theta$$

**Exemplo 4.2.5**

Considerando o mesmo domínio do exemplo anterior, ou seja, o sólido limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  e  $z = 4$ , calculemos

$$\iiint_D z e^{x^2+y^2} dV.$$

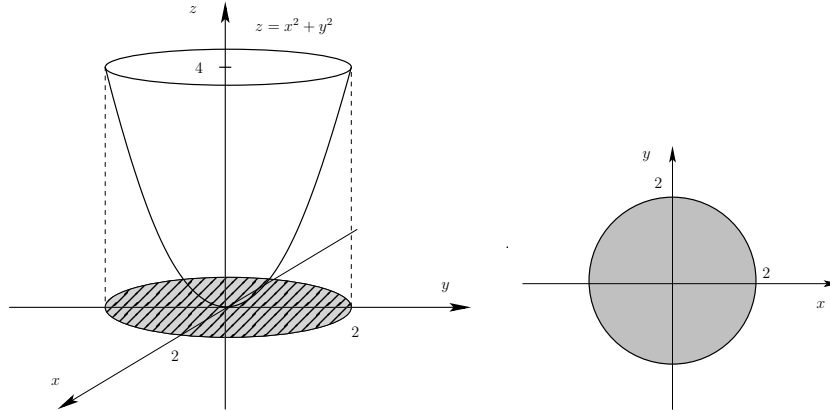
Já tínhamos visto que em coordenadas cartesianas os extremos de integração para  $y$  iriam dificultar um pouco o cálculo do integral. Façamos agora o cálculo em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \iiint_D z e^{x^2+y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 (z e^{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta}) \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 z e^{\rho^2} \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{\rho^2} \rho \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^4 d\rho d\theta = 8 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [e^{\rho^2}]_0^2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} e^4 - 1 d\theta = 4(e^4 - 1) [\theta]_0^{2\pi} = 8\pi(e^4 - 1). \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.6**

Consideremos agora  $D$  o sólido limitado pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 4$  e  $f(x, y, z)$  uma função contínua que não vamos explicitar, para vermos que diferenças ocorrem nos extremos de integração relativamente ao exercício anterior.





A projeção deste sólido no plano  $xOy$ , à semelhança do exercício que envolvia o cilindro, é um círculo de raio 2, pelo que os limites para  $\rho$  e para  $\theta$  vão ser iguais aos do cilindro. A diferença vai estar nos limites para  $z$ . Agora, para cada ponto localizado na projeção do sólido no plano,  $z$  vai estar compreendido entre o parabolóide e o plano  $z = 4$ . Mas é preciso escrever o parabolóide em coordenadas cilíndricas:

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2$$

pelo que o integral triplo fica:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho^2}^4 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho dz d\rho d\theta.$$

### 4.2.2 Coordenadas esféricas

Um ponto  $P(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  também pode ser referenciado por  $(\rho, \theta, \varphi)$  onde  $\rho$  é a distância do ponto à origem,  $\theta$  é o ângulo que a projeção do ponto no plano  $xOy$  faz com o eixo dos  $xx$  (o mesmo das coordenadas cilíndricas) e  $\varphi$  é o ângulo que o vetor  $\vec{OP}$  faz com o semi-eixo dos  $zz$ .

$$\rho \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi].$$

Para passar de coordenadas esféricas para cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases},$$

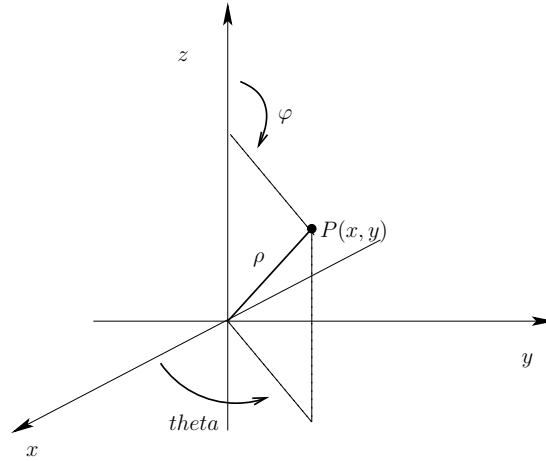


Figura 4.9: Coordenadas esféricas

#### Exemplo 4.2.7

Uma superfície esférica, de raio  $r$ , que em coordenadas cartesianas é dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , tem a sua descrição simplificada em coordenadas esféricas:

$$\rho = r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

#### Teorema 4.2.8 (Mudança para coordenadas esféricas)

Sejam  $D' \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto descrito em coordenadas esféricas e  $D$  o mesmo conjunto em coordenadas cartesianas. Então, se  $f$  é contínua em  $D$ , tem-se

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

É particularmente útil a passagem do integral para coordenadas esféricas quando o domínio de integração é limitado por uma superfície esférica e a função integranda tem uma expressão simples quando expressa em coordenadas esféricas, como é o caso de expressões que dependam de  $x^2 + y^2 + z^2$ , ou funções constantes.

#### Exemplo 4.2.9

Calcular  $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$  onde  $D$  é o sólido limitado superiormente pela esfera de raio 2 e inferiormente pelo plano  $z = 0$ , ou seja, metade de uma esfera.

Para este caso,  $\rho$  varia entre 0 e 2,  $\theta$  varia entre 0 e  $2\pi$  e  $\varphi$  varia entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$  (porque se trata apenas da parte superior da esfera).

Vamos ter de expressar a função integranda em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{\rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho\end{aligned}$$

Logo, utilizando o teorema,

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 d\theta d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi [\theta]_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi.\end{aligned}$$

### 4.2.3 Aplicação do integral triplo ao cálculo de volumes

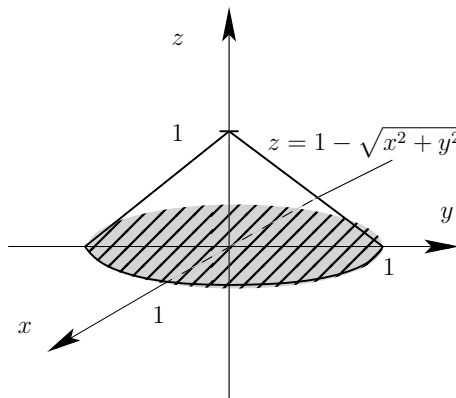
Dada uma região,  $D$ , de  $\mathbb{R}^3$ , o seu volume é dado por:

$$\text{Volume}(D) = \iiint_D 1 dV.$$

#### Exemplo 4.2.10

Seja  $D$  o sólido limitado por  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  e por  $z = 0$ .

A equação  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  define uma superfície cónica e  $z = 0$  é plano  $xy$ . Podemos ver um esboço dos limites do sólido na figura que se segue



O seu volume é dado por  $\iiint_D 1 dV$ .

A projeção deste sólido no plano  $xOy$  é um círculo de raio 1. Logo, as coordenadas cilíndricas parecem apropriadas ao cálculo deste integral. Nestas coordenadas,  $\rho$  varia entre 0 e 1,  $\theta$  varia entre 0 e  $2\pi$  e  $z$  varia entre 0 e a superfície cónica que tem de ser agora descrita nas coordenadas cilíndricas:

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = 1 - \rho^2$$

Concluimos assim que:

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D) &= \iiint_D 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\rho} \rho dz d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho [z]_0^{1-\rho} d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho - \rho^2 d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 (\rho - \rho^2) [\theta]_0^{2\pi} d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

#### Exemplo 4.2.11

Seja  $D$  uma esfera, de centro na origem e raio  $r$ . O seu volume é dado por

$$\text{Volume(esfera)} = \iiint_D 1 dV.$$

As coordenadas esféricas são adequadas ao cálculo deste integral, pelo que

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 dV &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^2 [-\cos \varphi]_0^\pi d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} 2\rho^2 d\theta d\rho = 2 \int_0^r \rho^2 [\theta]_0^{2\pi} d\rho \\ &= 4\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Obtivemos, como não podia deixar de ser, o resultado que já conhecíamos para o volume de uma esfera.

#### 4.2.4 Aplicação do integral triplo ao cálculo do centro de massa

Seja  $D$  um sólido cuja densidade no ponto  $(x, y, z)$  é dada por  $f(x, y, z)$ . Então, a massa total do sólido é dada por

$$M = \iiint_D f(x, y, z) dV$$

e as coordenadas do centro de massa  $(x_C, y_C, z_C)$  são dadas por:

$$x_C = \frac{\iiint_D x f(x, y, z) dV}{M}, \quad y_C = \frac{\iiint_D y f(x, y, z) dV}{M}, \quad z_C = \frac{\iiint_D z f(x, y, z) dV}{M}.$$

# Capítulo 5

## Equações diferenciais

### 5.1 Introdução

Uma equação diferencial é uma equação em que a incógnita é uma função e onde figuram derivadas dessa função.

A função incógnita pode depender de uma ou mais variáveis. Quando a função incógnita depende apenas de uma variável, às equações dá-se o nome de *equações diferenciais ordinárias*. No caso em que a função incógnita depende de 2 ou mais variáveis, as derivadas têm de ser derivadas parciais pelo que as equações designam-se por *equações diferenciais às derivadas parciais*.

Nesta unidade curricular vamos estudar apenas equações diferenciais ordinárias e, por vezes, abreviaremos para *edo(s)*. Em vez de utilizar a notação mais comum para funções,  $f(x)$ , iremos adotar na maioria das vezes a notação  $y(x)$  para a função incógnita.

Um exemplo muito simples de uma equação diferencial é

$$y'(x) = 1.$$

Neste caso, até conseguimos resolver esta equação diferencial apenas com o conhecimento sobre integração. Vejamos:

$$y'(x) = 1 \Rightarrow \int y'(x) dx = \int 1 dx \Rightarrow y(x) = x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Muitas vezes, para tornar a notação menos pesada, omitimos a dependência de  $x$  na equação pelo que, em vez de  $y'(x) = 1$ , poderia aparecer apenas  $y' = 1$ .

Chama-se *ordem* de uma equação diferencial à ordem da derivada de maior ordem que figurar nessa equação.

### Exemplo 5.1.1

Apresentam-se 3 exemplos de edos:

- $y' = 1$  edo de 1<sup>a</sup> ordem;
- $y'' + xy' + 2y = x^2$  edo de 2<sup>a</sup> ordem;
- $\sin(t)x''' + 2x = t^4$  edo de 3<sup>a</sup> ordem (nesta, a incógnita é  $x(t)$ ).

Nem todas as equações diferenciais conseguem resolver-se. No entanto, há métodos de resolução para algumas classes de equações diferenciais e, no que se segue, serão expostas algumas delas.

Mas antes de passar à exposição desses métodos, vejamos como podemos verificar se uma dada função é solução de uma equação diferencial.

### Exemplo 5.1.2

Seja  $y(x) = x^2$  e consideremos a equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem  $xy'' - y' = 0$ . Para verificar se  $y(x) = x^2$  é solução desta equação, reparemos que  $y'(x) = 2x$  e  $y''(x) = 2$ .

Substituindo na equação,

$$xy'' - y' = x \times 2 - 2x = 0.$$

Logo,  $y(x) = x^2$  é **uma** solução da equação. E é apenas uma solução porque esta equação possui uma infinidade de soluções. Por exemplo,  $y(x) = x^2 + 1$  também é solução (verificar). Serve apenas de alerta para o facto das soluções de uma equação diferencial não serem únicas.

### Definição 5.1.3

Chamamos *solução particular* a toda a função diferenciável que seja solução de uma equação diferencial. Chamamos *solução geral* ao conjunto de todas as soluções particulares.

### Exemplo 5.1.4

Para a equação  $y' = 1$  temos, por exemplo,  $y(x) = x$  e  $y(x) = x + 1$  como soluções particulares. A solução geral da equação é  $y(x) = x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Obs.** Nem sempre é possível resolver explicitamente uma edo, isto é, nem sempre é possível chegar a um resultado da forma  $y(x) = f(x)$ . Por vezes, apenas é possível chegar à conclusão que  $y(x)$  satisfaz uma determinada equação onde já não figuram derivadas de  $y$ . Dizemos, nesse caso, que a solução está definida implicitamente.

## 5.2 Equações diferenciais de 1ª ordem

Vamos considerar equações diferenciais de 1ª ordem da forma  $y' = f(x, y)$ . Mesmo que a equação não esteja escrita nessa forma, pode ser possível escrevê-la nessa forma. Um exemplo:

$$(1 + x^2)y' - y = e^x \Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{e^x + y}{1 + x^2}}_{f(x,y)}$$

**Teorema 5.2.1** (Existência e unicidade de solução)

Seja  $y' = f(x, y)$  uma edo de 1ª ordem, com  $f(x, y)$  uma função contínua num domínio  $D \subset \mathbb{R}^2$  e tal que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe e é contínua em  $D$ . Então, para todo o  $(x_0, y_0) \in D$  existe uma única solução da edo que verifica  $y(x_0) = y_0$ .

### Exemplo 5.2.2

Consideremos o problema

$$\begin{cases} y' = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Neste caso temos  $f(x, y) = 1$  que é uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  também é contínua. Então, o teorema garante a existência e unicidade de solução satisfazendo  $y(1) = 2$ . Mas vamos mesmo determinar essa solução única.

Já tínhamos visto que solução geral da edo é  $y(x) = x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Recorrendo agora à condição dada,  $y(1) = 2$ :

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow y(x) = x + 1 \text{ é a solução (única) do problema.}$$

### 5.2.1 Equações de variáveis separáveis

#### Definição 5.2.3

Chamamos *equação diferencial de variáveis separáveis* a uma equação diferencial de 1ª ordem que se possa escrever como

$$y' = f(y)g(x),$$

com  $f$  e  $g$  funções contínuas tais que  $f(y) \neq 0$ .

Dada uma equação de variáveis separáveis, vamos utilizar o seguinte método



para a sua resolução:

$$\begin{aligned} y' = f(y)g(x) &\stackrel{f(y) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(y)}y' = g(x) \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Exemplo 5.2.4

Consideremos a equação  $y' = y$ , para  $y \neq 0$ . Trata-se de uma equação de variáveis separáveis com  $f(y) = y$  e  $g(x) = 1$ .

$$\begin{aligned} y' = y &\stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y}y' = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 1dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{x+C}, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |y| = e^x e^C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y(x) = e^x e^C \vee y(x) = -e^x e^C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Termos obtido duas expressões para a solução geral não contraria o teorema de existência e unicidade. O teorema só garante a existência de solução única para uma edo que satisfaça uma condição do tipo  $y(x_0) = y_0$  e se impusermos uma tal condição obteremos uma solução única. Vamos ver dois exemplos:

- Suponhamos que a condição era  $y(0) = 2$ . Nesse caso, iríamos considerar a solução da forma  $y(x) = e^x e^C$  uma vez que  $2 > 0$ .

Substituindo,

$$2 = e^0 e^C \Leftrightarrow e^C = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^x \text{ é a solução única.}$$

- Suponhamos agora que a condição era  $y(0) = -2$ . Nesse caso, já teríamos de considerar a solução da forma  $y(x) = -e^x e^C$  uma vez que  $-2 < 0$  e, substituindo,

$$-2 = -e^0 e^C \Leftrightarrow e^C = -2 \Rightarrow y(x) = -2e^x \text{ é a solução única.}$$

### Exemplo 5.2.5

Consideremos a edo  $y' = \frac{1}{y} \cos(x)$ . Esta é também uma equação de variáveis separáveis.

Para encontrar a solução geral,

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{y} \cos(x) &\Leftrightarrow yy' = \cos(x) \Leftrightarrow \int y dy = \int \cos(x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \pm \sqrt{2 \sin(x) + 2C}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Estas são equações da forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

A solução geral desta equação é

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C e^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}$$

#### Exemplo 5.2.6

A edo  $y' + \frac{3}{x}y = x$ , para  $x > 0$ , é uma edo linear de 1ª ordem com  $p(x) = \frac{3}{x}$  e  $q(x) = x$ .

C.A.

$$\int p(x) dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln |x| = 3 \ln x = \ln x^3$$

$x > 0$ , por hipótese

Logo, a sua solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{3}{x} dx} \int e^{\int \frac{3}{x} dx} x dx + C e^{-\int \frac{3}{x} dx}, C \in \mathbb{R} \\ &= e^{\ln x^{-3}} \int e^{\ln x^3} x dx + C e^{\ln x^{-3}}, C \in \mathbb{R} \\ &= x^{-3} \int x^4 dx + C x^{-3}, C \in \mathbb{R} \\ &= x^{-3} \frac{x^5}{5} + C x^{-3}, C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

#### Exemplo 5.2.7

A edo  $5y' + y = 5e^x$  não está exatamente na forma para a qual apresentámos a solução geral de uma edo linear de 1ª ordem por causa do termo  $5y'$ . No entanto, se dividirmos toda a equação por 5, passa a estar na forma pretendida.

$$5y' + y = 5e^x \Leftrightarrow y' + \underset{\substack{\uparrow \\ p(x)}}{\frac{1}{5}}y = \underset{\substack{\uparrow \\ q(x)}}{e^x}$$

Logo, a sua solução geral é dada por:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{-\int \frac{1}{5} dx} \int e^{\int \frac{1}{5} dx} e^x dx + C e^{-\int \frac{1}{5} dx}, C \in \mathbb{R} \\
 &= e^{-\frac{x}{5}} \int e^{\frac{x}{5}} e^x dx + C e^{-\frac{x}{5}}, C \in \mathbb{R} \\
 &= e^{-\frac{x}{5}} \int e^{\frac{6x}{5}} dx + C e^{-\frac{x}{5}}, C \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{5}{6} e^{-\frac{x}{5}} e^{\frac{6x}{5}} + C e^{-\frac{x}{5}}, C \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{5}{6} e^x + C e^{-\frac{x}{5}}, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

### 5.2.3 Equações diferenciais totais exatas

#### Definição 5.2.8

Uma edo da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (5.1)$$

diz-se *total exata* se existir uma função  $F(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

#### Teorema 5.2.9

Se (5.1) é uma equação diferencial total exata,  $y(x)$  é uma sua solução se, e só se,  $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$ , ou seja, se, e só se,  $F(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

O teorema anterior diz-nos que  $F(x, y)$  define implicitamente a solução geral de (5.1).

#### Exemplo 5.2.10

Considere a equação

$$\underbrace{2xy + 1}_{M(x,y)} + \underbrace{(x^2 + 4y)}_{N(x,y)} y' = 0.$$

Comecemos por verificar se se trata de uma equação diferencial total exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Logo, a equação é total exata pelo que sabemos que existe  $F(x, y)$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ . A partir destas duas condições vamos conseguir determinar  $F(x, y)$ . Vejamos como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2xy + 1 &\Rightarrow F(x, y) = \int 2xy + 1 \, dx \\ &\Rightarrow F(x, y) = x^2y + x + f(y)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = x^2 + 4y &\Rightarrow F(x, y) = \int x^2 + 4y \, dy \\ &\Rightarrow F(x, y) = x^2y + 2y^2 + g(x)\end{aligned}$$

Para determinar  $f(y)$  e  $g(x)$ , igualamos as duas expressões obtidas para  $F(x, y)$ :

$$x^2y + x + f(y) = x^2y + 2y^2 + g(x) \Rightarrow f(y) = 2y^2 \text{ e } g(x) = x$$

ou seja,

$$F(x, y) = x^2y + x + 2y^2.$$

Concluimos, então, que a equação  $F(x, y) = x^2y + x + 2y^2 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , define implicitamente a solução  $y(x)$  da equação diferencial total exata.

Pode acontecer termos uma equação na forma  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  e, no entanto, não ser total exata. Mas também pode acontecer que, multiplicando toda a equação por uma função adequada, se obtenha uma equação diferencial total exata. Uma tal função toma o nome de *fator integrante* e o próximo teorema permite obter fatores integrantes em determinadas condições.

### Teorema 5.2.11

Seja  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  uma edo de 1ª ordem.

(i) Se  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$ , então

$$I(x) = e^{\int \varphi(x) \, dx}$$

é um fator integrante para a equação;

(ii) Se  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \varphi(y)$ , então

$$I(y) = e^{-\int \varphi(y) \, dy}$$

é um fator integrante para a equação;

**Exemplo 5.2.12**

$$\underbrace{xy^2 - y^3}_{M(x,y)} + \underbrace{(1 - xy^2)}_{N(x,y)} y' = 0.$$

Começamos por verificar se se trata de uma equação diferencial total exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 3y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -y^2$$

Logo, a equação diferencial **não é** total exata.

Procuremos então um fator integrante recorrendo ao teorema anterior.

Por *i*),

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2xy - 3y^2 - (-y^2)}{1 - xy^2} = \frac{2xy - 2y^2}{1 - xy^2}$$

como obtivemos uma expressão que depende de  $x$  e  $y$  e não apenas de  $x$ , não podemos concluir nada acerca da existência de fator integrante.

Procuremos então segundo *ii*) do teorema.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{2xy - 3y^2 - (-y^2)}{xy^2 - y^3} = \frac{2xy - 2y^2}{xy^2 - y^3} = \frac{2(xy - y^2)}{y(xy - y^2)} = \frac{2}{y} = \varphi(y)$$

Podemos concluir que existe o fator integrante

$$I(y) = e^{-\int \varphi(y) dy} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2}.$$

Multiplicando a equação inicial por  $\frac{1}{y^2}$ ,

$$\frac{xy^2 - y^3}{y^2} + \frac{1 - xy^2}{y^2} y' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x - y}_{M(x,y)} + \underbrace{\left(\frac{1}{y^2} - x\right)}_{N(x,y)} y' = 0.$$

Esta equação já é total exata, segundo o teorema. Mas podemos verificar:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Logo, sabemos que existe  $F(x, y)$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$  pelo que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = x - y \Rightarrow F(x, y) = \int x - y dx = \frac{x^2}{2} - xy + f(y)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = \frac{1}{y^2} - x \Rightarrow F(x, y) = \int \frac{1}{y^2} - x \, dy = -\frac{1}{y} - xy + g(x)$$

Para determinar  $f(y)$  e  $g(x)$ , igualamos as duas expressões obtidas para  $F(x, y)$ :

$$\frac{x^2}{2} - xy + f(y) = -\frac{1}{y} - xy + g(x) \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{y} \text{ e } g(x) = \frac{x^2}{2}$$

ou seja,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y}$$

Concluimos, então, que a equação  $F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , define implicitamente a solução  $y(x)$  da equação diferencial inicial.

## 5.3 Equações diferenciais lineares de ordem $n$

### Definição 5.3.1

Uma equação diferencial linear de ordem  $n$  é da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \quad (5.2)$$

Se  $f(x) = 0$ , a equação diz-se *homogénea*. Caso contrário, diz-se *completa*.

### Exemplo 5.3.2

$$y''' + xy'' + x^3y' + y = e^x$$

é uma equação diferencial linear de 3<sup>a</sup> ordem com  $a_2(x) = x$ ,  $a_1(x) = x^3$ ,  $a_0(x) = 1$  e  $f(x) = e^x$ .

### Teorema 5.3.3

Sejam  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  e  $f(x)$  contínuas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  e  $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

Então, (5.2) sujeita às condições

$$\begin{cases} y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

tem solução única em  $I$ .

### Exemplo 5.3.4

Vamos analisar o problema

$$\begin{cases} y'' + xy' + e^x y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Como neste caso temos  $a_0(x) = e^x$ ,  $a_1(x) = x$  e  $f(x) = \cos x$  e são todas funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , concluímos pelo teorema anterior que este problema tem solução única em  $\mathbb{R}$ .

Este resultado teórico garante a existência e unicidade de solução de uma equação diferencial linear de ordem  $n$ . Mas como calcular essa solução? É o que veremos mais adiante.

### Definição 5.3.5

À equação linear completa (5.2) podemos associar a equação linear homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

à qual chamamos equação homogénea associada à equação diferencial linear completa.

### Exemplo 5.3.6

Em relação ao exemplo anterior, a equação linear homogénea associada é

$$y'' + xy' + e^x y = 0.$$

### Teorema 5.3.7 (Solução geral da equação completa)

Seja  $y_p$  uma solução particular da equação (5.2), com  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  e  $f(x)$  contínuas e  $y_h(x)$  a solução geral da sua equação homogénea associada. Então, a solução geral da equação linear completa é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

### Exemplo 5.3.8

Consideremos a equação  $y'' - y = -2 \sin x$ .

Sabendo que  $y_p(x) = \sin x$  é uma solução particular da equação e que  $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  é a solução geral da equação homogénea associada, concluímos pelo teorema anterior que a solução geral da equação completa é

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### 5.3.1 Equações lineares de coeficientes constantes

#### Definição 5.3.9

Uma equação diferencial linear, de ordem  $n$ , de coeficientes constantes é da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

**Obs.** Note que a diferença entre este tipo de equação e a equação (5.2) é que os coeficientes  $a_i$ , no primeiro caso, eram funções de  $x$  e agora são constantes.

#### Exemplo 5.3.10

A equação  $y''' + 2y'' + 3y = x^2$  é uma equação linear de 3<sup>a</sup> ordem, de coeficientes constantes.

#### Equações homogêneas de coeficientes constantes

Consideremos agora uma equação linear homogênea, de coeficientes constantes, de ordem  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

A sua solução geral é dada por uma combinação linear de  $n$  soluções particulares linearmente independentes. Ou seja, suponhamos que  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  são  $n$  soluções particulares, linearmente independentes, da equação. Então, a solução geral da equação é

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

#### Definição 5.3.11

Dada uma equação homogênea de coeficientes constantes, definimos o *polinómio característico* associado à equação como sendo

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

#### Exemplo 5.3.12

Dada a equação  $y''' + 2y'' + 3y = 0$ , o polinómio característico associado é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3.$$

O teorema que se segue permite obter a solução geral de uma equação linear homogênea, de coeficientes constantes.

#### Teorema 5.3.13

Dada uma equação linear homogênea, de ordem  $n$ , de coeficientes constantes e  $p(\lambda)$  o polinómio característico associado,



### 5.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM $N$

(i) Se  $p(\lambda)$  possui  $k$  raízes reais distintas,  $r_1, \dots, r_k$ , então

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_k x}$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea;

(ii) Se  $p(\lambda)$  possui uma raiz real  $r$  de multiplicidade  $m$ , então

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea;

(iii) Se  $p(\lambda)$  possui as raízes complexas  $a \pm ib$  simples, então

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea;

(iv) Se  $p(\lambda)$  possui as raízes complexas  $a \pm ib$  de multiplicidade  $m$ , então

$$\begin{aligned} e^{ax} \cos(bx), xe^{ax} \cos(bx), \dots, x^{m-1}e^{ax} \cos(bx), \\ e^{ax} \sin(bx), xe^{ax} \sin(bx), \dots, x^{m-1}e^{ax} \sin(bx), \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea.

#### Exemplo 5.3.14

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

O polinómio característico associado é  $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ .

Raízes do polinómio

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \end{aligned}$$

Logo,  $e^{0x} = 1$ ,  $e^x$  e  $e^{2x}$  são soluções linearmente independentes da equação pelo que a sua solução geral é

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

#### Exemplo 5.3.15

$$y'' + y = 0$$

O polinómio característico associado é  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ .

### 5.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM $N$

Raízes do polinómio

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Tratam-se de raízes complexas simples  $a + ib$  e  $a - ib$  com  $a = 0$  e  $b = 1$ , pelo que  $e^{0x} \cos(x) = \cos(x)$ ,  $e^{0x} \sin(x) = \sin(x)$  são soluções linearmente independentes da equação e a sua solução geral é

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.3.16**

$$y'' - 2y' + y = 0$$

O polinómio característico associado é  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ .

Raízes do polinómio

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Acontece que  $\lambda = 1$  é uma raiz de multiplicidade 2 uma vez que o polinómio é de grau 2 e tem apenas esta raiz. Logo,  $e^x$  e  $xe^x$  são soluções linearmente independentes da equação pelo que a sua solução geral é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.3.17**

$$y''' + 2y'' = 0$$

O polinómio característico associado é  $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2$ .

Raízes do polinómio

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda = -2}_{mult.1} \vee \underbrace{\lambda = 0}_{mult.2}$$

Logo,  $e^{-2x}$ ,  $e^{0x} = 1$  e  $xe^{0x} = x$  são soluções linearmente independentes da equação pelo que a sua solução geral é

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

### Equações completas de coeficientes constantes

Consideremos agora a equação linear completa, de coeficientes constantes,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x) \quad (5.3)$$

**Teorema 5.3.18** (Solução particular da equação completa)

Dada a equação linear completa (5.3) e  $p(\lambda)$  o polinómio característico da equação homogénea associada,

(a) Se  $f(x) = e^{ax}Q(x)$ , com  $Q(x)$  um polinómio:

i) Se  $p(a) \neq 0$ , então uma solução particular de (5.3) é da forma

$$y_p(x) = e^{ax}R(x),$$

onde  $R(x)$  é um polinómio o mesmo grau de  $Q(x)$ ;

ii) Se  $p(a) = 0$ , então uma solução particular de (5.3) é da forma

$$y_p(x) = e^{ax}x^m R(x),$$

onde  $R(x)$  é um polinómio o mesmo grau de  $Q(x)$  e  $m$  é a multiplicidade de  $a$  como raiz do polinómio característico;

(b) Se  $f(x) = A(x)e^{ax} \cos(bx) + B(x)e^{ax} \sin(bx)$ , com  $A(x)$  e  $B(x)$  polinómios:

i) Se  $p(a \pm ib) \neq 0$ , então uma solução particular de (5.3) é da forma

$$y_p(x) = R(x)e^{ax} \cos(bx) + S(x)e^{ax} \sin(bx),$$

onde  $R(x)$  e  $S(x)$  são polinómios cujo grau é o maior dos graus de  $A(x)$  e  $B(x)$ ;

ii) Se  $p(a \pm ib) = 0$ , então uma solução particular de (5.3) é da forma

$$y_p(x) = x^m (R(x)e^{ax} \cos(bx) + S(x)e^{ax} \sin(bx)),$$

onde  $R(x)$  e  $S(x)$  são polinómios cujo grau é o maior dos graus de  $A(x)$  e  $B(x)$  e  $m$  é a multiplicidade de  $a \pm ib$  como raiz do polinómio característico.

Os polinómios  $R(x)$  e  $S(x)$  deste teorema podem ser calculados através do Método dos Coeficientes Indeterminados que se ilustra no exemplo que se segue.

**Exemplo 5.3.19**

$$y'' - y' = xe^{2x}$$

A equação homogénea associada é  $y'' - y' = 0$  cujo polinómio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda.$$

Raízes do polinómio característico

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

$p(\lambda)$  possui 2 raízes reais simples pelo que a solução geral da equação homogénea associada é:

$$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar uma solução particular da equação completa, observemos que  $f(x) = xe^{2x}$  é da forma  $e^{ax}Q(x)$  com  $a = 2$  e  $Q(x) = x$  um polinómio de grau 1.

Como  $p(a) = p(2) = 2^2 - 2 = 2 \neq 0$ , de acordo com o teorema anterior, uma solução particular da equação completa é da forma

$$y_p(x) = e^{2x}R(x)$$

com  $R(x)$  um polinómio de grau 1, ou seja,  $R(x) = c_0 + c_1x$ , para  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ . Estas constantes  $c_0, c_1$  serão obtidas pelo já referido Método dos Coeficientes Indeterminados que consiste em utilizar a forma obtida para uma solução particular e derivá-la tantas vezes quantas as necessárias para substituir na equação inicial.

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (c_0 + c_1x)e^{2x} \\ y'_p(x) &= \dots = (c_1 + 2c_0 + 2c_1x)e^{2x} \\ y''_p(x) &= \dots = 4(c_1 + c_0 + c_1x)e^{2x} \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} y''_p - y'_p &= xe^{2x} \Leftrightarrow 4(c_1 + c_0 + c_1x)e^{2x} - (c_1 + 2c_0 + 2c_1x)e^{2x} = xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow (2c_0 + 3c_1 + 2c_1x)e^{2x} = xe^{2x} \\ 2c_0 + 3c_1 + 2c_1x &= x \Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + 3c_1 = 0 \\ 2c_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = -\frac{3}{4} \\ c_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja,  $y_p(x) = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x\right) e^{2x}$ .

Conclusão: a solução geral da equação completa é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 e^x + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x\right) e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

# Apêndice A

## Breves revisões de Geometria Analítica

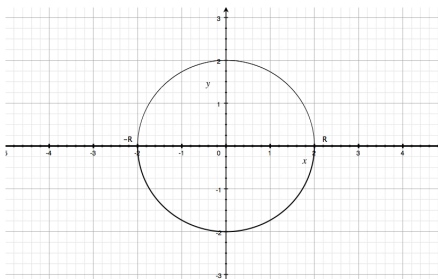
### A.1 Em $\mathbb{R}^2$

#### A.1.1 Equação geral da circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$ .

Circunferência centrada na origem de equação  $x^2 + y^2 = R^2$ , com  $R = 2$ .



#### A.1.2 Equação geral da elipse

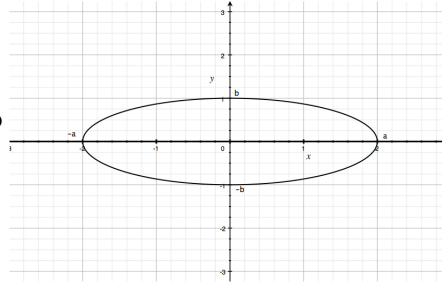
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Centro:  $(x_0, y_0)$

$a$  é o semi-eixo da elipse segundo o eixo dos  $xx$

$b$  é o semi-eixo da elipse segundo o eixo dos  $yy$

Elipse centrada na origem de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  com  $a = 2$ ,  $b = 1$ .



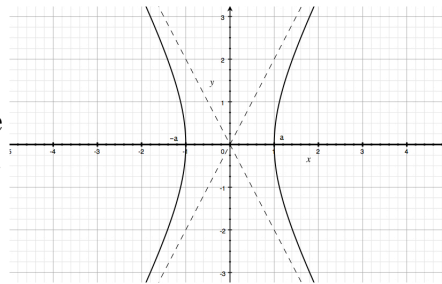
### A.1.3 Equação geral da hipérbole

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

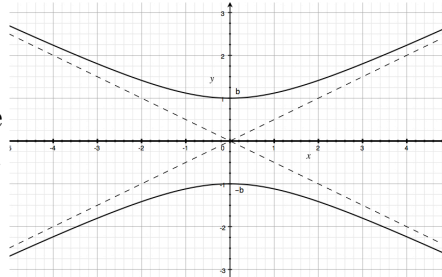
Centro:  $(x_0, y_0)$

Assíntotas:  $y = \pm \frac{a}{b}x$

Hipérbole centrada na origem de equação  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  com  $a = 1$ ,  $b = 2$ .



Hipérbole centrada na origem de equação  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  com  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

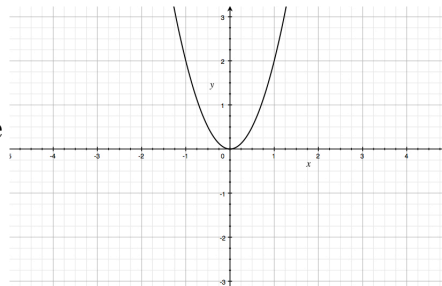


### A.1.4 Equação geral da parábola

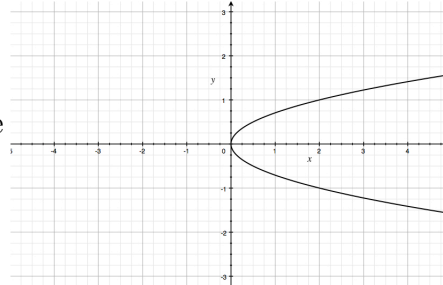
$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad \text{ou} \quad x - x_0 = a(y - y_0)^2$$

Parábola de vértice  $(x_0, y_0)$ .

Parábola de vértice na origem, de equação  $y = ax^2$ , com  $a = 2$ .



Parábola de vértice na origem, de equação  $x = ay^2$ , com  $a = 2$ .



Se  $a < 0$ , a concavidade da parábola muda de sentido em relação aos exemplos apresentados.

## A.2 Em $\mathbb{R}^3$

### A.2.1 Recta e plano

$Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos, representa um plano onde  $(A, B, C)$  é um vector perpendicular ao plano.

A intersecção de dois planos secantes origina uma recta.

Uma recta que passa por  $P(x_0, y_0, z_0)$  e contém o vector  $(u_1, u_2, u_3)$  pode ser escrita como

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

### A.2.2 Quádricas

As quádricas são superfícies definidas por uma equação do 2º grau em  $x, y, z$ .

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

$A, B, \dots, J \in \mathbb{R}$ ,  $A, B, C$  não simultaneamente nulos.

### A.2.3 Classificação das quádricas

Por uma questão de simplicidade, todas as quádricas que se seguem estão centradas relativamente à origem.

- **Elipsóide**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa um elipsóide que intersecta o eixo dos  $xx$  em  $\pm a$ , o eixo dos  $yy$  em  $\pm b$  e o eixo dos  $zz$  em  $\pm c$ .



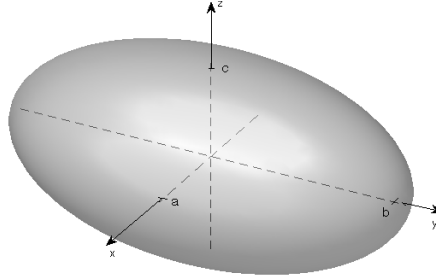


Figura A.1: Elipsóide.

$a, b$  e  $c$  designam-se por semi-eixos do elipsóide.

Se  $a = b = c$  a equação representa uma superfície esférica que habitualmente se escreve como  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  cujo centro é  $(0, 0, 0)$  e o raio é  $R$ .

- **Hiperbolóide elíptico de uma folha**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Representa um hiperbolóide de uma folha que intersecta o eixo dos  $xx$  em  $\pm a$  e o eixo dos  $yy$  em  $\pm b$ . Os valores  $a, b, c$  designam-se por semi-eixos do hiperbolóide.

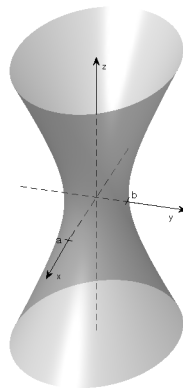


Figura A.2: Hiperbolóide elíptico de uma folha.

O sinal negativo poderia estar, alternativamente, na primeira ou na segunda parcela produzindo as óbvias mudanças em termos de orientação do hiperbolóide.

- **Hiperbolóide de duas folhas**

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Representa um hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é o eixo dos  $zz$ .

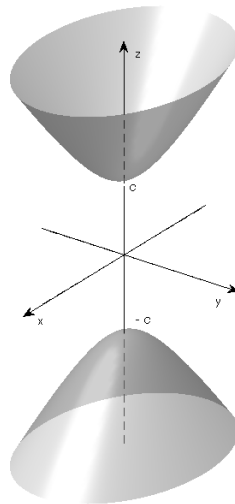


Figura A.3: Hiperbolóide de 2 folhas.

O sinal positivo poderia estar, alternativamente, na primeira ou na segunda parcelas com as mudanças óbvias em termos de orientação do hiperbolóide.

- **Superfície cónica**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Representa uma superfície cónica, com vértice na origem e cujo eixo é o dos  $zz$ . O sinal negativo poderia estar, alternativamente, na primeira ou na segunda parcela originando as mudanças óbvias em termos de orientação da superfície.

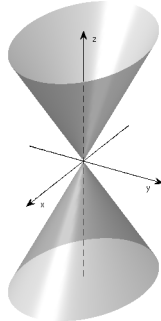


Figura A.4: Superfície cónica.

- **Parabolóide elíptico**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Se  $a = b$  o parabolóide será circular; se  $a \neq b$  o parabolóide será elíptico.

Se  $c > 0$  o parabolóide tem a concavidade voltada para cima.

Se  $c < 0$  o parabolóide tem a concavidade voltada para baixo.

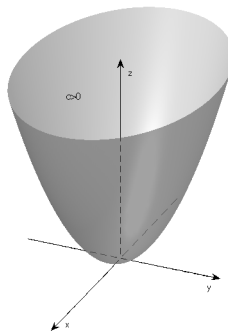


Figura A.5: Parabolóide elíptico.

- **Parabolóide hiperbólico**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

representa um parabolóide hiperbólico segundo o eixo dos  $yy$ .

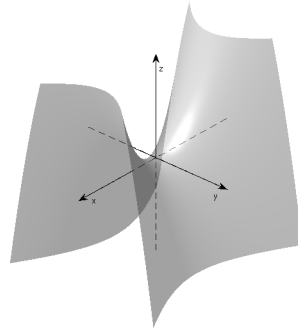


Figura A.6: Parabolóide hiperbólico.

Se o sinal negativo estiver na primeira parcela, então a superfície estará orientada segundo o eixo dos  $xx$ .

- **Cilindro parabólico**

$$ax^2 - by = 0$$

representa um cilindro parabólico.

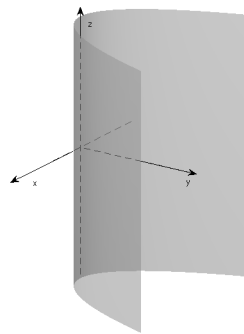


Figura A.7: Cilindro parabólico em que  $ab > 0$ .

- **Cilindro elíptico**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa um cilindro elíptico.

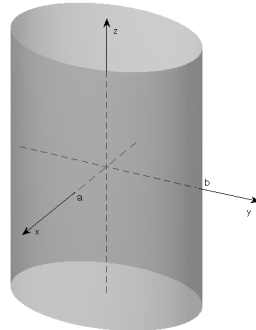


Figura A.8: Cilindro elíptico.

- **Cilindro hiperbólico**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa um cilindro hiperbólico.

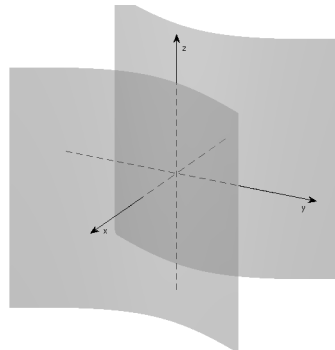


Figura A.9: Cilindro hiperbólico.