MA4702. Programación Lineal Mixta 2020.
Profesor: José Soto.

Tarea 1.

Fecha entrega: Lunes 04/05 a las 12:00.
Instrucciones: Entregue los 4 problemas escaneados o en una foto de alta calidad, via ucursos. Los problemas de la tarea se deben resolver de manera individual. Para asegurar trabajo personal se exige que las respuestas sean escritas a mano.

¡No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador!
¡No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador!
¡No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador!
¡No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador!

Problema 1. Escriba restricciones lineales mixtas (puede imponer integralidad o usar variables adicionales) para modelar las siguientes condiciones lógicas o algebraicas, dando una explicación breve de su solución.

(0) (Ejemplo) $x, y \in [3], x = 3 \implies y \geq 2$
(Solución):

$$x \leq 3, y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1, x, y \in \mathbb{Z}$$
$$4x - y \leq 10$$

Explicación breve: Si $x \leq 2$, $4x$ es a lo más 8, y luego la desigualdad inferior se cumple para todo y. Pero si $x = 3$ entonces $4x$ es 12, y luego para que la desigualdad inferior se cumpla, y debe ser al menos 2.

(1) $x, y \in \{0, 1\}$, $x = 1 \implies y = 1$.

(2) $x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in [m], y \in \{0, 1\}$. Si más de k variables x_i son 1 entonces $y = 1$.

(3) $x, y, z \in \{0, 1\}$, si $x = 1$, entonces ($y = 1$ o $z = 1$)

(4) $x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in [m]$, $\prod_{i=1}^{m} x_i = 0$.

(5) $x, y \in [n]$, x e y tienen la misma paridad.

(6) $x \in [-M, M]$ (intervalo real), $y = |x|$.
(Indicación, cree variables binarias w_1, w_2 que representen la expresión $w_1 = 1 \iff (x \geq 0 \wedge y = x)$; $w_2 = 1 \iff (x \leq 0 \wedge y = -x)$)

Problema 2. El problema de la mochila fraccional se modela con el siguiente programa lineal puro:

$$\text{máx}\{v^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \leq B; 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in [n]\},$$

donde los tamaños $s_i > 0, \forall i \in [n]$ y los valores son arbitrarios $v \in \mathbb{R}^n_+$. Asuma además sin pérdida de generalidad que los objetos están ordenados de acuerdo a valor sobre tamaño, es decir

$$\frac{v_1}{s_1} \geq \frac{v_2}{s_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{s_n}$$

Sea h el índice más grande tal que los primeros h objetos caben en la mochila: $\sum_{i=1}^{h} s_i \leq B$. Suponiendo que $h < n$, demuestre usando holgura complementaria que existe una solución óptima x^* de este problema que satisface

$$x_i^* = 1, \text{ para } i \in [h], \qquad x_{h+1}^* = \frac{B - \sum_{i=1}^{h} s_i}{s_{h+1}}, \qquad x_i^* = 0, \text{ para } i \geq h + 2.$$

Problema 3. Teorema de descomposición de flujo. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y s, t dos de sus vértices. Considere los siguientes poliedros.

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^E_+ \colon x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0, \forall v \in V \setminus \{s,t\}, x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) \geq 0\}.$$
$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^E_+ \colon x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0, \forall v \in V \setminus \{s,t\}, x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) = 1\}.$$
$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^E_+ \colon x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0, \forall v \in V \setminus \{t\}\},$$

Los elementos de P_1 se llaman s-t flujos, los elementos de P_2 se llaman s-t flujos de valor 1 y los elementos de P_3 se llaman s-t flujos de valor 0, o circulaciones.

(a) Pruebe que P_1 y P_3 son conos, que $P_2 \subseteq P_1$ y que $\mathrm{rec}(P_2) = P_3$.

(b) Para todo $x \in P_1$, llame soporte de x al conjunto de arcos $S_x = \{e \in E \colon x_e > 0\}$. Demuestre que si x no es el vector 0 entonces S_x contiene a los arcos de algún s-t camino P o de un un ciclo C.

(c) Llame $\mathcal{P} = \{P \subseteq E \colon P \text{ es un } s\text{-}t \text{ camino de } G\}$ y $\mathcal{C} = \{C \subseteq E \colon C \text{ es un ciclo de G}\}$. Pruebe usando la parte anterior que P_1 está cónicamente generado por $\{\chi^P \colon P \in \mathcal{P}\} \cup \{\chi^C \colon C \in \mathcal{C}\}$ donde $\chi^R \in \mathbb{R}^E$ es el vector indicatriz de R, es decir χ^R_e es 1 si $e \in R$ y 0 si $e \notin R$. **Indicación:** Pruebe que $x \in P_1$ tiene la combinación cónica pedida por inducción en el tamaño de S_x.

(d) Deduzca la siguiente descomposición de Minkowski-Weyl del poliedro P_2:
$P_2 = \mathrm{conv}(\{\chi^P \colon P \in \mathcal{P}\}) + \mathrm{cono}(\{\chi^C \colon C \in \mathcal{C}\})$.

Problema 4. Calcule el dual de los siguientes programas lineales puros (suponga $G = (V, E)$ es un grafo, que para todo $U \subseteq V$, $E(U)$ es el conjunto de aristas con ambos extremos en U, $\delta(U)$ es el conjunto de aristas con un extremo dentro de U y uno fuera de U.)

$$\begin{array}{llr}
(P1): \text{mín} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{s.a.} & x(\delta(v)) \geq 1 & \forall v \in V \\
& x_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
(P2): \text{máx} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x_e & \\
\text{s.a.} & x(\delta(v)) \leq 1 & \forall v \in V \\
& x(E(U))) \leq \dfrac{|U| - 1}{2} & \forall U \subseteq V, |U| \text{ impar} \\
& x_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
(P3): \text{máx} & \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} w_{ijk} x_{ijk} & \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = a_i & \forall i \in [I]. \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \leq b_j & \forall j \in [J]. \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} x_{ijk} \geq c_k & \forall k \in [K]. \\
& x_{ijk} \geq 0 & \forall (i,j,k) \in [I] \times [J] \times [K].
\end{array}$$

Notas: (P1) es el politopo de los edge-covers de G cuando G es bipartito, (P2) es el polítopo de los matchings de G, (P3) es la relajación de una variante de 3D-matching.