 fcfm.pdf

Tarea 2.

Fecha entrega: Lunes 01 de Junio, 23:59. Por u-cursos.

Definiciones para esta tarea.

Sea $n \geq 2$ y $K_{n,n} = (V, E)$ el grafo bipartito simple y completo con n vértices por lado. Es decir, V se particiona en L y R, y todas las aristas con un vértice en L y uno en R están presentes en E. E se identifica con $L \times R$.

Sean $a \in \mathbb{R}^L_+$, $b \in \mathbb{R}^R_+$ vectores **estrictamente positivos** de capacidades en los vértices, con $a(L) = \sum_{v \in L} a_v = \sum_{v \in R} b_v = b(R)$. Llamamos polítopo de (a, b)-matching fraccional al conjunto

$$M_n = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) \leq a_v, \forall v \in L;\ x(\delta(v)) \leq b_v, \forall v \in R;\ x_e \geq 0, \forall e \in E\}$$

y llamamos (a, b)-matching fraccional a sus elementos. Notamos que si $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ es la matriz de vértice-arista incidencia de $K_{n,n}$, entonces $M_n = \{x \in \mathbb{R}^E_+ : Ax \leq b\}$. Note que A tiene $2n$ filas y n^2 columnas.

Decimos además que un (a, b)-matching fraccional x es perfecto si $x(E) = a(L) = b(R)$. El polítopo de (a, b)-transporte es el conjunto

$$T_n = \{x \in M_n : x(E) = a(L)\}$$

de todos los (a, b)-matchings fraccionales perfectos. Es muy simple probar que $T_n \neq \emptyset$. Por ejemplo, podemos usar el siguiente algoritmo glotón para encontrar $x \in T_n$.

Algoritmo 1 Calcula $x \in T_n$

$x \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^E$
while $x(E) < a(L)$ **do**
  Elegir $\ell \in L, r \in R$ tal que $x(\delta(\ell)) < a_\ell$ y $x(\delta(r)) < b_r$,
  $x_{\ell,r} \leftarrow \text{mín}(a_\ell - x(\delta(\ell)), b_r - x(\delta(r)))$
end while
return x

Ejercicios:

(b) [8 puntos] Demuestre que el Algoritmo 1 es correcto. En específico, solo debe demostrar que (i) si al principio de una iteración, $x(E) < a(L)$ entonces existe el $\ell \in L, r \in R$ buscados por el algoritmo, (ii) muestre que el algoritmo termina en una cantidad finita de iteraciones y (iii) que cuando termina, devuelve lo buscado.

Solución:
Llamemos nivel de un vértice v a $x(\delta(v))$. Decimos que un vértice $\ell \in L$ (resp., $r \in R$) está ajustado si su nivel es a_ℓ (resp., si su nivel es b_r).

Probemos por inducción la parte (i) pedida y además las siguientes propiedades: $x \in M_n$; el valor de cada arista solo puede subir (por lo tanto los niveles solo pueden subir, y los vértices no se pueden desajustar); y en cada etapa se ajusta al menos un vértice.

Todo lo anterior es cierto al principio del algoritmo. Consideremos entonces a iteración j, sea x^j el valor de x al principio de dicha iteración y x^{j+1} el valor al final. Supongamos también que $x^j(E) < a(L)$. Si todos los vértices de L fueran ajustados, tendríamos $x^j(E) = \sum_{\ell \in L} x^j(\delta(\ell)) = \sum_{\ell \in L} a_\ell = a(L)$, luego debe haber un $\ell' \in L$ no ajustado, por lo tanto (como $x^j \in M_n$) se debe tener que $x^j(\delta(\ell')) < a_\ell$. De forma análoga se prueba que existe r' tal que $x^j(\delta(r)) < b_\ell$. (En particular, se prueba (i)). Sean ahora $\ell' \in L, r' \in R$ los vértices elegidos por el algoritmo en esta iteración y $e = (\ell', r')$ la única arista que cambia su valor. Como e no es incidente a vértices ajustados, tenemos $x^j_e = 0$, y luego $x^{j+1}_e = \min(a_{\ell'} - x^j(\delta(\ell')), b_{r'} - x^j(r')) > 0$. En palabras, la única arista que cambia de valor, lo hace aumentando su valor. Finalmente, se tiene:

$$x^{j+1}(\delta(\ell')) = x^j(\delta(\ell')) - x^j_e + x^{j+1}_e \leq x^j(\delta(\ell')) - 0 + a_{\ell'} - x^j(\delta(\ell') = a_{\ell'}$$
$$x^{j+1}(\delta(r')) = x^j(\delta(r')) - x^j_e + x^{j+1}_e \leq x^j(\delta(r')) - 0 + b_{r'} - x^j(\delta(r') = b_{r'}$$

y en alguna de las dos líneas hay igualdad. Todo esto implica que los niveles de los vértices se mantienen bajo sus cotas (i.e., $x^i \in M_n$) y que al menos uno de ℓ' o r' se ajusta. Finalmente las aristas f que no son incidentes a vértices ajustados al final de la iteración, tampoco lo eran al principio, y luego $x^{j+1}_f = x^j_f = 0$. Esto concluye la demostración de todas las propiedades.

En la demostración arriba probamos (i). La propiedad (ii) se tiene pues en cada iteración al menos un vértice se ajusta, y por lo tanto no pueden haber más de $|L| + |R|$ iteraciones antes que $x(E) \geq a(L)$, y la parte (iii) es directa pues apenas $x(E) \geq a(L)$, el hecho que $x \in M_n$ garantiza que $x(E) = a(L)$ y luego $x \in T_n$.

(c) [4 puntos] Concluya que para todo $(\ell, r) \in E$ existe $x \in T_n$ con $x_{\ell,r} > 0$.

Solución:

Basta notar que la arista elegida por el algoritmo en la primera iteración es arbitraria (esto es pues para todo (ℓ, r), $0 < a_\ell$ y $0 < b_r$). Luego si obligamos al algoritmo a elegir la arista (ℓ, r) tendremos que al final de la primera iteración $x_{\ell,r} = \min(a_\ell, b_r) > 0$ y luego al final del algoritmo, $x_{\ell,r} > 0$.

(d) [8 puntos] Demuestre que $\dim(M_n) = |E| = n^2$.

Solución:

Demostrar que $\dim(M_n) = |E| = n^2$ equivale a demostrar que el poliedro es de dimensión completa, para esto basta demostrar que $\exists x \in M_n,\ \text{act}(x) = \emptyset$. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, por ejemplo $\epsilon < \min\{a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_R\}$, como todos los coeficientes son estrictamente positivos este coeficiente existe, luego, sea $x_{l,r} = \frac{\epsilon}{n}\ \forall l \in L, r \in R$, luego se tiene que $x_{l,r} > 0\ \forall (l, r) \in E$ y que $x(\delta(l)) = \sum_{r \in R} x_{l,r} = \epsilon < a_l\ \forall l \in L \wedge x(\delta(r)) = \sum_{l \in L} x_{l,r} = \epsilon < b_r\ \forall r \in R$, se concluye que x no tienen ninguna restricción activa y pertenece a M_n, por tanto, M_n tiene dimensión completa.

Alternativamente, tome $\epsilon < \min\{a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_R\}$, y llame para cada $e \in E$, χ^e al vector canónico que vale 1 en la coordenada e. Es fácil ver que todos los vectores de $B = \{\epsilon\chi^e : e \in E\}$ están en M_n y son linealmente independientes y luego $B \cup \{0\}$ es una familia de $|E| + 1$ vectores afínmente independiente, lo que prueba que M_n tiene dimensión $|E|$.

(e) [4 puntos] Pruebe que para todo $e \in E$, la desigualdad válida $x_e \geq 0$ induce una faceta de M_n.

Solución:

Sea $F_e = \{x \in M_n | x_e = 0\}$, luego F_e es faceta si la restricción e es irredundante, en efecto, si eliminamos la restricción podemos escoger un x tal que $x_e = -1$ y $x_{l,r} = \frac{\epsilon}{n}$ $\forall (l,r) \in E \setminus \{e\}$, con el mismo ϵ de la parte anterior, luego se tiene que x satisface todas las restricciones de M_n con excepción de $x_e \geq 0$, por ende, la región factible cambia al eliminar la restricción, se concluye que e es irredundante.

Alternativamente, sea $C = [A, I]$ la matriz de todas las restricciones de M_n (A las de capacidad y I las de no negatividad), como una faceta cumple $\dim(F) = \dim(P) - 1$ y la dimensión de una cara de M_n cumple $\dim(F) = |E| - \text{rango}(C_{\text{act}(F)})$, solo necesitamos demostrar que el $\text{rango}(C_{\text{act}(F_e)}) = \text{rango}(C_{\text{act}(P)}) + 1 = 1$, esto puede demostrarse fácilmente si existe un $x \in F_e$ tal que $\text{act}(x) = \text{act}(P) \cup \{e\} = \{e\}$, basta con tomar un x tal que $x_e = 0$ y $x_{l,r} = \frac{\epsilon}{n}$ $\forall (l,r) \in E \setminus \{e\}$.

(f) [8 puntos] Demuestre que T_n es una cara de M_n, que $\text{aff}(T_n) = \{x \in \mathbb{R}^E \colon Ax = b\}$ y que $T_n = \{x \in \mathbb{R}^E_+, Ax = b\}$

Solución:

T_n es un cara de M_n si la desigualdad $x(E) \leq a(L)$ es valida para M_n, en efecto, $x(E) = \sum_{l \in L} x(\delta(l)) \leq \sum_{l \in L} a_l = a(L)$ la segunda desigualdad viene de $x(\delta(l)) \leq a_l$ $\forall l \in L$. Por otro lado, $x(E) = a(L)$ ssi $x(\delta(l)) = a_l \forall l \in L \wedge x(\delta(r)) = b_r \forall r \in R$, luego $T_n = \{x \in \mathbb{R}^E_+ | x(\delta(l)) = a_l\ \forall l \in L, x(\delta(r)) = b_r\ \forall r \in R\} = \{x \in \mathbb{R}^E_+ | Ax = b\}$. Para concluir que $\text{aff}(T_n) = \{x \in \mathbb{R}^E \colon Ax = b\}$ solo basta probar que las desigualdades $x_e \geq 0$ no son activas en T_n. Esto sale de la parte (c).

(g) [12 puntos] Pruebe que $\dim(T_n) = (n-1)^2$. **Indicación:** Calcule exactamente el rango de A.

Solución:

La matriz A de $2n$ filas y n^2 columnas y el vector b que se mencionan en el enunciado para describir M_n se pueden escribir de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{1} & & \\ & \ddots & \\ & & \vec{1} \\ I & \dots & I \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \\ b_1 \\ \vdots \\ b_R \end{bmatrix},$$

donde $\vec{1}$ es un vector fila de dimensión n, y I es una matriz identidad de n filas y n columnas, las columnas de A representan los nodos R, con ciclicidad cada n columnas, en cambio las n primeras filas hacen referencia a los nodos de L y las n últimas a los nodos de R.

Se tiene que $\dim(T_n) = \dim(\text{aff}(T_n)) = n^2 - \text{rango}(A)$, por lo que basta demostrar que $\text{rango}(A) = 2n - 1$, ya que $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$. Como A es una matriz de $2n$ filas y n^2 columnas su rango es a lo más $2n$, por ende, probaremos primero que su rango no es $2n$ y luego que si eliminamos un vector fila la matriz resultante tiene $2n - 1$ filas l.i.

Para demostrar que el rango de A no es $2n$ basta considerar la siguiente combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=n+1}^{2n} a_i = 1 - 1 = 0$ (sumar las primeras n filas y restar las últimas n), como existe una combinación lineal no nula de las filas de A que da 0 se tiene que las $2n$ filas no son l.i.

Para demostrar que el rango de $A = 2n - 1$ eliminaremos la primera fila de la matriz, luego sea $x = \sum_{i=1}^{2n-1} \lambda_i a_{i+1}$ la combinación lineal del resto de fila, demostraremos que para que $x = 0$ se debe cumplir $\lambda = 0$, notar que:

$$\begin{aligned} & x_1 = \lambda_n, x_2 = \lambda_{n+1}, \dots x_n = \lambda_{2n-1} \\ & x_{n+1} = \lambda_1 + \lambda_n, x_{n+2} = \lambda_1 + \lambda_{n+1}, \dots x_{2n} = \lambda_1 + \lambda_{2n-1} \\ & \vdots \\ & x_{n^2-n+1} = \lambda_{n-1} + \lambda_n, x_{n^2-n} = \lambda_{n-1} + \lambda_{n+1}, \dots, x_{n^2} = \lambda_{n-1} + \lambda_{2n-1}, \end{aligned}$$

luego $x_1 = \ldots = x_n = 0$ si $\lambda_n = \ldots = \lambda_{2n-1} = 0$, luego $x_{n+1} = \ldots = x_{2n} = \lambda_1 = 0$ si $\lambda_1 = 0$, $\ldots$, $x_{n^2-n+1} = \ldots = x_{n^2} = \lambda_{n-1}$ son 0 si $\lambda_{n-1} = 0$.

(h) [4 puntos] Sea $x \in T_n$. Argumente que x es vértice de T_n si y solo si no existe $y \in \mathbb{R}^E$, $y \neq 0$, y $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tal que $x + \varepsilon y \in T_n$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $|\varepsilon| < \delta$.

Solución:

($\Rightarrow$) Sea x vertice y asumamos que existe y que garantiza (h), además sea $u = x + \varepsilon y$ y $v = x - \varepsilon y$, luego se cumple que $u/2 + v/2 = x$, es decir, x se puede escribir como una combinación convexa de $u, v \in T_n \setminus \{x\}$, lo que es una contradicción ya que x es vertice, por tanto, no existe el y que garantiza (h).

($\Leftarrow$) Demostraremos que si x no es un vertice entonces existe y garantiza (h). Como x no es vertice existen $u, v \in T_n \setminus \{x\}, \lambda \in (0,1)$ tal que $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, es decir, x esta en el segmento que une u con v, sea $y = u - v$, luego $x + \varepsilon y = \lambda u + (1-\lambda)v + \epsilon(u-v) = (\lambda+\varepsilon)u + (1-\lambda-\varepsilon)v$, para que la expresión sea una combinación convexa y así se garantice la pertenencia al poliedro se debe cumplir que $\lambda + \varepsilon \in (0,1)$, para que esta condición se cumpla ε debe satisfacer $|\varepsilon| < \text{mín}\{\lambda, 1-\lambda\} = \delta$.

(i) [12 puntos] Sea $x \in T_n$. Demuestre que x es un vértice de T_n si y solo si su soporte $S_x = \{(i,j) \colon x_{i,j} > 0\}$ es un bosque (un grafo sin ciclos) en $K_{n,n}$. Puede usar si lo desea la siguiente ruta:
(i.1) Pruebe que si S_x tiene un ciclo C, entonces puede usar este ciclo para construir el vector y de (h), y concluya una dirección.
(i.2) Pruebe que si x no es vértice puede usar el vector y que garantiza (h) para encontrar un ciclo C en S_x, y concluir la otra dirección. **Solución**

Supongamos que S_x tiene un ciclo (y como el grafo es bipartito debe tener largo par), $C = \{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ donde las aristas se enumeran de acuerdo al ciclo. Llame $y \in \mathbb{R}^E$ al vector tal que $y(e_i) = 1$ si i es par, $y(e_i) = -1$ si i es impar, e $y(e) = 0$ si e no está en el ciclo. Como los signos alternan $y(\delta(v)) = 0$ para todo $v \in V$. Sea $\delta = \text{mín}_{e \in S_x} x_e$ el menor valor positivo del soporte de x. Es fácil ver que para todo ε con $|\varepsilon| < \delta$ se tiene que $x + \varepsilon y \geq 0$. Por otro lado para todo $v \in V$, $(x+\varepsilon y)(\delta(v)) = x(\delta(v)) + \varepsilon y(\delta(v)) = x(\delta(v))$. En particular $(x+\varepsilon y)(\delta(\ell)) = a_\ell$ para todo $\ell \in L$ y $(x+\varepsilon y)(\delta(r)) = b_r$ para todo $r \in R$ por lo que $(x+\varepsilon y) \in T_n$. Esto quiere decir que y satisface las condiciones de la parte h y por lo tanto x no es vértice.

Para probar la otra dirección, supongamos que x no es vértice y luego existe un vector y y un escalar δ tal que $(x+\varepsilon y) \in T_n$ para todo ε con $|\varepsilon| < \delta$. Como esto es cierto para ε positivo o negativo, concluimos que si $x_e = 0$ entonces $y_e = 0$ (de otra forma $(x+\varepsilon y)_e$ podría ser negativo), sigue que S_y está incluido en S_x. Note que para todo $\ell \in L$, $y(\delta(\ell)) = (x+\varepsilon y)(\delta(\ell)) - \varepsilon(\delta(\ell)) = a_\ell - a_\ell = 0$. Similarmente para $r \in R$, $y(\delta(r)) = b_r - b_r = 0$. Es decir, para todo $v \in L \cup R$, $y(\delta(v)) = 0$. Esto implica que el grado de v en el grafo $(L \cup R, S_y)$ no puede ser 1 (pues si $\delta_{S_v}(v) = \{f\}$, entonces $0 = y(\delta(v)) = \sum_{e \in \delta_{S_y}(v)} y_e = y_f$). Pero entonces S_y no tiene vértices de grado 1. Como $S_y \neq \emptyset$, debemos tener que S_y no es un bosque (la única forma que un bosque no tenga hojas, es que no tenga aristas) y luego S_y debe tener un ciclo. Como $S_y \subseteq S_x$ tenemos que S_x tiene un ciclo.