

MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.**Profesor:** José Soto**Auxiliar:** Diego Garrido**Fecha:** 11 de junio de 2020.

Generación de columnas

1. Vehicle Routing Problem (VRP)

Cuenta con una flota homogénea de n vehículos de capacidad F con la que debe satisfacer la demanda de m clientes a costo mínimo, siendo la demanda d_i para $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea $G(V, E)$ el grafo dirigido del problema, con $V = \{0\} \cup [m]$ y $E = V \times V$, el nodo $\{0\}$ representa el centro de distribución (CD) de donde todos los vehículos empiezan y terminan su ruta, por último, sea c_e el costo de usar el arco $e \in E$.

- a) Formule el problema anterior como un PE que solo use la variable binaria x_{ij}^k que toma valor 1 y el vehículo k usa el arco (i, j) , 0 sino.

Solución:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x_{ij}^k \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^m x_{ij}^k = 1, \forall j \in [m] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{0j}^k = \sum_{i=1}^m x_{i0}^k = 1, \forall k \in [n] \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \forall k \in [n], S \subseteq [m], S \neq \emptyset \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^m d_i x_{ij}^k \leq F \forall k \in [n] \quad (4)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \forall (i, j) \in E, k \in [n]$$

La restricción (1) indica que cada cliente es atendido por un único vehículo y solo una vez, (2) obliga a que todo vehículo debe salir del CD hacia un cliente y volver desde un cliente al CD, (3) corresponde a la restricción de eliminación de subtour, así las rutas de los vehículos son conexas, por último, (4) corresponde a la restricción de capacidad de los vehículos. Es importante notar que por (1) se tiene que $\sum_{i=0}^m x_{ij}^k \leq 1, \forall k \in [n], j \in [m]$.

- b) Formule el problema como un PE que solo use la variable x_p que toma valor 1 si se usa la ruta $p \in P$.

Indicación: una ruta $p \in P$ pertenece a $\{0, 1\}^E$, además, defina explícitamente c_p como el costo de usar la ruta p .

Solución:

El costo de un patrón p es $c_p = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m c_{ij} p_{ij}$, notar que como el patrón representa una ruta cumple $p_j = \sum_{i=0}^m p_{ij} \leq 1, \forall j \in [m]$.

$$\begin{aligned} \min \sum_{p \in P} c_p x_p \\ \sum_{p \in P} x_p = n \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} p_j x_p = 1 \quad \forall j \in [m] \\ x_p \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P \end{aligned} \quad (6)$$

La restricción (5) obliga a que la cantidad de rutas a utilizar tiene que ser exactamente el tamaño de la flota y por (6) se obliga a que cada cliente es atendido por una única ruta.

c) Para $Q \subseteq P$, formule el master problem $MP(Q)$ y su DUAL- $MP(Q)$.

Solución:

Para $Q \subset P$ el problema maestro se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} (MP(Q)) \min \sum_{p \in P} c_p x_p \\ \sum_{p \in Q} x_p = n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in Q} p_j x_p = 1 \quad \forall j \in [m] \\ x_p \geq 0 \quad \forall p \in Q \end{aligned} \quad (8)$$

Luego su dual es:

$$\begin{aligned} (MP(Q)) \max z + \sum_{j=1}^m y_j \\ z + \sum_{j=1}^m p_j y_j \leq c_p \quad \forall p \in Q \\ z \text{ libre}, y_j \text{ libre} \quad \forall j \in [m] \end{aligned} \quad (9)$$

, donde z es la variable dual de la restricción (7) e y la variable dual de la restricción (6).

d) Para una solución dual factible de DUAL- $MP(Q)$ formule el pricing problem.

Solución: El pricing problem $PP(y, z)$ corresponde a buscar la ruta p que más viola que más viola (9), equivalentemente es el que viola más $z \leq c_p - \sum_{j=1}^m p_j y_j$, luego como z es fijo y solo el lado derecho depende de p el $PP(y, z)$ equivale a minimizar el lado derecho sujeto a las restricciones que hacen que p sea una ruta (10) y (11).

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m c_{ij} p_{ij} - \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=0}^m p_{ij} \\ \sum_{j=1}^m p_{0j} = \sum_{i=1}^m p_{i0} = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \delta(S)} p_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq [m], S \neq \emptyset \\ p_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned} \quad (11)$$

Sea η el valor óptimo del problema anterior y p la solución óptima, luego p se agrega a Q solo si $\eta < z$.