**MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.**
**Profesor:** José Soto
**Auxiliar:** Diego Garrido
**Fecha:** 11 de junio de 2020.

# Generación de columnas

## 1. Vehicle Routing Problem (VRP)

Cuenta con una flota homogenea de $n$ vehículos de capacidad $F$ con la que debe satisfacer la demanda de $m$ clientes a costo mínimo, siendo la demanda $d_i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $G(V, E)$ el grafo dirigido del problema, con $V = \{0\} \cup [m]$ y $E = V \times V$, el nodo $\{0\}$ representa el centro de distribución (CD) de donde todos los vehículos empiezan y terminan su ruta, por último, sea $c_e$ el costo de usar el arco $e \in E$.

a) Formule el problema anterior como un PE que solo use la variable binaria $x_{ij}^k$ que toma valor 1 y el vehículo $k$ usa el arco $(i, j)$, 0 sino.

**Solución:**

$$\text{mín} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} x_{ij}^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} x_{ij}^k = 1, \ \forall j \in [m] \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{0j}^k = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^k = 1, \ \forall k \in [n] \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \forall k \in [n], S \subseteq [m], S \neq \emptyset \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{m} d_i x_{ij}^k \leq F \ \forall k \in [n] \tag{4}$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \ \forall (i, j) \in E, k \in [n]$$

La restricción (1) indica que cada cliente es atendido por un único vehículo y solo una vez, (2) obliga a que todo vehículo debe salir del CD hacia un cliente y volver desde un cliente al CD, (3) corresponde a la restricción de eliminación de subtour, así las rutas de los vehículos son conexas, por último, (4) corresponde a la restricción de capacidad de los vehículos. Es importante notar que por (1) se tiene que $\sum_{i=0}^{m} x_{ij}^k \leq 1, \ \forall k \in [n], j \in [m]$.

b) Formule el problema como un PE que solo use la variable $x_p$ que toma valor 1 si se usa la ruta $p \in P$.
**Indicación**: una ruta $p \in P$ pertenece a $\{0, 1\}^E$, además, defina explícitamente $c_p$ como el costo de usar la ruta $p$.

**Solución:**

El costo de un patrón $p$ es $c_p = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} p_{ij}$, notar que como el patrón representa una ruta cumple $p_j = \sum_{i=0}^{m} p_{ij} \leq 1, \ \forall j \in [m]$.

$$\begin{aligned}
\text{mín} & \sum_{p\in P} c_p x_p \\
& \sum_{p\in P} x_p = n && (5)\\
& \sum_{p\in P} p_j x_p = 1 \ \forall j \in [m] && (6)\\
& x_p \in \{0,1\} \ \forall p \in P
\end{aligned}$$

La restricción (5) obliga a que la cantidad de rutas a utilizar tiene que ser exactamente el tamaño de la flota y por (6) se obliga a que cada cliente es atendido por una única ruta.

c) Para $Q \subseteq P$, formule el master problem MP(Q) y su DUAL-MP(Q).

**Solución:**

Para $Q \subseteq P$ el problema maestro se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
(MP(Q))\ \text{mín} & \sum_{p\in P} c_p x_p \\
& \sum_{p\in Q} x_p = n && (7)\\
& \sum_{p\in Q} p_j x_p = 1 \ \forall j \in [m] && (8)\\
& x_p \geq 0 \ \forall p \in Q
\end{aligned}$$

Luego su dual es:

$$\begin{aligned}
(MP(Q))\ \text{máx} \ & z + \sum_{j=1}^{m} y_j \\
& z + \sum_{j=1} p_j y_j \leq c_p \forall p \in Q && (9)\\
& z \ libre, y_j \ libre \ \forall j \in [m]
\end{aligned}$$

, donde $z$ es la variable dual de la restricción (7) e $y$ la variable dual de la restricción (6).

d) Para una solución dual factible de DUAL-MP(Q) formule el pricing problem.

**Solución:** El pricing problem $PP(y,z)$ corresponde a buscar la ruta $p$ que más viola que más viola (9), equivalentemente es el que viola más $z \leq c_p - \sum_{j=1}^{m} p_j y_j$, luego como $z$ es fijo y solo el lado derecho depende de $p$ el $PP(y,z)$ equivale a minimizar el lado derecho sujeto a las restricciones que hacen que $p$ sea una ruta (10) y (11).

$$\begin{aligned}
\text{mín} & \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} c_{ij} p_{ij} - \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=0}^{m} p_{ij} \\
& \sum_{j=1}^{m} p_{0j} = \sum_{i=1}^{m} p_{i0} = 1 && (10)\\
& \sum_{(i,j)\in\delta(S)} p_{ij} \leq |S| - 1, \ \forall S \subseteq [m], S \neq \emptyset && (11)\\
& p_{ij} \in \{0,1\} \ \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

Sea $\eta$ el valor óptimo del problema anterior y $p$ la solución óptima, luego $p$ se agrega a $Q$ solo si $\eta < z$.