MA4702. Programación Lineal Mixta 2020.
Profesor: José Soto.

Tarea 5.

Fecha entrega: Viernes 24 de Julio, 23:59. Por u-cursos. (Se recomienda entregar el Miércoles para acelerar corrección)

Instrucciones:

1. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **6 planas**.
2. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia), letra legible en manuscrito y clara. (No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador, pero si tiene alguna manera de escribir en manuscrito directamente de manera digital lo puede hacer). Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad, via ucursos.
3. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 2.5 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliares, ni el tiempo para *ponerse al día*. Tendrá un plazo de 7 días para entregarlo. No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite.
4. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.
5. Esta tarea está pensada para ser hecha en forma individual.

Definiciones:

Llamamos rango de Chvátal de un poliedro P, y lo denotamos $\mathrm{Ch}(P)$, al valor mínimo k tal que la k-ésima cerradura de Chvátal, $P^{(k)}$ es igual a $\mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Por ejemplo, si P es integral, $\mathrm{Ch}(P) = 0$.

Si $\alpha^T x \leq \beta$ es una desigualdad válida para $\mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$, llamamos rango de Chvátal de la desigualdad en P al menor valor k tal que la desigualdad es válida para $P^{(k)}$

Ejercicios:

Cada uno vale 1.5 puntos.

(a) Edmonds demostró que para todo grafo $G = (V, E)$, $\mathrm{conv}(\chi^F : F$ matching perfecto de $G)$ es igual al poliedro

$$\{x_+^E : x(\delta(v)) = 1, \forall v \in V; x(\delta(U)) \geq 1, \forall U \subseteq V, |U| \text{ impar}\}$$

Decimos G es cúbico si el grado de cada vértice es 3. Es fácil ver (no lo demuestre) que en este caso G tiene un número par de vértices.

Decimos que G es 2-arista-conexo si para todo conjunto de vértices U, $\emptyset \neq U \neq V$, $|\delta(U)| \geq 2$. Use todo lo anterior para demostrar el siguiente teorema de Petersen.

Si G tiene una cantidad par de vértices, y es 2-arista-conexo y cúbico, entonces G tiene un matching perfecto.

(b) Sea $k \geq 0$ entero y sea Q un poliedro en $\mathbb{R}^2$ tal que $Q \supseteq \{(0,0), (0,1), (1/2, k)\}$ y $Q \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0,0), (0,1)\}$. Pruebe que $\mathrm{Ch}(Q) \geq k$.

Indicación: Use inducción.

(c) Considere una mochila que soporta un peso máximo de W y n objetos, donde el i-ésimo objeto tiene peso $0 < a_i \leq W$ (no necesariamente enteros).

Decimos que un conjunto $S \subseteq [n]$ es un packing, si los objetos indexados por S caben en la mochila, es decir $\sum_{i \in S} a_i \leq W$. Decimos que $C \subseteq [n]$ es un cover, si C no es un packing. Decimos que C es un cover minimal si C es un cover pero $C \setminus \{j\}$ no es cover para todo $j \in C$.

La envoltura convexa de las indicatrices de todos los packings es $P \cap \mathbb{Z}^n$ donde P es el polítopo de mochila siguiente:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq W; x_i \geq 0, \forall i \in [n], x_i \leq 1, \forall i \in [n]\}$$

Notamos que si C es un cover minimal entonces todo packing puede contener a lo más $|C| - 1$ elementos de C. En particular, la desigualdad de cover

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

es válida para $P \cap \mathbb{Z}^n$.

Demuestre que para todo C cover, la desigualdad de cover asociada tiene rango de Chvátal 1 en P (es decir, es un corte de Chvátal de P).

Indicación: Encuentre una combinación cónica adecuada de las desigualdades de P.

(d) Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un conjunto estable de G es un conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que $E(S) = \emptyset$. Definamos

$$P_G = \{x \in \mathbb{R}^E \colon x_u + x_v \leq 1, \forall uv \in E; x_v \geq 0, \forall v \in V\}$$

No es difícil probar que P_G es una formulación para el conjunto de las indicatrices de conjuntos estables, es decir

$$\text{conv}(\chi^S \colon S \text{ conjunto estable de } G) = P_G \cap \mathbb{Z}^V.$$

Un conjunto K de vértices es un clique de G si E contiene todas las aristas entre pares de vértices de K. Claramente, si S es un conjunto estable entonces para todo clique K, S contiene a lo más un vértice de K. Esto prueba que para todo K clique, la desigualdad de clique:

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1$$

es válida para $P_G \cap \mathbb{Z}^V$.

Demuestre por inducción que si K es un clique con $|K| \leq k$ entonces la desigualdad de clique de K tiene rango de Chvátal a lo más $k - 2$ en P_G.

Bonus: Tendrá 0.5 puntos adicionales que puede agregar a cualquier tarea si demuestra que el rango de Chvátal es en realidad $O(\log k)$. (Esta pregunta es binaria, no puede estar explicada a medias)