MA4702. Programación Lineal Mixta 2020.
Profesor: José Soto.

fcfm.pdf

Tarea 2.

Fecha entrega: Lunes 01 de Junio, 23:59. Por u-cursos.

Instrucciones:

1. **Puntaje:** La tarea tiene un solo problema dividido en partes pequeñas relativamente independientes, que pueden usar partes anteriores. Tiene un puntaje total de 60 puntos.
2. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **6 planas**. Parte importante de su formación consiste en aprender a ser conciso(a) en sus argumentos. Se recomienda desarrollar un borrador y solo al final pasar su tarea resumida en limpio.
3. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia), letra legible en manuscrito y clara. (¡No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador!, pero si tiene alguna manera de escribir en manuscrito directamente de manera digital lo puede hacer). Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad, via ucursos.
4. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 2.5 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliaree, ni el tiempo para *ponerse al día*. Tendrá un plazo de 7 días para entregarlo. No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite.
5. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.
6. **Declaración de honestidad:** Los ejercicios de la tarea se deben resolver de manera individual. El primer ejercicio consiste en entregar una breve declaración sobre este hecho.

Definiciones para esta tarea.

Sea $n \geq 2$ y $K_{n,n} = (V, E)$ el grafo bipartito simple y completo con n vértices por lado. Es decir, V se particiona en L y R, y todas las aristas con un vértice en L y uno en R están presentes en E. E se identifica con $L \times R$.

Sean $a \in \mathbb{R}^L_+$, $b \in \mathbb{R}^R_+$ vectores **estrictamente positivos** de capacidades en los vértices, con $a(L) = \sum_{v \in L} a_v = \sum_{v \in R} b_v = b(R)$. Llamamos polítopo de (a, b)-matching fraccional al conjunto

$$M_n = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) \leq a_v, \forall v \in L;\ x(\delta(v)) \leq b_v, \forall v \in R;\ x_e \geq 0, \forall e \in E\}$$

y llamamos (a, b)-matching fraccional a sus elementos. Notamos que si $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ es la matriz de vértice-arista incidencia de $K_{n,n}$, entonces $M_n = \{x \in \mathbb{R}^E_+ : Ax \leq b\}$. Note que A tiene $2n$ filas y n^2 columnas.

Decimos además que un (a, b)-matching fraccional x es perfecto si $x(E) = a(L) = b(R)$. El polítopo de (a, b)-transporte es el conjunto

$$T_n = \{x \in M_n : x(E) = a(L)\}$$

de todos los (a, b)-matchings fraccionales perfectos. Es muy simple probar que $T_n \neq \emptyset$. Por ejemplo, podemos usar el siguiente algoritmo glotón para encontrar $x \in T_n$.

Algoritmo 1 Calcula $x \in T_n$

$x \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^E$
while $x(E) < a(L)$ **do**
  Elegir $\ell \in L, r \in R$ tal que $x(\delta(\ell)) < a_\ell$ y $x(\delta(r)) < b_r$,
  $x_{\ell,r} \leftarrow \text{mín}(a_\ell - x(\delta(\ell)), b_r - x(\delta(r)))$
end while
return x

Ejercicios:

(a) [0 puntos. Obligatorio] Copie en la primera página de su texto la siguiente declaración. Debe aceptarla y **firmarla** para que su tarea sea revisada.

> Declaro que la tarea adjunta es producto de mi propio trabajo y que ninguna parte de la misma ha sido copiada del trabajo producido por otro, de tareas o material de años anteriores, de libros o páginas web. Esta tarea no fue producida por varios estudiantes trabajando en equipo.
>
> Nombre:
> Firma:

(b) [8 puntos] Demuestre que el Algoritmo 1 es correcto. En específico, solo debe demostrar que (i) si al principio de una iteración, $x(E) < a(L)$ entonces existe el $\ell \in L, r \in R$ buscados por el algoritmo, (ii) muestre que el algoritmo termina en una cantidad finita de iteraciones y (iii) que cuando termina, devuelve lo buscado.

(c) [4 puntos] Concluya que para todo $(\ell, r) \in E$ existe $x \in T_n$ con $x_{\ell,r} > 0$.

(d) [8 puntos] Demuestre que $\dim(M_n) = |E| = n^2$.

(e) [4 puntos] Pruebe que para todo $e \in E$, la desigualdad válida $x_e \geq 0$ induce una faceta de M_n.

(f) [8 puntos] Demuestre que T_n es una cara de M_n, que $\text{aff}(T_n) = \{x \in \mathbb{R}^E : Ax = b\}$ y que $T_n = \{x \in \mathbb{R}^E_+, Ax = b\}$

(g) [12 puntos] Pruebe que $\dim(T_n) = (n-1)^2$. **Indicación:** Calcule exactamente el rango de A.

(h) [4 puntos] Sea $x \in T_n$. Argumente que x es vértice de T_n si y solo si no existe $y \in \mathbb{R}^E$, $y \neq 0$, y $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tal que $x + \varepsilon y \in T_n$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $|\varepsilon| < \delta$.

(i) [12 puntos] Sea $x \in T_n$. Demuestre que x es un vértice de T_n si y solo si su soporte $S_x = \{(i,j) : x_{i,j} > 0\}$ es un bosque (un grafo sin ciclos) en $K_{n,n}$. Puede usar si lo desea la siguiente ruta:
(i.1) Pruebe que si S_x tiene un ciclo C, entonces puede usar este ciclo para construir el vector y de (h), y concluya una dirección.
(i.2) Pruebe que si x no es vértice puede usar el vector y que garantiza (h) para encontrar un ciclo C en S_x, y concluir la otra dirección.