MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.
Profesor: José Soto
Auxiliar: Diego Garrido
Fecha: 9 de julio de 2020.

Total Dual Integral (TDI)

Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo y no dirigido. El objetivo de este problema es probar que el sistema que define al polítopo de los bosques de G, $B(G)=\{x\in\mathbb{R}^E\colon x(E(S))\le |S|-1, \forall\, \emptyset\neq S\subseteq V, x\ge 0\}$ es TDI.

(a) Escriba el dual (D) del problema $\max\{c^Tx\colon x\in B(G)\}$, usando variables $\{y_S\}_{S\subseteq V, S\neq\emptyset}$.

Solución: El primal y dual son:

$$
\begin{array}{llcll}
(L(c)) & \max\, c^Tx & \qquad & (D(c)) & \min \displaystyle\sum_{\emptyset\neq S\subseteq V} y_S(|S|-1)\\
 & x(E(S))\le |S|-1 \quad \forall \emptyset\neq S\subseteq V & & & \displaystyle\sum_{S\colon \{u,v\}\subseteq S} y_S\ge c_{uv} \qquad \forall uv\in E\\
 & x_e\ge 0 \qquad \forall e\in E & & & y_S\ge 0 \qquad \forall \emptyset\neq S\subseteq V
\end{array}
$$

(b) Considere una solución dual óptima y^* que minimice la cantidad $\Psi(y)=\sum_{S\subseteq V, S\neq\emptyset} y_S|S||V\setminus S|$ y pruebe que el soporte $\mathcal{L}$ de y^* es una familia **laminar**, es decir que no existen dos conjuntos A,B intersectantes en su soporte[1]. ¡Cuidado! Recuerde que no existe la variable $y_\emptyset$.

Solución: Sea $\mathcal{L}$ el soporte de $y^*\in\mathbb{R}^{2^V}$ y supongamos por contradicción que $A,B\in\mathcal{L}$ son intersectantes. Como A y B son intersectantes, $A\cap B\neq\emptyset$ así que no hay problema con hablar de la variable $y^*_{A\cap B}$.

Sea $0<\varepsilon\le \min\{y^*_A,y^*_B\}$ y definamos $\hat{y}$ como el vector obtenido de y^* bajando en ε el valor de y^*_A, y^*_B y subiendo en ε el valor de $y^*_{A\cap B}$, $y^*_{A\cup B}$.

Paso 1: Veamos que $\hat{y}$ es dual factible:

Por definición de $\hat{y}$ tenemos que $\hat{y}_S\ge 0$. En lo que sigue usamos la notación de indicatriz $p=1$ si y solo si p es verdadero. Para $uv\in E$ notamos que

$$
\Delta := \sum_{S\colon \{u,v\}\subseteq S} (\hat{y}_S - y^*_S) = \varepsilon(\{u,v\}\subseteq A\cup B + \{u,v\}\subseteq A\cap B - \{u,v\}\subseteq A - \{u,v\}\subseteq B) \tag{1}
$$

Veamos que el lado derecho de (1) es al menos 0. Lo más sencillo es analizar los términos negativos:

Si se tienen ambos $\{u,v\}\subseteq A$ y $\{u,v\}\subseteq B$, entonces también se tienen $\{u,v\}\subseteq A\cap B$ y $\{u,v\}\subseteq A\cup B$ por lo que el lado derecho es 0.

Si solo uno de $\{u,v\}\subseteq A$ y $\{u,v\}\subseteq B$ es cierto, entonces también tenemos $\{u,v\}\subseteq A\cup B$ y luego el lado derecho es 2-1 o 1-1, en cualquier caso es mayor o igual que 0.

Si ninguno de $\{u,v\}\subseteq A$ y $\{u,v\}\subseteq B$ es cierto, los términos del lado derecho son mayores o iguales que 0.

Usando (1) se concluye que $\sum_{S:\{u,v\}\subseteq S}\hat{y}_S = \Delta + \sum_{S:\{u,v\}\subseteq S} y^*_S \ge c_{uv}$. Como esto es para todo $uv\in E$ tenemos que $\hat{y}$ es dual factible.

Paso 2: Veamos que $\hat{y}$ es dual óptimo. Esto se tiene pues la diferencia en objetivo es

$$
\sum_{\emptyset\neq S\subseteq V} (\hat{y}_S(|S|-1) - y^*(|S|-1)) = \varepsilon[(|A\cup B|-1)+(|A\cap B|-1)-(|A|-1)-(|B|-1))] = 0.
$$

[1] A,B se dicen intersectantes si $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\cap B$ son todos no vacíos.

(la igualdad a 0 se tiene por propiedad de cardinales: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$)

Paso 3: Veamos que $\hat{y}$ tiene menor potencial que y^*. Esto se tiene pues (esto se vio en clase, no es necesario probar nuevamente la segunda igualdad)

$$\begin{aligned}\Psi(\hat{y}) - \Psi(y^*) &= \varepsilon[|A \cup B||V \setminus (A \cup B)| + |A \cap B||V \setminus (A \cap B)| - |A||V \setminus A| - |B||V \setminus B|] \\ &= -2\varepsilon|A \setminus B||B \setminus A|\end{aligned}$$

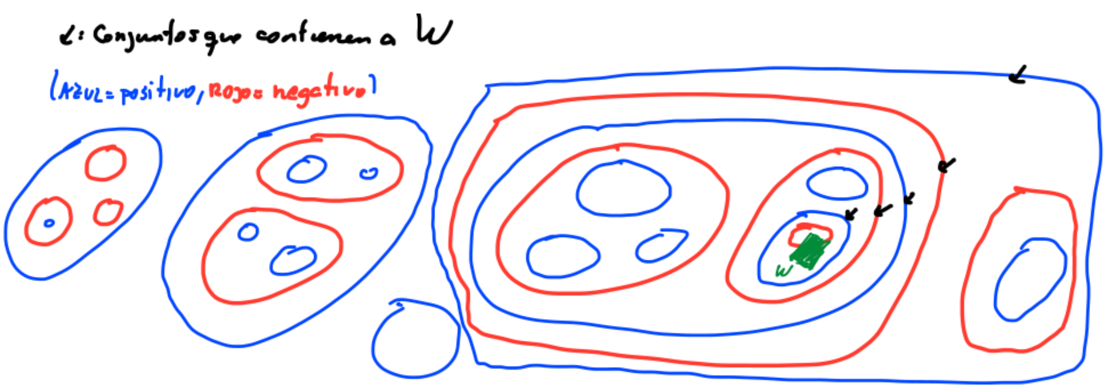
y esto es menor que 0 pues $A \setminus B, B \setminus A$ son no vacíos.

(c) Sea W un conjunto finito, $\mathcal{L} \subseteq 2^W$ una familia laminar y $\mathcal{E} \subseteq 2^W$ una familia de conjuntos. Pruebe que la matriz $M \in \{0,1\}^{\mathcal{E} \times \mathcal{L}}$ dada por $M_{I,J} = \begin{cases} 1 & \text{si } I \subseteq J, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$ es totalmente unimodular (TU)

Indicación: Use Ghouila-Houri asignando signos en las columnas adecuadamente.

Solución:

Sea $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un subconjunto de columnas de la matriz M y notamos que $\mathcal{L}'$ sigue siendo laminar. Asignemos valor 1 a todos los conjuntos X que están incluidos en un número par de conjuntos de $\mathcal{L}'$ y -1 a todos los conjuntos incluidos en un número impar. En un dibujo, esto se ve asi:



Para cualquier I fijo, los conjuntos de $\mathcal{L}'$ que contienen a I forman una cadena: $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_k$ y los signos de $J_1, J_2, \ldots, J_k$ alternan por definición. Luego $\sum_J \text{signo(J)} M_{I,J}$ es 0, 1 o -1. Por Ghoulia-Houri, la matriz M es totalmente unimodular.

(d) Usando las partes (b) y (c), pruebe que el sistema que define $B(G)$ es totalmente dual integral (TDI). Concluya que $B(G)$ es integral.

Solución:

El sistema que define a $B(G)$ tiene datos racionales. Sea $c \in \mathbb{Z}^E$ una función objetivo con coeficientes enteros, tal que $L(c)$ es finito. De la parte (b) concluimos que el dual $D(c)$ tiene una solución y^* con soporte $\mathcal{L}$ laminar. El sistema $D'(c)$ obtenido de $D(c)$ al restringirnos a las variables del soporte es de la forma $\min\{\sum_{S \in \mathcal{L}} y_S(|S| - 1) \colon My \geq 0, y \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}_+\}$ para cierta matriz $M \in \{0,1\}^{E \times \mathcal{L}}$ que cumple $M_{\{u,v\},S} = 1$ si y solo si $\{u,v\} \subseteq S$. Considerando E como una familia de conjuntos (de cardinal 2) de V, tenemos que M es de la forma considerada en la parte (c), y luego M es totalmente unimodular.

Se concluye que $D'(c)$ tiene alguna solución óptima $\bar{y}$ entera. Como además el óptimo de $D(c)$ es factible en $D'(c)$ se concluye que $\bar{y}$ es óptima en $D(c)$, y luego el sistema original es TDI.

Para terminar notamos que el sistema que define a $B(G)$ tiene vector lado derecho entero. Como el sistema es TDI se concluye que $B(G)$ es polítopo integral.