MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.
Profesor: José Soto
Auxiliar: Diego Garrido
Fecha: 11 de junio de 2020.

Generación de columnas

1. Vehicle Routing Problem (VRP)

Cuenta con una flota homogenea de n vehículos de capacidad F con la que debe satisfacer la demanda de m clientes a costo mínimo, siendo la demanda d_i para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $G(V, E)$ el grafo dirigido del problema, con $V = \{0\} \cup [m]$ y $E = V \times V$, el nodo $\{0\}$ representa el centro de distribución (CD) de donde todos los vehículos empiezan y terminan su ruta, por último, sea c_e el costo de usar el arco $e \in E$.

a) Formule el problema anterior como un PE que solo use la variable binaria x_{ij}^k que toma valor 1 y el vehículo k usa el arco (i, j), 0 sino.

Solución:

$$\min \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} x_{ij}^k$$

$$x_{ii}^k = 0 \ \forall i \in V, k \in [n] \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} x_{ji}^k - \sum_{j=0}^{m} x_{ij}^k = 0 \ \forall i \in [m], k \in [n] \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{0j}^k = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^k = 1, \ \forall k \in [n] \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \forall k \in [n], S \subseteq [m], S \neq \emptyset \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{m} d_i x_{ij}^k \leq F \ \forall k \in [n] \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} x_{ij}^k = 1, \ \forall j \in [m] \tag{6}$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \ \forall (i, j) \in E, k \in [n]$$

La restricción (1) elimina los arcos (i, i), (2) es la restricción de conservación de flujo, así si un vehículo visita a un cliente debe salir de él hacia otro nodo, (3) obliga a que todo vehículo debe salir del CD hacia un cliente y volver desde un cliente al CD, (4) es la restricción de eliminación de subtour, así las rutas de los vehículos son conexas, (5) corresponde a la restricción de capacidad de los vehículos, por último (6) indica que cada cliente es atendido por un único vehículo y solo una vez. Es importante notar que por (6) se tiene que $\sum_{i=0}^{m} x_{ij}^k \leq 1, \ \forall k \in [n], j \in [m]$.

b) Formule el problema como un PE que solo use la variable x_p que toma valor 1 si se usa la ruta $p \in P$.
Indicación: una ruta $p \in P$ pertenece a $\{0, 1\}^E$, además, defina explícitamente c_p como el costo de usar la ruta p.

Solución:

El costo de un patrón p es $c_p = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} p_{ij}$, notar que como el patrón representa una ruta cumple $p_j = \sum_{i=0}^{m} p_{ij} \leq 1, \ \forall j \in [m]$.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{p \in P} c_p x_p & \\
\sum_{p \in P} x_p = n & \qquad (7)\\
\sum_{p \in P} p_j x_p = 1 \ \forall j \in [m] & \qquad (8)\\
x_p \in \{0,1\} \ \forall p \in P &
\end{aligned}$$

La restricción (7) obliga a que la cantidad de rutas a utilizar tiene que ser exactamente el tamaño de la flota y por (8) se obliga a que cada cliente es atendido por una única ruta.

c) Para $Q \subseteq P$, formule el master problem MP(Q) y su DUAL-MP(Q).

Solución:

Para $Q \subseteq P$ el problema maestro se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
(MP(Q)) \min \sum_{p \in P} c_p x_p & \\
\sum_{p \in Q} x_p = n & \qquad (9)\\
\sum_{p \in Q} p_j x_p = 1 \ \forall j \in [m] & \qquad (10)\\
x_p \geq 0 \ \forall p \in Q &
\end{aligned}$$

Luego su dual es:

$$\begin{aligned}
(MP(Q)) \max z + \sum_{j=1}^{m} y_j & \\
z + \sum_{j=1} p_j y_j \leq c_p \forall p \in Q & \qquad (11)\\
z \ libre, y_j \ libre \ \forall j \in [m] &
\end{aligned}$$

, donde z es la variable dual de la restricción (9) e y la variable dual de la restricción (10).

d) Para una solución dual factible de DUAL-MP(Q) formule el pricing problem.

Solución: El pricing problem $PP(y,z)$ corresponde a buscar la ruta p que más viola que más viola (11), equivalentemente es el que viola más $z \leq c_p - \sum_{j=1}^{m} p_j y_j$, luego como z es fijo y solo el lado derecho depende de p el $PP(y,z)$ equivale a minimizar el lado derecho sujeto a las restricciones que hacen que p sea una ruta (12-15) más la restricción de capacidad del vehículo (16).

$$
\begin{aligned}
\text{mín} & \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}p_{ij} - \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=0}^{m} p_{ij} \\
& p_{ii} = 0 \; \forall i \in V && (12) \\
& \sum_{i=0}^{m} p_{ij} - \sum_{i=0}^{m} p_{ji} = 0, \; \forall j \in [m] && (13) \\
& \sum_{j=1}^{m} p_{0j} = \sum_{i=1}^{m} p_{i0} = 1, \; \forall k \in [n] && (14) \\
& \sum_{(i,j)\in E(S)} p_{ij} \leq |S| - 1, \; \forall S \subseteq [m], S \neq \emptyset && (15) \\
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m} d_i p_{ij} \leq F && (16) \\
& p_{ij} \in \{0,1\} \; \forall (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

Sea η el valor óptimo del problema anterior y p la solución óptima, luego p se agrega a Q solo si $\eta < z$.