MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.
Profesor: José Soto
Auxiliar: Diego Garrido
Fecha: 25 de junio de 2020.

Total Unimodularidad (TU)

1. Teorema de Braum-Trotter

Diremos que un poliedro P tiene la propiedad de descomposición entera si $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ se tiene que todo vector integral del conjunto kP es suma de k vectores integrales de P. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ un poliedro racional y puntiagudo.

a) Demuestre que si P tiene la propiedad de descomposición entera, entonces P es un poliedro entero.

Solución:
Basta con demostrar que los vértices de P son enteros para demostrar lo pedido. Por contradicción, sea x un vertice no entero; como es racional, si k es el mínimo común múltiplo de las coordenadas de x, se sigue que kx es entero, y $kx \in kP$. Luego, existen $x_1, \ldots, x_k \in P$ integrales tal que:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} x_i$$

Lo que contradice que x es punto extremo de P.

b) Demuestre que si A es total unimodular y b es integral, entonces P tiene la propiedad de descomposición entera.

Solución:
Lo probaremos por inducción en k. El caso base es obvio ($k = 1$). Sea $y \in kP \cap \mathbb{Z}^n$, es decir, y integral tal que $k^{-1}y \geq 0, k^{-1}Ay \leq b$. Consideremos el poliedro:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq y, Ay - kb + b \leq Ax \leq b\}$$

Luego como A es TU, Q es entero, además es no vacío ya que $k^{-1}y \in Q$ y es un politopo ya que x está acotado, por ende Q es puntiagudo. Sea x_k vértice de Q (notar que es entero ya que Q es entero), tomando $\bar{y} = y - x_k$ se cumple $\bar{y} \geq 0$ y $A\bar{y} \leq (k-1)b$. Por hipótesis inductiva existen $x_1, \ldots, x_{k-1}$ tales que $\bar{y} = x_1 + \ldots + x_{k-1}$ y luego $y = x_1 + \ldots x_k$.

c) Concluya quue P tiene la propiedad de descomposición entera para todo b integral si y sólo si A es total unimodular.

Solución:
($\Longrightarrow$) Por parte (a) se tiene que para todo b entero P es entero, lo que es equivalente a que A es TU.
($\Longleftarrow$) Directo por parte (b).

2. Propiedades de una Matriz TU

Prueba que si $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ es TU, entonces:

a) Cada submatriz cuadrada invertible de A tiene una fila con un número impar de coordenadas no nulas.

Solución:
Sea $B \in \{-1, 0, 1\}^{k \times k}$ una submatriz invertible de A, por propiedad de matrices TU sabemos que B es TU, por ende podemos usar el teorema de Ghouila-Houri, el cual dice que para todo subconjunto $I \subseteq [k]$ de columnas de B se puede particionar en dos I_+ y I_- de modo tal que:

$$\sum_{i \in I_+} B_i - \sum_{i \in I_-} B_i \in \{-1, 0, 1\}^k$$

Ahora supongamos que la cantidad de componentes no nulas de cada fila de B es par y tomemos $I = [k]$, luego la suma por filas de B es par, por lo que existe un $x \in \{-1, 1\}^k$ con $x_i = 1 \ \forall i \in I_+$ y $x_i = -1 \ \forall i \in I_-$ que cumple $Bx = 0$ (ya que la suma sobre I_+ tiene la misma paridad que sobre I_-, puesto que la suma de ambas es par) y como $x \neq 0$ se tiene que B es no invertible, lo que es una contradicción.

b) Si B es submatriz cuadrada de A tal que la suma sobre las filas y sobre las columnas de B es par, entonces la suma sobre todo B es divisible por 4.

Solución:
Por la parte anterior sabemos que las columnas de B se pueden particionar en I_+ y I_- cuya suma tiene la misma paridad y por Ghouila-Houri se tiene que la suma de las columnas de B_{I_+} es igual a B_{I_-}, por tanto, $\sum_{i \in I} B_i = 2 \sum_{i \in I_+} B_i$, además como la suma sobre cada columna es par se tiene que $\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} B_{j,i} = 2 \sum_{i \in I_+} 2z_i = 4 \sum_{i \in I_+} z_i$, donde $z_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I_+$.

Hint: Si A es TU, entonces todo submatriz B de A es TU. Use el teorema de Ghouila-Houri.