MA4702. Programación Lineal Mixta 2020.
Profesor: José Soto.

Tarea 4.

Fecha entrega: Lunes 13 de Julio, 23:59. Por u-cursos.

Instrucciones:

1. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **6 planas**.
2. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia), letra legible en manuscrito y clara. (No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador, pero si tiene alguna manera de escribir en manuscrito directamente de manera digital lo puede hacer). Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad, via ucursos.
3. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 3 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliares, ni el tiempo para *ponerse al día*. **En particular, para la última parte se recomienda repasar la clase 19 del curso**. Tendrá un plazo de 7 días para entregarlo. No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite.
4. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.
5. Esta tarea está pensada para ser hecha en forma individual.

Definiciones para esta tarea

Sea N un conjunto finito. Decimos que dos conjuntos $A, B \in 2^N$ son *intersectantes* si los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$ y $A \cap B$ son todos no vacíos. Notamos que cuando dos conjuntos no son intersectantes entonces debemos tener que A y B son disjuntos, o bien uno contiene al otro.

Una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ de subconjuntos de N se dice **familia laminar sobre** N si no posee pares de conjuntos intersectantes, es decir, si para todo $A, B \in \mathcal{L}$.

$$(A \subseteq B) \text{ o } (B \subseteq A) \text{ ó } (A \cap B = \emptyset)$$

Ejercicios:

Parte I (30 puntos). Elija, resuelva y entregue 3 ejercicios de esta parte I**.** Si entrega más que 3 se calificarán los 3 peores ejercicios entregados.

(a) Demuestre la siguiente dirección del Teorema de Ghoulia-Houri: Si $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ es una matriz totalmente unimodular, entonces para todo $J \subseteq [n]$ existe una partición J_1, J_2 de J tal que

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \in \{0, 1, -1\}, \text{ para todo } i \in [m].$$

Indicación: Sea $B = A^J$. Demuestre que el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^J : \lfloor \frac{1}{2} B1 \rfloor \leq Bx \leq \lceil \frac{1}{2} B1 \rceil, 0 \leq x \leq 1\}$ es no vacío, y concluya que tiene un punto $y \in \{0, 1\}^J$ integral. Use ese punto y para determinar la partición pedida (el vector y tiene solo 2 tipos de valores).

(b) Sea $\mathcal{I}$ una familia de intervalos cerrados, todos subconjuntos de $[0,n]$ y cada uno con sus extremos enteros. El *minimum hitting set problem* consiste en encontrar el conjunto $H \subseteq [0,n] \cap \mathbb{Z}$ de menor cardinalidad tal que cada intervalo $J \in \mathcal{I}$ contiene al menos un punto de H. Encuentre un programa lineal puro que permita resolver este problema. **Indicación:** Demuestre primero que el programa lineal entero natural, tiene conjunto factible integral.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \leq n$. Demuestre que A es totalmente unimodular si y solo si $[A|I]$ es unimodular.

(d) Sea $G = (V,E)$ un digrafo, y sean s, t dos nodos distintos de V. Encuentre un programa lineal puro que permita resolver el problema del s-t camino de largo (número de aristas) mínimo.
Indicación: Escriba primero este problema como un flujo de costo mínimo con restricciones adicionales y argumente que esta versión del problema es integral.

(e) Sea $\mathcal{L}$ una familia laminar sobre un conjunto V y sea $G = (V,E)$ un digrafo. Se define la matriz de corte de entrada de G respecto a $\mathcal{L}$ como la matriz $M \in \{0,1\}^{E,\mathcal{L}}$ tal que $M_{e,A} = 1$ si y solo si $e \in \delta^-(A)$. Demuestre que la matriz M es totalmente unimodular.

Indicación: Puede usar sin demostrar que cualquier subfamilia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$ también es laminar. Apóyese en un dibujo ¿puede ponerle signos a los conjuntos adecuados de modo que el número de conjuntos positivos que cada arco e entre difiera poco del número de conjuntos negativos con esta propiedad? Use Ghoulia-Houri.

(f) Sea $G = (V,E)$ un digrafo. Demuestre que para todo par de conjuntos $A, B \subseteq V$ y todo arco $e = (s,t) \in E$, se tiene la siguiente desigualdad

$$[\![e \in \delta^-(A\cup B)]\!] + [\![e \in \delta^-(A\cap B)]\!] - [\![e \in \delta^-(A)]\!] - [\![e \in \delta^-(B)]\!] \leq 0$$

donde $[\![p]\!] = 1$ si p es verdadero, y $[\![p]\!] = 0$ en otro caso. Concluya que para toda función $w\colon E \to \mathbb{R}_+$, la función $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ dada por $f(X) = w(\delta^-(X)) = \sum_{e\in\delta^-(X)} w_e$ es submodular.

Parte II (30 puntos).
Nota: para hacer esta parte recomiendo basarse en las clases 19/20 del curso.

Sea $G = (V,E)$ un digrafo y sea $r \in V$ un nodo raiz. Un r-conector es cualquier subconjunto F de arcos de E tal que para cada nodo $v \in V$ existe un r-v camino dirigido en F. Supongamos para evitar conjuntos vacíos que el conjunto E en si mismo es r-conector. Defina

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^E \colon x(\delta^-(S)) \geq 1, \forall \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\}, x \geq 0\}$$

El objetivo de este problema es demostrar que $Q = \operatorname{conv}\{\chi^F \colon F \text{ es } r\text{-conector}\} + \mathbb{R}^E_+$. Es fácil ver (no lo demuestre) que demostrar la igualdad anterior equivale a demostrar que Q es un poliedro entero. Para hacerlo, demostraremos que el sistema que define a Q es TDI (eso es suficiente pues el vector lado derecho es entero).

Sea $c \in \mathbb{Z}^E$ tal que el problema $(P) = \text{mín}\{c^T x \colon x \in Q\}$ tenga solución finita.

(a) (5 puntos) Escriba el dual (D) del problema (P), en variables $(y_S \colon \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\})$.

(b) (15 puntos) Llame y^* a una solución óptima de (D) que minimice el potencial $\Psi(y) = \sum_S y_S |S||V \setminus S|$. (Existe pues (P) tiene solución finita, y hay un número finito de vértices en el poliedro dual). Demuestre que y^* tiene soporte laminar (es decir, que los conjuntos asociados a coordenadas no nulas de y^* son una familia laminar).
Indicación: Al hacer el descruce, considere un par de conjuntos A y B intersectantes y asegúrese que $A \cap B$ y $A \cup B$ indiquen coordenadas del vector y. Use (aunque no la haya hecho) el ejercicio (f) de la parte I.

(c) (10 puntos) Concluya que el sistema que define a Q es totalmente dual integral.
Indicación: Use el resultado del ejercicio (e) de la parte I, aunque no lo haya hecho en su tarea.