MA4702. Programación Lineal Mixta 2020.
Profesor: José Soto.

Tarea 4.

Fecha entrega: Lunes 13 de Julio, 23:59. Por u-cursos.

Instrucciones:

1. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **6 planas**.
2. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia), letra legible en manuscrito y clara. (No se aceptarán documentos tipeados o generados por computador, pero si tiene alguna manera de escribir en manuscrito directamente de manera digital lo puede hacer). Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad, via ucursos.
3. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 3 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliares, ni el tiempo para *ponerse al día*. **En particular, para la última parte se recomienda repasar la clase 19 del curso**. Tendrá un plazo de 7 días para entregarlo. No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite.
4. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.
5. Esta tarea está pensada para ser hecha en forma individual.

Definiciones para esta tarea

Sea N un conjunto finito. Decimos que dos conjuntos $A, B \in 2^N$ son *intersectantes* si los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$ y $A \cap B$ son todos no vacíos. Notamos que cuando dos conjuntos no son intersectantes entonces debemos tener que A y B son disjuntos, o bien uno contiene al otro.

Una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ de subconjuntos de N se dice **familia laminar sobre** N si no posee pares de conjuntos intersectantes, es decir, si para todo $A, B \in \mathcal{L}$.

$$(A \subseteq B) \text{ o } (B \subseteq A) \text{ ó } (A \cap B = \emptyset)$$

Ejercicios:

Parte I (30 puntos). Elija, resuelva y entregue 3 ejercicios de esta parte I**.** Si entrega más que 3 se calificarán los 3 peores ejercicios entregados.

(a) Demuestre la siguiente dirección del Teorema de Ghoulia-Houri: Si $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ es una matriz totalmente unimodular, entonces para todo $J \subseteq [n]$ existe una partición J_1, J_2 de J tal que

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \in \{0, 1, -1\}, \text{ para todo } i \in [m].$$

Indicación: Sea $B = A^J$. Demuestre que el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^J : \lfloor \frac{1}{2} B1 \rfloor \leq Bx \leq \lceil \frac{1}{2} B1 \rceil, 0 \leq x \leq 1\}$ es no vacío, y concluya que tiene un punto $y \in \{0, 1\}^J$ integral. Use ese punto y para determinar la partición pedida (el vector y tiene solo 2 tipos de valores).

Solución

P es un polítopo no vacío, en efecto, si tomamos $x = \frac{1}{2}$ tenemos que $\lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor \leq \frac{1}{2}B1 \leq \lceil \frac{1}{2}B1 \rceil$, luego el poliedro anterior se puede escribir como $Cx \leq b$, con $C = [B \mid -B \mid I \mid -I]$ y $b = [\lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor \mid -\lceil \frac{1}{2}B1 \rceil \mid 1 \mid 0]^T$. Como B es TU, C también lo es. Además, como $b \in \mathbb{Z}^{2m+2|J|}$ es entero, se tiene que P es entero y luego sus vértices son enteros. Además, usando que $B1 = \lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor + \lceil \frac{1}{2}B1 \rceil$, se tiene que para todo $x \in P$, $\lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor \leq B1 - Bx \leq \lceil \frac{1}{2}B1 \rceil$, es decir $1 - x \in P$. Sea entonces $y^1 \in \{0,1\}^J$ un vértice de P, $J_1 = \{j \in J | y^1_j = 1\}$ y $J_2 = \{j \in J | y^1_j = 0\}$. Por lo anterior $y^2 := 1 - y^1$ también es punto integral de P y luego para $k \in \{1,2\}$, e $i \in [m]$ se tiene $\sum_{j \in J_k} a_{ij} = (By^k)_i \in \{\lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor_i, \lfloor \frac{1}{2}B1 \rfloor_i\}$. Se concluye entonces que

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \in \{0, 1, -1\}, \text{ para todo } i \in [m].$$

(b) Sea $\mathcal{I}$ una familia de intervalos cerrados, todos subconjuntos de $[0,n]$ y cada uno con sus extremos enteros. El *minimum hitting set problem* consiste en encontrar el conjunto $H \subseteq [0,n] \cap \mathbb{Z}$ de menor cardinalidad tal que cada intervalo $J \in \mathcal{I}$ contiene al menos un punto de H. Encuentre un programa lineal puro que permita resolver este problema. **Indicación:** Demuestre primero que el programa lineal entero natural, tiene conjunto factible integral.

Solución

$H \subseteq \{0, 1, \ldots, n\} = [n]_0$, sea $x_i = 1$ si H contiene el elemento i, 0 si no, luego el *minimum hitting set problem* se puede escribir como un PLE como sigue:

$$\begin{aligned} \text{mín} \sum_{i \in [n]_0} & x_i \\ \sum_{i \in [n]_0 |\ l \leq i \leq u} & x_i \geq 1 \quad \forall [l,u] \in \mathcal{L} \\ 0 \leq & x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n]_0. \\ & x \in \mathbb{Z}^{[n]_0} \end{aligned}$$

La primera restricción obliga a que H contenga al menos un punto de cada intervalo cerrado $[l,u]$ de $\mathcal{L}$. El poliedro asociado a la relajación del PLE anterior se puede como escribir como $P = \{x \,|\, Mx \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$, con $M \in \{0,1\}^{[n]_0 \times \mathcal{L}}$, donde $M_{i,[l,u]} = 1$ si $l \leq i \leq u$. Notar que de un intervalo $[l,u] \in \mathcal{L}$ solo nos interesa la parte entera, es decir, $\{l, l+1, \ldots, u-1, u\}$. Si enumeramos las filas desde el 0 se tiene que $M_{l,[l,u]} = M_{l+1,[l,u]} = \ldots, M_{u-1,[l,u]} = M_{u,[l,u]} = 1$ y $M_{i,[l,u]} = 0\ \forall i \notin \{l, l+1, \ldots, u-1, u\}$. Por ende, la matriz M tiene la propiedad de los 1's consecutivos a nivel columna, por lo que M es TU, además, como el lado derecho es entero se tiene que P es integral. Por último, se tiene que P es no vacío ($x = 1 \in P$), y es un polítopo ($0 \leq x \leq 1$), por tanto, alcanza su óptimo en un vértice x^* y como P es integral el vértice es entero, por lo que $H = \{i \in [n] | x^*_i = 1\}$ es el *minimum hitting set.*

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m \leq n$. Demuestre que A es totalmente unimodular si y solo si $[A|I]$ es unimodular.

Solución

($\Longrightarrow$) Si A es TU se tiene que toda submatriz cuadrada de A tiene determinante en $\{-1, 0, 1\}$. Sea B una submatriz cuadrada maximal de $[A|I]$ con J el subconjunto de columnas asociadas, con $|J| = m$, si todas las columnas pertenecen a A o I se tiene que B es TU ya que ambas lo son, si tiene columnas de A e I podemos construir B' a partir de B, donde B' tiene todas las columnas de A a la izquierda y todas las de I a la derecha seguido de una permutación de filas tal que:

$$B' = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ B_1 & I_B \end{bmatrix},$$

donde B_1 y B_2 son submatrices de A y B_2 es cuadrada, luego se tiene que $det(B') = \det(B_2) \in \{-1, 0, 1\}$, se concluye que toda submatriz maximal de $[A|I]$ tiene determinante en $\{-1, 0, 1\}$ por lo que $[A|I]$ es UNI.

($\Longleftarrow$) Sea B_2 una submatriz cuadrada de A, supongamos que no es maximal, luego B_2 la podemos completar con una submatriz B_1 de A y columnas de I para formar la misma matriz maximal B' de $[A|I]$ del punto anterior, por ende, se tiene que $\det(B') \in \{-1, 0, 1\}$ ya que $[A|I]$ es UNI, luego $\det(B') = \det(B_2)\det(I) = \det(B_2)$, se concluye que toda submatriz cuadrada de A tiene determinante en $\{-1, 0, 1\}$, por tanto, A es TU.

(d) Sea $G = (V, E)$ un digrafo, y sean s, t dos nodos distintos de V. Encuentre un programa lineal puro que permita resolver el problema del s-t camino de largo (número de aristas) mínimo.
Indicación: Escriba primero este problema como un flujo de costo mínimo con restricciones adicionales y argumente que esta versión del problema es integral.

Solución

Sea x_e la variable binaria que denota si un arco $e \in E$ está presente o no, luego el problema del s-t camino de largo mínimo se puede escribir como un problema de flujo a costo mínimo:

$$\begin{aligned} \min \sum_{e \in E} x_e & \\ x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) &= 0, \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ x(\delta^+(t)) - x(\delta^-(t)) &= -1, \\ 0 \leq x_e &\leq 1 \ \forall e \in E \end{aligned}$$

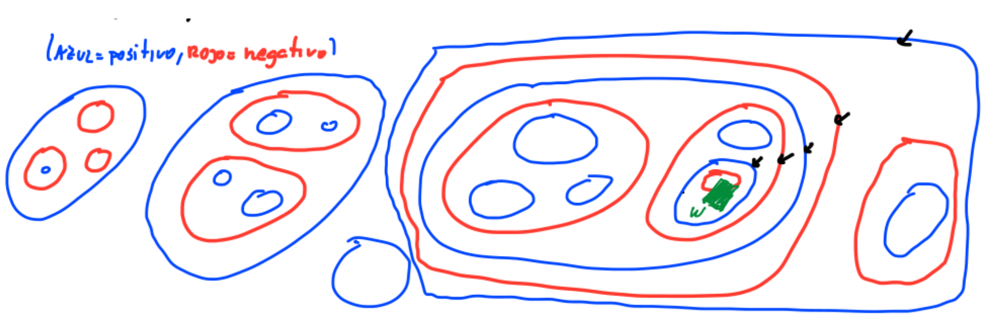
El problema anterior se puede escribir como $P = \{x \in \mathbb{R}^E, Ax = b, l \leq x \ \leq u\}$, con A matriz de incidencia del digrafo dirigido $G(V', E)$, con $V' = V \cup \{s\}$, $b = [0, \ldots, 0, 1]$, $l = 0$, $u = 1$, además, se tiene que las matrices de incidencias de un digrafo son TU y el lado derecho de P es entero, por tanto P es integral. Como P es politopo $(0 \leq x \leq 1)$, si es factible alcanza su óptimo en un vértice y como P es integral y puntiagudo sus vértices son enteros y por las restricciones de flujo forma un s-t camino.

(e) Sea $\mathcal{L}$ una familia laminar sobre un conjunto V y sea $G = (V, E)$ un digrafo. Se define la matriz de corte de entrada de G respecto a $\mathcal{L}$ como la matriz $M \in \{0, 1\}^{E, \mathcal{L}}$ tal que $M_{e,A} = 1$ si y solo si $e \in \delta^-(A)$. Demuestre que la matriz M es totalmente unimodular.

Indicación: Puede usar sin demostrar que cualquier subfamilia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$ también es laminar. Apóyese en un dibujo ¿puede ponerle signos a los conjuntos adecuados de modo que el número de conjuntos positivos que cada arco e entre difiera poco del número de conjuntos negativos con esta propiedad? Use Ghoulia-Houri.

Solución

Sea $\mathcal{F}$ a una subfamilia de $\mathcal{L}$. Por enunciado se tiene que $\mathcal{F}$ es una familia laminar. Podemos colorear con +1 los $A \in \mathcal{F}$ que están contenidos en un conjunto par de conjuntos de $\mathcal{F}$ y con -1 si no. En un dibujo:



Para cualquier $e \in E$, los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ tales que $e = (s, t) \in \delta^-(A)$ forman una cadena. En efecto si A, B son dos de estos conjuntos, entonces $t \in A \cap B \neq \emptyset$ y como $\mathcal{F}$ es una familia laminar queda que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ (si no serían conjuntos intersectantes). Luego para cada e, los conjuntos A tales que $e \in \delta^-(A)$ se pueden enumerar tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots A_k$ y los signos de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ se alternan por definición. Llamando $\mathcal{F}_+$ y $\mathcal{F}_-$ a los conjuntos de $\mathcal{F}$ positivos y negativos se se tiene:

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \text{signo}(A) M_{e,A} = \sum_{A \in \mathcal{F}_+} M_{e,A} - \sum_{A \in \mathcal{F}_+} M_{e,A} \in \{-1, 0, 1\}, \ \forall e \in E.$$

Luego por Ghoulia-Houri se tiene que la matriz M es TU.

(f) Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Demuestre que para todo par de conjuntos $A, B \subseteq V$ y todo arco $e = (s, t) \in E$, se tiene la siguiente desigualdad

$$[\![e \in \delta^-(A \cup B)]\!] + [\![e \in \delta^-(A \cap B)]\!] - [\![e \in \delta^-(A)]\!] - [\![e \in \delta^-(B)]\!] \leq 0$$

donde $[\![p]\!] = 1$ si p es verdadero, y $[\![p]\!] = 0$ en otro caso. Concluya que para toda función $w \colon E \to \mathbb{R}_+$, la función $f \colon 2^V \to \mathbb{R}$ dada por $f(X) = w(\delta^-(X)) = \sum_{e \in \delta^-(X)} w_e$ es submodular.

Solución

Para demostrar la desigualdad anterior basta con ver los casos desfavorables, es decir, en donde el lado positivo se activa ya que de esta manera la expresión podría llegar a ser estrictamente positiva. Si $e = (s, t) \in \delta^-(A \cap B)$ para $A, B \subseteq V$ se tiene que $s \notin A \cap B$ y $t \in A \cap B$, esto implica que $t \in A$ y $t \in B$, además, se cumple solo uno de los siguientes casos, $s \in A \setminus B$, $s \in B \setminus A$ o $s \notin A \cup B$. Si se cumple alguno de los primeros dos casos entonces $e \notin \delta^-(A \cup B)$ y se activa un término negativo por lo que la suma es 0. Si se cumple el tercer caso se tiene $e \in \delta^-(A \cup B), e \in \delta^-(A), e \in \delta^-(B)$ por lo que todos los elementos de la desigualdad se activan y la suma es 0.

Por otro lado, si $e \notin \delta^-(A \cap B)$ pero $e \in \delta^-(A \cup B)$, se tiene que $s \notin A \cup B$ y se cumple solo uno de los siguientes casos $t \in A \setminus B$, $t \in B \setminus A$. En ambos casos, se activa un término positivo y un término negativo por lo que la suma es 0.

Por último nos queda demostrar que f es una función submodular, en efecto para cualquier $A, B \subseteq V$,

$$\begin{aligned} & f(A \cup B) + f(A \cap B) - f(A) - f(B) \\ &= \sum_{e \in \delta^-(A \cup B)} w_e + \sum_{e \in \delta^-(A \cap B)} w_e - \sum_{e \in \delta^-(A)} w_e - \sum_{e \in \delta^-(B)} w_e \\ &= \sum_{e \in E} \underbrace{w_e}_{\geq 0} \underbrace{\left([\![e \in \delta^-(A \cup B)]\!] + [\![e \in \delta^-(A \cap B)]\!] - [\![e \in \delta^-(A)]\!] - [\![e \in \delta^-(B)]\!]\right)}_{\leq 0} \leq 0, \end{aligned}$$

se concluye que f es submodular.

Parte II (30 puntos).
Nota: para hacer esta parte recomiendo basarse en las clases 19/20 del curso.

Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sea $r \in V$ un nodo raiz. Un r-conector es cualquier subconjunto F de arcos de E tal que para cada nodo $v \in V$ existe un r-v camino dirigido en F. Supongamos para evitar conjuntos vacíos que el conjunto E en si mismo es r-conector. Defina

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta^-(S)) \geq 1, \forall \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\}, x \geq 0\}$$

El objetivo de este problema es demostrar que $Q = \text{conv}\{\chi^F : F \text{ es } r\text{-conector}\} + \mathbb{R}^E_+$. Es fácil ver (no lo demuestre) que demostrar la igualdad anterior equivale a demostrar que Q es un poliedro entero. Para hacerlo, demostraremos que el sistema que define a Q es TDI (eso es suficiente pues el vector lado derecho es entero).

Sea $c \in \mathbb{Z}^E$ tal que el problema $(P) = \text{mín}\{c^T x : x \in Q\}$ tenga solución finita.

(a) (5 puntos) Escriba el dual (D) del problema (P), en variables $(y_S : \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\})$.

Solución

El primal y dual respectivamente:

$$\begin{aligned} (P(c))\ & \text{mín}\, c^T x \\ & x(\delta^-(S)) \geq 1\ \forall \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\} \\ & x_e \geq 0\ \forall e \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D(c))\ & \text{máx} \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\}} y_S \\ & \sum_{S : e \in \delta^-(S)} y_S \leq c_e\ \forall e \in E \\ & y_S \geq 0\ \forall \emptyset \neq S \subseteq V \setminus \{r\} \end{aligned}$$

(b) (15 puntos) Llame y^* a una solución óptima de (D) que minimice el potencial $\Psi(y) = \sum_S y_S|S||V \setminus S|$. (Existe pues (P) tiene solución finita, y hay un número finito de vértices en el poliedro dual). Demuestre que y^* tiene soporte laminar (es decir, que los conjuntos asociados a coordenadas no nulas de y^* son una familia laminar).
Indicación: Al hacer el descruce, considere un par de conjuntos A y B intersectantes y asegúrese que $A \cap B$ y $A \cup B$ indiquen coordenadas del vector y. Use (aunque no la haya hecho) el ejercicio (f) de la parte I.

Solución
Consideremos una solución dual óptima y^* que minimiza el potencial $\Psi(y) = \sum_S y_S|S||V \setminus S|$ y sea $\mathcal{L}$ su soporte, es decir, $\mathcal{L} = \{S : y^*_S > 0\}$. Para probar que $\mathcal{L}$ es laminar utilizaremos la técnica del descruce para construir una solución dual óptima $\hat{y}$ con mejor potencial, lo que nos llevará a una contradicción.

Supondremos que $\mathcal{L}$ no es una familia laminar, esto significa que existen $A, B \in \mathcal{L}$ que son intersectantes, es decir, $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ son todos no vacíos, luego, consideremos $\hat{y} = \begin{cases} y^*_S & S \notin \{A, B, A \cup B, A \cap B\} \\ y^*_S - \epsilon & S \in \{A, B\} \\ y^*_S + \epsilon & S \in \{A \cup B, A \cap B\} \end{cases}$,
con $0 < \epsilon \leq \text{mín}\{y^*_A, y^*_B\}$, de esta manera $\hat{y}$ es no negativo.

Paso 1: Veamos que $\hat{y}$ es dual factible. Si la resta del lado izquierdo de la primera restricción entre $\hat{y}$ e y^* es no positiva entonces $\hat{y}$ es factible, en efecto:

$$\sum_{S:e\in\delta^-(S)} \hat{y}_S - y^*_S = \epsilon\Big([\![e \in \delta^-(A \cup B)]\!] + [\![e \in \delta^-(A \cap B)]\!] - [\![e \in \delta^-(A)]\!] - [\![e \in \delta^-(B)]\!] \Big).$$

Por P1.f se tiene que la expresión anterior es no positiva, por tanto $\hat{y}$ es dual factible.

Paso 2: Veamos que $\hat{y}$ es dual óptimo, en efecto, como la función objetivo es sumar sobre las componentes de un vector, donde a dos de estos componentes le sumamos ϵ y a otros dos le restamos ϵ se tiene que la suma sobre $\hat{y}$ es igual a la suma sobre y^*.

Paso 3: Veamos que $\hat{y}$ tiene menor potencial que y^*. En efecto:

$$\begin{aligned} \Psi(\hat{y}) - \Psi(y^*) &= \epsilon\Big(|A \cup B||V \setminus A \cup B| + |A \cap B||V \setminus A \cap B| - |A||V \setminus A| - |B||V \setminus B| \Big) \\ &= -2\epsilon|A \setminus B||B \setminus A| \end{aligned}$$

y esto es menor que 0 pues $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son no vacíos, por ende $\mathcal{L}$ debe ser una familia laminar.

(c) (10 puntos) Concluya que el sistema que define a Q es totalmente dual integral.
Indicación: Use el resultado del ejercicio (e) de la parte I, aunque no lo haya hecho en su tarea.

Solución

El dual restrigido $D^{'}(c)$ al soporte de y se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (D^{'}(c)) \quad \text{máx} \sum_{S\in\mathcal{L}} y_S & \\ My &\leq c \\ y_S &\geq 0 \;\forall S \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

donde $M \in \{0, 1\}^{E \times \mathcal{L}}$ es tal que $M_{e,S} = 1$ si y solo si $e \in \delta^-(S)$. Por P1.e se sabe que M es TU, por lo que si consideramos $c \in \mathbb{Z}^E$ se tiene que el área factible de $D^{'}(c)$ es poliedro integral. Así que cuando $P(c)$ tiene óptimo finito, $D(c)$ y $D'(c)$ también y este se alcanza en un vértice $\bar{y}$ de $D^{'}(c)$ que es entero. Como el óptimo de $D(c)$ es factible en $D'(c)$ se concluye que $\bar{y}$ es óptimo en $D(c)$, y luego el sistema original es TDI.