

**MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.****Profesor:** José Soto**Auxiliar:** Diego Garrido**Fecha:** 25 de junio de 2020.

## Total Unimodularidad (TU)

### 1. Teorema de Braum-Trotter

Diremos que un poliedro  $P$  tiene la propiedad de descomposición entera si  $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$  se tiene que todo vector integral del conjunto  $kP$  es suma de  $k$  vectores integrales de  $P$ . Sea  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  un poliedro racional y puntiagudo.

- Demuestre que si  $P$  tiene la propiedad de descomposición entera, entonces  $P$  es un poliedro entero.
- Demuestre que si  $A$  es total unimodular y  $b$  es integral, entonces  $P$  tiene la propiedad de descomposición entera.
- Concluya que  $P$  tiene la propiedad de descomposición entera para todo  $b$  integral si y sólo si  $A$  es total unimodular.

### 2. Propiedades de una Matriz TU

Prueba que si  $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$  es TU, entonces:

- Cada submatriz cuadrada invertible de  $A$  tiene una fila con un número impar de coordenadas no nulas.
- Si  $B$  es submatriz cuadrada de  $A$  tal que la suma sobre las filas y sobre las columnas de  $B$  es par, entonces la suma sobre todo  $B$  es divisible por 4.

**Hint:** Si  $A$  es TU, entonces todo submatriz  $B$  de  $A$  es TU. Use el teorema de Ghouila-Houri.