Dwita Gurning FI4002 10219077

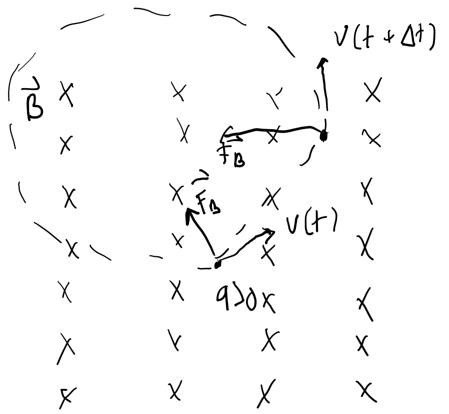
Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath}+v_{y(t)}\hat{\jmath}$ dalam ruang bermedan magnetic konstan.

$$\vec{B} = -\hat{k}B_z$$

Tentukan gerak partikel.

Langkah-langkahnya

a. Tuliskan hukum Newtonnya
b. Tuliskan persamaan differensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah
c. Selesaikan kedua persamaan differensial sehingga dapat diperoleh $v_{x(t)}$, $v_y(t)$, $x(t)$, dan $y(t)$. Lakukan secara teori.
d. Perolehkan solusi numeriknya
e. Bandingkan hasil kedua pendekatan: teori dan numerik.



Jawab

a. Hukum Newton

$$\Sigma F = ma$$
$$q\hat{v} \times \hat{B} = m\frac{d\hat{v}}{dt}$$

Dimana $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath}+v_y(t)\hat{\jmath}$ dan $\vec{B} = -\hat{k}B_z$, sehingga:

$$q(v_x\hat{\imath}+v_y\hat{\jmath}) \times -\hat{k}B_z = m\frac{d}{dt}(v_x\hat{\imath}+v_y\hat{\jmath})$$
$$q\left(v_x\hat{\jmath} - v_y\hat{\imath}\right)B_z = m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath}\right) \quad (1)$$

b. Persamaan differensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah

$$q\left(v_x\hat{\jmath} - v_y\hat{\imath}\right)B_z = m\left(\frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\right)$$
$$\frac{qB_z}{m}\left(v_x\,\hat{\jmath} - v_y\hat{\imath}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath}$$

Untuk sumbu x

$$\boldsymbol{\frac{qB_z}{m}(-v_y) = \frac{dv_x}{dt}} \tag{2}$$

Untuk sumbu y

$$\boldsymbol{\frac{qB_z}{m}v_x = \frac{dv_y}{dt}} \tag{3}$$

c. Penyelesaian persamaan differensial
   Misalkan

$$\frac{qB_z}{m} = k$$

Pada sumbu x

$$-kv_y = \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_y = -\frac{1}{k}\frac{dv_x}{dt} \tag{4}$$

Subsitusikan persamaan (4) ke (3) sehingga diperoleh

$$kv_x = \frac{1}{k}\frac{d^2v_x}{dt^2}$$

$$k^2v_x = \frac{d^2v_x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} - k^2v_x = 0$$

Persamaan diatas dapat diselesaikan persamaan osilator harmonic

Misalkan $v_x = Ce^{rt}$ sehingga $\frac{d^2v_x}{dt^2} = r^2Ce^{rt}$

$$r^2Ce^{rt} - k^2Ce^{rt} = 0$$

$$r^2 - k^2 = 0$$

Maka diperoleh

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{\pm\sqrt{4k^2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{4k^2}}{2} = \pm k$$

Maka diperoleh

$$\boldsymbol{v_x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}}$$

Lakukan hal yang serupa pada sumbu y sehingga diperoleh

$$v_x = \frac{1}{k}\frac{dv_y}{dt}$$

Maka

$$k(-v_y) = \frac{1}{k}\frac{d^2v_y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + k^2v_y = 0$$

Misalkan $v_y = Ce^{rt}$, sehingga

$$r^2Ce^{rt} + k^2Ce^{rt} = 0$$
$$r^2 + k^2 = 0$$

Maka diperoleh solusi untuk r

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$r = \frac{\pm\sqrt{-4k^2}}{2} = \pm\frac{i\sqrt{4k^2}}{2} = \pm ik$$

Subsitusikan r ke v_y, diperoleh solusi v_y

$$v_y = C_1e^{ik} + C_2e^{-ik}$$
$$\boldsymbol{v_y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt}$$

Maka diperoleh solusi untuk $\boldsymbol{v_x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}}$ dan $\boldsymbol{v_y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt}$

Untuk sumbu x

$$v_x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$$
$$\frac{dx}{dt} = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$$
$$\int dx = \int (C_1e^{kt} + C_2e^{-kt})\, dt$$
$$x = \int C_1e^{kt}dt + \int C_2e^{-kt}dt$$
$$x = \frac{C_1}{k}e^{kt} + c_1 - \frac{C_2}{k}e^{-kt} + c_2$$
$$x = \frac{C_1}{k}e^{kt} - \frac{C_2}{k}e^{-kt} + C$$

Dimana C adalah $c_1 + c_2$

Untuk sumbu y

$$v_y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$
$$\frac{dy}{dt} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$
$$\int dy = \int (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)\, dt$$
$$y = \int C_1 \sin kt\, dt + \int C_2 \cos kt\ \ dt$$

d. solusi numeriknya

dalam metode runge kuta orde 4