Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 14/11/2022

Άσκηση 1: Πλησιέστερο Ζεύγος Σημείων (2.4 μον.)

Θεωρούμε το πρόβλημα του πλησιέστερου ζεύγους σημείων στις 3 διαστάσεις, όπου δίνονται οι συντεταγμένες n σημείων $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ στον τρισδιάστατο χώρο, και ζητείται η ελάχιστη (Ευκλείδεια) απόσταση δ^* μεταξύ ενός ζεύγους από αυτά.

(α) Γενικεύοντας τον αλγόριθμο για τις 2 διαστάσεις που είδαμε στο μάθημα, να διατυπώσετε αλγόριθμο διαίρει-και-βασίλευε για το πρόβλημα του πλησιέστερου ζεύγους σημείων στις 3 διαστάσεις. Να διατυπώσετε αναλυτικά τον αλγόριθμό σας, και να αναλύσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

(β) Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του δ^*. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τιμές $\ell > 0$ και $c > 1$ τέτοιες ώστε $\delta^* \in [\ell, c\ell]$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης γραμμικό στο n (ο χρόνος εκτέλεσης μπορεί να εξαρτάται από το c και από τις διαστάσεις του Ευκλείδειου χώρου). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας, και να γενικεύσετε τον αλγόριθμο και την ανάλυση για τον υπολογισμό του πλησιέστερου ζεύγους σημείων σε $d \geq 2$ διαστάσεις.

Άσκηση 2: Πόρτες Ασφαλείας στο Κάστρο (1.4 μον.)

Με την άφιξή σας στο Schloss Neuschwanstein για το ονειρεμένο τριήμερο που σχεδιάζατε, έρχεστε αντιμέτωποι με μια δυσάρεστη έκπληξη: ξεχάσατε στην Αθήνα τον χάρτη με την αντιστοίχιση των ηλεκτρονικών διακοπτών στις πόρτες ασφαλείας του κάστρου! Το κάστρο έχει n πόρτες ασφαλείας, αριθμημένες από 1 μέχρι n, κατά μήκος ενός μεγάλου διαδρόμου, και n ηλεκτρονικούς διακόπτες στην είσοδο, επίσης αριθμημένους από 1 μέχρι n, που καθένας ανοίγει μία από αυτές τις πόρτες. Κάθε διακόπτης έχει δύο θέσεις on και off, η μία διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή και η άλλη κλειστή (αλλά δεν γνωρίζετε ποια θέση κάνει τι). Για λόγους ασφαλείας, κάθε εβδομάδα επιλέγεται μια τυχαία αντιστοίχιση των διακοπτών στις πόρτες. Επιλέγεται ακόμη με τυχαίο τρόπο για κάθε διακόπτη η θέση που διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή. Αυτή η πληροφορία δίνεται στους επισκέπτες του κάστρου στον χάρτη που έμεινε στην Αθήνα.

Πρέπει λοιπόν να ανακατασκευάσετε τον χάρτη, δοκιμάζοντας διαφορετικές διαμορφώσεις για τους διακόπτες (κάθε διαμόρφωση αντιστοιχεί σε μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους n). Για κάθε διαμόρφωση των διακοπτών, μπορείτε να περπατήσετε στον διάδρομο μέχρι την πρώτη πόρτα που παραμένει κλειστή (προφανώς δεν μπορείτε να ξέρετε τι συμβαίνει πίσω από κλειστές πόρτες). Οπότε η μόνη πληροφορία που έχετε στη διάθεσή σας για κάθε διαμόρφωση είναι ποια είναι η πρώτη πόρτα στο διάδρομο που παραμένει κλειστή.

Να διατυπώσετε μια αποδοτική διαδικασία αναζήτησης που υπολογίζει ποιος διακόπτης αντιστοιχεί σε ποια πόρτα και ποια θέση αυτού του διακόπτη διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή. Οι φίλοι σας αμφιβάλουν ότι θα τα καταφέρετε και ρωτούν τι ώρα να επιστρέψουν από τη βόλτα τους στην κοντινή πόλη για να επιστρέψετε στην Αθήνα. Χρειάζεται λοιπόν να αιτιολογήσετε την ορθότητα της διαδικασίας αναζήτησης που προτείνατε και να υπολογίσετε πόσες διαμορφώσεις θα πρέπει να δοκιμάσετε (ως συνάρτηση του n).

Άσκηση 3: Φόρτιση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων (1.4 μον.)

Διαχειριζόμαστε ένα σταθμό φόρτισης ηλεκτρικών αυτοκινήτων. Γνωρίζουμε ότι στη διάρκεια των επόμενων T χρονικών μονάδων πρόκειται να μας επισκεφθούν για φόρτιση n ηλεκτρικά αυτοκίνητα, καθώς επίσης και το χρόνο άφιξης a_i κάθε αυτοκινήτου i. Υποθέτουμε ότι από τη στιγμή που ένα αυτοκίνητο συνδέεται σε μία υποδοχή φόρτισης, η φόρτισή του διαρκεί 1 χρονική μονάδα. Στα πρόσφατα διαφημιστικά μας μηνύματα, κυριαρχεί η υπόσχεση ότι η καθυστέρηση ενός αυτοκινήτου στον σταθμό μας δεν ξεπερνά τις d χρονικές μονάδες. Με άλλα λόγια, υποσχόμαστε ότι κάθε αυτοκίνητο i, ολοκληρώνει τη φόρτισή του μέχρι τη χρονική στιγμή $a_i + d$. Δεδομένων του d και των χρόνων άφιξης $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq T$ των n ηλεκτρικών αυτοκινήτων, θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος s^* υποδοχών φόρτισης που χρειάζονται για να τηρήσουμε την υπόσχεσή μας. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το s^*. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Παραλαβή Πακέτων (2.4 μον.)

Η περίοδος των εκπτώσεων ήταν πραγματικά θριαμβευτική για την επιχείρησή σας. Οι πωλήσεις ξεπέρασαν τις προσδοκίες σας και τώρα είναι η στιγμή που οι πελάτες σας θα παραλάβουν τα δέματά τους. Από το πρωί, έχουν μαζευτεί έξω από το κατάστημά σας n πελάτες που πρέπει να παραλάβουν τα δέματά τους. Η προετοιμασία του δέματος κάθε πελάτη i χρειάζεται χρόνο $p_i \in \mathbb{N}^*$, τον οποίο γνωρίζετε με ακρίβεια. Η πελατεία σας είναι σχετικά σταθερή, οπότε για κάθε πελάτη i έχετε εκτιμήσει ένα θετικό βάρος $w_i \in \mathbb{N}^*$, που ποσοτικοποιεί τη σημασία του i για την επιχείρησή σας.

Θέλετε να δρομολογήσετε την παραλαβή των δεμάτων ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης για τους πελάτες σας. Αν π.χ. έχουμε διαθέσιμο έναν μόνο υπάλληλο και 4 πελάτες, που εξυπηρετούνται με σειρά $(1, 2, 3, 4)$, ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$\begin{aligned} w_1 p_1 + & w_2(p_1 + p_2) + w_3(p_1 + p_2 + p_3) + w_4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ & p_1(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + p_2(w_2 + w_3 + w_4) + p_3(w_3 + w_4) + p_4 w_4 \,. \end{aligned}$$

Αν π.χ. έχουμε δύο υπαλλήλους, ο πρώτος εξυπηρετεί τους πελάτες 1 και 2 με σειρά $(1, 2)$, και ο δεύτερος εξυπηρετεί τους πελάτες 3 και 4 με σειρά $(4, 3)$, ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$w_1 p_1 + w_2(p_1 + p_2) + w_4 p_4 + w_3(p_4 + p_3) \,.$$

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που δρομολογεί την παραλαβή των δεμάτων με στόχο την ελαχιστοποίηση του βεβαρυμένου χρόνου εξυπηρέτησης, αν έχουμε μόνο έναν υπάλληλο που προετοιμάζει τα δέματα και εξυπηρετεί τους πελάτες.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το ίδιο πρόβλημα, αν έχουμε δύο υπαλλήλους στην εξυπηρέτηση. Να σκιαγραφήσετε τη γενίκευση του αλγορίθμου σας για την περίπτωση που έχουμε $m \geq 3$ υπαλλήλους.

Άσκηση 5: Ελάχιστη Διαταραχή Ακολουθίας (2.4 μον.)

Θεωρούμε ακολουθία $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ αποτελούμενη από n θετικούς φυσικούς αριθμούς. Καλούμε *διαταραχή* $D(\alpha_k)$ του προθέματος $\alpha_k = (a_1, \ldots, a_k)$ τη διαφορά του μέγιστου από το ελάχιστο στοιχείο της α_k, δηλ. $D(\alpha_k) = \max_{i \in \{1, \ldots, k\}} a_i - \min_{i \in \{1, \ldots, k\}} a_i$. Καλούμε *συνολική διαταραχή* $D(\alpha)$ της ακολουθίας α το άθροισμα των διαταραχών για όλα τα προθέματα της ακολουθίας, δηλ.

$$D(\alpha) = \sum_{k=2}^{n} D(\alpha_k) = \sum_{k=2}^{n} \left(\max_{i \in \{1, \ldots, k\}} a_i - \min_{i \in \{1, \ldots, k\}} a_i \right)$$ D(a) can be done in O(n)

Δεδομένης μιας ακολουθίας $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, ζητείται να αναδιατάξουμε τα στοιχεία της, με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική διαταραχή της ακολουθίας που προκύπτει από την αναδιάταξη. Ζητείται, δηλαδή, να υπολογίσουμε μια βέλτιστη ακολουθία β^*, που προκύπτει ως μετάθεση των στοιχείων της α, ώστε η β^* να επιτυγχάνει την *ελάχιστη συνολική διαταραχή* $D(\beta^*)$ μεταξύ όλων των ακολουθιών που προκύπτουν ως μετάθεση των στοιχείων της α.

1. Να δείξετε ότι το τελευταίο στοιχείο της βέλτιστης ακολουθίας β^* είναι είτε το μέγιστο είτε το ελάχιστο στοιχείο της α.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος, με είσοδο την ακολουθία α, υπολογίζει τη βέλτιστη ακολουθία β^* και την αντίστοιχη ελάχιστη συνολική διαταραχή $D(\beta^*)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Για την ακολουθία $\alpha = (6, 2, 3, 1, 3, 3)$, η βέλτιστη ακολουθία είναι $\beta^* = (3, 3, 3, 2, 1, 6)$ με συνολική διαταραχή $D(\beta^*) = 0 + 0 + 1 + 2 + 5 = 8$, ενώ για την ακολουθία $\alpha = (1, 3, 3, 3, 6, 6)$, η βέλτιστη ακολουθία είναι $\beta^* = (3, 3, 3, 6, 6, 1)$ με συνολική διαταραχή $D(\beta^*) = 0 + 0 + 3 + 3 + 5 = 11$.