3η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Τετάρτη 1 Ιουνίου 2022 (σε μορφή pdf μέσω του helios). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλεύεστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω δένδρο T με τουλάχιστον 2 κορυφές. Δείξτε ότι

- i. το πλήθος των φύλλων του T ισούται με $2 + \sum_{d(u)\geq 3} (d(u) - 2)$.
- ii. Αν Δ είναι ο μέγιστος βαθμός του T και n_i το πλήθος των κορυφών βαθμού i, τότε $n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i$.

(2) Για $d \geq 1$, προσδιορίστε την ποσότητα

$$\max_{\mathrm{diam}(G)=d} \min \{\mathrm{diam}(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G\}$$

(3) Προσδιορίστε τα δένδρα T με n κορυφές για τα οποία ο κώδικας Prüfer έχει όλους τους όρους διαφορετικούς. Πόσα τέτοια δένδρα με n κορυφές υπάρχουν?

(4) Θεωρούμε δάσος F με $2k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Τότε το σύνολο των ακμών μπορεί να διαμεριστεί σε k μονοπάτια τα οποία είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους (ως προς τις ακμές).

(5) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G και κορυφή $x \in V(G)$. Ορίζουμε την βαρυκεντρικότητα της x ως $s(x) = \sum_{v\in V(G)} \mathrm{dist}(x, v)$. Έστω δέντρο T και αυθαίρετη κορυφή του $x \in V(T)$ που δεν είναι φύλλο. Να δειχθεί ότι για κάθε $y, z \in N_T(x)$ ισχύει $2s(x) < s(y) + s(z)$, όπου $N_T(x)$ είναι το σύνολο των γειτονικών κορυφών της x στο T.

(6) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G και κορυφή $x \in V(G)$. Ορίζουμε την βαρυκεντρικότητα της x ως $s(x) = \sum_{v\in V(G)} \mathrm{dist}(x, v)$.

- i. Έστω δέντρο T και κορυφή $u \in V(T)$. Τότε ισχύει $s(x) \leq \binom{|V(T)|}{2}$.
- ii. Ισχύει το ίδιο για απλό συνεκτικό γράφημα G (όχι απαραίτητα δένδρο)? Δηλαδή, έστω απλό συνεκτικό γράφημα G και κορυφή $x \in V(G)$. Ισχύει $s(x) \leq \binom{|V(G)|}{2}$?

(7) Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές και ακολουθία βαθμών $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Εξετάστε πότε το γράφημα $G^{(k)} = \underbrace{G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}$, $k \geq 2$, είναι Eulerian και πότε Hamiltonian, όπου $*$ συμβολίζει τη σύνδεση γραφημάτων.

(8) Έστω απλά γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ με $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ και ακολουθίες βαθμών $d_1^1 \geq d_2^1 \geq \cdots \geq d_{|V(G_1)|}^1$ και $d_1^2 \geq d_2^2 \geq \cdots \geq d_{|V(G_2)|}^2$ αντίστοιχα. Τότε δείξτε τα ακόλουθα:

i. Αν τα G_1 και G_2 είναι συνεκτικά τότε και το $G_1 \times G_2$ είναι συνεκτικό.
ii. Αν τα G_1 και G_2 είναι Eulerian τότε και το $G_1 \times G_2$ είναι Eulerian.
iii. Αν το $G_1 \times G_2$ είναι Eulerian τότε είτε τα G_1 και G_2 είναι και τα δύο Eulerian, είτε έχουν και τα δύο άρτιο πλήθος κορυφών.
iv. Αν το G είναι Hamilton τότε και το $G \times P_k$ είναι Hamilton, όπου P_k είναι το μονοπάτι με k κορυφές.

($\times$ συμβολίζει το γινόμενο γραφημάτων)

(9) Έστω $G = (V, E)$ απλό γράφημα. Τότε το γραμμογράφημα του G, LG, είναι το γράφημα του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις ακμές του G και δύο κορυφές του LG ενώνονται με ακμή αν οι αντίστοιχες ακμές του G είναι γειτονικές (δηλαδή έχουν κοινό ένα άκρο).

i. Σχεδιάστε το γραμμογράφημα του γραφήματος G στην περίπτωση που $G = K_{1,3}$ και $G = C_5$.
ii. Πόσες κορυφές και ακμές έχει το LG? Προσδιορίστε την ακολουθία βαθμών του LG.
iii. Αποδείξτε ότι αν το G είναι Eulerian, τότε το LG είναι Hamiltonian.
iv. Δώστε ένα γράφημα G για το οποίο το LG είναι Hamiltonian αλλά το G δεν είναι Eulerian.
v. Αποδείξτε ότι αν το G είναι Eulerian, τότε το LG είναι Eulerian.
vi. Δώστε ένα γράφημα G για το οποίο το LG είναι Eulerian αλλά το G όχι.
vii. Αποδείξτε ότι αν το G είναι Hamiltonian, τότε το LG είναι Hamiltonian.
viii. Δώστε ένα γράφημα G για το οποίο το LG είναι Hamiltonian αλλά το G όχι.

(10) Ένα απλό γράφημα G λέγεται Hamilton-συνεκτικό αν κάθε ζεύγος κορυφών του G συνδέονται με ένα Hamilton μονοπάτι.

i. Δείξτε ότι αν το G είναι Hamilton-συνεκτικό με $n \geq 4$ κορυφές, τότε το G έχει τουλάχιστον $e \geq \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ ακμές.
ii. Για $n \geq 4$ κατασκευάστε ένα Hamilton-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και ακριβώς $e \geq \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ ακμές.

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής "ΕπίθετοΌνομα" όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο helios.ntua.gr

---