ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

3η Σειρά Ασκήσεων

Θεωρία Γραφημάτων

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ

03119005 – 6ο Εξάμηνο ΣΗΜΜΥ

georg.dimi00@gmail.com

27/05/2022

(1)

(i) Έστω Φ(T) = (πλήθος φύλλων του δέντρου T). Θέλουμε να δείξουμε ότι για δέντρα με n = |V(T)| >= 2 ισχύει:

$$\Phi(T) = 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u) - 2)$$

Απόδειξη με επαγωγή:

Επαγωγική Βάση: Το δέντρο με δύο κορυφές έχει 2 φύλλα και οι κορυφές του έχουν βαθμούς 1 άρα ισχύει ότι Φ(T) = 2 για αυτό το δέντρο και επαληθεύεται ο τύπος.

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε δέντρο με n κορυφές.

Θεωρούμε το δέντρο T με |V(T)| = n + 1. Έχει αναγκαστικά ένα φύλλο, έστω v, – έστω p ο γονέας αυτού του φύλλου – , αφαιρούμε το v και παίρνουμε δέντρο T' με
|V(T')| = n.

Επαγωγικό βήμα:

$$\Phi(T') = 2 + \sum_{d\prime(u)\geq 2}(d'(u) - 2)\,, u \in V(T')$$

Αν d(p) = 2 τότε d'(p) = 1, αλλά ο p δεν παίζει ρόλο στο άθροισμα ούτε για το δέντρο T ούτε για το T' (αφού έχουμε για όρους τα d(*) – 2), όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί κορυφών των δύο δέντρων είναι ίδιοι. Στο T το v είναι φύλλο, ενώ στο T' ο p είναι φύλλο. Όπως και να έχει έχουν τον ίδιο αριθμό φύλλων και παίρνουμε:

$$\Phi(T) = \Phi(T') = 2 + \sum_{d\prime(u)\geq 2}(d'(u) - 2) = 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u) - 2)$$

Αν d(p) >= 3: όλες οι κορυφές στα T, T' έχουν τον ίδιο βαθμό με πριν με μοναδική εξαίρεση την d'(p) = d(p) – 1.

$$\Phi(T') = 2 + \sum_{d\prime(u)\geq 2}(d'(u) - 2) = \Phi(T) = 2 + \sum_{d(u)\geq 2, u\neq v}(d(u) - 2) + d'(p) - 2 =$$
$$= 2 + \sum_{d(u)\geq 2, u\neq v}(d(u) - 2) + d(p) - 2 - 1 = 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u) - 2) - 1$$

Το T έχει ένα περισσότερο φύλλο από το T' (την κορυφή v) άρα

$$\Phi(T) = \Phi(T') + 1 = 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u) - 2) - 1 + 1 = 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u) - 2)$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

(ii) Για ένα δέντρο T έχουμε d(u) = 1, 2, …, Δ όπου u ανήκει στο V(T).

Έστω Vi το συνολο κορυφών που έχουν βαθμό i.

$$\sum_{d(u)\geq 2}(d(u)-2) = \sum_{u\in V_2}(2-2) + \sum_{u\in V_3}(3-2) + \cdots + \sum_{u\in V_\Delta}(\Delta-2) =$$

$$= n_2(2-2) + n_3(3-2) + \cdots + n_\Delta(\Delta-2) = \sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)n_i$$

Σε ένα δέντρο T μια κορυφή είναι φύλλο ανν έχει βαθμό 1 άρα Φ(T) = n1 άρα

$n_1 = \Phi(T) = \ 2 + \sum_{d(u)\geq 2}(d(u)-2)$ από το ερώτημα (i) και αντικαθιστούμε το άθροισμα βαθμών με το παραπάνω αποτέλεσμα για να πάρουμε:

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)n_i$$

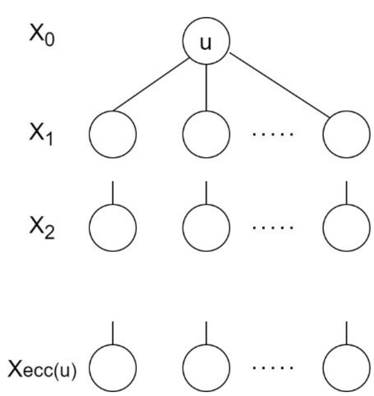
(2)

$$\max_{diam(G)=d} \min\{diam(T) : T\ \sigma\kappa\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\iota\kappa ό\ δ έ\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ G\}$$

Με τη παραπάνω ποσότητα εκφράζουμε το εξής:

Έστω ένα γράφημα G με diam(G) = d (>= 1) τότε από όλα τα σκελετικά δέντρα του G κρατάμε μόνο το δέντρο (ουσιαστικά την διάμετρο αυτού του δέντρου κρατάμε, όχι το ίδιο το δέντρο) με την μικρότερη διάμετρο. Τώρα επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε γράφημα G με diam(G) = d και για κάθε τέτοιο γράφημα κρατάμε το σκελετικό του δέντρο με τη μικρότερη διάμετρο, συγκρίνουμε όλες αυτές τις διαμέτρους και κρατάμε τη μεγαλύτερη. Αυτό είναι το αποτέλεσμα.

Έστω ένα γράφημα G με diam(G) = d, διαλέγουμε u με ecc(u) = d και κάνουμε αποσύνθεση απόστασης ως προς αυτήν:

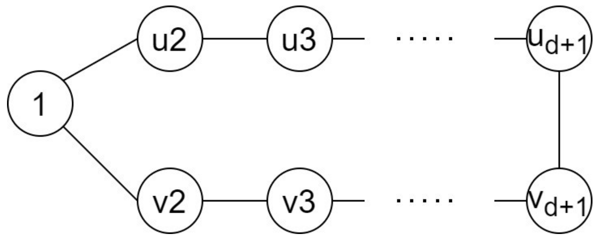


Κάθε κορυφή κάθε συνόλου Xi έχει αναγκαστικά ακμή προς κάποια κορυφή του συνόλου Xi – 1 λόγω του ορισμού της αποσύνθεσης απόστασης.

Φτιάχνω σκελετικό δέντρο T του G στο οποίο να υπάρχουν μόνο αυτές οι ακμές. Στο T παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόσταση μεταξύ 2 κορυφών είναι το πολύ 2d (αν ανήκουν και οι δύο στο Xecc(u) και πρέπει για να πάμε από τη μία στην άλλη να ανεβούμε μέχρι τη u και να ξανακατεβούμε).

Συνεπώς, για ένα γράφημα G με diam(G) = d ισχύει ότι
$\min\{diam(T) : T\ \sigma\kappa\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\iota\kappa ό\ δ έ\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ G\} \leq 2d$, αφού για το τυχαίο G καταφέραμε να

κατασκευάσουμε τέτοιο δέντρο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει G που να ικανοποιεί την ισότητα. Θεωρούμε έναν κύκλο 2d + 1 κορυφών.



Από το σχήμα βλέπουμε ότι από τη κορυφή 1 μπορούμε να φτάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή του γραφήματος με μονοπάτι μήκους το πολύ d, ενώ ο κύκλος έχει 2d + 1 κορυφές.

Από τον κύκλο αφαιρούμε μια ακμή, έστω (w, z) το μονοπάτι που συνδέει τις w, z τώρα έχει μήκος 2d + 1 – 1 = 2d και είναι η διάμετρος του δέντρου.

Συνεπώς,

$$\max_{diam(G)=d} \min\{diam(T): T\ σκελετικό\ δέντρο\ του\ G\} = 2d, d \geq 1$$

(3)

Ο κώδικας Prufer είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ δέντρων και ακολουθιών Prufer.

Ο τρόπος κατασκευής του είναι ότι αρχίζουμε από μια κενή λίστα. Σε κάθε βήμα παίρνουμε το φύλλο με τη μικρότερη ετικέτα, έπειτα παίρνουμε τον γονέα του και προσθέτουμε την ετικέτα του γονέα στον κώδικα Prufer ενώ αφαιρούμε από το δέντρο το παιδί. Σταματάμε όταν μείνουν στο δέντρο 2 μόνο κορυφές.

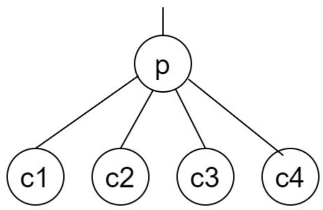
Ο μόνος τρόπος κάποιο στοιχείο να επαναλαμβάνεται στον κώδικα Prufer είναι αν είχε τουλάχιστον 2 παιδιά. Συνεπώς ο κώδικας Prufer με όλους τους όρους του διαφορετικούς προσδιορίζει τα μονοπάτια n κορυφών.

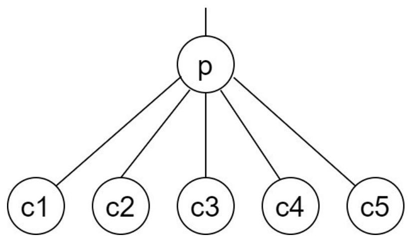
Wn = {w1, w2, …, wk}, με k = n – 2 και wj = 1, 2, …, n – 1, n.

Το πλήθος διαφορετικών τέτοιων δέντρων είναι n * (n – 1) *…*3 = n!/2.

(4)

Έστω ότι έχουμε δέντρο με 2k >= 2 κορυφές περιττού βαθμού. Θα δείξουμε έναν κατασκευαστικό αλγόριθμο για τη λύση αυτού του προβλήματος.





Τα φύλλο έχουν περιττό βαθμό. Για να φτιάξουμε μονοπάτια για τα φύλλα του ίδιου κόμβου, τα ενώσουμε ως εξής: Ακμή από το φύλλο προς το γονέα και από τον γονέα προς το άλλο φύλλο.

Με τον τρόπο αυτό, αν ένας κόμβος έχει άρτιο αριθμό φύλλων τα εξυπηρετούμε όλα, ενώ αν έχει περιττό αριθμό φύλλων μας μένει μόνο ένα χωρίς μονοπάτι.

- Αν ο αρχικός μας κόμβος δεν έχει γονέα (είναι η ρίζα του δέντρου):

Αν έχει άρτιο αριθμό παιδιών έχουμε τελειώσει, αν έχει περιττό αριθμό παιδιών ενώνουμε το φύλλο που έμεινε με αυτόν τον κόμβο (τη ρίζα) και παίρνουμε το μονοπάτι για αυτές τις δύο κορυφές.

- Αν ο αρχικός μας κόμβος έχει γονέα τότε:

αν έχει περιττό αριθμό παιδιών: με τη προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε μονοπάτια σε όλα τα φύλλα εκτός από ένα. Ο βαθμός του γονέα είναι άρτιος άρα δεν μας νοιάζει να βρούμε μονοπάτι για αυτόν. Στον γράφο μας συμπτύσσουμε τον γονέα με το τελευταίο του φύλλο και συνεχίζουμε τη διαδικασία αναζήτησης μονοπατιών για αυτό το νέο φύλλο. Στο μονοπάτι που θα βρούμε αν προσθέσουμε την ακμή (γονέας, φύλλο) παίρνουμε το ζητούμενο μονοπάτι.

αν έχει άρτιο αριθμό παιδιών: ο βαθμός του γονέα είναι περιττός. Διώχνουμε όλα τα παιδιά του με τη παραπάνω διαδικασία άρα στον νέο γράφο ο γονέας αυτός είναι φύλλο και συνεχίζουμε αναζητώντας μονοπάτι για αυτόν.

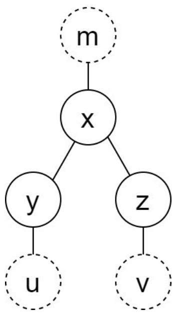
Σε κάθε βήμα εφαρμόζουμε στον γράφο τη παραπάνω διαδικασία διώχνοντας στον παραγόμενο γράφο όλα τα παιδιά κάθε κόμβου, ο οποίος έχει για παιδιά μόνον φύλλα. Βλέπουμε ότι σε κάθε βήμα κάθε κορυφή που διώχνουμε από το γράφημα αντιστοιχίζεται με μία μοναδική κορυφή περιττού βαθμού στο αρχικό γράφημα.

Ο αλγόριθμός μας βρίσκει 1 μονοπάτι για κάθε ζεύγος φύλλων και όλα τα μονοπάτια που θα πάρουμε από όλα τα βήματα είναι εσωτερικά διακεκριμένα – φαίνεται από τη κατασκευή ότι φροντίζουμε να μην περνάμε ποτέ από την ίδια ακμή –. Συνεπώς, βρίσκει μία διαμέριση σαν αυτή που θέλαμε στην άσκηση (εξαντλεί όλες τις ακμές του γραφήματος γιατί όπως είδαμε από παραπάνω κάθε ακμή θα μπει με κάποιον τρόπο σε ένα ακριβώς μονοπάτι) και επαληθεύει ότι αν έχουμε 2k κορυφές περιττού βαθμού έχουμε k μονοπάτια.

Ένα δάσος είναι ένα γράφημα που έχει για συνιστώσες δέντρα, εφαρμόζουμε τα παραπάνω σε κάθε δέντρο και βλέπουμε και πάλι ότι αν έχουμε δάσος F με 2k >= 2 κορυφές περιττού βαθμού μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο των ακμών του σε k μονοπάτια, που είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους.

(5)

Έστω x μια αυθαίρετη κορυφή του δέντρου που δεν είναι φύλλο. Τότε έχει βαθμό τουλάχιστον 2 και έστω y, z δύο από τους γείτονές της.



Έστω M το σύνολο κορυφών του δέντρου στο οποίο φτάνουμε μόνο μέσω της x, U το αντίστοιχο για τη y και V το αντίστοιχο για τη z.

Βλέπουμε τα παρακάτω για τα s(x), s(y), s(z):

$$s(x) = \sum_{a \epsilon V(T)} dist(x,a) =$$

$$= \sum_{m \epsilon M} dist(x,m) + \left[1 + \sum_{u \epsilon U} \big(1 + dist(y,u)\big)\right] + \left[1 + \sum_{v \epsilon V} \big(1 + dist(z,v)\big)\right]$$

$$s(y) = \sum_{a \epsilon V(T)} dist(y,a) =$$

$$= \left[1 + \sum_{m \epsilon M} \big(1 + dist(x,m)\big)\right] + \sum_{u \epsilon U} dist(y,u) + \left[2 + \sum_{v \epsilon V} \big(2 + dist(z,v)\big)\right]$$

$$s(z) = \sum_{a \epsilon V(T)} dist(z,a) =$$

$$= \left[1 + \sum_{m \epsilon M} \big(1 + dist(x,m)\big)\right] + \left[2 + \sum_{u \epsilon U} \big(2 + dist(y,u)\big)\right] + \sum_{v \epsilon V} dist(z,v)$$

$$s(y) + s(z) = 2 \sum_{m \epsilon M} \big(1 + dist(x,m)\big) + 2 \sum_{u \epsilon U} \big(1 + dist(y,u)\big) + 2 \sum_{v \epsilon V} \big(1 + dist(z,v)\big) + 6$$

$$2s(x) = 2 \sum_{m \epsilon M} dist(x,m) + 2 \sum_{u \epsilon U} (1 + dist(y,u)) + 2 \sum_{v \epsilon V} (1 + dist(z,v)) + 4$$

(Βλέπουμε ότι δεν μας απασχολεί αν τα σύνολα M, U, V είναι κενά)

$$s(y) + s(z) - 2s(x) = 2 \sum_{m \epsilon M} 1 + 2$$

$$Άρα\ 2s(x) < s(y) + s(z)$$

(6)

i) $s(x) = \sum_{u\epsilon V(T)} dist(x,u)$. Έστω d η εκκεντρότητα της κορυφής x τότε 1 <= d <= n – 1 στο δέντρο. Αφού η εκκεντρότητα της x είναι d, υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή με απόσταση 1, μία με απόσταση 2, …, μία με απόσταση d. Μένουν n – d – 1 κορυφές οι οποίες όμως έχουν σίγουρα απόσταση <= d (αν d = n – 1, δεν μένει καμία κορυφή).

Έχω, λοιπόν, ότι: $s(x) = \sum_{u\epsilon V(T)} dist(x,u) \leq 1 + 2 + \cdots + d + (n-d-1)d$

Ορίζουμε $f(d) = 1 + 2 + \cdots + d + d(n-d-1) = \frac{d(d+1)}{2} + (-d^2 + (n-1)d) = \frac{d^2+d-2d^2+(2n-2)d}{2} = \frac{-d^2+(2n-1)d}{2}, d = 1, 2, \ldots, n-1$

Η f(d) παρουσιάζει μέγιστο για d = n – 1 το οποίο είναι n(n – 1)/2.

Άρα $s(x) \leq \binom{n}{2}$ ή $s(x) \leq \binom{|V(T)|}{2}$. Επίσης, υπάρχει περίπτωση που να ικανοποιείται το $s(x) = \binom{n}{2}$, για παράδειγμα αν το δέντρο είναι το μονοπάτι n κορυφών.

ii) Οι αποστάσεις που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της βαρυκεντρικότητας είναι ουσιαστικά τα μήκη των μονοπατιών σε ένα Shortest Path Tree ως προς τη κορυφή x στο οποίο θα ισχύει $s(x) \leq \binom{|V(T)|}{2}$ άρα θα ισχύει και για το αρχικό γράφημα ότι

$$s(x) \leq \binom{|V(G)|}{2}$$

(7)

Έστω ότι το G έχει n κορυφές και u μια κορυφή που ανήκει σε ένα αντίγραφο του G στο $G^{(k)}$ τότε $d_{G^{(k)}}(u) = d_G(u) + n(k-1)$ για να είναι Eulerian πρέπει ο αριθμός αυτός να είναι άρτιος.

Συνεπώς, το $G^{(k)}$ είναι Eulerian ανν

$$\text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n\text{: } d_i + n(k-1) = 2L \text{ για κάποιο } L.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 7.8. Έστω ότι το $G^{(k)}$ δεν είναι Hamiltonian τότε υπάρχει $m \leq \frac{nk}{2}$ τέτοιο ώστε $d'_m = d_i(\text{για κάποιο } i) + n(k-1) \leq m \leq \frac{nk}{2}$

Παίρνουμε: $0 \leq d_i \leq n\frac{2-k}{2}, k \geq 2$

Για k >= 3 δεν μπορεί να συμβαίνει αυτό άρα καταλήγουμε σε άτοπο άρα το γράφημά μας είναι Hamiltonian. Για k = 2:

$d'_m = 0 + n \leq m \leq n$ άρα αναγκαστικά m = n και $d'_n = n$.

Και $d'_{2n-m} = d'_n < 2n - m = n$ καταλήγουμε στο ότι n < n το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς, το γράφημα είναι Hamiltonian.

(8)

Eulerian λέγεται ένα γράφημα που έχει μια περιήγηση Euler και περιήγηση Euler λέγεται μια κλειστή μονοκονδυλιά του γραφήματος η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές του. Συνεπώς, αν ένα γράφημα είναι Eulerian έχει μια συνεκτική συνιστώσα (οι κορυφές τις ανήκουν στη περιήγηση Euler) και άλλες κορυφές που είναι απομονωμένες. Από το ζητούμενο (ii) και το ζητούμενο (iii) της άσκησης μάλλον θεωρούμε ότι το G είναι συνεκτικό γράφημα, δηλαδή, δεν έχει απομονωμένες κορυφές (αλλιώς θα μπορούσαμε να βρούμε αντεπιχείρημα στο ζητούμε (ii) για παράδειγμα).

Έστω n1 = |V(G1)| και n2 = |V(G2)|

$$V(G_1) = \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n_1}\}$$

$$V(G_2) = \{g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2n_2}\}$$

$$V(G1 \times G2) = \{(g_{1i}, g_{2j}): 1 \le i \le n_1 \; και \; 1 \le j \le n_2\}$$

(i) Πώς πάω από το (g_{1a}, g_{2b}) στο (g_{1c}, g_{2d}) στο γράφημα $G1 \times G2$;

Ακολουθώ το μονοπάτι $\pi_1 =< (g_{1a}, g_{2b}), \dots, (g_{1c}, g_{2b}) >$ που υπάρχει επειδή το G1 είναι συνεκτικό.

Έπειτα ακολουθώ το μονοπάτι $\pi_2 =< (g_{1c}, g_{2b}), \dots, (g_{1c}, g_{2d}) >$ που υπάρχει επειδή το G2 είναι συνεκτικό.

Άρα το $G1 \times G2$ είναι συνεκτικό.

(ii) Έστω $u = (g_{1i}, g_{2j}) \in V(G1 \times G2)$. Η κορυφή u ενώνεται με όλους τους γείτονές της στο γράφημα G1 (που είναι άρτιοι στο πλήθος αφού G1 Eulerian). Κάθε κορυφή του G2 είναι σαν να αντικαταστάθηκε από ένα αντίγραφο του G1, το αντίγραφο του G1 στο οποίο ανήκει η u έχει πάρει τη θέση κάποιας κορυφής του G2, έστω x αυτή. Η x είχε άρτιου πλήθους γείτονες στο G2, αφού είναι Eulerian, άρα τώρα η u έχει γείτονες τα αντίγραφα του εαυτού της, τα οποία υπάρχουν στα αντίγραφα του G1 που αντικατέστησαν τους γείτονες της κορυφής x στο G2. Συνεπώς, ο βαθμός της u είναι άρτιος. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω αν κάνουμε την εξής παρατήρηση:

$$d_{G1\times G2}\left((g_{1i}, g_{2j})\right) = d_{G1}(g_{1i}) + d_{G2}(g_{2j}) = άρτιος + άρτιος = άρτιος$$

Θα έπρεπε πρώτα να κοιτάξουμε τη συνεκτικότητα, ωστόσο, αφού τα G1, G2 είναι Eulerian είναι και συνεκτικά άρα λόγω του (i) και το $G1 \times G2$ είναι συνεκτικό.

Συνεπώς, το $G1 \times G2$ είναι Eulerian.

(iii) Το $G1 \times G2$ είναι Eulerian (άρα θα θεωρήσουμε ότι είναι συνεκτικό). Αν G1 μη συνεκτικό τότε – σκεπτόμενοι το $G1 \times G2$ ως γράφημα που προκύπτει από τις αντικατάστασεις κορυφών, που χρησιμοποιήσαμε σαν λογική και πριν – βλέπουμε ότι το $G1 \times G2$ θα είναι μη συνεκτικό. Το ίδιο ισχύει και για το G2 άρα τα G1, G2 είναι συνεκτικά γραφήματα.

$$d_{G1\times G2}\left(\left(g_{1i}, g_{2j}\right)\right) = d_{G1}(g_{1i}) + d_{G2}\left(g_{2j}\right), 1 \leq i \leq n_1 \ \kappa\alpha\iota \ 1 \leq j \leq n_2 \ (A)$$

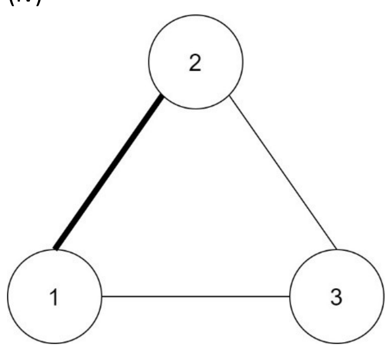
Πρέπει το $d_{G1}(g_{1i}) + d_{G2}\left(g_{2j}\right)$ να είναι άρτιος, επομένως, είτε $d_{G1}(g_{1i})$, $d_{G2}\left(g_{2j}\right)$ και τα δύο άρτιοι ή και τα δύο περιττοί.

Αν είναι όλα τα $d_{G1}(g_{1i})$, $d_{G2}\left(g_{2j}\right)$ άρτιοι τότε τα G1, G2 είναι Eulerian.

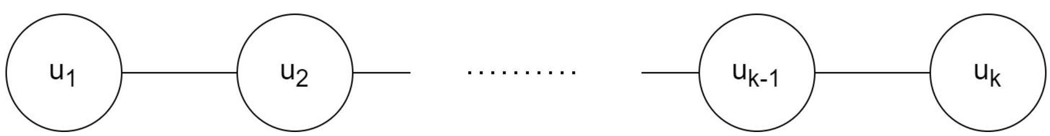
Έστω ότι υπάρχουν i,j τέτοια ώστε $d_{G1}(g_{1i})$, $d_{G2}\left(g_{2j}\right)$ και τα δύο περιττοί αριθμοί. Για αυτό το j έχουμε επίσης λόγω της (A) ότι $d_{G1}(g_{1k}) + d_{G2}\left(g_{2j}\right) = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma, \forall k \neq i$ επομένως και όλες οι κορυφές του G1 έχουν περιττό βαθμό. Με αντίστοιχο επιχείρημα συμπεραίνουμε ότι όλες οι κορυφές του G2 έχουν περιττό βαθμό. Σε ένα γράφημα πρέπει οι κορυφές περιττού βαθμού να είναι άρτιου πλήθους άρα τα G1, G2 έχουν άρτιο πλήθος κορυφών.

Τελικά, αν το $G1 \times G2$ είναι Eulerian τότε είτε τα G1 και G2 είναι και τα δύο Eulerian, είτε έχουν και τα δύο άρτιο πλήθος κορυφών.

(iv)

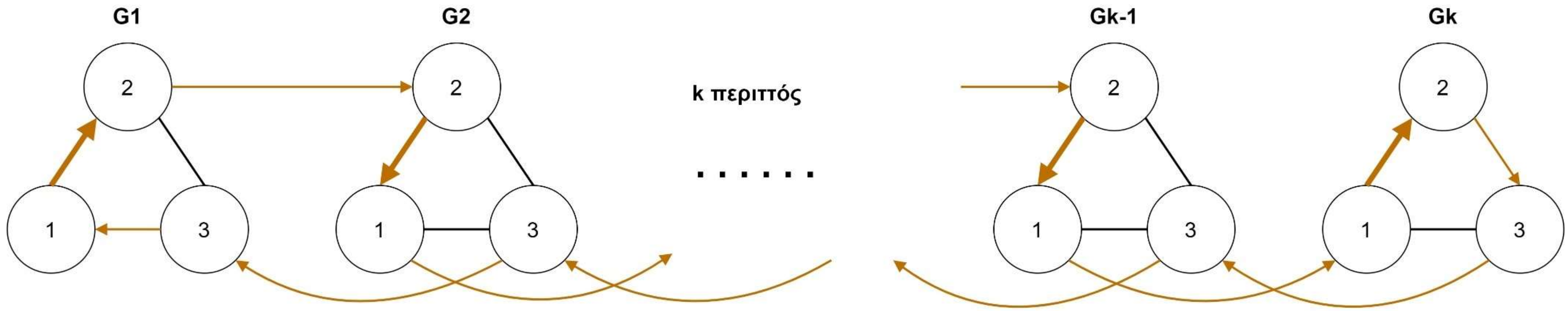


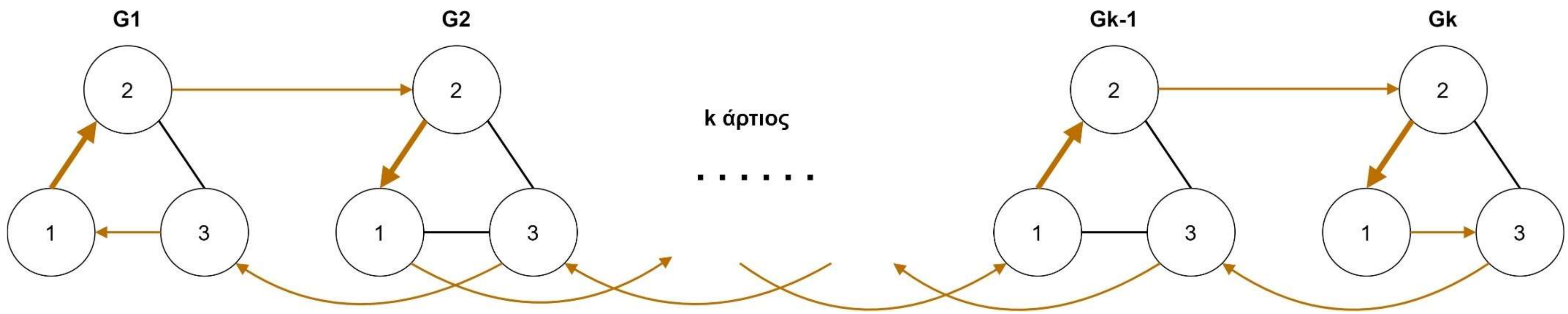
Αναπαριστούμε το γράφημα G όπως δίπλα. Ένας κύκλος έχει τουλάχιστον 3 κορυφές αφού το G είναι απλό γράφημα. Η ακμή από τη κορυφή 1 προς τη 2 είναι πιο παχιά γιατί συμβολίζει ότι αν ο κύκλος έχει περισσότερες κορυφές, έχουμε βάλει αυτό το κομμάτι του στο μονοπάτι μεταξύ των κορυφών 1 και 2. Ως κύκλο αναπαριστούμε τον Hamilton cycle του G.



Αναπάρασταση του Pk.

Για να φτιάξουμε το GxPk αντικαθιστούμε τους κόμβους ui με ένα αντίγραφο του G, έστω Gi. Κάθε κορυφή του Gi ενώνεται με ακμή με το αντίγραφό της που υπάρχει στο G(i+1). Αν περάσουμε από τις «παχιές» ακμές και τις κορυφές 3 των αντιγράφων εξασφαλίζουμε ότι έχουμε επισκεφτεί κάθε κορυφή του γραφήματος.


G1
G2
Gk-1
Gk
k περιττός
2
1
3

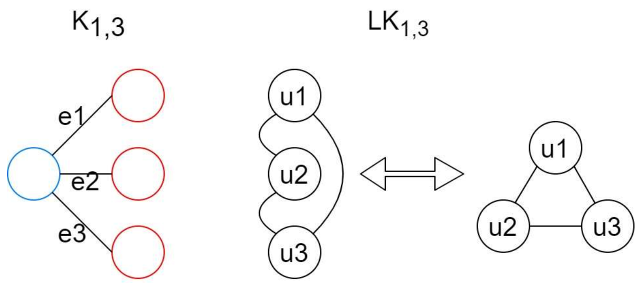

G1
G2
Gk-1
Gk
k άρτιος
2
1
3

Παραπάνω δείχνουμε σχηματικά πώς μπορούμε να σχηματίσουμε κύκλο στο GxPk ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος. Είναι κύκλος Hamilton.

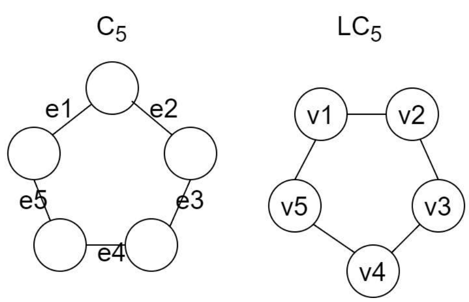
Τα βέλη στις ακμές υπάρχουν για να είναι πιο εύκολο να παρακολουθήσει κανείς τη πορεία το κύκλου στο σχήμα.

(9)

(i)



Το γραμμογράφημα του K1,3 είναι το C3 και το γραμμογράφημα του C5 είναι ο εαυτός του.



(ii)

Έστω n = |V(G)|, m = |E(G)|, nL = |V(LG)|, mL = |E(LG)|

nL = m, αφού οι κορυφές του LG αντιστοιχούν στις ακμές του G.

Αν μια κορυφή στο G έχει βαθμό 0 ή 1 τότε δεν μπορεί να υπάρχουν γειτονικές ακμές σε αυτήν άρα δεν συνεισφέρει στο σύνολο των ακμών στο LG.

Για μια τυχαία κορυφή, έστω την u, του G θα υπάρχουν d(u) κορυφές στο LG. Οι κορυφές αυτές θα είναι όλες ενωμένες μεταξύ τους άρα θα έχουν $\binom{d(u)}{2}$ ακμές στο LG. Αυτές οι ακμές δεν μπορεί να μετρηθούν πολλαπλές φορές λόγω κάποιας άλλης κορυφής του G, επειδή προκύπτουν μόνο και μόνο από το γεγονός ότι όλες αυτές οι d(u) κορυφές του LG ήταν γειτονικές ακμές στο G λόγω της κορυφής u του G. Το G είναι απλό άρα δεν έχουμε πολλαπλές ακμές.

$$mL = \sum_{u \epsilon V(G)} \binom{d_G(u)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{u \epsilon V(G)} d_G^2(u) - m$$

Έστω v η κορυφή του LG που αντιστοιχεί στην ακμή e = (x, y) του G τότε επειδή η e είναι γειτονική με όλες τις ακμές που προσπίπτουν στις x και y κορυφές έχουμε ότι

$$d_{LG}(v) = d_G(x) + d_G(y) - 2$$

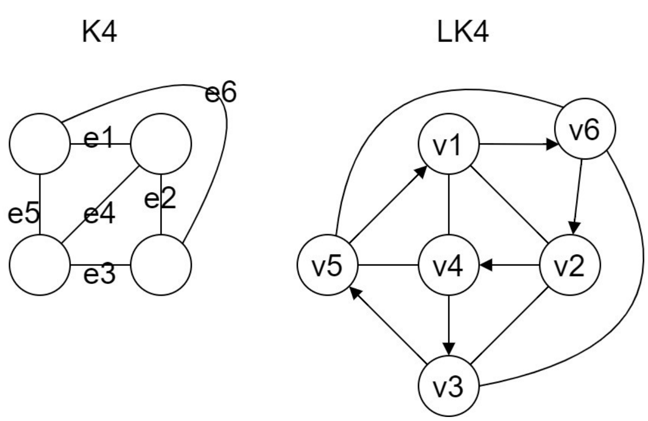
Για να βρούμε τους βαθμούς όλων των κορυφών του LG χρειάζεται να γνωρίζουμε ποιες ακμές υπάρχουν στο G. Ακόμα και αν γνωρίζουμε την ακολουθία βαθμών του G δεν μας αρκεί για να προσδιορίσουμε την ακολουθία βαθμών του LG αφού με την ίδια ακολουθία βαθμών μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά γραφήματα.

(iii)

Το G είναι Eulerian άρα υπάρχει περιήγηση Euler $\pi =< e_1, e_2, \dots, e_m >$ (αναπαριστούμε την περιήγηση ως ακολουθία γειτονικών ακμών. Η e1 είναι γειτονική της em, αφού έχουμε περιήγηση) που περιέχει όλες τις ακμές του G μία μόνο φορά (το G είναι Eulerian).

Στο LG οι γειτονικές ακμές του G είναι γειτονικές κορυφές, αν ονομάσουμε vi τη κορυφή του LG που αντιστοιχίζεται στην ακμή ei του G έχουμε ότι το $p =< v_1, v_2, \dots, v_m >$ (αναπαριστούμε το μονοπάτι ως ακολουθία γειτονικών κορυφών) είναι μονοπάτι στο LG (περιέχει όλες τις κορυφές του LG) ως αντιστοιχία στην περιήγηση Euler π που αναφέραμε προηγουμένως. Επίσης, οι v1 και vm είναι γειτονικές άρα το $c =< v_1, v_2, \dots, v_m, v_1 >$ είναι κύκλος στο γράφημα LG που περιέχει όλες του τις κορυφές. Άρα το LG Hamiltonian.

(iv)



Με τα βέλη δείχνουμε το Hamilton Cycle στο LK4. Το K4 έχει 4 κορυφές με βαθμό 3 (περιττός) άρα δεν είναι Eulerian.

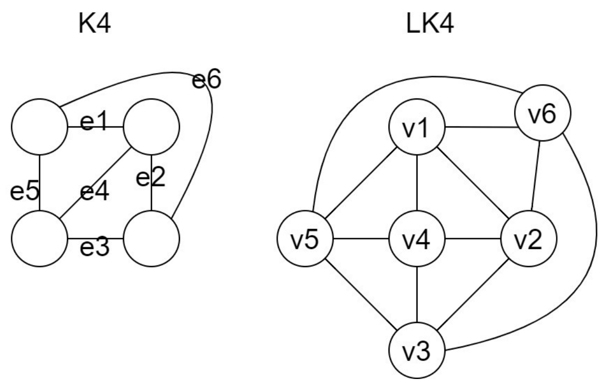
(v)

Έστω v η κορυφή του LG που αντιστοιχεί στην ακμή e = (x, y) του G τότε επειδή η e είναι γειτονική με όλες τις ακμές που προσπίπτουν στις x και y κορυφές έχουμε ότι

$$d_{LG}(v) = d_G(x) + d_G(y) - 2$$

Το G είναι Eulerian άρα $d_G(x), d_G(y)$ άρτιοι άρα $d_{LG}(v)$ άρτιος. Συνεπώς, το LG είναι Eulerian.

(vi)



Το K4 έχει 4 κορυφές βαθμού 3 άρα δεν είναι Eulerian. Το LK4 έχει 6 κορυφές βαθμού 4 άρα είναι Eulerian.

(vii)

Έστω $c =< u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1 >$ (αναπαριστούμε τον κύκλο βάζοντας συνεχόμενα γειτονικές κορυφές) ένας κύκλος Hamilton στο G.

Έστω E1 το σύνολο ακμών που υπάρχουν στον κύκλο Hamilton και E2 οι υπόλοιπες.

Φτιάχνουμε την εξής ακολουθία ακμών:

Πρώτα βάζουμε τις ακμές από το E2 που προσπίπτουν στην u1 και τις αφαιρούμε από το E2, έπειτα βάζουμε την ακμή (u1, u2) από το E1.

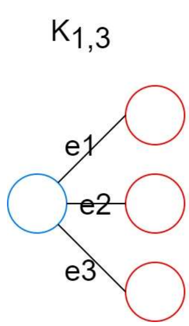
Συνεχίζουμε προσθέτοντας στην ακολουθία τις ακμές του E2 που προσπίπτουν στην u2 και τις αφαιρούμε από το E2. Προσθέτουμε την ακμή (u2, u3) από το E1.

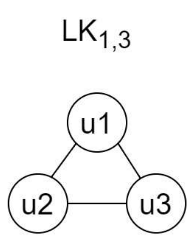
Συνεχίζουμε μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις ακμές του γραφήματος G.

Το αποτέλεσμα είναι μια ακολουθία ακμών του G στην οποία εμφανίζεται κάθε ακμή ακριβώς μία φορά, ενώ οι συνεχόμενες ακμές είναι σίγουρα γειτονικές. Επίσης, η τελευταία ακμή που θα μπει στην ακολουθία θα είναι η (un, u1) η οποία προσπίπτει στη u1 άρα είναι γειτονική της πρώτης ακμής της ακολουθίας.

Με το ίδιο επιχείρημα του ερωτήματος (iii) αυτή η ακολουθία ακμών στο G μεταφράζεται σε κύκλο που περιέχει όλες τις κορυφές στο γράφημα LG. Επομένως, το LG είναι Hamiltonian.

(viii)





Το K1,3 δεν είναι Hamiltonian, ενώ το LK1,3 είναι.

(10)

(i)

Αν στο G υπάρχει κάποια κορυφή με βαθμό 1, έστω x, και έστω y, z δύο άλλες κορυφές του γραφήματος τότε δεν υπάρχει μονοπάτι Hamilton μεταξύ των y, z. Άρα δεν υπάρχει τέτοια κορυφή.

Έστω ότι υπάρχει στο G η κορυφή x με d(x) = 2 και έστω y, z οι γείτονες της x. Έστω ότι υπάρχει μονοπάτι Hamilton από το y στο z τότε αυτό θα είναι της μορφής $\pi =< y, \dots, x, \dots z >$ (η αναπαράσταση του μονοπατιού γίνεται βάζοντας συνεχόμενα γειτονικές κορυφές). Το π περιέχει τις y, z ως άκρα του, την x κάπου στο ενδιάμεσο και όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος. Κάθε κορυφή εμφανίζεται ακριβώς μια φορά στο π. Η x έχει μοναδικούς γείτονές της τους y, z άρα στο μονοπάτι π κάποιος από αυτούς αναγκαστικά θα έχει διπλή εμφάνιση, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Άρα δεν υπάρχει μονοπάτι Hamilton από τη y στη z.

Συνεπώς, κάθε κορυφή έχει βαθμό 3 ή μεγαλύτερο.

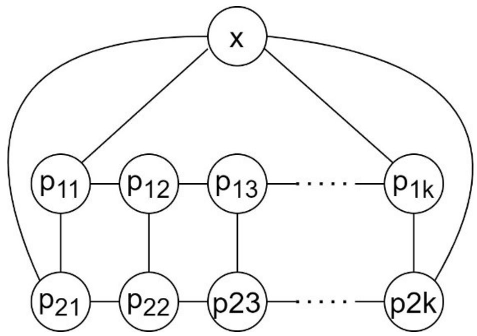
Έστω n = |V(G)| και e = |E(G)|.

Έχουμε $2e = \sum_{u \in V(G)} d(u) \geq 3n$ (ή $3n+1, \alpha\nu\ n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma$) άρα $e \geq \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$.

(ii)

Θα δείξουμε ότι όντως γίνεται να κατασκευάσουμε ένα Hamilton – connected γράφημα n >= 4 κορυφών με $e = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ ακμές.

Αν n = 2k + 1:

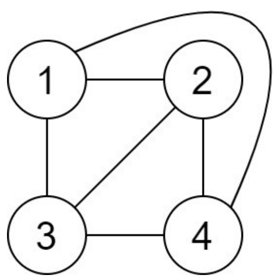


Το διπλανό γράφημα κατασκευάζεται παίρνοντας δύο μονοπάτια k κορυφών, τοποθετώντας τα απέναντι και ενώνοντας τις αντίστοιχες κορυφές. Επίσης ενώνουμε την κορυφή x που δεν υπάρχει σε κάποιο μονοπάτι με τα 4 άκρα των μονοπατιών. Το γράφημα αυτό έχει (k – 1) + (k – 1) + k + 4 = 3k + 2 ακμές.

$\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3(2k+1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k+4}{2} \right\rfloor = 3k + 2$ άρα ικανοποιείται η σχέση που θέλουμε.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε οπτικά ότι υπάρχει μονοπάτι Hamilton με άκρα 2 οποιεσδήποτε κορυφές του παραπάνω γραφήματος.

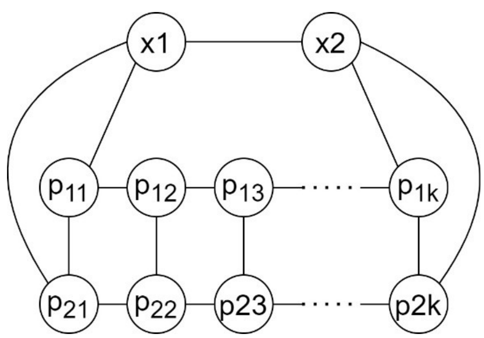
Αν n = 2k + 2:



Αν k = 1: n = 4 έχω e = $\left\lfloor \frac{12+1}{2} \right\rfloor$= 6 ακμές. Δηλαδή, το πλήρες γράφημα 4 κορυφών.

Βλέπουμε ότι μπορούμε να πάμε με μονοπάτι που να περιέχει όλες τις κορυφές από οποιαδήποτε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

Αν k > 1:



Το διπλανό γράφημα κατασκευάζεται παίρνοντας δύο μονοπάτια k κορυφών, τοποθετώντας τα απέναντι και ενώνοντας τις αντίστοιχες κορυφές, Επίσης ενώνουμε τις κορυφή x1 και x2, που δεν υπάρχουν σε κάποιο μονοπάτι, με τα αριστερά και τα δεξιά, αντίστοιχα, άκρα των μονοπατιών. Το γράφημα αυτό έχει (k – 1) + (k – 1) + k + 4 + 1 = 3k + 3 ακμές.

$\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3(2k+2)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k+7}{2} \right\rfloor = 3k + 3$ άρα ικανοποιείται η σχέση που θέλουμε.

Μπορούμε πάλι οπτικά να επιβεβαιώσουμε ότι σε αυτό το γράφημα υπάρχουν μονοπάτια Hamilton για κάθε περίπτωση επιλογής 2 κορυφών.