

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Πέμπτη 5 Μαΐου 2022 (σε μορφή pdf μέσω του helios). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλευέστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Εξετάστε αν για κάθε απλό συνεκτικό d -κανονικό γράφημα G , κάθε κορυφή είναι κεντρική και απόκεντρη. Αν ισχύει αποδείξτε το, αλλιώς δώστε ένα αντιπαράδειγμα.
- (2) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 5$ κορυφές, διάμετρο 2 και μια κορυφή τομής. Δείξτε ότι το συμπληρωματικό του γράφημα G έχει μεμονωμένη κορυφή.
- (3) Έστω ένα απλό συνεκτικό γράφημα G με $\text{diam}(G) \geq 2$. Δείξτε ότι οι απόκεντρες κορυφές του G δεν μπορεί να επάγουν κλίκα στο G .
- (4) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $\text{diam}(G) > 3$. Τότε $\text{diam}(\bar{G}) < 3$, όπου \bar{G} είναι το συμπληρωματικό γράφημα του G .
- (5) Δείξτε ότι αν το απλό συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει διάμετρο ίση με 2 και μέγιστο βαθμό $\Delta(G) = n - 2$, τότε $|E(G)| \geq 2n - 4$.
- (6) Έστω απλό k -συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.
 - i. Δείξτε ότι αν $\delta(G) \geq n - 2$ τότε $k = \delta(G)$.
 - ii. Βρείτε απλό γράφημα G με $\delta(G) = n - 3$ και $k < \delta(G)$.
- (7) Έστω απλό λ -πλευρικά συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.
 - i. Δείξτε ότι αν $\delta(G) \geq n/2$ τότε $\lambda = \delta(G)$.
 - ii. Βρείτε απλό γράφημα G με $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ και $\lambda < \delta(G)$.
- (8) Δείξτε ότι αν το G είναι απλό γράφημα με n κορυφές και $\delta(G) \geq (n + k - 2)/2$ με $k \geq 2$, τότε το G είναι τουλάχιστον k -συνεκτικό.
- (9) Για κάθε $n \geq 5$ βρείτε ένα απλό 2-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, διάμετρο 2 και $e = 2n - 5$ ακμές.
- (10) Δείξτε ότι σε ένα απλό γράφημα G με $n \geq 4$ κορυφές και περισσότερες από $3(n - 1)/2$ ακμές υπάρχει ένα ζεύγος κορυφών που ενώνεται με τρία εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια. Περιγράψτε ένα ακρότατο γράφημα με ακριβώς $\lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor$ ακμές, δηλαδή ένα γράφημα με n κορυφές και $\lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor$ ακμές στο οποίο δεν υπάρχει ζεύγος κορυφών που ενώνεται με τρία ξένα μονοπάτια, ενώ αν προστεθεί οποιαδήποτε ακμή στο γράφημα τότε υπάρχει τέτοιο ζεύγος κορυφών.

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής “ΕπίθετοΌνομα” όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο helios.ntua.gr
