ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων

Θεωρία Γραφημάτων

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ

$6^{ο}$ ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΗΜΜΥ

03119005

(1)

Χρησιμοποιούμε λίστες γειτνίασης της εξής μορφής:

κορυφές	γείτονες					
1	2	3	4	7	10	13
2	1	3	5	8	11	13
3	1	2	4	6	9	12
4	1	3	5	6	7	10
5	2	4	6	8	11	13
6	3	4	5	7	9	12
7	1	4	6	8	9	10
8	2	5	7	9	11	13
9	3	6	7	8	10	12
10	1	4	7	9	11	12
11	2	5	8	10	12	13
12	3	6	9	10	11	13
13	1	2	5	8	11	12

Αντί να γράφουμε u1, ..., u13 στις κορυφές γράφουμε σκέτο 1, ..., 13.

Θα αναπαριστούμε με έγχρωμο τις κορυφές του συνόλου V1 και οι υπόλοιπες ανήκουν στο V2.

Σε κάθε βήμα του κατασκευαστικού αλγορίθμου μεταθέτουμε την κορυφή η οποία έχει:

- λιγότερους από 3 γείτονες
- τον μικρότερο αριθμό γειτόνων
- μέγιστη τιμή δείκτη, δηλαδή, αν πρέπει να διαλέξουμε μεταξύ της μετάθεσης της κορυφής 2 και της 5 θα μεταθέσουμε την 5.

1)

1						13
2						13
3						
4						
5						13
6						
7						
8						13
9						
10						
11						13
12						13
13	1	2	5	8	11	12

|E(H)| = 6 και μεταθέτουμε την 12 (dH(12) = 1).

2)

1						13
2						13
3						12
4						
5						13
6						12
7						
8						13
9						12
10						12
11					12	13
12	3	6	9	10	11	
13	1	2	5	8	11	

|E(H)| = 10 και μεταθέτουμε την 10 (dH(10) = 1).

3)

1					10	13
2						13
3						12
4						10
5						13
6						12
7						10
8						13
9					10	12
10	1	4	7	9	11	
11				10	12	13
12	3	6	9		11	
13	1	2	5	8	11	

|E(H)| = 14 και μεταθέτουμε την 8 (dH(8) = 1).

4)

1					10	13
2				8		13
3						12
4						10
5				8		13
6						12
7				8		10
8	2	5	7	9	11	
9				8	10	12
10	1	4	7	9	11	
11			8	10	12	13
12	3	6	9		11	
13	1	2	5		11	

|E(H)| = 18 και μεταθέτουμε την 6 (dH(6) = 1).

5)

1					10	13
2				8		13
3				6		12
4				6		10
5			6	8		13
6	3	4	5	7	9	
7			6	8		10
8	2	5	7	9	11	
9		6		8	10	12
10	1	4	7	9	11	
11			8	10	12	13
12	3		9		11	
13	1	2	5		11	

|E(H)| = 22.

Έχω $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 6 \cdot 13 = 2 \cdot 39$ άρα |E(G)| = 39 και θέλουμε στο H να έχουμε τουλάχιστον 39/2 = 19.5 ακμές, δηλαδή, $|E(H)| \geq 20$.

Συνεπώς, το γράφημα στο οποίο φτάσαμε σε αυτό το βήμα αρκεί.

Δηλαδή το γράφημα με πίνακα γειτνίασης:

κορυφές	γείτονες					
1					10	13
2				8		13
3				6		12
4				6		10
5			6	8		13
6	3	4	5	7	9	
7			6	8		10
8	2	5	7	9	11	
9		6		8	10	12
10	1	4	7	9	11	
11			8	10	12	13
12	3		9		11	
13	1	2	5		11	

είναι διμερές με διαμερίσεις V1, V2 του V(G) όπου:

V1 = { u13, u12, u10, u8, u6}, V2 = {u1, u2, u3, u4, u5, u7, u9, u11}.

(2)

i. (7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)

Έχω 7 κορυφές και ασχολούμαστε με απλά γραφήματα. Δεν γίνεται κάποια κορυφή να έχει βαθμό 7. Η ακολουθία δεν είναι γραφική.

ii. (6, 6, 5, 4, 3, 3, 2)

Έχω 3 κορυφές με περιττό βαθμό. Η ακολουθία δεν είναι γραφική

iii. (2, 2, 0 , 0)

Έχω 4 κορυφές εκ των οποίων οι 2 δεν έχουν γείτονες. Μένουν 2 κορυφές που μπορεί να έχουν γείτονες και κάθε μία έχει 2 ακριβώς γείτονες. Αφού το γράφημα είναι απλό αυτή η ακολουθία δεν είναι γραφική.

iv. (6, 6, 5, 5, 5, 3, 2)

Θα κάνουμε έλεγχο χρησιμοποιώντας τις ανηγμένες ακολουθίας.

Ο κανόνας είναι:

$$
\begin{aligned}
&\alpha\nu\ s = (d1 \geq d2 \geq \cdots \geq dn) \\
&\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \alpha\kappa o\lambda o\upsilon\theta\acute{\iota}\alpha\ (d2-1, \dots, d(d1+1)-1, d(d1+2), \dots, dn)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta \\
&\alpha\nu\eta\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \alpha\kappa o\lambda o\upsilon\theta\acute{\iota}\alpha\ \tau\eta\varsigma\ s.
\end{aligned}
$$

	ονομασία κορυφών							d1+1
	1	2	3	4	5	6	7	
s1	6	6	5	5	5	3	2	7
s2 = s1’	5	4	4	4	2	1		6
s3 = s2’	3	3	3	1	0			4
s4 = s3’	2	2	0	0				

Η s4 δεν είναι γραφική άρα η s1 δεν είναι γραφική.

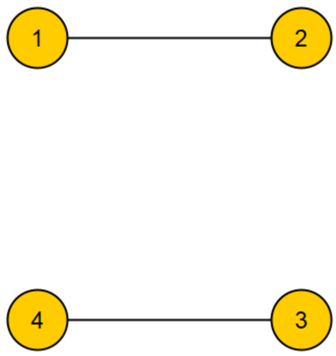
v. (5, 5, 4, 4, 3, 3, 2)

	ονομασία κορυφών							d1+1
	1	2	3	4	5	6	7	
s1	5	5	4	4	3	3	2	6
s2 = s1’	4	3	3	2	2	2		5
s2’	2	2	1	1	2			
s3 = sorted(s2’)	2	2	2	1	1			3
s4 = s3’	1	1	1	1				

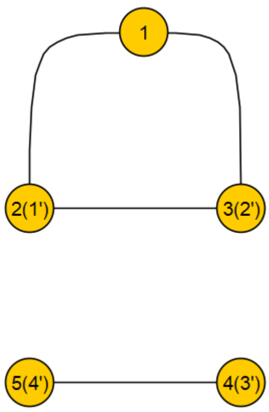
Η s4 είναι γραφική άρα η s1 είναι γραφική. Ακολουθώντας αντίστροφη πορεία στον παραπάνω πίνακα μπορούμε αρχίζοντας από την s4 να κατασκευάσουμε γράφημα που υλοποιεί την s1.

X(Y’) = η κορυφή στο τωρινό βήμα έχει όνομα X και στο προηγούμενο είχε Y.

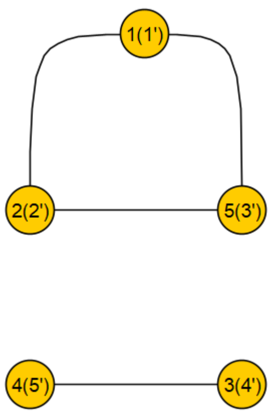
Για την s4:



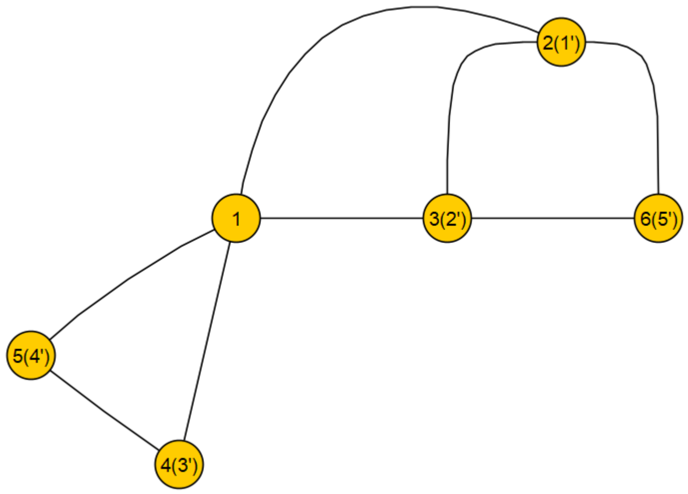
Για την s3:



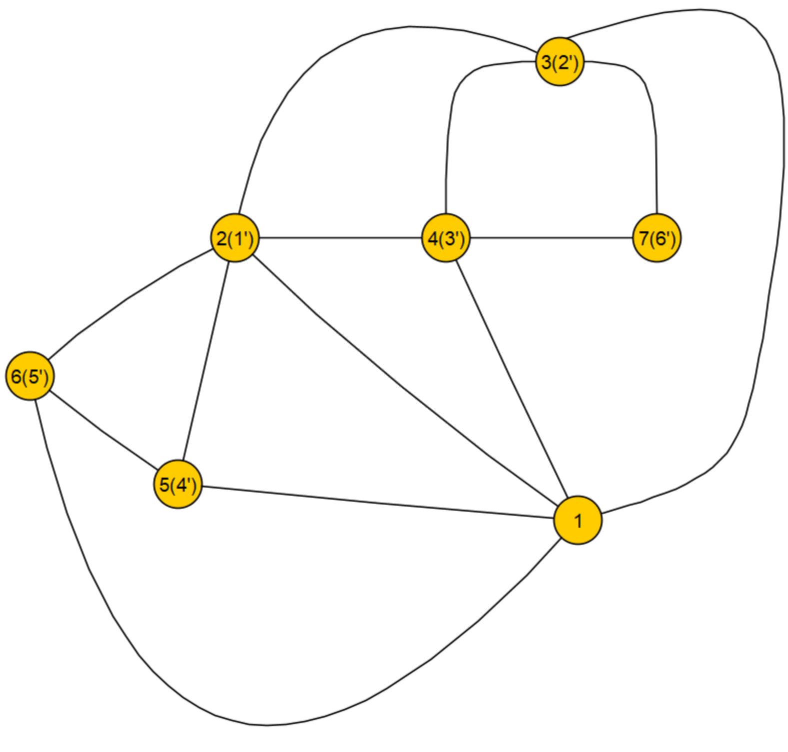
Για την s2’:



Για την s1':



Για την s1:



vi. (5, 5, 4, 4, 3, 3, 2) και το γράφημα να είναι διμερές.

Αν οι 2 κορυφές έστω u, v με βαθμό 5 είναι στο ίδιο σύνολο ανεξάρτητων κορυφών τότε δεν συνδέονται μεταξύ τους και αφού μένουν 5 άλλες κορυφές εκτός από αυτές (όλες οι κορυφές είναι 7) έχουμε ότι οι u, v συνδέονται με όλες τις άλλες με ακμές και επομένως πρέπει όλες οι άλλες να ανήκουν στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο (αυτό που δεν περιέχει τις u, v) έστω Y. Συνεπώς, αν

	όνομα κορυφής						
	1	2	3	4	5	6	7
βαθμοί	5	5	4	4	3	3	2

Έχω X = {1, 2} και Y = {3, 4, 5, 6, 7} τα 2 ανεξάρτητα σύνολα.

Πρέπει $\sum_{v \in X} d_G(v) = \sum_{v \in Y} d_G(v)$ $, \delta\eta\lambda\alpha\delta ή,$ $5 + 5 = 4 + 4 + 3 + 3 + 2$ που δεν ισχύει.

Άρα οι u, v δεν μπορεί να είναι στο ίδιο σύνολο ανεξάρτητων κορυφών.

Αν οι u, v ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα. Έστω η u ανήκει στο X και η v ανήκει στο Y. Τότε για να έχουν βαθμό 5 και οι 2 πρέπει |X| >= 5 και |Y| >= 5 άρα |V(G)| >= 10 το οποίο, επίσης, δεν ισχύει.

Άρα δεν υπάρχει διμερές γράφημα με αυτήν την ακολουθία βαθμών.

vii. (d1<=d2<=...<=d2k) με d2i = d(2i-1) = i για 1 <= i <= k.

Θα δείξουμε ότι είναι γραφική αυτή η ακολουθία και θα κάνω μια κατασκευαστική απόδειξη.

s = (n, n, n – 1, n – 1, ..., 2, 2, 1, 1).

Θεωρώ n + 1 κορυφές με ονόματα n, n – 1, n – 2, ..., 2, 1, 0.

Έχουμε έναν δείκτη i που αρχίζει από i = 1 και σε κάθε επανάληψη αυξάνει:

Σε κάθε επανάληψη εξαιρούμε από τη παρακάτω διαδικασία κορυφές με όνομα μικρότερο του i και κάνουμε το εξής:

συνδέουμε τη κορυφή n + 1 – i με όλες τις κορυφές που το όνομά τους είναι μικρότερο από αυτή και δεν τις έχουμε εξαιρέσει.

Στο βήμα i = L έχουμε ότι η κορυφή n + 1 – L έχει βαθμό L – 1 από τις κορυφές με όνομα μεγαλύτερο του δικού της (n, n – 1, ..., n + 2 – L) που τις έχει αποκτήσει από προηγούμενα βήματα και n – 2L + 1 από κορυφές με ονόματα μικρότερα του δικού της με τις οποίες συνδέθηκε μόλις τώρα (n – L, ..., L). Άρα έχει βαθμό L – 1 + n – 2L + 1 = n – L (1).

Η κορυφή n + 1 – L θα έχει αυτόν τον βαθμό στο τέλος των επαναλήψεων αφού δεν πρόκειται να αποκτήσει γείτονες από επόμενες επαναλήψεις.

Η κορυφή L θα εξαιρεθεί στην επόμενη επανάληψη άρα ο βαθμός που έχει τώρα θα είναι και ο βαθμός της στο τέλος. Μέχρι στιγμής έχει αποκτήσει L γείτονες (έναν από κάθε επανάληψη). Επίσης όλες οι κορυφές (n – L, ..., L) έχουν μέχρι στιγμής L γείτονες (2).

Η τελευταία επανάληψη που εκτελούμε είναι για i = floor(n/2).

Αν n είναι άρτιος έχουμε: n – floor(n/2) = floor(n/2) = n/2

όνομα κορυφής	n	n – 1	...	n + 1 – floor(n/2)	n – floor(n/2)	...	2	1	0
Βαθμός κορυφής	n – 1	n – 2	...	n – floor(n/2) από (1)	n/2 = n – floor(n/2) από (2)	...	2	1	0

Θεωρούμε ως κορυφή middle = n + 1 – floor(n/2) = n/2 + 1

Αν n περιττός έχουμε: n – floor(n/2) = floor(n/2) + 1

όνομα κορυφής	n	n – 1	...	n + 1 – floor(n/2)	n – floor(n/2)	floor(n/2)	...	2	1
Βαθμός κορυφής	n – 1	n – 2	...	n – floor(n/2) από (1)	floor(n/2) από (2)	floor(n/2) από (2)	...	2	1

Θεωρούμε ως κορυφή middle = n – floor(n/2) = floor(n/2) + 1

Όπως και να έχει έχουμε κατασκευάσει ένα γράφημα με n κορυφές
(n, n – 1, ..., middle, middle – 1, ..., 2, 1) που έχει ακολουθία βαθμών
(n – 1, n – 2, ..., middle – 1, middle – 1, ..., 2, 1).

Παίρνουμε 2 αντίγραφα αυτού του γραφήματος και ενώνουμε τις κορυφές με ίδιο όνομα μεταξύ τους (και με καμία άλλη κορυφή του άλλου αντίγραφου) μέχρι και την κορυφή middle. Το γράφημα αυτό έχει ως ακολουθία βαθμών την αρχική s.

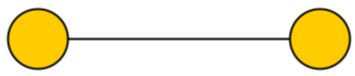
(3)

Έχουμε το σύνολο βαθμών S = {a1, a2, a3, a4, a5} με a1 = 3, a2 = 4, a3 = 5, a4 = 8, a5 = 10 και θέλουμε συνεκτικό γράφημα με a5 + 1 = 11 κορυφές.

Ακολουθώντας την κατασκευαστική απόδειξη του θεωρήματος Kapoor – Polimeni – Wall από τις διαφάνειες έχουμε:

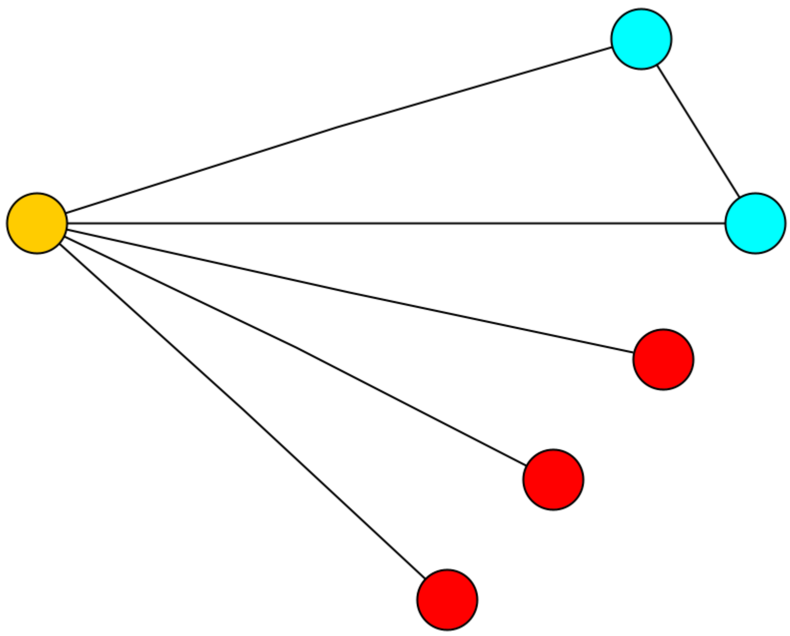
{3, 4, 5, 8, 10} → {1, 2, 5} → {1}

Για το σύνολο βαθμών {1} έχουμε το K2 γράφημα:



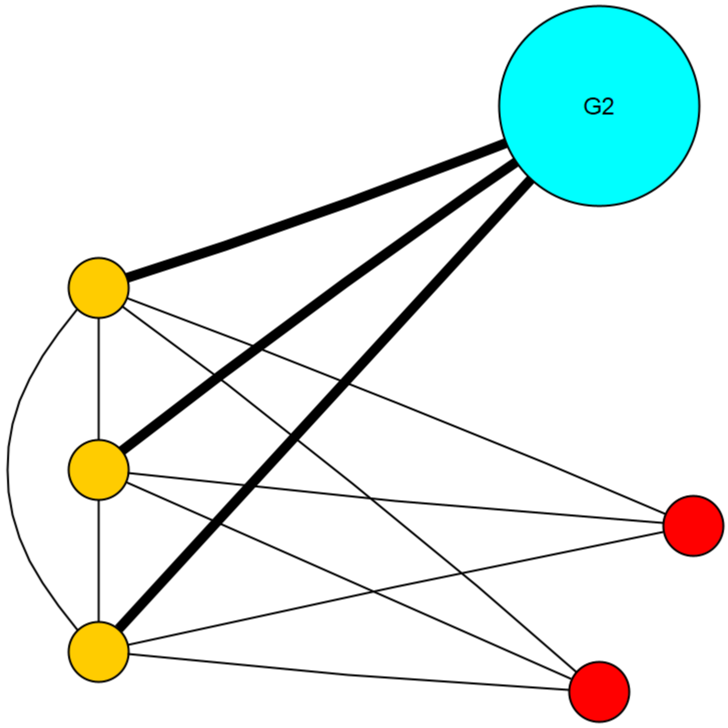
Το ονομάζουμε G1, |V(G1)| = 2.

Για το σύνολο βαθμών {1, 2, 5}: Συνδέουμε το K1 (γράφημα με 1 μόνο κορυφή) με το G1 και με το A3 (γράφημα 3 ανεξάρτητων κορυφών).



Ονομάζουμε το γράφημα αυτό G2, |V(G2)| = 6.

Για το σύνολο βαθμών {3, 4, 5, 8, 10}: Συνδέουμε το K3 (πλήρες γράφημα 3 κορυφών) με το G2 και με το A2 (γράφημα 2 ανεξάρτητων κορυφών).



Έστω G3 αυτό το γράφημα. Το γράφημα αυτό έχει (με βάση και την απόδειξη στις διαφάνειες) σύνολο βαθμών
{3, 4, 5, 8, 10} και 2 + 3 + 6 = 11 (= 10 + 1) κορυφές.

Επίσης το γράφημα είναι συνεκτικό αφού κάθε κορυφή του Κ3 ενώνεται με κάθε κορυφή του G2 και με κάθε κορυφή του Α2. Επομένως, μπορώ να βρω μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε u, v που ανήκουν στο V(G3).

Κατασκευάσαμε το ζητούμενο γράφημα.

(4)

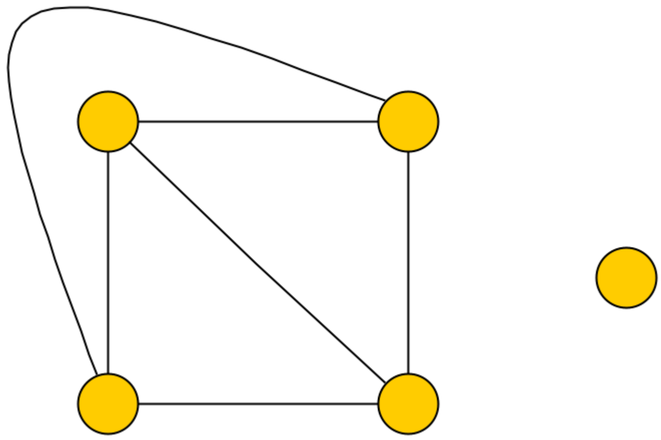
i. Έστω G το αρχικό γράφημα και x = Δ(G) – δ(G). Σε κάθε επανάληψη προσθέτουμε ακμές μεταξύ αντίστοιχων κορυφών σε διαφορετικά αντίγραφα άρα το δ(G) αυξάνεται κατά 1 σε κάθε επανάληψη (αφού ο μόνος νέος γείτονας μιας κορυφής βαθμού δ(G) είναι ο άλλος της εαυτός). Άρα χρειαζόμαστε x επαναλήψεις.

ii. Αν το Δ(G) είναι περιττός αριθμός και το γράφημα έχει περιττό αριθμό κορυφών n τότε όχι.

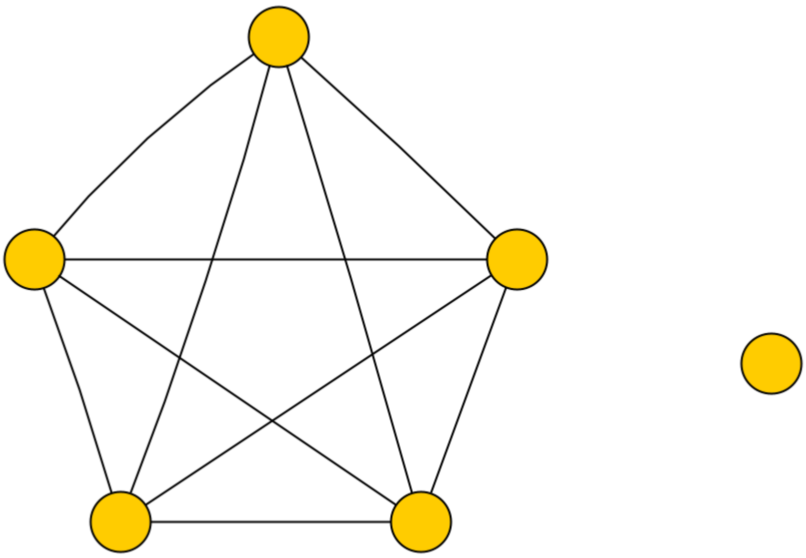
Αν το n*Δ(G) είναι άρτιος τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει γράφημα που δεν μπορεί να γίνει Δ(G) – κανονικό με την προσθήκη ακμών. Έστω γράφημα με k + 2 με k >= 3 κορυφές για κάποιο k και το πλήρες γράφημα που αποτελείται από k + 1 κορυφές και μία ανεξάρτητη κορυφή, τότε Δ(G) = k και για να αποκτήσει η ανεξάρτητη κορυφή βαθμό Δ(G) θα πρέπει να προστεθεί ακμή από αυτή προς κάποια κορυφή του πλήρους γραφήματος πράγμα που αλλάζει το Δ(G).

Παραδείγματα:

Δ(G) = 3



Δ(G) = 4



(5)

Το γράφημα G είναι διμερές r – κανονικό με r >= 2. Έστω X και Y τα 2 σύνολα ανεξάρτητων κορυφών και έστω e = (u, v) με $u \in X$ και $v \in Y$ μια γέφυρα του G. Αφού είναι γέφυρα το $G \setminus e$ είναι μη συνεκτικό και δεν υπάρχει άλλος περίπατος από τη u στη v γιατί τότε κάθε μονοπάτι που είχε μέσα την e θα έβαζε στη θέση της αυτόν τον περίπατο και το γράφημα θα παρέμενε συνεκτικό. Το $G \setminus e$ έχει λοιπόν μια συνιστώσα H με x να ανήκει στο V(H) της οποίας οι κορυφές δεν ενώνονται με άλλες κορυφές του γραφήματος εκτός από αυτές της H. H συνιστώσα αυτή είναι διμερής (αφού το G ήταν διμερές) με διαμερίσεις κορυφών X1, Y1 και $u \in X1$ στο Y1 ανήκουν όλοι οι γείτονες της u (r – 1 $\neq$ 0) και όλες οι υπόλοιπες κορυφές έχουν βαθμό r.

Έχω για την H: $\sum_{v \epsilon X1} d_H(v) = \sum_{v \epsilon Y1} d_H(v)$ ή r – 1 + r*(|X1| – 1) = r*|Y1|

Άρα r*(|X1| – |Y1|) = 1 που δεν γίνεται για r >= 2. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο άρα δεν υπάρχει ακμή που είναι γέφυρα.

(6)

Δείξτε ότι αν το G είναι απλό και δεν περιέχει τρίγωνο τότε $\Delta(G) \leq \beta_0(G)$.

Για την απόδειξη αυτού θα δείξουμε ότι αν $\Delta(G) \geq \beta_0(G) + 1$ τότε το απλό γράφημα G περιέχει τρίγωνο.

Έστω x η κορυφή του G η οποία έχει βαθμό d(x) = Δ(G). Αυτή συνδέεται με $\beta_0(G) + 1$ άλλες κορυφές του γραφήματος, οι οποίες δεν μπορεί να είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους γιατί τότε θα είχαμε σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους κορυφών με πλήθος μεγαλύτερο του μεγίστου πλήθους ανεξάρτητων κορυφών $\beta_0(G)$ που είναι άτοπο. Έστω y, z 2 γείτονες του x που ενώνονται μεταξύ τους. Οι x, y, z ανήκουν σε τρίγωνο.

$$2|E(G)| = \sum_{u \in V(G)} d_G(u) \leq \sum_{u \in V(G)} \Delta(G) = |V(G)| \cdot \Delta(G) \leq |V(G)| \cdot \beta_0(G) \ \acute{\alpha}\rho\alpha$$
$$|E(G)| \leq \frac{|V(G)| \cdot \beta_0(G)}{2}.$$

(7)

(i) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο L.

Επαγωγική Βάση:

Για L = 1 έχουμε $A^L = A$ και προφανώς το A[i, j] δείχνει το πλήθος των περιπάτων μήκους 1 μεταξύ των κορυφών ui και uj (0 αν δεν υπάρχει η μεταξύ τους ακμή, 1 αν υπάρχει).

Επαγωγική Υπόθεση:

Έστω ότι ισχύει για L – 1, δηλαδή το A^{L-1}[i, j] είναι το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους L – 1 μεταξύ ui, uj.

Επαγωγικό Βήμα: Έχουμε ότι $A^L[i,j] = \sum_{k=1}^{|V(G)|} A^{L-1}[i,k]A[k,j]$.

Κάθε περίπατος μήκους L από το ui έως το uj είναι περίπατος από το ui στο uk μήκους L – 1 για κάποιο k συν την ακμή (uk, uj).

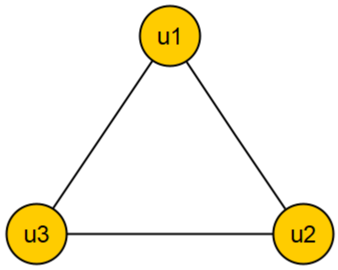
Επομένως, ο αριθμός $A^{L-1}[i,k]A[k,j]$ μας δίνει όλους τους περίπατους μήκους L από το ui στο uj, χρησιμοποιώντας την Επαγωγική Υπόθεση, που έχουν ως προτελευταία κορυφή το uk και αθροίζοντας για όλα τα διαφορετικά k παίρνουμε το σύνολο των διαφορετικών περιπάτων μήκους L από το ui στο uj.

(ii)

$Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ με βάση το 1° ερώτημα το στοιχείο Y[i, j] δίνει το σύνολο των διαφορετικών μεταξύ τους περιπάτων από τη ui στη uj μήκους length = 1, 2, ..., n – 1. Έστω ότι για κάποιο μη διαγώνιο στοιχείο έχω Y[i, j] = 0 τότε δεν υπάρχει περίπατος με μήκος από 1 έως n – 1. Τα μονοπάτια είναι περίπατοι και τα μονοπάτια (επειδή δεν έχουν επαναλαμβανόμενες κορυφές) έχουν μήκος το πολύ n – 1. Συνεπώς, στο γράφημα G υπάρχουν 2 κορυφές, οι ui και uj, οι οποίες δεν συνδέονται με μονοπάτι. Το G δεν είναι συνεκτικό.

(iii)

Το στοιχείο $A^3[i, i]$ δίνει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους 3 που αρχίζουν και λήγουν στο ui. Δεν έχουμε βρόγχους στο G άρα όλες οι περιηγήσεις μήκους 3 είναι αναγκαστικά τρίγωνα. Έστω το διπλανό τρίγωνο. Αυτό θα μετρηθεί στα στοιχεία της διαγωνίου του A^3 ακριβώς 6 φορές. Το μετράμε 2 φορές για κάθε κορυφή και έχουμε 3 κορυφές που περιέχονται σε αυτό το τρίγωνο. Ο λόγος που το μετράμε 2 φορές για κάθε κορυφή είναι – παίρνοντας για παράδειγμα την κορυφή u1 – ότι μετράμε τη περιήγηση π11 = <u1, u2, u3, u1> και την περιήγηση π12 = <u1, u3, u2, u1>.



Συνεπώς, επειδή κάθε τρίγωνο μετριέται ακριβώς 6 φορές στα στοιχεία της διαγωνίου του A^3, το άθροισμα αυτών δίνει το πλήθος των τριγώνων επί 6.

Με άλλα λόγια, το πλήθος των τριγώνων στο G ισούται με $Tr(A^3)/6$.

(8)

Στη άσκηση αυτή θα βασιστούμε σε αυτή τη διαφάνεια του μαθήματος:

- Η ένωση, η σύνδεση και το γινόμενο γραφημάτων είναι πράξεις προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές

$$\underset{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}{\text{προσεταιριστικές} \downarrow} \qquad \text{και} \qquad \underset{a \cdot b = b \cdot a}{\text{αντιμεταθετικές} \downarrow}$$

- $kG \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \cup G \cup \cdots \cup G}_{k \text{ φορές}}$
- $G^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G * G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}$
- $G^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{k \text{ φορές}}$

Σημείωση: Για τις πράξεις της ένωσης και της σύνδεσης υποθέτουμε ότι συμμετέχουν k διακεκριμένα ισομορφικά με το G γραφήματα.

(i)

Η ένωση γραφημάτων έχει όλες τις κορυφές και όλες τις ακμές των επιμέρους γραφημάτων που ενώνονται και τίποτα άλλο.

Άρα |V(kG)| = k|V(G)|=k*n και |E(kG)| = k|E(G)| = k*e

Η ακολουθία βαθμών είναι $s = \{a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq \cdots \geq a_{(n-1)\cdot k+1} \geq \cdots \geq a_{n \cdot k}\}$ όπου $\alpha_{(i-1)\cdot k+1} = a_{(i-1)\cdot k+2} = \cdots = a_{i \cdot k} = d_i \; για\; κάθε\; i = 1, 2, \ldots, n$

(ii)

Έχω $G * H = \{V(G)UV(H), E(G)UE(H)U\{(u, v): u \in V(G), v \in V(H)\}\}$

Για το $G^{(1)}$ έχω $|V(G^{(1)})| = V_1 = n$ και $|E(G^{(1)})| = E_1 = e$

$G^{(k)} = G * G^{(k-1)}$, άρα $V_k = V_1 + V_{k-1}$ και $E = E_1 + E_{k-1} + V_1 \cdot V_{k-1}$

$$\begin{cases} V_k = V_1 + V_{k-1} \\ V_{k-1} = V_1 + V_{k-2} \\ \ldots \\ V_2 = V_1 + V_1 \\ V_1 = V_1 \end{cases} \Rightarrow (πρόσθεση\; κατά\; μέλη)\; V_k = k \cdot V_1 \; άρα$$

$$V_k = k \cdot n$$

$$E_k = E_1 + E_{k-1} + V_1 \cdot V_{k-1} = E_1 + E_{k-1} + (k-1) \cdot n^2$$

Παίρνουμε, λοιπόν, το εξής:

$$\begin{cases} E_k = E_1 + E_{k-1} + (k-1) \cdot n^2 \\ E_{k-1} = E_1 + E_{k-2} + (k-2) \cdot n^2 \\ \dots \\ E_2 = E_1 + E_1 + n^2 \\ E_1 = E_1 \end{cases} \Rightarrow (\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\varepsilon\sigma\eta\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta)$$

$$E_k = k \cdot e + [1 + 2 + \dots + (k-1)] \cdot n^2\ \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$E_k = k \cdot e + \frac{k(k-1)}{2} \cdot n^2$$

Οι τύποι επαληθεύονται και για k = 1. Συνεπώς, ισχύουν για κάθε k.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη προσεταιριστικότητα όπως παρακάτω:
$G^{(k)}$ = (...((G*G)*G)...*G) και την αντιμεταθετικότητα για να πούμε ότι δεν έχει σημασία ποιανού «αντίγραφου» του G τις κορυφές εξετάζουμε.

Αρχίζουμε με το G και έστω μια κορυφή του με βαθμό d τότε σε κάθε σύνδεση με άλλο ένα αντίγραφο του G αυτή η κορυφή αποκτά ακριβώς n νέους γείτονες. Συνεπώς, στο τέλος έχει βαθμό: d + (k – 1)*n.

Η ακολουθία βαθμών είναι $s = \{a_1 \geq \dots \geq a_k \geq \dots \geq a_{(n-1)\cdot k+1} \geq \dots \geq a_{n\cdot k}\}$ όπου $\alpha_{(i-1)\cdot k+1} = a_{(i-1)\cdot k+2} = \dots = a_{i\cdot k} = d_i + (k-1) \cdot n\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i = 1, 2, \dots, n$

(iii)

$$V(GXH) = \{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

Άρα αν $V_k = |V(G^{[k]})|$ έχω $V_k = V_1 \cdot V_{k-1}$ με $V_1 = n$ που δίνει $V_k = n^k$

Αν $E_k = |E(G^{[k]})|$ έχω $E_k = E_1 \cdot V_{k-1} + V_1 \cdot E_{k-1} = n \cdot E_{k-1} + e \cdot n^{k-1}$ (κάθε ακμή του G υπάρχει σε κάθε «αντίγραφό» του, το οποίο «αντικαθιστά» τις κορυφές του $G^{[k-1]}$ και συνδέεται με όλα της τα «αντίγραφα»)

$$\begin{cases} E_k = n \cdot E_{k-1} + e \cdot n^{k-1} \\ n \cdot E_{k-1} = n^2 \cdot E_{k-2} + e \cdot n^{k-1} \\ \dots \\ n^{k-2} \cdot E_2 = n^{k-1} \cdot E_1 + e \cdot n^{k-1} \\ n^{k-1} \cdot E_1 = e \cdot n^{k-1} \end{cases} \Rightarrow (\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\varepsilon\sigma\eta\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta)$$

$$E_k = k \cdot n^{k-1} \cdot e$$

Παρατηρούμε ότι $d_{GXH}(u, v) = d_G(u) + d_H(v)$

Κάθε κορυφή u του $G^{[k]}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως το διατεταγμένο διάνυσμα

u = (u1, u2, ..., uk) όπου uj αντιστοιχεί στο j-οστο αντίγραφο του G με το οποίο κάναμε γινόμενο το $G^{[j-1]}$, και ujϵ\{1, 2, ..., n\} αν ονομάσουμε τις κορυφές του G ως 1, 2, ..., n και αντιστοιχίσουμε σε αυτές τους βαθμούς κορυφής d1, d2, ..., dn. Συνεπώς: $d_{G^{[k]}}(u) = d_{u1} + d_{u2} + \cdots + d_{uk}$.

Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε την ακολουθία βαθμών είναι ο εξής:

όλες οι κορυφές u με άθροισμα u1 + u2 + ... + uk = d έχουν ίδιο βαθμό.

Το d παίρνει όλες τις τιμές από k έως nk και τα uj είναι μεταξύ του 1 και του n.

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις έχω ότι ο συντελεστής του x^d δίνει κορυφές ίδιου μεταξύ τους βαθμού και στους συντελεστές αυτούς κάθε κορυφή του τελικού γραφήματος μετριέται 1 μόνο φορά. Επίσης, ο κοινός του βαθμός βρίσκεται από το άθροισμα βαθμών με τον τρόπο που περιγράφουμε πιο πάνω. Έτσι βρίσκουμε αφού ξέρουμε πόσες κορυφές έχουν αυτόν τον βαθμό στης ακολουθία βαθμών του γραφήματος βάζουμε τόσα αντίγραφα αυτού και συνεχίζουμε για όλες τις δυνατές τιμές του d.

Έχω (x + x^2 + ... + x^n)^k να είναι η γεννήτρια συνάρτηση.

Αυτό γράφεται ως:

$$x^k \cdot \frac{(1-x^n)^k}{(1-x)^k} = x^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i x^{ni} \sum_{j\geq 0} \binom{k+j-1}{k-1} x^j$$

Και για κάθε d που μας νοιάζει παίρνουμε τον αντίστοιχο συντελεστή.

(9)

$$Μετονομάζουμε\ τα\ d(u_i)\ σε\ d_i\ και\ έχουμε:$$

Αν n = d1 + 1 τότε το γράφημα έχει την κορυφή u1 και τους γείτονές της άρα είναι συνεκτικό.

Αν n ≥ d1 + 2 (υπάρχει τουλάχιστον μία μη γειτονική της u1 κορυφή) τότε γράφουμε την ακολουθία βαθμών ως εξής:

$$d = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{1+d_1} \geq d_{2+d_1} \geq \cdots \geq d_{n-2} \geq d_{n-1} \geq d_n\ όπου$$

$$d_n \geq 1$$

$$d_{n-1} \geq 2$$

$$\ldots$$

$$d_{2+d_1} \geq n - 1 - d_1$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

Σαν βάση της επαγωγής χρησιμοποιούμε την περίπτωση n = d1 + 1

Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι κάθε γράφημα n κορυφών με ακολουθία βαθμών όπως περιγράφεται παραπάνω είναι συνεκτικό.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε ένα γράφημα n + 1 κορυφών με ακολουθία βαθμών:

$$d = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{1+d_1} \geq d_{2+d_1} \geq \cdots \geq d_{n-1} \geq d_n \geq d_{n+1} \text{ (1) } όπου$$

$$d_{n+1} \geq 1$$

$$d_n \geq 2$$

$$\ldots$$

$$d_{2+d_1} \geq n - d_1$$

Τώρα παίρνουμε την κορυφή u_{n+1} και την αφαιρούμε από το γράφημα. Θα δείξουμε ότι η μείωση κατά 1 των βαθμών των γειτόνων της δεν επηρεάζει τίποτα όσον αφορά τις απαιτούμενες συνθήκες.

Αρχικά, επειδή ήταν από πριν $d_n \geq 2,\ d_{n-1} \geq 3, \ldots\ d_{2+d_1} \geq n - d_1$ η μείωση του βαθμού αυτών των κορυφών – σε περίπτωση που ήταν γείτονες της αφαιρούμενης – δεν τις σταματά από το να συνεχίζουν να ικανοποιούν την απαραίτητη συνθήκη.

Αν η u(n+1) είχε γείτονα κάποια από τις κορυφές u2, ..., u(d1 + 1) τότε αυτή η κορυφή θα συνεχίσει να έχει βαθμό >= n – 1 – d1 που είναι η συνθήκη που θέλουμε να ικανοποιεί.

Αν η u(n+1) είχε γείτονα την u1 τότε:

Αν υπάρχει άλλη κορυφή με βαθμό ίσο με d1 δεν έχουμε κανένα πρόβλημα και για την u1 ισχύει αυτό που αναφέραμε αμέσως παραπάνω.

Αν δεν υπάρχει άλλη κορυφή με βαθμό ίσο με d1 τότε ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος θα μειωθεί.

Για το d1(new) έχουμε:

$$d_n(new) \geq 1$$

$$d_{n-1}(new) \geq 2$$

$$\ldots$$

$$d_{2+d_1(new)}(new) \geq n - 1 - d_1(new)$$

εκ κατασκευής, οπότε το ένα μέρος των συνθηκών ικανοποιείται ήδη. Επίσης τα παλαιά d1, d2, ..., d(1+d1) ήταν τουλάχιστον μεγαλύτερα του n – d1 από (1) και το καινούριο d1 είναι στη χειρότερη κάποιο από αυτά μειωμένο κατά 1 μονάδα άρα η συνθήκη

$$d_1(new) \geq d_2(new) \geq \cdots \geq d_{1+d_{1(new)}}(new) \geq d_{2+d_1(new)}(new)$$

ισχύει ξανά (θεωρούμε ότι έχουμε κάνει ταξινόμηση στους νέους βαθμούς των κορυφών και παίρνουμε τη ταξινομημένη ακολουθία νέων βαθμών).

Το γράφημα αυτό με την αφαίρεση της u(n+1) από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι είναι συνεκτικό και όταν ξαναπροσθέσουμε την u(n+1) σε αυτό θα ξαναπάρουμε συνεκτικό γράφημα αφού αυτή συνδέεται με τουλάχιστον άλλη μία κορυφή. Τέλος της απόδειξης.

(10)

Έχω ότι το k ≤ n – 2. Συνεπώς, για κάθε τιμή του k υπάρχει επαγόμενο υπογράφημα του G με k + 2 κορυφές.

Πόσες ακμές έχει ένα επαγόμενο υπογράφημα του G με j > k κορυφές;

Από όλες τις κορυφές διαλέγουμε k και αυτό μας δίνει πόσα υπογραφήματα Η με k κορυφές αυτού του υπογραφήματος Y με j κορυφές μπορούμε να φτιάξουμε. Αυτά έχουν όλα ίσο πλήθος ακμών (έστω m) από υπόθεση της άσκησης.

Τώρα όμως έχουμε μετρήσει πολλές φορές τις ίδιες ακμές. Θα βρούμε πόσες φορές μετρήσαμε κάθε ακμή και θα διαιρέσουμε με αυτόν τον αριθμό. Έστω e = (a, b) μια ακμή. Τότε αν από τις υπόλοιπες j – 2 κορυφές του Y διαλέξουμε τις k – 2 παίρνουμε το πλήθος των φορών που έχουμε επαναλάβει τη κορυφή αυτή στα γραφήματα k κορυφών. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή m φορές (για κάθε ακμή ενός υπογραφήματος Η).

Άρα έχουμε ότι το γράφημα Y έχει $m \cdot \frac{\binom{j}{k}}{\binom{j-2}{k-2}}$ ακμές.

Τώρα θεωρούμε ως Y κάποιο επαγόμενο υπογράφημα του αρχικού που περιέχει τις κορυφές a, b (τυχαία) και έχει k + 2 κορυφές συνολικά.

Αν θεωρήσουμε τον πίνακα γειτνίασης του Y και τον πίνακα γειτνίασης των κορυφών a, b έχουμε το εξής:

	1	2	…	a	b
1					
2					
…					
a					
b					

Θέλουμε να πάρουμε τον πίνακα γειτνίασης του επαγόμενο υπογραφήματος που έχει μόνο τις κορυφές a, b. Παραπάνω δείχνουμε τους πίνακες γειτνίασης του Y (Α), του επαγόμενου υπογραφήματος του Y χωρίς την b κορυφή (κόκκινο) (Β), του επαγόμενου υπογραφήματος χωρίς τις a και b (Γ) και τον αναζητούμενο πίνακα (μαύρο) (Δ). Έστω (Ε) ο πίνακας του επαγόμενου υπογραφήματος του Y χωρίς την a κορυφή.

Βλέπουμε ότι (Α) = (Β) + (Ε) – (Γ) + (Δ) και αναδιατάσσοντας την σχέση αυτή έχω ότι
(Δ) = (Α) – (Β) – (Ε) + (Γ).

Για να υπολογίσουμε το πλήθος ακμών του επαγόμενου υπογραφήματος που έχει μόνο τις a, b μέσα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \left[\frac{\binom{k+2}{k}}{\binom{k}{k-2}} - \frac{\binom{k+1}{k}}{\binom{k-1}{k-2}} - \frac{\binom{k+1}{k}}{\binom{k-1}{k-2}} + \frac{\binom{k}{k}}{\binom{k-2}{k-2}}\right] = \\
&= m \cdot \frac{(k+2)(k+1) - 2k(k+1) + k(k-1)}{k(k-1)} = \\
&= m \cdot \frac{k^2 + 3k + 2 - 2k^2 - 2k + k^2 - k}{k(k-1)} = \\
&= m \cdot \frac{2}{k(k-1)} \ (1)
\end{aligned}
$$

Το αρχικό γράφημα είναι απλό άρα το επαγόμενο γράφημα που έχει μόνο τις a, b θα έχει είτε 0 ακμές άρα m = 0 από (1) είτε 1 ακμή (την e = (a, b)) οπότε m = k(k – 1)/2 πάλι από (1).

Στη περίπτωση που m = 0 αυτό συνεπάγεται ότι το αρχικό γράφημα δεν έχει καμία ακμή άρα είναι το κενό γράφημα με n κορυφές.

Στη περίπτωση που m = k(k – 1)/2 αυτό συνεπάγεται ότι κάθε επαγόμενο υπογράφημα με k κορυφές είναι πλήρες γράφημα άρα και το αρχικό είναι πλήρες γράφημα n κορυφών.