ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

2η Σειρά Ασκήσεων

Θεωρία Γραφημάτων

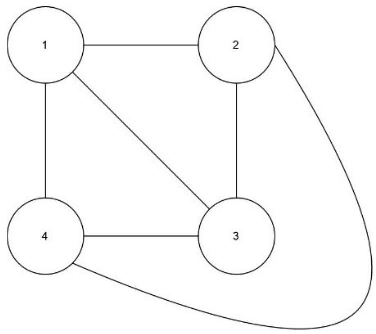
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ

03119005 – 6ο Εξάμηνο ΣΗΜΜΥ

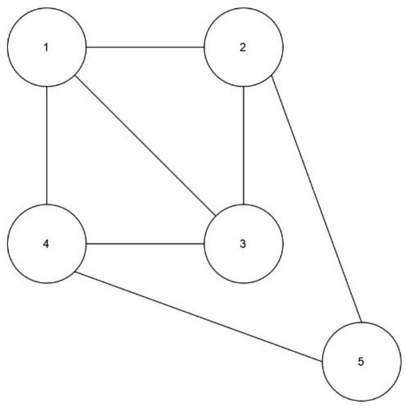
georg.dimi00@gmail.com

23/04/2022

(1) Η πρόταση δεν ισχύει. Κατασκευάζουμε ένα απλό αντιπαράδειγμα παρακάτω:

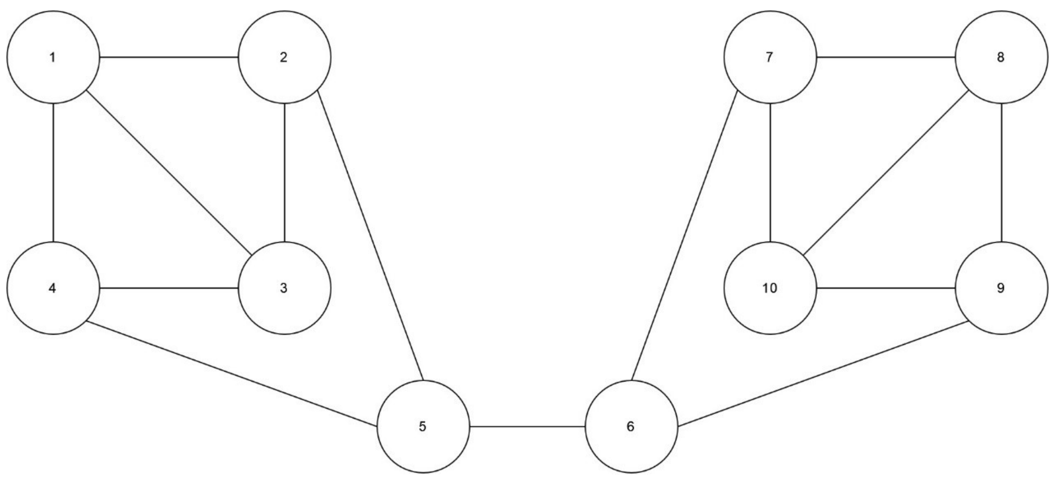


Ξεκινάμε με το K4 γράφημα
($d_G(u) = d = 3\ για\ κάθε\ u \in V(G)$) όπου
rad(G) = diam(G) = 1.



Έπειτα, κάνουμε υποδιαίρεση μιας ακμής του.

Όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 3 εκτός από τη νέα κορυφή που έχει βαθμό 2.



Παίρνουμε 2 τέτοια αντίγραφα και ενώνουμε μόνον τις 2 κορυφές που προέκυψαν από τις υποδιαιρέσεις ακμής του προηγούμενου βήματος. Τώρα όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 3.

Παρατηρούμε ότι:

$$ecc(x) = \begin{cases} 3, για\ x = 5, 6 \\ 4, για\ x = 2, 4, 7, 9 \\ 5, για\ x = 1, 3, 8, 10 \end{cases}$$

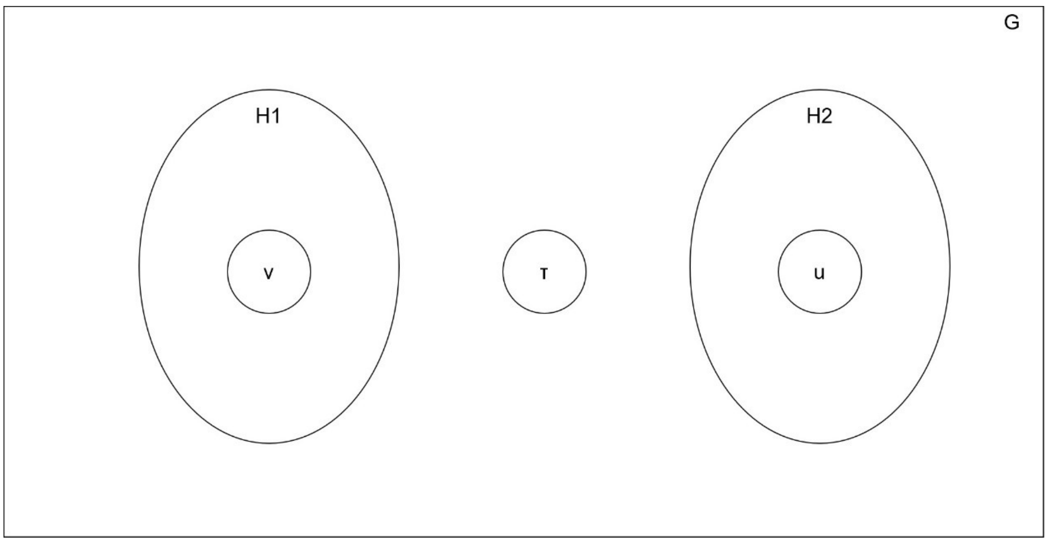
Το παραπάνω γράφημα είναι απλό, συνεκτικό και 3 – κανονικό και δεν ισχύει ότι κάθε κορυφή είναι κεντρική και απόκεντρη.

(2)

diam(G) = 2 επομένως ecc(u) ≤ 2 για κάθε u που είναι κορυφή του G. Το G είναι συνεκτικό γράφημα, συνεπώς, κάθε ζευγάρι κορυφών του συνδέεται με μονοπάτι μήκους 1 (απ' ευθείας ακμή) ή/και μονοπάτι μήκους 2.

Έστω τ η κορυφής τομής. Το γράφημα G' = G\τ είναι μη συνεκτικό. Συνεπώς, το G' μπορεί να χωριστεί σε 2 υπογραφήματα H1, H2 για τα οποία ισχύει ότι δεν υπάρχει ακμή από κορυφή του H1 προς κορυφή του H2 (*).

Παίρνουμε την παρακάτω εικόνα για το G:



Έστω ότι υπάρχει μια κορυφή v του H1 τέτοια ώστε η e = (v, τ) να μην ανήκει στο G. Τότε dist(v, τ) = 2 αναγκαστικά (**).

Το G είναι συνεκτικό άρα υπάρχει μονοπάτι από το v στη τυχαία u (κορυφή του H2) και λόγω των (*), (**) έχουμε dist(v, u) > 2 το οποίο είναι άτοπο. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι δεν υπάρχει κορυφή u του H2 τέτοια ώστε η e' = (u, τ) να μην ανήκει στο G. Η τ συνδέεται με ακμή με όλες τις κορυφές των H1, H2, δηλαδή, με όλες τις κορυφές του G (εκτός του εαυτού της).

Στο συμπληρωματικό γράφημα του G, το $\overline{G}$, η τ είναι μεμονωμένη κορυφή.

(3)

$$far(G) = \{v: v \in V(G)\ και\ ecc(v) = diam(G)\}$$

Επειδή η διάμετρος του G είναι η μέγιστη εκκεντρότητα των κορυφών του G βλέπουμε ότι

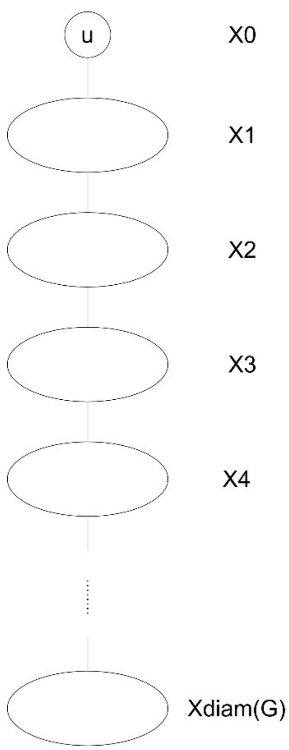
$$αν\ f \in far(G)\ ισχύει\ ότι\ \forall x \in V(G)\ με\ dist(f, x) = diam(G)\ τα\ x \in far(G).$$

Αν το far(G) ήταν κλίκα, δηλαδή, όλες οι κορυφές που ανήκουν σε αυτό είναι ανά ζεύγη γειτονικές τότε με βάση τη παραπάνω παρατήρηση θα είχαμε diam(G) = 1, άτοπο.

(4)

Έστω u μια κορυφή με ecc(u) = diam(G) ≥ 4. Κάνουμε αποσύνθεση απόστασης του G ως προς τη κορυφή u.

Θεωρούμε ως «επόμενο» και «προηγούμενο» του X_k τα X_{k+1} και X_{k-1}. Προηγούμενο του X_0 είναι το $X_{diam(G)}$ και επόμενο του $X_{diam(G)}$ είναι το X_0. Το προηγούμενο και το επόμενο του X_k τα ονομάζουμε γείτονές του.



Στο γράφημα $\overline{G}$:

1)Έστω 2 κορυφές του $\overline{G}$ που δεν είναι σε γειτονικά X_k τότε λόγω του πώς είναι ορισμένη η αποσύνθεση απόστασης του G έχουμε ότι οι 2 αυτές κορυφές είναι γειτονικές στο $\overline{G}$.

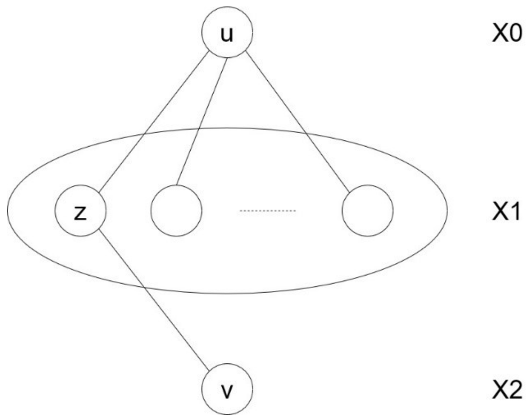
2)Έστω 2 κορυφές του $\overline{G}$ που ανήκουν στο ίδιο X_k τότε ή θα είναι γειτονικές ή θα είναι και οι 2 γειτονικές κάποιας άλλης κορυφής η οποία βρίσκεται σε X_L μη γειτονικό του X_k από (1) άρα και πάλι έχουμε μονοπάτι μήκους 2 μεταξύ τους.

3)Έστω 2 κορυφές του $\overline{G}$ που ανήκουν σε γειτονικά X_k. Αν είναι γειτονικές τελειώσαμε, αλλιώς… Έστω u ανήκει σε ένα από αυτά τα σύνολα κορυφών, έστω Α, και η άλλη κορυφή, έστω v, ανήκει στο επόμενο σύνολο κορυφών, έστω Β. Τέλος, ονομάζουμε Γ το μεθεπόμενο σύνολο κορυφών από το Β. Βλέπουμε ότι τα Β, Γ είναι μη γειτονικά. Ο μόνος τρόπος τα Α, Γ να ήταν γειτονικά είναι αν είχαμε διαθέσιμα μόνον 4 σύνολα κορυφών, δηλαδή, αν diam(G) = 3, το οποίο δεν ισχύει. Συνεπώς, το Α δεν είναι γειτονικό του Γ, το Β δεν είναι γειτονικό του Γ άρα από (1) υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 από τη u στη v.

Συνεπώς, μπορούμε να συνδέσουμε οποιεσδήποτε 2 κορυφές του $\overline{G}$ με μονοπάτι μήκους 1 ή 2. Άρα diam($\overline{G}$) < 3.

(5)

Έστω u μια κορυφή του G με βαθμό n – 2, όπου |V(G)| = n. Κάνουμε αποσύνθεση απόστασης του G ως προς τη κορυφή u.



Το σύνολο X0 έχει μία κορυφή (την u).

Το σύνολο X1 έχει n – 2 κορυφές (τους γείτονες της u).

Το σύνολο X2 έχει αναγκαστικά μόνο μία κορυφή (την v) (αφού μέχρι στιγμής τα X0, X1 έχουν n – 1 κορυφές) και υπάρχει, πάλι αναγκαστικά, κάποια κορυφή του X1, έστω z, που είναι γειτονική της v.

Δίπλα, δείχνουμε την αποσύνθεση του G που έχει μόνο τις ακμές που έχουμε περιγράψει μέχρι στιγμής. Μέχρι στιγμής έχουμε n – 2 + 1 ακμές.

Έστω μια κορυφή y του X1 που δεν είναι η z. Πρέπει να υπάρχει μονοπάτι από τη v στη y με μήκος το πολύ 2. Για τον λόγο αυτό συμπεραίνουμε ότι για κάθε μία από τις n – 3 κορυφές του X1 που δεν είναι η z θα ισχύει ένα από τα δύο:

- ή είναι γειτονική της v. (χρειαζόμαστε μία παραπάνω ακμή από αυτές που έχουμε θεωρήσει μέχρι στιγμής)
- ή είναι γειτονική κάποιου γείτονα της v. (χρειαζόμαστε πάλι μία παραπάνω ακμή από αυτές που έχουμε θεωρήσει μέχρι στιγμής ώστε να γίνει η σύνδεση με κάποιον από τους γείτονες της v)

Συνεπώς, χρειαζόμαστε άλλες n – 3 ακμές.

Συνολικά, έχουμε n – 2 + 1 + n – 3 = 2n – 4 αναγκαίες ακμές.

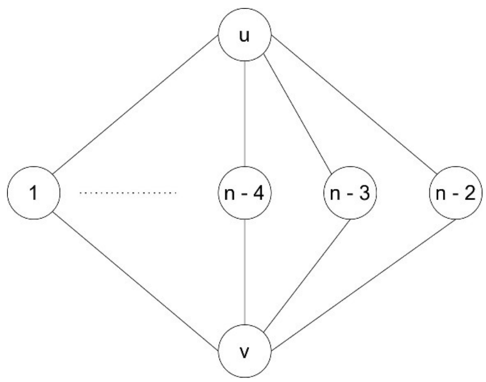
Άρα |E(G)| ≥ 2n – 4.

(6)

i)

Έστω $\delta(G) = n - 2$:

Διαλέγουμε μια κορυφή u με βαθμό ίσο με $\delta(G) = n - 2$ (γειτνιάζει με όλες τις κορυφές του γραφήματος εκτός από μία, έστω v). Έχουμε ότι πρέπει $n \geq 3$.



Επειδή ο ελάχιστος βαθμός κορυφής είναι $n - 2$ και η v δεν γειτνιάζει με την u πρέπει επίσης να έχει όλες τις κορυφές από 1 έως $n - 2$ γείτονές της.

Δοκιμάζουμε να αφαιρέσουμε $k \leq n - 3$ κορυφές του γραφήματος για κάθε τέτοιο k και να δούμε αν διατηρείται η συνεκτικότητα.

Μπορούμε να το κάνουμε με 3 τρόπους:

1)Αφαιρούμε k γείτονες της u (κόκκινο σύνολο στο γράφημα) και, προφανώς, το γράφημα που μένει είναι συνεκτικό.

Στη περίπτωση αυτή, αν $n = 3$ τότε το $k = 0$ άρα δεν αφαιρούμε κανέναν γείτονα της u (έχει έναν) και το γράφημα είναι συνεκτικό αφού δεν αλλάξαμε τίποτα.

2)Αφαιρούμε $k - 1$ γείτονες της u και την u μαζί (μπλε σύνολο στο σχήμα). Το γράφημα που μένει και έχει την v και όσους γείτονές της έμειναν άρα είναι συνεκτικό.

Στη περίπτωση αυτή, αν $n = 4$ τότε το $k = 1$ άρα δεν αφαιρούμε κανέναν γείτονα της u (έχει δύο γείτονες). Το γράφημα που μένει μετά την αφαίρεση της u είναι συνεκτικό αφού έχει μόνο τη v και τους 2 γείτονές της.

3)Αφαιρούμε $k - 1$ γείτονες της u και την v μαζί. Είναι το ίδιο με τη περίπτωση (2).

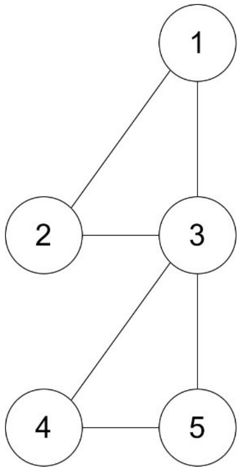
Δεν υπάρχει διαχωριστής με $k \leq n - 3$ κορυφές. Επίσης, ισχύει ότι $k(G) \leq \delta(G)$ (Λήμμα 4.16 από διαφάνειες) και, προφανώς, $k \leq k(G) \leq \delta(G) = n - 2$. Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι:

$n - 3 < k \leq n - 2 \rightarrow k = n - 2$. Δηλαδή, $k = \delta(G)$.

Έστω $\delta(G) = n - 1$, δηλαδή, το γράφημα είναι πλήρες. Όσες κορυφές και να αφαιρέσουμε τότε το γράφημα που μένει είναι συνεκτικό αφού στο αρχικό κάθε κορυφή είναι γειτονική με κάθε άλλη. Άρα $k = \delta(G)$ (δεν μπορούμε αφαιρώντας $n - 2$ ή λιγότερες κορυφές να κάνουμε το γράφημα G μη συνεκτικό).

Δείξαμε, λοιπόν, ότι αν $\delta(G) \geq n - 2$ και G ένα απλό k – συνεκτικό γράφημα τότε $k = \delta(G)$.

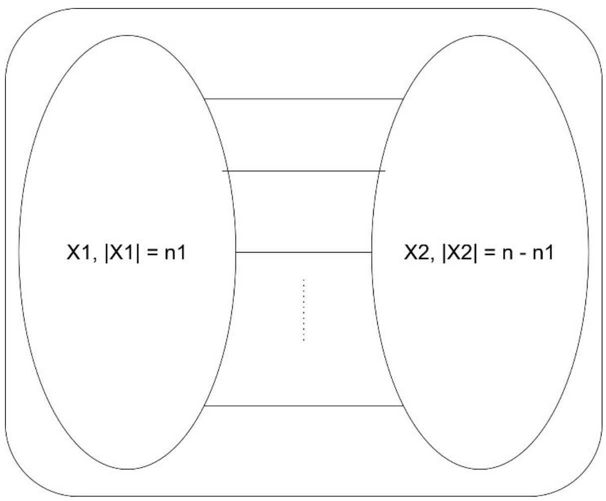
ii)



Το διπλανό γράφημα είναι απλό και συνεκτικό. Έχει n = 5 κορυφές και δ(G) = n – 3 = 2 ελάχιστο βαθμό κορυφής. Αφαιρώντας την κορυφή 3 παίρνουμε μη συνεκτικό γράφημα. Το γράφημα G είναι 1 – συνεκτικό γιατί έχει ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους ακριβώς 1 και δεν είναι k – συνεκτικό με k > 1.

(7)

i) Έχουμε δ(G) ≥ n/2.



Χωρίζουμε τις κορυφές του G στα σύνολα X1, X2 και θεωρούμε ως X1 πάντα το σύνολο με τις λιγότερες (ή το πολύ ίσες με το X2) κορυφές.

Δηλαδή, n1 = 1, 2, …, floor(n/2).

Για κάθε κορυφή που είναι μέσα στο X1 έχουμε ότι οι γείτονές της μέσα σε αυτό είναι σίγουρα λιγότεροι από το βαθμό της, αφού είναι σίγουρα λιγότεροι από το floor(n/2) το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο του δ(G).

Επομένως, οι ακμές που φεύγουν από το X1 προς κορυφές του X2, έστω e στο πλήθος, είναι το λιγότερο f(n1) με f(n1) = n1*(δ(G) – n1 + 1).

Έστω F ένα σύνολο ακμών που αν αφαιρεθεί καθιστά το G μη συνεκτικό τότε οι ακμές του F ενώνουν μεταξύ τους 2 σύνολα X1, X2 όπως στο σχήμα παραπάνω.

Έχουμε ότι λ(G) = min|F| για τέτοια σύνολα F. Και με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι

λ(G) ≥ min f(n1).

Θέτω c = δ(G) + 1 τότε f(x) = -x^2 + cx, f’(x) = - 2x + c, f’(x) = 0 τότε x = c/2.

f γνησίως αύξουσα για x < c/2 και f γνησίως φθίνουσα για x > c/2.

Παρουσιάζει ελάχιστα για x = 1 και x = floor(n/2) (ακραίες τιμές του πεδίου ορισμού της).

Επομένως, θα βρούμε τις τιμές αυτές. Θα τις συγκρίνουμε και η μικρότερη είναι το ολικό ελάχιστο και το αποτέλεσμα που ψάχνουμε.

m1 = f(1) = 1*(δ(G) – 1 + 1) = δ(G).

m2 = f(floor(n/2)) = floor(n/2)*(δ(G) – floor(n/2) + 1).

Αν n = 2 τότε floor(n/2) = 1 και m2 = δ(G).

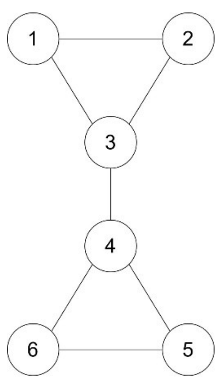
Αλλιώς, m2 ≥ m1 ή floor(n/2)*δ(G) – floor(n/2)*(floor(n/2) – 1) ≥ δ(G) ή [floor(n/2) – 1]δ(G) ≥ floor(n/2)*[floor(n/2) – 1] ή δ(G) ≥ floor(n/2) που ισχύει.

Όπως και να έχει, λοιπόν, βλέπουμε ότι f(n1) ≥ δ(G).

Από το Θεώρημα 4.21 από τις διαφάνειες έχουμε ότι:

δ(G) ≤ minf ≤ λ ≤ δ(G) άρα λ = δ(G).

ii)



Στο διπλανό γράφημα έχουμε n = 6 άρα floor(n/2) = 3.

Το δ(G) = 2 = 3 – 1.

Η αφαίρεση της ακμής e = (3, 4) αρκεί για να κάνει το γράφημα μη συνεκτικό. Άρα το γράφημα είναι 1 – πλευρικά συνεκτικό και, προφανώς, όχι λ – πλευρικά συνεκτικό με λ > 1.

(8)

Έστω ότι υπάρχει διαχωριστής με λιγότερες από k κορυφές. Έστω ότι έχει m κορυφές τότε χωρίζουμε το σύνολο κορυφών στα X1, R, X2, όπου X1, X2 με n1 = |X1| ≤ |X2| τα 2 σύνολα κορυφών των 2 ανεξάρτητων συνιστωσών που προκύπτουν μετά την αφαίρεση του συνόλου R, που είναι ο διαχωριστής με m κορυφές. Το n1 = 1, 2, …, floor{(n – m)/2}.

Αν δείξουμε ότι δ(G) > n1 + m – 1 τότε δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος διαχωριστής, διότι σε αυτή τη περίπτωση θα υπάρχει κάποιος γείτονας μιας κορυφής του n1 που δεν ανήκει ούτε στο X1, ούτε στο R άρα θα είναι στο X2.

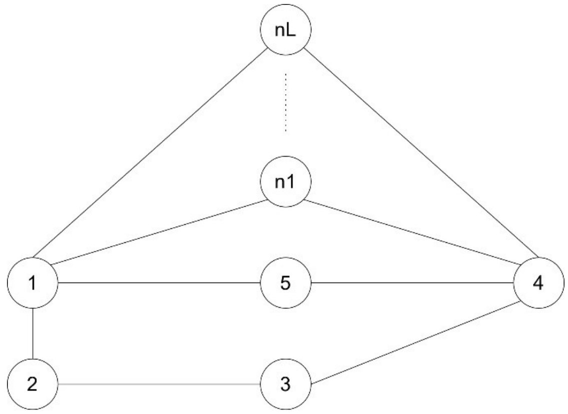
Έχω n1 ≤ floor{(n – m)/2} ≤ (n – m)/2 άρα n1 + m ≤ (n + m)/2.

Έχω ότι m < k εξ ορισμού του m άρα n1 + m < (n + k)/2 ή n1 + m – 1 < (n + k – 2)/2.

Έχουμε, λοιπόν, δ(G) ≥ (n + k – 2)/2 > n1 + m – 1 άρα δ(G) > n1 + m – 1, το οποίο ισχύει για κάθε δυνατή τιμή του n1. Συνεπώς, για κάθε σύνολο κορυφών X που είναι υποσύνολο του V(G) και |X| < k ισχύει ότι το G\X είναι συνεκτικό.

Το G είναι τουλάχιστον k – συνεκτικό.

(9)



Αρχίζουμε από τον κύκλο με κορυφές τις 1, 2, 3, 4, 5. Η διάμετρος είναι 2. Το γράφημα έχει τουλάχιστον 5 κορυφές και έχει 2*5 – 5 = 5 ακμές. Το γράφημα είναι 2 συνεκτικό. Σύνολο διαχωρισμού αποτελούν για παράδειγμα οι κορυφές 2 και 4.

Για κάθε νέα κορυφή που θέλουμε να βάλουμε κάνουμε το εξής:

Έστω u η νέα κορυφή. Τη βάζουμε στο γράφημα και βάζουμε μόνο τις ακμές (1, u) και (4, u), άρα για κάθε νέα κορυφή προσθέτουμε ακριβώς 2 ακμές.

Συνεπώς, το γράφημα που παίρνουμε έχει n ≥ 5 κορυφές και e = 2n – 5 ακμές. Είναι συνεκτικό.

Η διάμετρος συνεχίζει να είναι 2.

Το σύνολο {2, 4} συνεχίζει να είναι σύνολο διαχωρισμού άρα το γράφημα είναι και 2 – συνεκτικό.

(10)

Αν υπάρχουν μεμονωμένες κορυφές (βαθμού 0) μπορούμε να τις αγνοήσουμε, αφού η συνθήκη για τη σχέση πλήθους ακμών με το πλήθος κορυφών συνεχίζει να ισχύει.

Αν υπάρχουν κορυφές με βαθμό 1 τότε πάλι μπορούμε να τις αγνοήσουμε γιατί θα έχουμε:

Στο αρχικό G:

- |V(G)| = n (α)
- |E(G)| = e > 3(n – 1)/2 (β)

Στο G’ που είναι το G χωρίς τις L κορυφές με βαθμό 1 έχουμε:

- |V(G’)| = n – L = n’
- $2|E(G')| = \sum_{i\geq 1} d_i' = \sum_{i\geq 1} d_i - 2L = 2|E(G)| - 2L$ άρα |E(G’)| > 3(n – 1)/2 – L
  |E(G’)| > (3n’ + 3L – 3 – 2L)/2 = (3n’ – 3 + L)/2 > 3(n’ – 1)/2.

Επομένως θεωρούμε ένα γράφημα G με ελάχιστο βαθμό κορυφής τουλάχιστον 2.

Αν το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό τότε υπάρχει συνεκτική συνιστώσα του για την οποία να ισχύουν οι σχέσεις (α), (β). Απόδειξη:

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοια συνιστώσα και έστω ότι έχουμε k συνιστώσες για τις οποίες ισχύει:

$e_j \leq 3(n_j - 1)/2$

$3(n - 1) < e = e_1 + e_2 + \ldots + e_k \leq 3(n - k)/2$

Άρα 1 > k το οποίο είναι άτοπο.

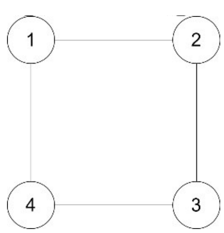
Για να ισχύει η σχέση αυτή σε μια συνιστώσα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 4 κορυφές σε αυτή, αλλιώς το $e > 3(n - 1)/2$ υπερβαίνει το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος ακμών.

Συνεπώς, με βάση όλα τα παραπάνω αρκεί να λυθεί η άσκηση σε ένα γράφημα G για το οποίο ισχύουν:

1. Είναι απλό
2. Είναι συνεκτικό
3. $|V(G)| = n \geq 4$
4. $|E(G)| = e > 3(n - 1)/2$
5. Ο ελάχιστος βαθμός κορυφής είναι τουλάχιστον 2.

Α.Υ: Υποθέτουμε ότι στο γράφημα G δεν υπάρχει ζεύγος κορυφών που ενώνεται με 3 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια, δηλαδή, ότι για κάθε ζεύγος κορυφών αυτές συνδέονται με το πολύ 2 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια. (Απαγωγή σε άτοπο με επαγωγή).

Ε.Βάση: Για n = 4 και e > 4.5 έχω:



Στο δίπλα γράφημα για να έχω τουλάχιστον 5 ακμές πρέπει να προσθέσω ή την (1, 3) ή την (2, 4) ή και τις 2. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν 3 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια μεταξύ κάποιου ζεύγους κορυφών. Άρα η Α.Υ. καταλήγει σε άτοπο.

Ε.Υ: Έστω ότι η Α.Υ. καταλήγει σε άτοπο σε κάθε γράφημα που ισχύουν οι υποθέσεις 1 έως 5 και έχει λιγότερες κορυφές από το γράφημα G, το οποίο έχει n κορυφές.

Ε.Βήμα: Για το G ισχύει ότι $e/n > 1 + (n - 3)/2n > 1$ άρα έχει κύκλο (Θεώρημα 3.14 από διαφάνειες).

Ο κύκλος έχει μήκος $k \geq 3$ (αναγκαστικά).

Λόγω Α.Υ. για κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκουν στον κύκλο υπάρχουν 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια μεταξύ τους πάνω στον κύκλο και κανένα άλλο μονοπάτι – γιατί θα έπρεπε να έχει ακμές εκτός αυτών που ανήκουν στον κύκλο και άρα θα υπήρχαν 2 κορυφές πάνω στον κύκλο που ενώνονται με 3 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

Αφαιρούμε από το γράφημα τις k ακμές που ανήκουν σε αυτόν τον κύκλο και λόγω τις παραπάνω παρατήρησης το χωρίζουμε σε k συνιστώσες.

Έστω ότι για κάθε μία από αυτές τις συνιστώσες ισχύει ότι $e_j \leq 3(n_j - 1)/2$

Έχω $(3n - 3)/2 < e = e_1 + e_2 + \ldots + e_k + k \leq 3(n - k)/2 + k = (3n - k)/2$ άρα $k < 3$ που είναι άτοπο.

Συνεπώς, στο γράφημα G υπάρχει ένα τουλάχιστον υπογράφημα με (έστω a) στο πλήθος κορυφές και περισσότερες από $3(a - 1)/2$ ακμές.

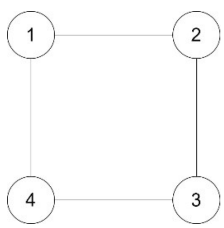
Το υπογράφημα αυτό με βάση τις αρχικές μας παρατηρήσεις θα έχει κάποιο υπογράφημα για το οποίο να ισχύουν οι σχέσεις 1 έως 5.

Το υπογράφημα αυτό είναι υπογράφημα του G και λόγω της Ε.Υ. έχουμε ότι η Α.Υ. δεν ισχύει.

Τελικά, λοιπόν υπάρχει ζεύγος κορυφών στο G που ενώνεται με τουλάχιστον 3 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

Έστω $n = 4$ κορυφές και $e = \text{floor}[3(n - 1)/2] = 4$ ακμές.

Σχεδιάζουμε το παρακάτω γράφημα:



Στο δίπλα γράφημα δεν υπάρχει ζεύγος κορυφών που ενώνεται με 3 ξένα μονοπάτια. Μπορούν να προστεθούν οι ακμές (1, 3) και (2, 4) ακόμη και καμία άλλη αν θέλουμε να συνεχίσει να είναι απλό.

Οποιαδήποτε από τις 2 και να προστεθεί (ή και οι 2) θα υπάρχει ζεύγος κορυφών που ενώνονται με 3 ξένα μονοπάτια. (Αυτό είναι και το γράφημα της επαγωγικής μας βάσης στην παραπάνω απόδειξη).