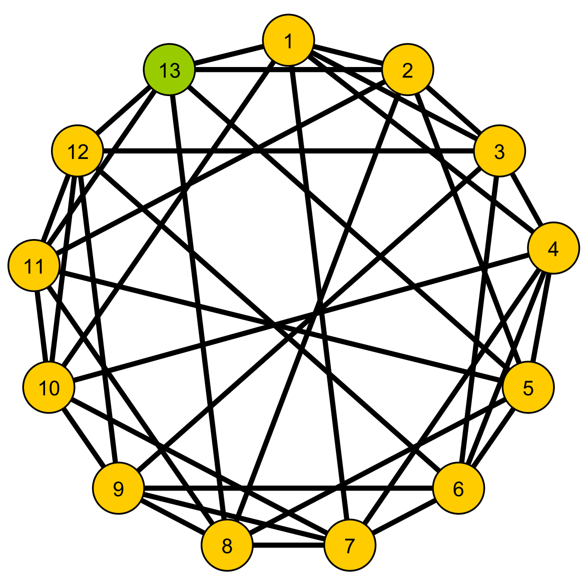
1η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Δευτέρα 4 Απριλίου 2022 (σε μορφή pdf μέσω του helios). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλεύεστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Κάθε γράφημα G χωρίς βρόγχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές (Δειτε σελ. 29 των σημειώσεων για την αποδειξη της προτασης αυτής). Εφαρμόστε την κατασκευή της αποδειξης στο παρακατω 6-κανονικό γράφημα G με 13 κορυφές και βρείτε ένα διμερές επαγόμενο υπογράφημα με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές. Ξεκινήστε με τα εξής σύνολα διαμέρισης: $V_1 = \{v_{13}\}$ και $V_2 = \{v_1, \ldots, v_{12}\}$.



(2) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών είναι γραφικές. Στην περίπτωση γραφικής ακολουθίας βαθμών να δοθεί γράφημα που την υλοποιεί.

i. $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$
ii. $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$
iii. $(2, 2, 0, 0)$
iv. $(6, 6, 5, 5, 5, 3, 2)$
v. $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 2)$
vi. $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 2)$ και το γράφημα να είναι διμερές
vii. $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{2k}$, με $d_{2i} = d_{2i-1} = i$ για $1 \leq i \leq k$.

(3) Κατασκευάστε ένα απλό συνεκτικό γράφημα με 11 κορυφές και σύνολο βαθμών το $\{3, 4, 5, 8, 10\}$.

(4) Το θεώρημα του Köning λέει ότι "κάθε απλό γράφημα G με μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$ είναι επαγόμενο υπογράφημα κάποιου απλού $\Delta(G)$-κανονικού γραφήματος" (για την απόδειξη δείτε σελ. 33 των σημειώσεων).

i. Βρείτε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για την κατασκευή του $\Delta(G)$ - κανονικού γραφήματος, όπως περιγράφεται στην απόδειξη του θεωρήματος.
ii. Έστω ότι αναζητούμε απλό $\Delta(G)$-κανονικό γράφημα που να περιέχει το G ως υπογράφημα (όχι απαραίτητα επαγόμενο). Είναι εφικτό μόνο με την προσθήκη ακμών στο G; Δώστε παράδειγμα με λίγες κορυφές στην περίπτωση που $\Delta(G) = 3, 4$.

(5) Ορίζουμε ως γέφυρα ενός συνεκτικού γραφήματος G μια ακμή $e \in E(G)$ για την οποία ισχύει ότι το $G \backslash e$ δεν είναι συνεκτικό. Δείξτε ότι ένα απλό κανονικό συνεκτικό διμερές γράφημα με βαθμό τουλάχιστον 2, δεν περιέχει γέφυρα.

(6) Ένα σύνολο ανεξάρτητων κορυφών είναι ένα σύνολο από κορυφές του γραφήματος οι οποίες δεν ενώνονται μεταξύ τους με καμία ακμή. Συμβολίζουμε με $\beta_0(G)$ το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων κορυφών του γραφήματος G. Δείξτε ότι αν το G είναι απλό και δεν περιέχει τρίγωνο τότε $\Delta(G) \leq \beta_0(G)$ και $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|\beta_0(G)}{2}$.

(7) Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος G με n κορυφές.

i. Δείξτε οτι για οποιοδήποτε ζεύγος από δείκτες i και j με $1 \leq i, j \leq n$ το (i, j) στοιχείο του πίνακα A^l όπου $1 \leq l \leq n$ είναι ίσο με τον αριθμό των μεταξύ τους διαφορετικών (v_i, v_j) περιπάτων μήκους l στο G.
ii. Έστω $Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. Αν κάποιο μη διαγώνιο στοιχείο του Y είναι 0, τότε τι συμπεραίνετε για το γράφημα G;
iii. Έστω τετραγωνικός πίνακας M. Συμβολίζουμε με $Tr(M)$ το ίχνος του πίνακα , δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του. Δείξτε ότι αν το γράφημα G δεν έχει βρόγχους, τότε το πλήθος των τριγώνων στο G ισούται με $Tr(A^3)/6$.

(8) Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές, e ακμές και ακολουθία βαθμών $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Βρείτε το πλήθος κορυφών, το πλήθος ακμών και την ακολουθία βαθμών για τα παρακάτω γραφήματα:

i. $kG = \underbrace{G \cup G \cup \cdots \cup G}_{k \text{ φορές}}$, $k \geq 2$ και $\cup$ συμβολίζει την ένωση γραφημάτων.
ii. $G^{(k)} = \underbrace{G * G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}$, $k \geq 2$ και $*$ συμβολίζει τη σύνδεση γραφημάτων.
iii. $G^{[k]} = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{k \text{ φορές}}$, $k \geq 2$ και $\times$ συμβολίζει το γινόμενο γραφημάτων.

(9) Έστω απλό γράφημα G με ακολουθία βαθμών $d = d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$ έτσι ώστε για κάθε αριθμό k με $1 \leq k \leq n - 1 - d(v_1)$ να ισχύει $d(v_{n-k+1}) \geq k$. Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.

(10) Έστω απλό γράφημα G με n κορυφές και έστω k με $1 < k < n - 1$. Αν όλα τα επαγόμενα υπογραφήματα του G με k κορυφές έχουν το ίδιο πλήθος ακμών τότε το G είναι είτε το πλήρες γράφημα με n κορυφές είτε το κενό γράφημα με n κορυφές.

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής "ΕπίθετοΌνομα" όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο helios.ntua.gr