

线性代数(1)期中考试答案 (A 卷) 2017年11月11日

一、填空题(每题4分, 共36分)

1. 37.

2.  $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

3.  $-I.$

4.  $a \neq 0.$

5.  $\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$

6.  $-2^4 \cdot 3 = -48.$

7.  $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$

8.  $B = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$

9.  $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$

二、计算题和证明题(共64分)

10. (14分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ , 已知线性方程组  $Ax = \beta$  有解但不唯一.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求  $A$  的相抵标准形.

解: (1)  $(A|\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ a & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & \vdots & a+2 \end{bmatrix}$   
 (做初等行变换), 故  $a = -2$ . (8分, 若  $a$  不对, 但有合理的计算过程4分。)

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{做初等变换}).$$

(6分, 若结论不对, 但有合理的计算过程3分。(1)中 $a$ 的对错不影响(2)的得分。)

11. (16分) 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解: (1)  $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  (8分, 若结果不对, 但有合理的计算过程给4分。)

(2)  $a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 a_4 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ . (8分, 若结果不对, 但有合理的计算过程给4分。)

12. (14分) 设  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ .

(1) 求所有与 $A$ 交换的矩阵 $B$  (即满足 $AB = BA$ ).

(2) 求 $A^n$ .

解: (1) 设  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$  与 $A$ 交换, 即 $AB = BA$ . 令  $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

显然 $A$ 与 $B$ 交换当且仅当 $\Delta$ 与 $B$ 交换. 于是  $\Delta B = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B\Delta = \begin{bmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ .

因此  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{12} \end{bmatrix}$ . (7分. 若结果不对, 但有合理的计算过程给3分。)

$$(2) A^n = (aI + \Delta)^n = a^n I + C_n^1 a^{n-1} \Delta + C_n^2 a^{n-2} \Delta^2 = \begin{bmatrix} a^n & C_n^1 a^{n-1} & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$(n \geq 2).$  (7分.)

13. (6分) 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为一个仿射坐标系, 其度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{bmatrix}$ .

设有非零向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 和实数 $\lambda$ 满足 $A\alpha^T = \lambda\alpha^T$ . 证明 $\lambda > 0$ .

证明:  $0 < \alpha \cdot \alpha = \alpha A \alpha^T = \alpha (A \alpha^T) = \lambda \alpha \alpha^T = \lambda (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . 所以 $\lambda > 0$ .  
(6分.)

14. (14分) 设 $M$ 为 $n$ 阶可逆方阵, 分块为 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , 其中 $D$ 为 $k$ 阶可逆矩阵 ( $k < n$ ).

(1) 证明:  $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$ . (2) 求 $M^{-1}$ .

解: (1) 将分块阵 $M$ 的第二行左乘矩阵 $-BD^{-1}$ 加到第一行得到的矩阵为 $\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ . 因为做分块阵的第三类初等行变换不改变行列式的值, 所以 $|M| = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$ . (7分.)

$$(2) \quad (M:I) = \begin{bmatrix} A & B & : & I_1 & 0 \\ C & D & : & 0 & I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & : & I_1 & -BD^{-1} \\ C & D & : & 0 & I_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & : & I_1 & -BD^{-1} \\ 0 & D & : & -C(A - BD^{-1}C)^{-1} & I_2 + C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & : & (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_2 & : & -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

故

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

(7分)。

补充题：设四维向量空间 $V$ 上的线性变换 $\sigma$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1). 求 $\sigma$ 在基 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$ 下的矩阵.

(2). 设向量 $\gamma$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $(1, 2, 3, 4)$ . 求 $\sigma(\gamma)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$ 下的坐标.