ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

2 ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΑΝΤΕΛΕΗΜΩΝ ΓΙΑΚΑΤΟΣ

ΑΕΜ: 3061

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Άσκηση 5

Στην συγκεκριμένη άσκηση μας ζητείται να προγραμματίσουμε μία συνάρτησης που να υπολογίζει το ημίτονο μιας οποιασδήποτε γωνίας. Για να δημιουργήσουμε την συνάρτηση χρησιμοποιούμε 10 τιμές του ημιτόνου, τις οποίες τις παίρνουμε σε ένα διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$. Για κάθε τυχαίο x που βρίσκεται στο συγκεκριμένο διάστημα βρίσκουμε το σημείο (x, y) που το y είναι η τιμή του ημιτόνου στο σημείο x.

Τα σημεία που επιλέγουμε είναι:

$$x = [3.896993427370104, 4.523972077193033, 3.0057603845271466,$$
$$5.306644151423592, 2.4114357407564224, -0.7850479654803975,$$
$$6.224182513472877, -2.9030655628024267, -2.620853477468518,$$
$$-4.473053298914355]$$
$$y = [-0.6855804857536925, -0.9823019863592075, 0.13541496082078464,$$
$$-0.8285657522382525, 0.6669865542203343, -0.7068591105104192,$$
$$-0.05896856496931816, -0.23627167644939231, -0.49752147325751334,$$
$$0.9714956707647036]$$

Μετά την επιλογή των δέκα σημείων κατασκευάζουμε την συνάρτηση ημιτόνου χρησιμοποιούμε:

- Τη πολυωνυμική προσέγγιση
- Τη Splines
- Τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Επίσης μας ζητείται να συγκρίνουμε τις παραπάνω προσεγγίσεις όσο αφορά στην ακρίβεια προσέγγισης στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, να προβάλουμε σε διάγραμμα το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο $[-\pi, \pi]$ και να αναφέρουμε πόσα ψηφία ακρίβειας πετύχαμε.

Αρχικά υλοποιούμε την πολυωνυμική προσέγγιση, η οποία περιλαμβάνει μία συνάρτηση:

1. Lagrange: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακας και επιστρέφει ως έξοδο μία συμβολοσειρά που αναπαριστά την πολυωνυμική προσέγγιση. Προκειμένου να υλοποιηθεί η συμβολοσειρά χρησιμοποιούμε μία εμφωλευμένη δομή επανάληψης ώστε να δημιουργήσουμε τα πολυώνυμα $L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, i = 0, \dots, n$, δηλαδή τους συντελεστές Lagrange. Τέλος, σχηματίζουμε την συμβολοσειρά $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$ όπου και επιστρέφουμε στην έξοδο.

Ύστερα υλοποιούμε τη προσέγγιση Splines, που περιλαμβάνει έξι συναρτήσεις από τις οποίες οι τέσσερις προέρχονται από την άσκηση 3α της πρώτης εργασίας για τον υπολογισμό $Ax = B$:

1. solverU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα άνω τριγωνικό πίνακα U και ένα διάνυσμα z και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων x, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Ux = z$ από την παραπάνω ανάλυση. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την τελευταία γραμμή του πίνακα U και του πίνακα b και τελειώνει στην πρώτη γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.

2. solverL: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L και ένα διάνυσμα Pb και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων z, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Lz = Pb$ από την παραπάνω ανάλυση. Μετά την εύρεση του διανύσματος z, το συγκεκριμένο διάνυσμα χρησιμοποιείται ως είσοδο στην συνάρτηση solverU. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την πρώτη γραμμή του πίνακα L και του πίνακα Pb και τελειώνει στην τελευταία γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.
3. multi: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και ένα διάνυσμα και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό. Αρχικά η συνάρτηση ελέγχει αν πληρούνται οι συνθήκες για τον πολλαπλασιασμό του πίνακα με το διάνυσμα, δηλαδή αν ο αριθμός των στηλών του πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του διανύσματος. Αν δεν ισχύει η συνθήκη τότε το πρόγραμμα τερματίζει διαφορετικά πολλαπλασιάζει κάθε γραμμή του πίνακα με την στήλη του διανύσματος.
4. PLU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα A και επιστρέφει ως έξοδο τους τρεις πίνακες P, L και U. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση υλοποιείται ο αλγόριθμος του Gauss με οδήγηση και αυτό γιατί, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το κύριο κορμό για την εύρεση των τριών πινάκων που θέλουμε να επιστρέψουμε ως έξοδο. Πιο αναλυτικά, αρχικά χρησιμοποιούμε μία εμφωλευμένη δομή επανάληψης for για να βρούμε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην στήλη που εξετάζουμε κάθε φορά. Αφού βρούμε αυτό το στοιχείο τότε κάνουμε ανταλλαγή μεταξύ των γραμμών που περιέχει το συγκεκριμένο στοιχείο και της γραμμής που θα χρησιμοποιηθεί ως η οδηγός γραμμή. Την πληροφορία για το ποιες γραμμές ανταλλάχθηκαν μεταξύ του την αποθηκεύουμε στον πίνακα P. Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι η οδηγός γραμμή σε κάθε επανάληψη θα είναι η αμέσως επόμενη γραμμή. Ύστερα, βρίσκουμε το οδηγό στοιχείο (το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο) σε κάθε οδηγό γραμμή και μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από το οδηγό στοιχείο. Μετά, τοποθετούμε το οδηγό στοιχείο στην αντίστοιχη θέση του κάτω τριγωνικού πίνακα L. Επιπρόσθετα τα στοιχεία της κύρια διαγώνιου του πίνακα L είναι παντού 1. Τέλος, μετά την ολοκλήρωση του Gauss με οδήγηση ο πίνακας που προέκυψε είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας U.
5. Sort: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακας (a, b) και επιστρέφει ως έξοδο τους δύο πίνακες εισόδου (a, b) ταξινομημένους σε αύξουσα σειρά με βάση τον πίνακα a.
6. Splines: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακες (x, f) και επιστρέφει ως έξοδο ένα πίνακα με τους συντελεστές του πολυωνύμου Splines. Η συνάρτηση υπολογίζει και επιστρέφει τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} S^{(0)}(x) = \frac{1}{6}a_{0,0}x^3 + \frac{1}{2}a_{0,0}x^2 + cx + d_1, & x \le 0 \\ S^{(1)}(x) = -\frac{1}{6}a_{0,0}x^3 + \frac{1}{2}a_{0,0}x^2 + cx + d_2, & x \ge 0 \end{cases}$ όπου x είναι οι τιμές του πίνακα εισόδου x, δηλαδή επιστρέφει τους αγνώστους $a_{0,0}, c, d_1, d_2$ χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις για τον υπολογισμό $Ax = B$ από την άσκηση 3α της πρώτης εργασίας. Αρχικά η συνάρτηση ταξινομεί τους δύο πίνακες εισόδου κατά αύξουσα σειρά με βάση τον πίνακα x, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Sort και στη συνέχεια υπολογίζει μέσα σε μία εμφωλευμένη δομή επανάληψης τον πίνακα A. Ο πίνακας A περιλαμβάνει τους συντελεστές των συναρτήσεων $S^{(0)}(x)$ και $S^{(1)}(x)$ για x που είναι οι τιμές του πίνακα εισόδου x και ο πίνακας B περιλαμβάνει τις τιμές του πίνακα εισόδου f. Τέλος η συνάρτηση υπολογίζει και επιστέφει τον πίνακα x από την εξίσωση $Ax = B$.

Στη συνέχεια υλοποιούμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, που περιλαμβάνει επτά συναρτήσεις από τις οποίες οι έξι προέρχονται από την άσκηση 3 της πρώτης εργασίας:

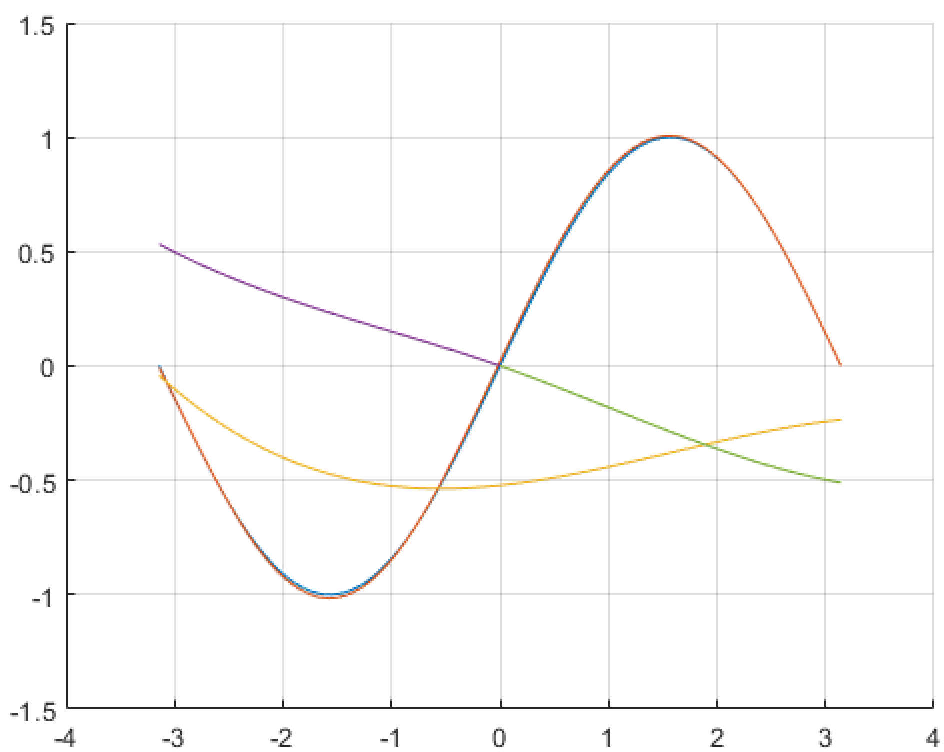
1. solverU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα άνω τριγωνικό πίνακα U και ένα διάνυσμα z και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων x, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Ux = z$ από την παραπάνω ανάλυση. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την τελευταία γραμμή του πίνακα U και του πίνακα b και τελειώνει στην πρώτη γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.
2. solverL: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L και ένα διάνυσμα Pb και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων z, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Lz = Pb$ από την παραπάνω ανάλυση. Μετά την εύρεση του διανύσματος z, το συγκεκριμένο διάνυσμα χρησιμοποιείται ως είσοδο στην συνάρτηση solverU. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την πρώτη γραμμή του πίνακα L και του πίνακα Pb και τελειώνει στην τελευταία γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.
3. multi: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και ένα διάνυσμα και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό. Αρχικά η συνάρτηση ελέγχει αν πληρούνται οι συνθήκες για τον πολλαπλασιασμό του πίνακα με το διάνυσμα, δηλαδή αν ο αριθμός των στηλών του πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του διανύσματος. Αν δεν ισχύει η συνθήκη τότε το πρόγραμμα τερματίζει διαφορετικά πολλαπλασιάζει κάθε γραμμή του πίνακα με την στήλη του διανύσματος.
4. PLU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα A και επιστρέφει ως έξοδο τους τρεις πίνακες P, L και U. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση υλοποιείται ο αλγόριθμος του Gauss με οδήγηση και αυτό γιατί, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το κύριο κορμό για την εύρεση των τριών πινάκων που θέλουμε να επιστρέψουμε ως έξοδο. Πιο αναλυτικά, αρχικά χρησιμοποιούμε μία εμφωλευμένη δομή επανάληψης for για να βρούμε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην στήλη που εξετάζουμε κάθε φορά. Αφού βρούμε αυτό το στοιχείο τότε κάνουμε ανταλλαγή μεταξύ των γραμμών που περιέχει το συγκεκριμένο στοιχείο και της γραμμής που θα χρησιμοποιηθεί ως η οδηγός γραμμή. Την πληροφορία για το ποιες γραμμές ανταλλάχθηκαν μεταξύ του την αποθηκεύουμε στον πίνακα P. Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι η οδηγός γραμμή σε κάθε επανάληψη θα είναι η αμέσως επόμενη γραμμή. Ύστερα, βρίσκουμε το οδηγό στοιχείο (το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο) σε κάθε οδηγό γραμμή και μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από το οδηγό στοιχείο. Μετά, τοποθετούμε το οδηγό στοιχείο στην αντίστοιχη θέση του κάτω τριγωνικού πίνακα L. Επιπρόσθετα τα στοιχεία της κύρια διαγώνιου του πίνακα L είναι παντού 1. Τέλος, μετά την ολοκλήρωση του Gauss με οδήγηση ο πίνακας που προέκυψε είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας U.
5. AT: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα του πίνακα εισόδου.
6. multiMatrix: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακες και επιστρέφει ως έξοδο τον πίνακα που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό. Αρχικά η συνάρτηση ελέγχει αν πληρούνται οι συνθήκες για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων, δηλαδή αν ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Αν δεν ισχύει η συνθήκη τότε το πρόγραμμα τερματίζει διαφορετικά πολλαπλασιάζει κάθε γραμμή του πίνακα με τις στήλη του άλλου πίνακα.
7. Square: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακας και επιστρέφει ως έξοδο ένα πίνακα που περιλαμβάνει τους συντελεστές του προσεγγιστικού πολυωνύμου. Η πρώτη μεταβλητή της συνάρτησης ορίζει πόσους συντελεστές θέλουμε να έχει το πολυώνυμο και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συναρτήσεις υπολογίζουμε και επιστρέφουμε τους συντελεστές μέσα σε ένα πίνακα.

Μετά θα συγκρίνουμε τις παραπάνω προσεγγίσεις όσον αφορά στην ακρίβεια προσέγγισης στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα που θα δημιουργηθεί από το MATLAB για τα συγκεκριμένα σημεία που επιλέξαμε. Το διάγραμμα απεικονίζεται στην εικόνα ένα. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η κόκκινη καμπύλη που αναπαριστά την πολυωνυμική προσέγγιση Lagrange συμπίπτει σχεδόν με την καμπύλη του ημιτόνου που είναι η μπλε καμπύλη και επομένως έχει την μεγαλύτερη ακρίβεια από τις υπόλοιπες προσεγγίσεις. Επίσης, μπορούμε να εξάγουμε το αποτέλεσμα ότι η κίτρινη καμπύλη, δηλαδή μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων έχει καλύτερη ακρίβεια από την Splines και χειρότερη από την Lagrange, ενώ η Splines έχει την χειρότερη ακρίβεια όπως βλέπουμε από την μοβ και πράσινη καμπύλη στο διάγραμμα.

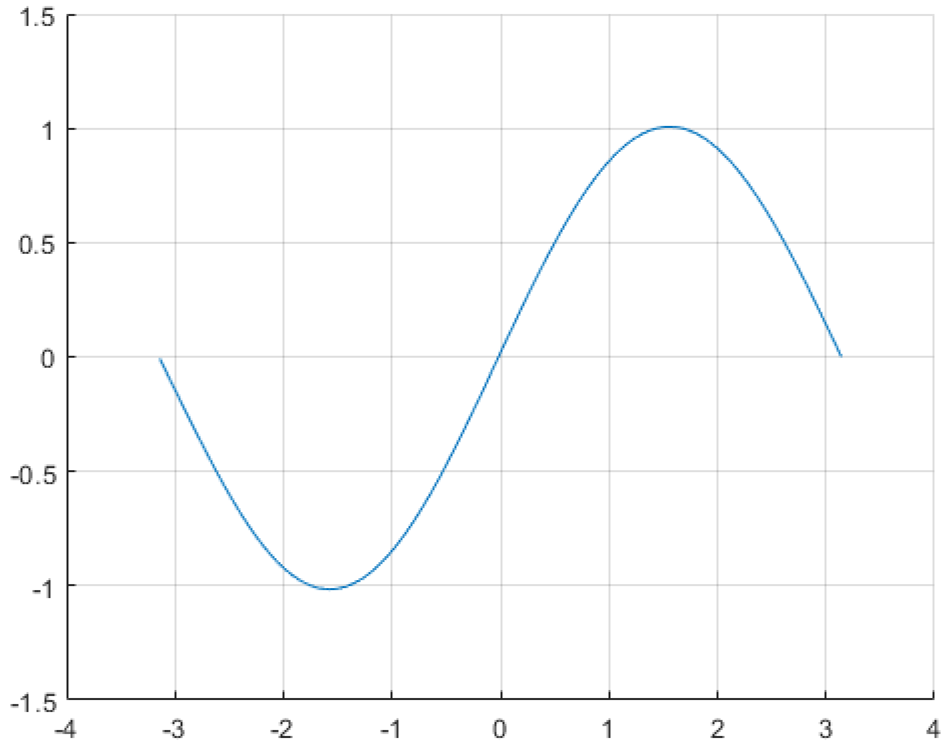
Το σφάλμα προσέγγισης δίνεται από τον τύπο:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} max_{x\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

Αν προβάλουμε το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο $[-\pi, \pi]$ τότε η καμπύλη που προκύπτει απεικονίζεται στην εικόνα δύο. Τέλος χρησιμοποιώντας το MATLAB εμφανίζουμε σε ένα διάστημα τιμών $[-\pi, \pi]$ τις τιμές του ημιτόνου και τις τιμές του πολυωνύμου Lagrange, ώστε να μπορέσουμε να δούμε πόσα ψηφία ακρίβειας πετύχαμε. Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαίο να τονιστεί ότι από τις τρείς μεθόδους προσέγγισης επιλέξαμε την πολυωνυμική προσέγγιση Lagrange γιατί έχει την μεγαλύτερη ακρίβεια από τις υπόλοιπες προσεγγίσεις. Μετά από την σύγκριση των αποτελεσμάτων βλέπουμε ότι έχουμε ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου για τα συγκεκριμένα σημεία που επιλέξαμε.



Εικόνα 1: Γραφική αναπαράσταση προσεγγίσεων



Εικόνα 2: Γραφική αναπαράσταση σφάλματος

Υπόδειξη: Στον φάκελο Άσκηση 5 υπάρχουν αρχεία που περιλαμβάνουν τον κώδικα των γραφικών παραστάσεων και την εύρεση της ακρίβειας των ψηφίων σε MATLAB και των προσεγγίσεων σε Python.

Άσκηση 6

Στην συγκεκριμένη άσκηση μας ζητείται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης του ημιτόνου στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία που επέλεξα στην προηγούμενη άσκηση. Επειδή όμως τα σημεία που επιλέξαμε στην άσκηση 5 ανήκουν στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ και δεν υπάρχει κανένα σημείο που να ανήκει στο διάστημα που μας ζητείται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε δέκα καινούργια σημεία στο διάστημα αυτό. Τα σημεία που επιλέγουμε είναι:

$$x = [0, 0.7145354001734879, 0.7504025754330428, 0.6292925583709822,$$

$$0.7162486150150638, 1.4279559200937, 0.6196131447899629,$$

$$0.8962171826862333, 0.38295764376347563, 1.5707963267948966]$$

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης ημιτόνου το υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας δύο μεθόδους:

- Μέθοδο τραπεζίου
- Μέθοδο Simpson

Αρχικά υλοποιούμε τη μέθοδο τραπεζίου, που έχει δύο συναρτήσεις:

1. Sort: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα a και επιστρέφει ως έξοδο το πίνακα εισόδου a ταξινομημένο σε αύξουσα σειρά.
2. Trap: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και επιστρέφει ως έξοδο δύο πραγματικούς αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος είναι η τιμή του ολοκληρώματος και ο δεύτερος είναι η τιμή του σφάλματος. Αρχικά σε μία δομή επανάληψης υπολογίζω τα ισομήκη υποδιαστήματα $x_i = x_0 + k\frac{b-a}{N}, k = 0, \dots, N$, όπου N είναι τα διαστήματα, b είναι το τελικό σημείο και a είναι το αρχικό σημείο. Τέλος, η συνάρτηση επιστρέφει τη τιμή του ολοκληρώματος $\frac{b-a}{2N}\left(f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right)$ και τη τιμή του σφάλματος $\frac{(b-a)^3}{12N^3}M,\ M = \max_{x\in[a,b]}\{|f''(x)|: x \in [a,b]\}$.

Μετά υλοποιούμε τη μέθοδο Simpson, που έχει δύο συναρτήσεις:

1. Sort: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα a και επιστρέφει ως έξοδο το πίνακα εισόδου a ταξινομημένο σε αύξουσα σειρά.
2. Simpson: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και επιστρέφει ως έξοδο δύο πραγματικούς αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος είναι η τιμή του ολοκληρώματος και ο δεύτερος είναι η τιμή του σφάλματος. Αρχικά σε μία δομή επανάληψης υπολογίζω τα ισομήκη υποδιαστήματα $x_i = x_0 + k\frac{b-a}{N}, k = 0, \dots, N$, όπου N είναι τα διαστήματα, b είναι το τελικό σημείο και a είναι το αρχικό σημείο. Τέλος, η συνάρτηση επιστρέφει τη τιμή του ολοκληρώματος $\frac{b-a}{3N}\left(f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1})\right)$ και τη τιμή του σφάλματος $\frac{(b-a)^5}{180N^4}M,\ M = \max_{x\in[a,b]}\left\{\left|f^{(4)}(x)\right|: x \in [a,b]\right\}$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος και του σφάλματος για τα σημεία που επιλέξαμε:

- Μέθοδο τραπεζίου:
  - Τιμή ολοκληρώματος: 0.9974602317917257
  - Τιμή σφάλματος: 0.003987432700655841
- Μέθοδο Simpson:
  - Τιμή ολοκληρώματος: 0.8272399468582088
  - Τιμή σφάλματος: 8.097609738979529e-06

Τέλος το σφάλμα προσέγγισης θεωρητικά είναι ότι θα σχηματιστή μία τεθλασμένη γραμμή που θα προσεγγίζει την συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο κλειστό διάστημα που υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα.

Υπόδειξη: Στον φάκελο Άσκηση 6 υπάρχουν αρχεία που περιλαμβάνουν τον κώδικα σε Python.

Άσκηση 7

Στην συγκεκριμένη άσκηση επιλέγουμε τις μετοχές Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ) και Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ) ώστε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση τιμής κλεισίματος των μετοχών με πολυώνυμο δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Για τον υπολογισμό τον συναρτήσεων δημιουργούμε πρόγραμμα που περιλαμβάνει επτά συναρτήσεις:

1. solverU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα άνω τριγωνικό πίνακα U και ένα διάνυσμα z και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων x, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Ux = z$ από την παραπάνω ανάλυση. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την τελευταία γραμμή του πίνακα U και του πίνακα b και τελειώνει στην πρώτη γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.
2. solverL: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L και ένα διάνυσμα Pb και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων z, δηλαδή υπολογίζεται η σχέση $Lz = Pb$ από την παραπάνω ανάλυση. Μετά την εύρεση του διανύσματος z, το συγκεκριμένο διάνυσμα χρησιμοποιείται ως είσοδο στην συνάρτηση solverU. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ξεκινάει από την πρώτη γραμμή του πίνακα L και του πίνακα Pb και τελειώνει στην τελευταία γραμμή των αντίστοιχων πινάκων.
3. multi: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και ένα διάνυσμα και επιστρέφει ως έξοδο το διάνυσμα που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό. Αρχικά η συνάρτηση ελέγχει αν πληρούνται οι συνθήκες για τον πολλαπλασιασμό του πίνακα με το διάνυσμα, δηλαδή αν ο αριθμός των στηλών του πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του διανύσματος. Αν δεν ισχύει η συνθήκη τότε το πρόγραμμα τερματίζει διαφορετικά πολλαπλασιάζει κάθε γραμμή του πίνακα με την στήλη του διανύσματος.
4. PLU: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα A και επιστρέφει ως έξοδο τους τρεις πίνακες P, L και U. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση υλοποιείται ο αλγόριθμος του Gauss με οδήγηση και αυτό γιατί, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το κύριο κορμό για την εύρεση των τριών πινάκων που θέλουμε να επιστρέψουμε ως έξοδο. Πιο αναλυτικά, αρχικά χρησιμοποιούμε μία εμφωλευμένη δομή επανάληψης for για να βρούμε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην στήλη που εξετάζουμε κάθε φορά. Αφού βρούμε αυτό το στοιχείο τότε κάνουμε ανταλλαγή μεταξύ των γραμμών που περιέχει το συγκεκριμένο στοιχείο και της γραμμής που θα χρησιμοποιηθεί ως η οδηγός γραμμή. Την πληροφορία για το ποιες γραμμές ανταλλάχθηκαν μεταξύ του την αποθηκεύουμε στον πίνακα P. Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι η οδηγός γραμμή σε κάθε επανάληψη θα είναι η αμέσως επόμενη γραμμή. Ύστερα, βρίσκουμε το οδηγό στοιχείο (το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο) σε κάθε οδηγό γραμμή και μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από το οδηγό στοιχείο. Μετά, τοποθετούμε το οδηγό στοιχείο στην αντίστοιχη θέση του κάτω τριγωνικού πίνακα L. Επιπρόσθετα τα στοιχεία της κύρια διαγώνιου του πίνακα L είναι παντού 1. Τέλος, μετά την ολοκλήρωση του Gauss με οδήγηση ο πίνακας που προέκυψε είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας U.
5. AT: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο ένα πίνακα και επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα του πίνακα εισόδου.
6. multiMatrix: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακες και επιστρέφει ως έξοδο τον πίνακα που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό. Αρχικά η συνάρτηση ελέγχει αν πληρούνται οι συνθήκες για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων, δηλαδή αν ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Αν δεν ισχύει η συνθήκη

τότε το πρόγραμμα τερματίζει διαφορετικά πολλαπλασιάζει κάθε γραμμή του πίνακα με τις στήλη του άλλου πίνακα.

7. Square: Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο δύο πίνακας και επιστρέφει ως έξοδο ένα πίνακα που περιλαμβάνει τους συντελεστές του προσεγγιστικού πολυωνύμου. Η πρώτη μεταβλητή της συνάρτησης ορίζει πόσους συντελεστές θέλουμε να έχει το πολυώνυμο και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συναρτήσεις υπολογίζουμε και επιστρέφουμε τους συντελεστές μέσα σε ένα πίνακα.

Στη συνέχεια, μεταβάλλουμε τη μεταβλητή $n = 3, 4$ και 5 ώστε να δημιουργήσουμε το προσεγγιστική συνάρτηση δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού αντιστοίχως:

- Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ):
  - $n = 3$ (δευτέρου βαθμού):
    $$y = 99458.4210202385 - 769.7675960983582 * x + 20.607289296750995 * x^2$$
  - $n = 4$ (τρίτου βαθμού):
    $$y = 94708.78252873512 + 312.2204370491294 * x - 56.666005665322025 * x^2 + 1.7501301406504353 * x^3$$
  - $n = 5$ (τετάρτου βαθμού):
    $$y = 130559.82717097085 - 10901.083678022222 * x + 1207.4619201234327 * x^2 - 59.18596546910694 * x^3 + 1.0621853147911822 * x^4$$
- Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ):
  - $n = 3$ (δευτέρου βαθμού):
    $$y = 78702.7235644717 + 328.84616200824246 * x - 21.905985771989844 * x^2$$
  - $n = 4$ (τρίτου βαθμού):
    $$y = 77654.66907541196 + 567.5974727188828 * x - 38.95709899127372 * x^2 + 0.38618344398711707 * x^3$$
  - $n = 5$ (τετάρτου βαθμού):
    $$y = 122255.93840012413 - 13382.556611986924 * x + 1533.7086529214623 * x^2 - 75.42268737188284 * x^3 + 1.3214346686613714 * x^4$$

Μετά θα βρούμε την τιμή της συνάρτησης για $x = 22$ (22/05/2018) καθώς δηλώνει την ημερομηνία που θέλω να εξετάσω για την αμέσως επόμενη συνεδρίαση του χρηματιστηρίου χρησιμοποιώντας το MATLAB:

- Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ):
  - Δευτέρου βαθμού: 92497
  - Τρίτου βαθμού: 92787
  - Τετάρτου βαθμού: 93759
- Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ):
  - Δευτέρου βαθμού: 75335
  - Τρίτου βαθμού: 75399
  - Τετάρτου βαθμού: 76608

Ύστερα θα συγκρίνουμε ποιοτικά τις τιμές που έχουμε διαθέσιμες αλλά και για την ημέρα πρόβλεψης:

Ημερομηνία	Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ)				Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ)			
	Πραγματική τιμή	Τιμή πρόβλεψης			Πραγματική τιμή	Τιμή πρόβλεψης		
		Δευτέρου βαθμού	Τρίτου βαθμού	Τετάρτου βαθμού		Δευτέρου βαθμού	Τρίτου βαθμού	Τετάρτου βαθμού
22/05/2018	87000	92497	92787	93759	76600	75335	75399	76608
21/05/2018	92500	92381	92484	92581	76000	75948	75971	76092
18/05/2018	92300	92279	92176	91889	77700	77524	77502	77145
17/05/2018	92400	92328	92238	92132	77800	77962	77943	77810
16/05/2018	91800	92418	92366	92438	78200	78356	78345	78435
15/05/2018	92000	92549	92549	92743	77500	78707	78707	78948
14/05/2018	93600	92721	92776	93006	80500	79013	79025	79311
11/05/2018	94900	93484	93616	93526	80300	79669	79698	79586
10/05/2018	92400	93821	93915	93731	79200	79801	79821	79593
09/05/2018	93900	94200	94205	94077	79000	79888	79889	79730
08/05/2018	95000	94619	94476	94676	80600	79932	79900	80149

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι για τις τιμές που έχουμε διαθέσιμες, οι τιμές κλεισίματος των μετοχών που προβλέπουμε έχουν μία μικρή απόκλιση με τις πραγματικές τιμές κλεισίματος των δύο μετοχών. Ωστόσο δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο για την επόμενη συνεδρίαση καθώς για 22/05/2018 η τιμή πρόβλεψης της μετοχής Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ) είχε μία μεγάλη απόκλιση από την πραγματική τιμή ενώ η τιμή πρόβλεψης της μετοχής Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ) είχε μία μικρή απόκλιση από την πραγματική τιμή κλεισίματος.

Τέλος θα προβλέψουμε την τιμή κάθε μετοχής για πέντε συνεδριάσεις μετά από τις τιμές που έχουμε διαθέσιμες:

Ημερομηνία	Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ)				Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ)			
	Πραγματική τιμή	Τιμή πρόβλεψης			Πραγματική τιμή	Τιμή πρόβλεψης		
		Δευτέρου βαθμού	Τρίτου βαθμού	Τετάρτου βαθμού		Δευτέρου βαθμού	Τρίτου βαθμού	Τετάρτου βαθμού
29/05/2018	82600	94466	98791	137680	72200	69816	70771	119150
25/05/2018	85400	93094	94444	102830	72300	73233	73531	83966
24/05/2018	86700	92854	93756	98653	75600	73977	74176	80268
23/05/2018	88000	92655	93207	95710	77000	74678	74800	77913
22/05/2018	87000	92497	92787	93759	76600	75335	75399	76608

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι για τη μετοχή Aegean Airlines (ΑΡΑΙΓ) υπάρχει μία μεγάλη απόκλιση των τιμών κλεισίματος καθώς η τιμή πρόβλεψης είναι τελείως διαφορετική από την πραγματική τιμή. Με λίγα λόγια οι τιμές πρόβλεψης μας λέει ότι η τιμή της μετοχής πρόκειται να αυξηθεί ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει πτώση της μετοχής αν εξετάσουμε από την ημερομηνία 08/05/2018 μέχρι την ημερομηνία 29/05/2018. Τα εντελώς αντίθετα αποτελέσματα έχουμε για την τιμή της μετοχής Ελληνικά Πετρέλαια (ΕΛΠΕ) αφού υπάρχει μία μικρή απόκλιση των τιμών πρόβλεψης από την πραγματική τιμή. Με λίγα λόγια οι τιμές πρόβλεψης μας λέει ότι η τιμή της μετοχής πρόκειται να μειωθεί όπου και αυτό συμβαίνει αν εξετάσουμε από την ημερομηνία 08/05/2018 μέχρι την ημερομηνία 29/05/2018.

Υπόδειξη: Στον φάκελο Άσκηση 7 υπάρχουν αρχεία που περιλαμβάνουν τον κώδικα για την εύρεση των τιμών σε MATLAB και για τον σχηματισμών των προσεγγίσεων σε Python.