

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

15 dicembre 2016 | Giovanni Iannelli | Jülich Supercomputing Centre

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

Parte I: Introduzione

15 dicembre 2016 | Giovanni Iannelli

Massa dell'assione

Una nuova particella

- L'assione è un'ipotetica particella elementare
- È descritta dal modello di Peccei-Quinn
- Introdotto per spiegare la piccola violazione CP della QCD
- Solo in seguito Weinberg e Wilczek capirono l'importanza dell'assione

Materia oscura?

- L'assione ha un accoppiamento molto debole con le altre particelle
- È il principale candidato ad essere materia oscura

Lagrangiana efficace

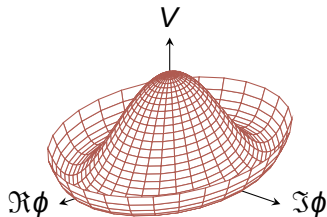
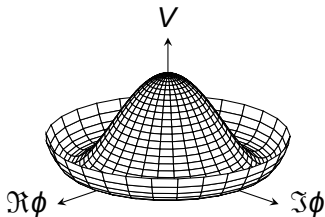
- L'assione è accoppiato a un'altra particella: il s-assione
- Sono descritti dal campo scalare complesso ϕ
 - $|\phi|$ è il campo del s-assione
 - $\arg \phi$ è il campo dell'assione
- La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{8} (\phi^* \phi - f^2)^2 + \chi \frac{|\phi|}{f} \cos \arg \phi$$

Cappello messicano

Il potenziale efficace è:

$$V = \frac{\lambda}{8} (\phi^* \phi - f^2)^2 - \chi \frac{|\phi|}{f} \cos \arg \phi$$



Oscillazioni massive

- Sono presenti due modi di oscillazione
- Le loro masse corrispondenti sono:
 - s-assione: $m_s \sim \sqrt{\lambda} f$
 - assione: $m_a \sim \sqrt{\chi}/f$
- f determina l'ordine di grandezza di m_s
- f è molto grande: $\sim 10^{10}$ GeV
- χ è l'accoppiamento, ed è molto piccolo
- La massa dell'assione è anch'essa molto piccola

Come si calcola la massa dell'assione

Si definisce un funzionale chiamato **carica topologica**:

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

- $F_{\mu\nu}$ è il tensore degli sforzi del campo gluonico
- Q assume solo valori interi nei sistemi comunemente considerati
- Q è utile perché la sua suscettibilità è proporzionale a m_a^2 :

$$\frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \chi = f^2 m_a^2$$

- È possibile ottenere m_a misurando Q e mediando il quadrato sulle configurazioni di campo

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

Parte II: Modello di Schwinger

Un modello giocattolo

- Idee e algoritmi possono essere testati su un modello semplificato
- Il modello di Schwinger è una teoria $U(1)$ in due dimensioni
- Condivide diverse proprietà con la QCD
- La principale è il confinamento dei fermioni
- F_{ij} è ora il tensore elettromagnetico in 2D
- La carica topologica si riduce a:

$$Q = \frac{g}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} F_{ij}$$

Q sul reticolo

- F_{ij} è contenuto nelle plaquette: $\square \simeq e^{iga^2 F_{ij}}$
- La carica topologica è approssimata da:

$$Q = \frac{g}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} F_{ij} \simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} \Im \log \square = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} \arg \square$$

- Gli elementi di $U(1)$ sono rappresentati da $e^{i\varphi}$, con $\varphi \in (-\pi, \pi]$
- Anche $\arg \square$ deve essere $\in (-\pi, \pi]$
- $\arg \square$ si calcola sommando le anomalie dei quattro link, e sostituendo l'angolo ottenuto con l'equivalente $\in (-\pi, \pi]$

$$\arg \square = \varphi_{\square} - \left[\frac{\varphi_{\square} - \pi}{2\pi} \right] 2\pi$$

Proprietà di Q

- Con condizioni al bordo periodiche $Q \in \mathbb{Z}$, perché:

$$\sum_{\square} \varphi_{\square} = 0 \implies Q = - \sum_{\square} \left\lfloor \frac{\varphi_{\square} - \pi}{2\pi} \right\rfloor$$

- Invertendo l'orientazione dello spazio: $Q \rightarrow -Q$
- Regioni del reticolo contribuiscono a Q (istantoni)
- Alterando i link interni a un istantone, il suo contributo non cambia
- Nel limite al continuo, gli istantoni non si creano né distruggono, possono solo muoversi nello spazio

Campionamento dei link I

- Nella mia simulazione mi sono limitato all'approssimazione quenched. L'azione è pertanto:

$$S_E = \beta \sum_{\square} (1 - \Re \square)$$

- Per campionare i link U , ho usato un algoritmo locale:

$$P(U)dU \propto e^{\beta \Re(US)} dU = e^{\beta k \cos \arg U_0} dU_0$$

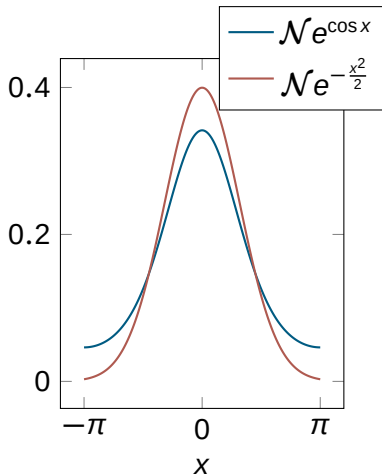
- S è la somma delle due staple connesse a U
- $k \equiv |S|$, $U_0 \equiv US/k \in U(1)$, $dU_0 = dU$

Campionamento dei link II

- Bisogna campionare:

$$P(\varphi_0) \propto e^{\beta k \cos \varphi_0}$$

- È simile a $e^{\beta k \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2}\right)}$
- Si campiona φ_0 dalla gaussiana
- Si accetta/rigetta con Metropolis-Hastings



Misura delle osservabili

- A ogni spazzata, l'algoritmo locale viene iterato su tutti i link
- Le osservabili vengono calcolate dopo ogni spazzata
- Gli errori dei valori medi vengono valutati con il binning (o bunching) dividendo le misure in 20 bin
- In ogni simulazione sono state iterate 50000 spazzate
- Ogni simulazione è partita da una configurazione iniziale calda
- Le prime 10000 spazzate sono state scartate per termalizzare
- Il tempo di autocorrelazione è calcolato con il Jackknife applicando il bunching ai sottoinsiemi

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

Parte III: Toro

15 dicembre 2016 | Giovanni Iannelli

Test dell'algoritmo

- Il primo test è stato la misura della plaquette media
- Le condizione al bordo sono periodiche, cioè su un toro
- Ho confrontato le mie misure con valori in letteratura:

$\beta = 7.2$ in un reticolo 24×24

- 0.927722(54) Dürr-Hoelbling, 2005
- 0.927681(78) nel mio caso

Test dell'algoritmo

- Il primo test è stato la misura della plaquette media
- Le condizione al bordo sono periodiche, cioè su un toro
- Ho confrontato le mie misure con valori in letteratura:

$\beta = 7.2$ in un reticolo 24×24

- 0.927722(54) Dürr-Hoelbling, 2005
- 0.927681(78) nel mio caso

La mia prima misura della plaquette era distante 7σ dal valore ottenuto da Dürr-Hoelbling in un articolo dell'anno precedente. Solo dopo averli contattati ci hanno detto che il loro bug è stato corretto l'anno successivo

Estrapolazione della suscettività topologica

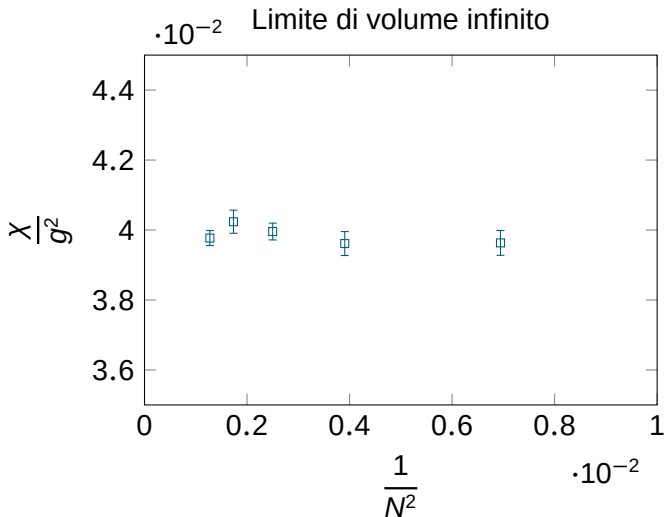
Limite di volume infinito:

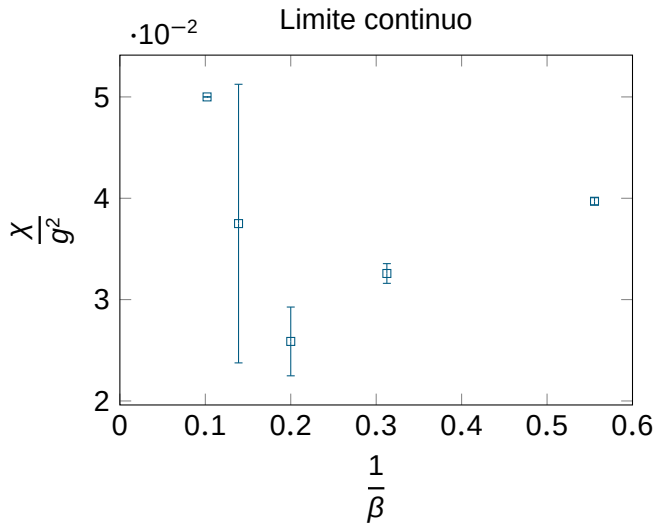
β	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
N	12	16	20	24	28

Limite continuo¹:

β	1.8	3.2	5.0	7.2	9.8
N	12	16	20	24	28

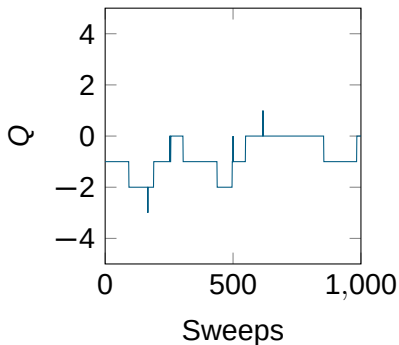
$$^1\beta = 1/(ag)^2 \implies \beta/N^2 = \text{costante}$$



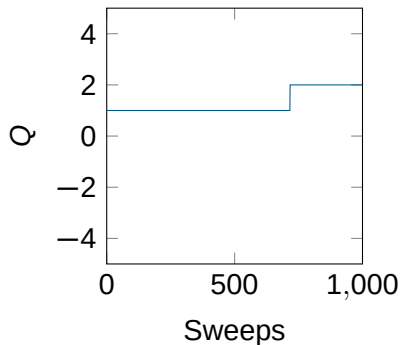


Freezing

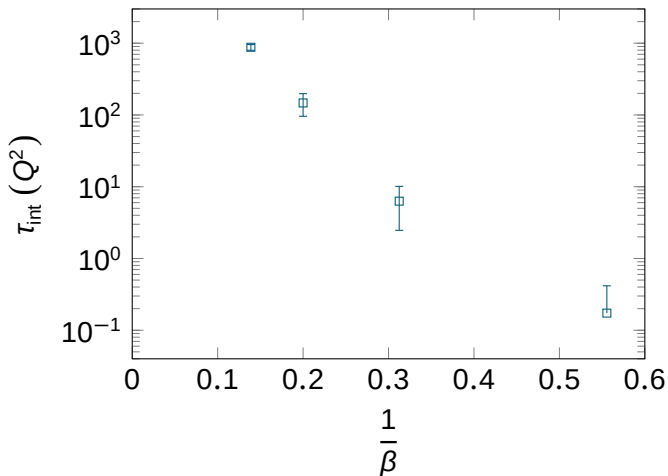
$\beta = 5.0, N = 20$

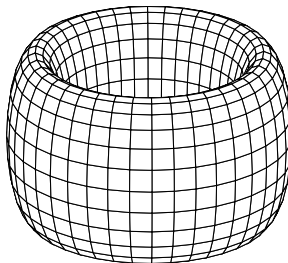
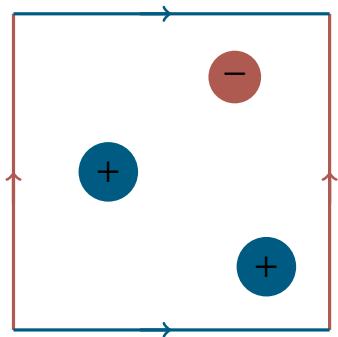


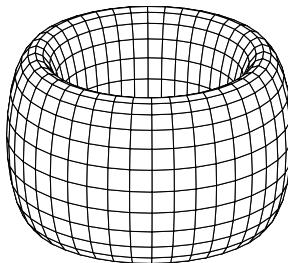
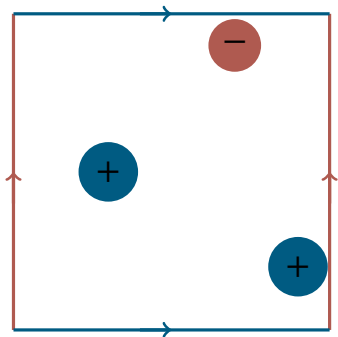
$\beta = 7.2, N = 24$

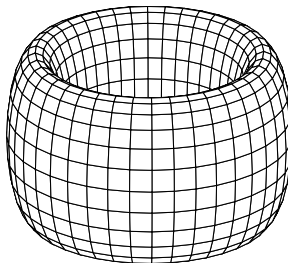
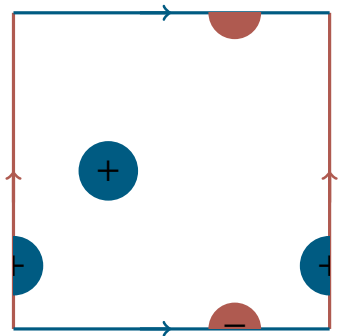


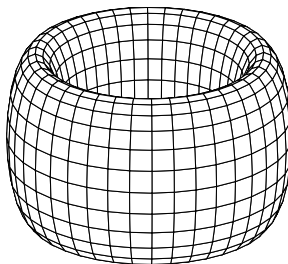
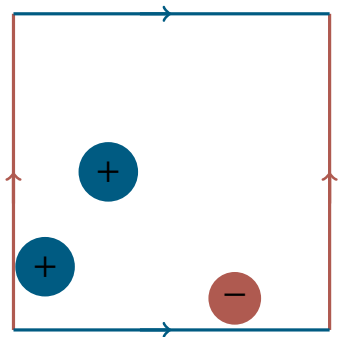
Tempo di autocorrelazione integrato

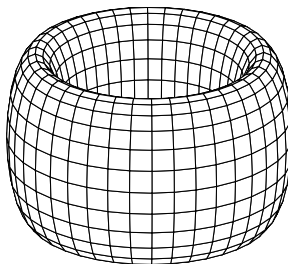
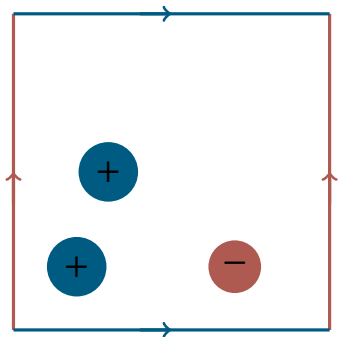






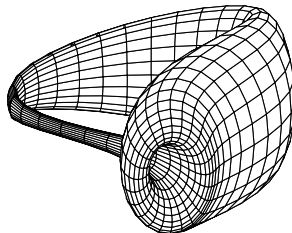
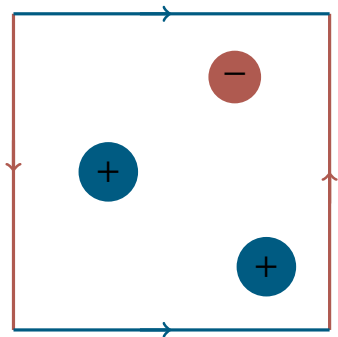


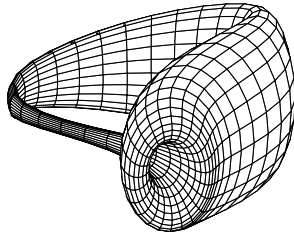
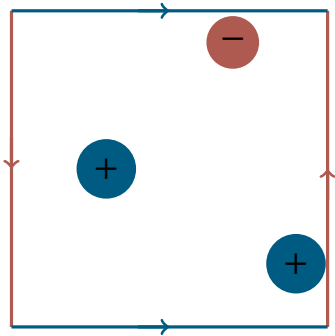


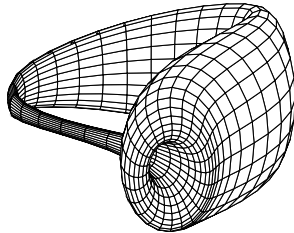
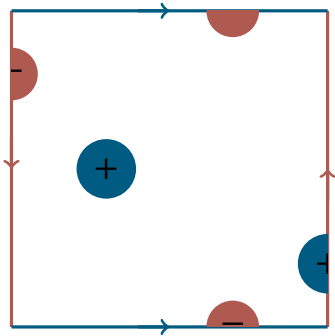


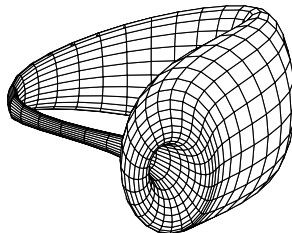
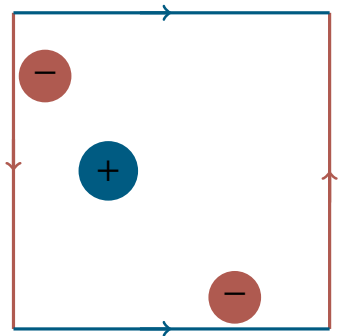
Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

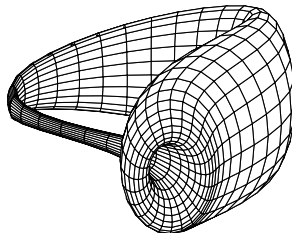
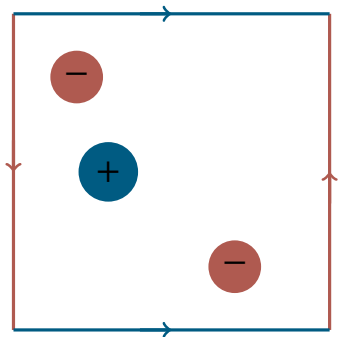
Parte IV: Bottiglia di Klein



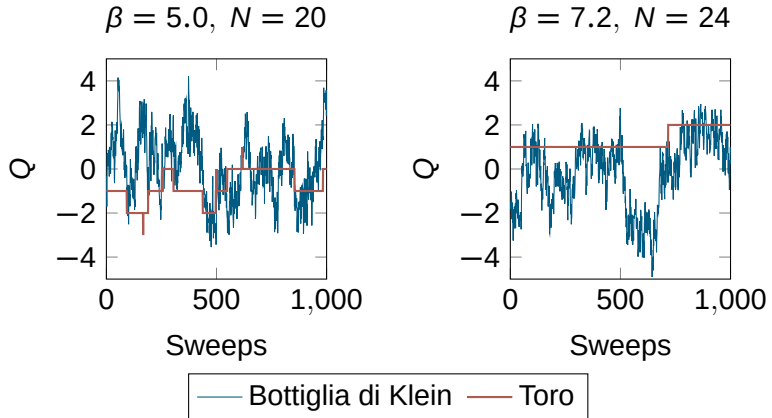




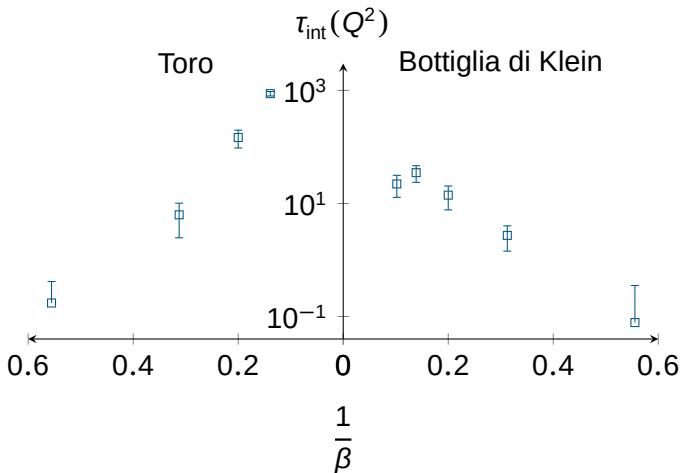




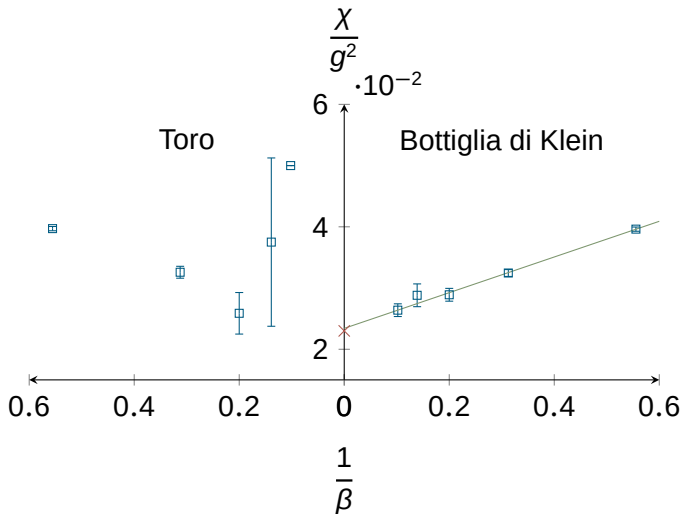
II freezing scompare



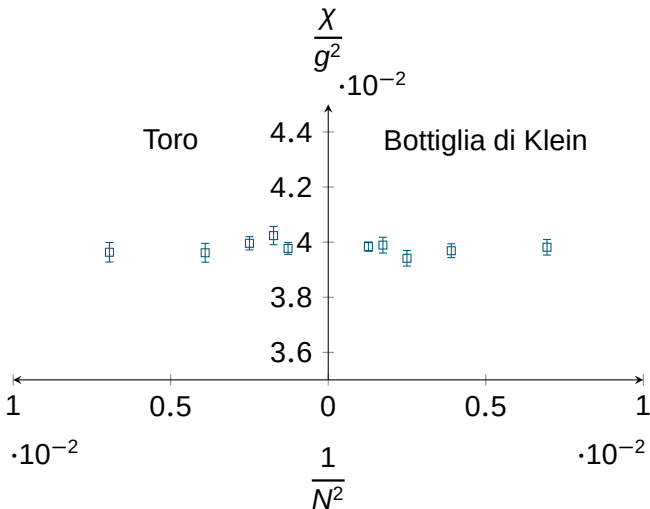
Tempo di autocorrelazione integrato



Limite continuo



Limite di volume infinito



Confronto delle misure

Plaquette:

- 0.927722(54) Dürr-Hoelbling, 2005, su un toro
- 0.927681(78) su un toro
- 0.927729(37) su una bottiglia di Klein

$\frac{\chi}{g^2}$ al continuo:

- 0.0230(6) Dürr-Hoelbling, 2005, su un toro
- 0.0234(8) su una bottiglia di Klein

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

Parte V: Conclusioni

Riassumendo:

- Sul toro e sulla bottiglia di Klein si ritrovano gli stessi valori per la plaquette e la suscettività topologica
- Gli artefatti alla suscettività dovuti alla scatola finita sono trascurabili anche per reticoli piccoli
- Sulla bottiglia di Klein si evita il problema del freezing
- Gli istantoni che danno contributo alla carica totale, al limite al continuo, rimangono inalterati su un toro e cambiano di segno su una bottiglia di Klein
- Tuttavia, su varietà non orientabili, Q perde diverse proprietà:
 - Non assume più solo valori interi
 - Non rimane invariata se gli istantoni si spostano

Una nuova carica

- È possibile definire una nuova carica che abbia tali proprietà
- Si ottiene sommando alla carica 2 volte il loop di Polyakov lungo il bordo di Möbius
- Questa operazione, tuttavia, lascia un grado di libertà di gauge

$$Q = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} (\arg \square + 2P_0 + 4k\pi)$$

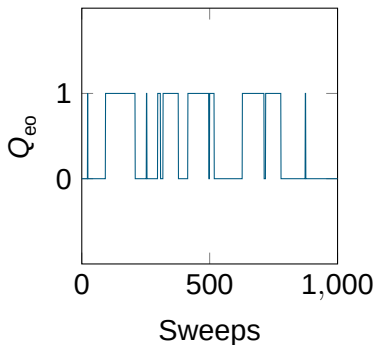
- Che può essere fissata prendendo il resto modulo 2

$$Q_{\text{eo}} = Q \mod 2$$

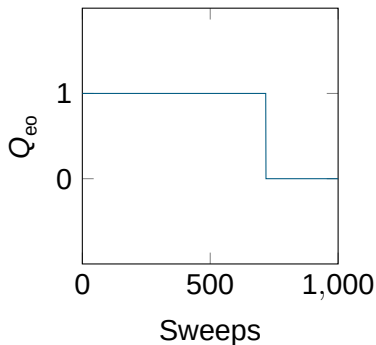
- È accoppiata anche questa con l'assione?

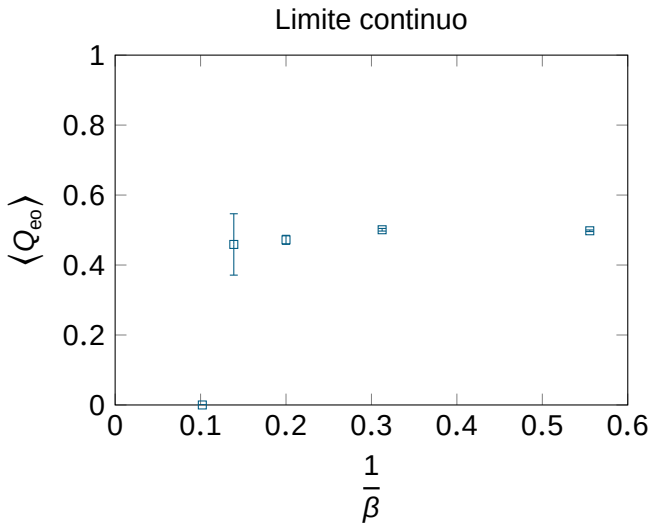
Ritorna il freezing

$\beta = 5.0, N = 20$



$\beta = 7.2, N = 24$





Estensione a $SU(3)$

- $\langle Q^2 \rangle / V$ ha un BIAS in varietà non orientabili
- Una definizione più generale di suscettività è:

$$\chi = \left\langle \int d^4x q(x) q(x_0) \right\rangle$$

- $q(x)$ è il contributo alla carica di una singola plaquette
- $\chi = \langle Q^2 \rangle / V$ con condizioni al bordo periodiche
- $\chi \neq \langle Q^2 \rangle / V$ su superfici non orientabili
- Il BIAS di χ diminuisce se x_0 si allontana dal bordo di Möbius²

²Come mostrato in “Lattice QCD on Non-Orientable Manifolds”,
S. Mages, K. Szabo, 2015

Modello di Schwinger quenched su una bottiglia di Klein

15 dicembre 2016 | Giovanni Iannelli | Jülich Supercomputing Centre