
Desigualdades

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

21 de febrero de 2014

1. DESIGUALDADES EN ESPACIOS VECTORIALES.

1.1. DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ.

Para todo par de vectores x, y en un espacio prehilbertiano:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (1.1)$$

Caso de igualdad: x, y son linealmente dependientes.

1.2. DESIGUALDAD TRIANGULAR.

Para todo par de vectores x, y de un espacio vectorial normado:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (1.2)$$

Caso de igualdad: x, y son de la forma $y = \lambda^2 x$ para algún λ .

2. DESIGUALDAD DE LAS MEDIAS.

2.1. MEDIA GEOMÉTRICA Y ARITMÉTICA.

Para cualesquiera x_1, x_2, \dots, x_n positivos:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.1)$$

Caso de igualdad: todos ellos son iguales, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2.2. DESIGUALDAD COMPLETA.

Para cualesquiera x_1, x_2, \dots, x_n positivos:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (2.2)$$

Caso de igualdad: todos ellos son iguales, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2.3. DESIGUALDAD GENERALIZADA.

Para cualesquiera x_1, x_2, \dots, x_n positivos, la función:

$$f(a) = \begin{cases} \left(\frac{x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a}{n} \right)^{1/a} & \text{si } a \neq 0 \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

es creciente.

Caso de igualdad: será además monótona cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.