

Planta RLC – Control en variables de estado

Juan José Guerra Ramírez

*Departamento de Energía Eléctrica y Automática. Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. CRA. 80 N° 65-31. Barrió Robledo.
juguerrar@unal.edu.co*

Abstract: Este análisis emplea principios fenomenológicos para el análisis y modelado de la planta RLC. Entre los objetivos está obtener un modelo del sistema, definir las entradas y salidas, variables y parámetros, realizar análisis de estabilidad, controlabilidad y aplicarle un control usando simulación en Matlab y Simulink como con la planta física. El fin del presente trabajo es demostrar el análisis y control de una planta iniciando con la obtención del modelo hasta el vector de ganancias pasando por análisis teórico de propiedades inherentes a la planta.

Keywords: Variables de estado, RLC, modelo, estabilidad, controlabilidad, observabilidad, control, controlador, simulaciones.

1. Introducción

El control efectivo de sistemas es esencial en una variedad de aplicaciones, desde la automatización industrial hasta la electrónica. Antes de abordar el control de un sistema, es fundamental comprender en profundidad su funcionamiento. Este proceso se basa en la modelación de sistemas y procesos, que proporciona la base para implementar estrategias de control precisas y eficientes.

En este informe se explora un ejemplo concreto: el control de una planta electrónica que incorpora elementos de inductancia, capacitancia y resistencia, formando un sistema RLC. Se inició este trabajo realizando un modelado fenomenológico de la planta RLC para derivar las ecuaciones diferenciales que gobiernan su comportamiento y poder obtener su representación en Espacio de Estados (*S.S por sus siglas en inglés*). Posteriormente, se aplicó técnicas de control diseñadas para sistemas lineales e invariantes (LIT), una categoría a la que pertenece este sistema, confirmada por la forma de sus ecuaciones características.

El proceso continuó con el análisis de la estabilidad y controlabilidad, utilizando la potente herramienta de software MATLAB, seguido de la simulación del sistema. La segunda fase de este trabajo se centró en el diseño de estrategias de control, que incluyen el

control por retroalimentación de estado y precompensación y la incorporación de la acción integral.

A lo largo de este informe, se desglosa en detalle cada uno de estos pasos y se presentan los resultados de la investigación. La meta es proporcionar una visión completa de cómo se aborda el control de sistemas complejos y ofrecer una comprensión sólida de las técnicas utilizadas en este proceso.

2. Modelado fenomenológico

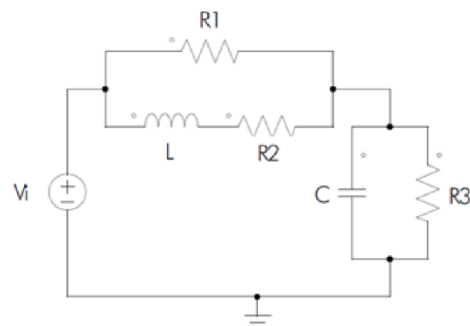


Figura 1. Circuito RLC

En la Figura 1. se observa el modelo eléctrico de la planta a trabajar donde la entrada del sistema es V_i , que

está dado por un DAC 5V controlado desde un Arduino UNO, y la salida del sistema es el *voltaje* en la resistencia R_3 que es igual a *voltaje* en el *capacitor*. Para la obtención del modelo se usó la fenomenología: Es menester tener presente que

- Corriente en un capacitor: $i_c = C V'_C$ (1)

- Voltaje en un inductor: $V_L = L i'_L$ (2)

- $i_{R1} = (V_i - V_C)/R_1$ (3)

NOTA: El *exponente prima* significa primera derivada.

Realizando un LVK en el circuito se llega a:

$$V_i = V_L + V_{R2} + V_C \quad (4)$$

Realizando un LCK en el nodo que une los dos paralelos:

$$i_L + i_{R1} = i_c + i_{R3} \quad (5)$$

Sabiendo que $V_{R2} = i_L R_2$ (6), se sustituye a (2) y (6) en (4), despejando se obtiene:

$$i'_L = i_L \left(-\frac{R_2}{L} \right) - \frac{V_C}{L} + \frac{V_i}{L} \quad (7)$$

Conociendo que $i_{R3} = V_C/R_3$ (8), se reemplaza a (1), (3) y (8) en (5) y despejando se obtiene:

$$V'_C = \frac{i_L}{C} - \frac{V_C}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{V_i}{R_1 C} \quad (9)$$

Usando a (7) y (9) y usando a i_L y V_C como variables de estado, esto dado que el condensador e inductancia son elementos que almacenan energía y a V_i como entrada de excitación del sistema se procede a crear el S.S teniendo presente que la salida del sistema es $V_{R3} = V_C$:

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \left(-\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_3 C} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

Ec. 1. Representación en espacio de estados del sistema

3. Simulación de la planta

Dado los parámetros de $R_1 = R_3 = 1000\Omega$, $R_2 = 220\Omega$, $L = 1mH$ y $C = 470\mu F$.

- Simulación en tiempo continuo

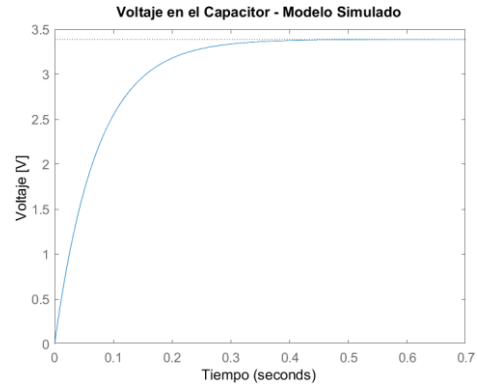


Figura 2. Comportamiento del sistema continuo frente a una entrada de 4V

Se observa en la figura anterior que el sistema en lazo abierto no es capaz de llegar a la referencia puesta, en este caso $V_i = 4V$. También se observa que el sistema es rápido dado que, se estabiliza en aproximadamente 0.4 segundos.

- Simulación en tiempo discreto

A continuación se procede a muestrear el sistema con un periodo de muestreo $T_s = 7ms$. Lo anterior dado que, este período de muestreo permite capturar cambios relativamente rápidos en la señal, manteniendo un margen de seguridad en términos de cumplimiento del teorema de Nyquist para evitar el aliasing. Se usó el retenedor de orden cero (ZOH) en la discretización.

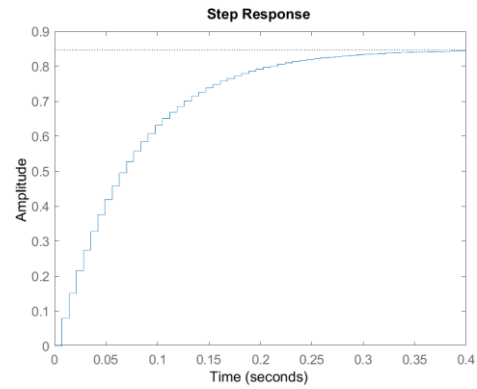


Figura 3. Comportamiento del sistema discreto frente al escalón unitario

- Simulación en tiempo discreto vs tiempo continuo

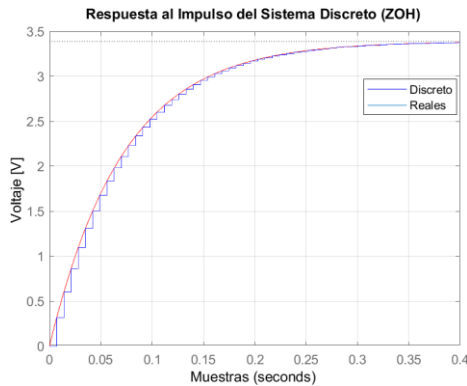


Figura 3.1. Comportamiento del sistema discreto vs sistema continuo

- Simulación en tiempo discreto vs tiempo continuo

Se tomaron datos reales con la planta RLC escribiendo un valor de $V_i = 4V$ en el DAC que es quien entrega energía a la planta (estos datos los encontrará en un archivo .txt como “DatosArduino_LazoAbierto_Referencia4V” en la carpeta “DatosArduino”). En la siguiente figura se observa la simulación del modelo discreto contra los datos obtenidos en el Serial del Arduino UNO.

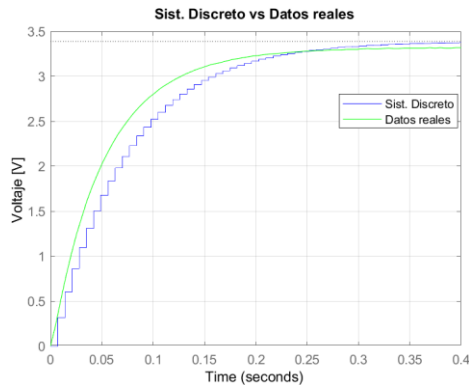


Figura 4. Modelo discreto vs datos reales

Con base a la figura anterior se infiere que el modelo discreto es bueno dado que, se aproxima a los datos extraídos de la planta en físico. Por ende, una primera conclusión es que el modelado fenomenológico es exacto en este caso de estudio dado que, el tiempo de estabilización y valor final son casi iguales. Se debe resaltar en este caso que los saltos entre muestras cuantizadas es evidente, lo anterior se debe a que, aunque el periodo de muestreo es relativamente pequeño, la planta tiene una dinámica muy rápida. Por lo tanto, el T_s aunque cumple con su finalidad que es

crear un modelo discreto exacto del comportamiento real, se observan los saltos entre muestras; sin embargo, cabe resaltar que esto no representa un problema a considerar para el control.

4. Función de transferencia, realizaciones y análisis de estabilidad y controlabilidad.

La función de transferencia del sistema continuo es:

$$G(s) = \frac{2.128s + 2.596 \cdot 10^6}{s^2 + 2.2 \cdot 10^5 + 3.064 \cdot 10^6}$$

- Realizaciones

Controlable: Es una representación del sistema en la que todas las dinámicas controlables del sistema se encuentran en la parte superior de la matriz A . Esto facilita el diseño de controladores ya que, todas las dinámicas relevantes se encuentran en la parte superior de la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 \cdot 10^5 & -3.064 \cdot 10^6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2.128 & 2.596 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

Observable: Es una representación para el diseño de observadores ya que, todas las dinámicas relevantes están en la parte superior de la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 \cdot 10^5 & 1 \\ -3.064 \cdot 10^6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.128 \\ 2.596 \cdot 10^6 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

Modal: Es una realización que se enfoca en los modos propios o modos naturales del sistema. Permite descomponer el sistema en modos individuales que oscilan de manera independiente y son característicos del comportamiento dinámico del sistema.

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -13.93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31.25 \\ -0.3688 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0.3095 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

- Estabilidad

Externa: Se trata de realizar un análisis de estabilidad del sistema para la función de transferencia. Los polos de la $T.F$ son $-2.1999 \cdot 10^5$ y -13.9271 . Ambos polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano. Por ende, significa que el sistema (continuo) es estable.

Interna: Se trata de encontrar los valores propios de la matriz A y la controlabilidad depende de la ubicación de estos

eigenvalores. Donde estos últimos son, nuevamente, $-2.1999 \cdot 10^5$ y -13.9271 . Ambos polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano. Por ende, *significa que el sistema es estable*. Con lo anterior concluye que el sistema en el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo es el mismo sistema, ambos dominios solo son formas de representación del sistema.

- Controlabilidad

Con este análisis se busca saber si el sistema puede controlarse, es decir, evolucionar su vector de estados desde un punto *a* a un punto *b* en un tiempo finito usando una entrada arbitraria (señal de control). Como se trata de un sistema Lineal e Invariantes en el Tiempo (LIT), se sabe que el sistema es controlable si el rango de la matriz $[B \ A \cdot B]$ es rango pleno. Resolviendo la matriz de matrices y hallando el rango del resultado se tiene que el tamaño de la matriz es 2×2 y el rango es 2. Por ende, *el sistema es controlable*.

5. Creación de un controlador por retro de estado y precompensación

Para la creación por retroalimentación de estados se parte de la idea de una *asignación de polos* lo cual conlleva a un cambio en el tiempo de estabilización y Overshoot con las ecuaciones:

$$\xi = \frac{\sqrt{\log(\%Overshoot)^2}}{\sqrt{\pi^2 + \log(\%Overshoot)^2}} \quad (10)$$

$$\omega_n = \frac{4}{(t_{Establecimiento})\xi} \quad (11)$$

Elegiendo arbitrariamente un $Overshoot = 15\%$ y $t_{Estb.} = 0.2$ segundos, se obtiene un polinomio de segundo orden *deseado* el cual contiene los polos deseados (y por ende la dinámica deseada). Este polinomio (cuyos polos están discretizados con $e^{Poly \cdot t_s}$) se iguala a la ecuación característica del sistema discretizado actual y por medio de unos parámetros variables k_i obtengo las ganancias para cada estado. Además, se impone una entrada al sistema de $V_i = 3V$:

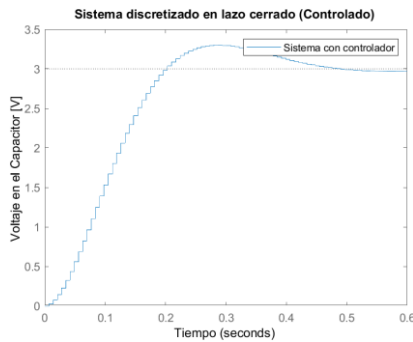


Figura 5. Simulación del modelo discreto en lazo cerrado con retroalimentación de estado y precompensación

No obstante, algo importante de analizar es el esfuerzo de control dado que, el DAC es un dispositivo que teóricamente solo puede entregar un máximo de 5V, es decir, que si el control necesita más de este voltaje sería imposible realizar un control en el sistema. Por lo tanto se debe analizar el esfuerzo de control desde el voltaje y corriente y cerciorarse que el DAC sí puede entregar dichos valores.

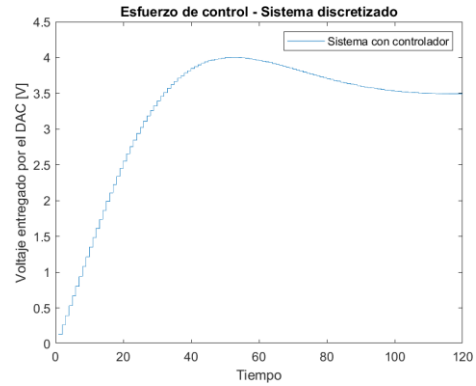


Figura 6. Esfuerzo de control – Voltaje

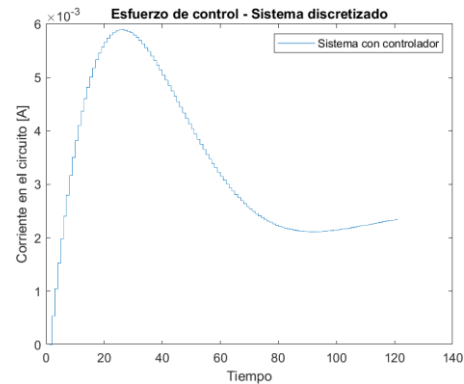


Figura 7. Esfuerzo de control – Corriente

Se evidencia en las dos últimas figuras que el esfuerzo de control necesario es alcanzable para el DAC. Por ende, el control es ejecutable sin tener problemas con el DAC.

Ahora, si se realiza un cambio en la referencia del sistema, por ejemplo una entrada, es decir referencia, de $V_i = 1.5V$ y se compara el sistema en lazo abierto discretizado contra el sistema en lazo cerrado con controlador discreto se obtiene el siguiente resultado:

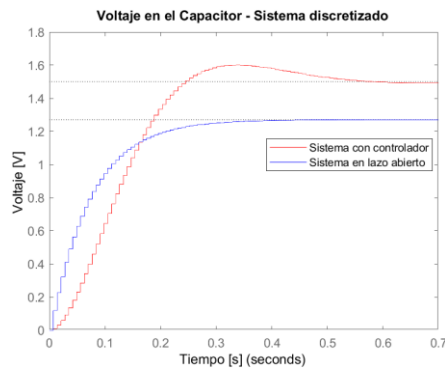


Figura 6. Sist. controlado vs sist. en lazo abierto

Se observa en la Figura 6 el actuar del controlador en el sistema el cual fuerza al sistema a seguir la referencia que se le impone, también es capaz de seguir un cambio en la referencia siempre y cuando este cambio se realice desde la propia entrada. A continuación se observa el sistema simulado vs datos reales del sistema.

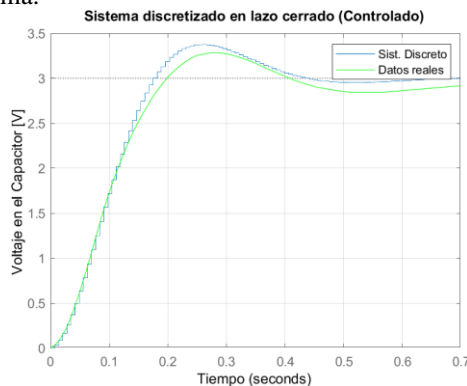


Figura 6.1 Sist. Discreto simulado vs datos reales

6. Acción integral

Se observó en el apartado anterior que el sistema es capaz de seguir una referencia y en caso de que se haga un cambio desde la entrada, el sistema la puede seguir; no obstante, ¿qué ocurre si se genera una perturbación en el sistema?

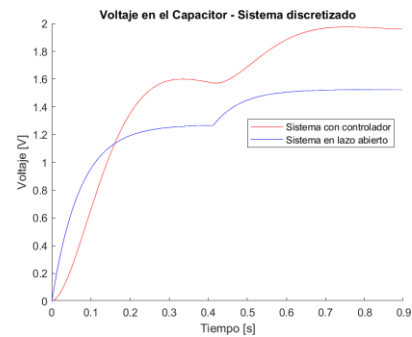


Figura 7. Perturbación en el sistema

La figura 7 demuestra que el sistema, teniendo una referencia de 1.5V le entra una perturbación que cambia la referencia el sistema no es capaz de rechazarla. Ergo, es cuando entra la acción integral a trabajar. La acción integral trata de usar una ganancia multiplicada por la integral (en caso discreto como este la sumatoria) del error. Por lo tanto, se debe añadir una más variable de estado más al sistema y calcular una ganancia más al sistema, lo anterior se logra añadiendo un polo más al sistema en una posición arbitraria (diez veces alejado del polo más negativo del sistema para que no interfiera con la dinámica de la planta). Al añadir una variable más al sistema se debe trabajar con el sistema expandido. En este caso:

$$\dot{x}_{Exp}(t) = \begin{bmatrix} A_d & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -C_d & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Ec. 2. Representación en espacio de estados del sistema discreto expandido

Donde A_d , B_d y C_d son las matrices discretizadas del sistema.

- Simulación en tiempo discreto del sistema con acción integral y perturbación en sistema simulado.

Se visualiza a continuación la respuesta del sistema frente a una referencia de $r = 3V$ y una perturbación indeseada de $0.5V$ a la entrada del sistema y como el sistema con el controlador integral rechaza la perturbación anteriormente mencionada.

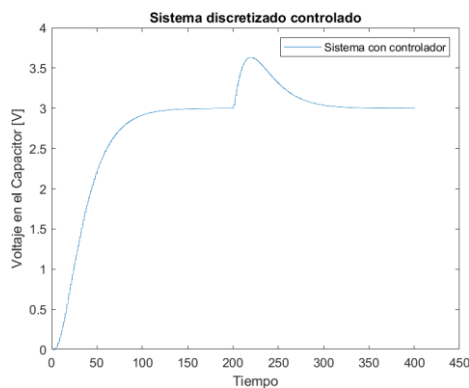


Figura 8. Sistema discretizado con control integral y perturbación en la entrada

A continuación se observa la acción de control realizada:

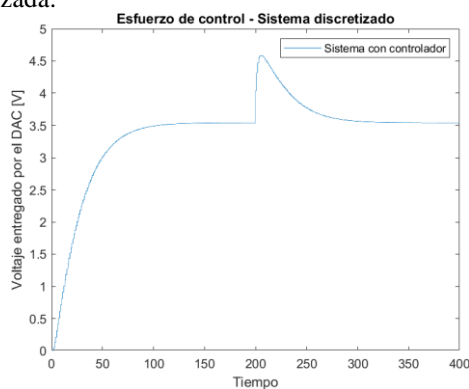


Figura 8. Esfuerzo de control por parte del DAC

Una nueva conclusión es que el control en variables de estado necesita tanto de la acción proporcional por medio de la retroalimentación de estados como de la acción integral para el rechazo de perturbaciones.

- *Datos reales del sistema con acción integral y perturbación.*

En la planta física se definió una referencia de 2V y en un momento arbitrario se interpuso una interferencia activando el Stich de la planta que pone en paralelo un potenciómetro con la resistencia R_1 . Aunque, siendo más riguroso en la definición, más que una perturbación es un cambio en el modelo dado que, al poner la resistencia del potenciómetro con R_1 se obtiene un valor de resistencia diferente lo cual cambia uno de los parámetros con los cuales se modeló la planta. Por lo anterior, más que una perturbación es en realidad un cambio de modelo. Al aplicar esta perturbación se obtiene la siguiente figura:

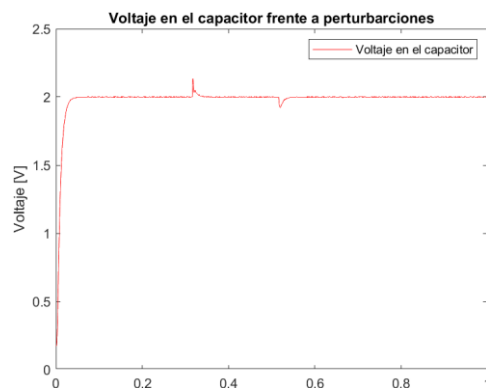


Figura 9. Voltaje en el capacitor frente a una perturbación, sistema real.

Donde se observa que se tiene dos perturbaciones, la primera al activar el Stich y el segundo al desactivarlo lo cual hace cambiar el voltaje de salida en el capacitor y por ende, un error dado que es diferente la salida del sistema a la impuesta por la referencia; no obstante, el control integral (en conjunto con la retroalimentación de estado) logra corregir el error y llevarlo a cero en el estado estacionario.

7. Conclusiones

- Utilizar variables de estado hace más fácil la representación del sistema dado que, al obtener las ecuaciones diferenciales, pasar a la representación en $S.S$ es separar el sistema en matrices. La retroalimentación de estado se basa en una asignación de polos (cuando se trata de un sistema discretizado se trabaja con el círculo unitario) y la precompensación hace que el sistema no tenga una atenuación en su respuesta, haciéndolo seguir la referencia; sin embargo, frente a la presencia de perturbaciones esta última acción de control queda inservible dado que, esta “no ve” la perturbación. Por ende, es cuando entra la acción integral para rechazar las perturbaciones y tender a cero el error en estado estacionario.

- Al usar el espacio de estados el control cuenta con mayor robustez dado que, se trabaja directamente con la variación de los estados lo cual, hace que una retroalimentación de estados con una acción integral sea más robusta que un control PID que solo trabaja bajo la variación del error.

Reconocimientos y referencias

Se reconoce a la profesora Rosa Elvira por su explicación para sistemas continuos, el análisis pertinente y acciones de control, al profesor Santiago Rivadeneira por su gran explicación en sistemas y control discreto junto al monitor Alejandro Giraldo por sus talleres con los cuales se dio desarrollo y solución al control de la planta RLC.