

# Reporte planta RLC - Control Análisis en Variables de Estado

David Gil Rúa

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de minas  
Departamento de Ingeniería Eléctrica y automática,  
Medellín, Antioquia, Colombia  
Agosto 2024

## Resumen

En este reporte se explica detalladamente el análisis y modelado de una planta RLC. Entre las actividades a realizar, se encuentra desarrollar un modelo del sistema, identificar las entradas y salidas, así como las variables y parámetros clave. Además, se realizarán análisis de estabilidad y controlabilidad, y se aplicará un control tanto en simulación como en la planta física.

**Palabras clave:** Variables de estado, RLC, modelo, estabilidad, controlabilidad, control, controlador, simulaciones.

## 1. Introducción

El control de sistemas es crucial en diversas áreas, desde la industria hasta la electrónica de consumo. Para implementar un control eficaz, es vital comprender a fondo el sistema en cuestión. Este entendimiento se logra mediante la modelación, que sirve como base para desarrollar estrategias de control precisas y eficientes.

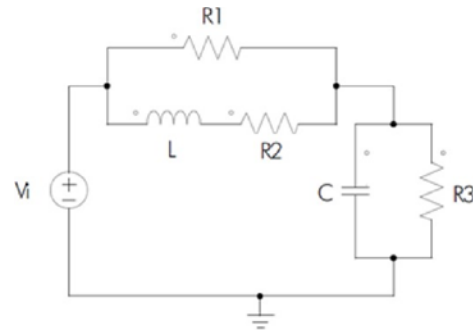
Este informe se centra en un caso específico: el manejo de un sistema electrónico RLC, que combina inductancia, capacitancia y resistencia. El proceso comenzó con un modelado fenomenológico, derivando las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema y obteniendo su representación en el Espacio de Estados.

Dado que el sistema se clasificó como lineal e invariante en el tiempo (LIT), se aplicaron técnicas de control apropiadas. Se realizó un análisis exhaustivo de estabilidad y controlabilidad utilizando MATLAB, seguido de simulaciones del sistema.

La segunda etapa del estudio se enfocó en el diseño de estrategias de control, incluyendo retroalimentación de estado, precompensación y control integral. Cada paso del proceso se explica detalladamente, presentando los hallazgos de la investigación.

El objetivo de este informe es ofrecer una perspectiva integral sobre el abordaje del control en sistemas complejos, proporcionando una comprensión profunda de las técnicas empleadas en este campo.

## 2. Modelado



**Figura 1. Modelado planta RLC**

En la Figura 1. se observa el modelo de la planta, donde la entrada del sistema es  $V_i$ , que está dado por un DAC 5V controlado por un Arduino UNO, y la salida del sistema es el voltaje en la resistencia  $R_3$  que es igual a voltaje en el capacitor. Para la obtención del modelo se usaron las leyes de Kirchhoff y además se tuvieron en cuenta las siguientes ecuaciones sacadas de la topología del

circuito, las cuales no serán de utilidad para llevar la expresión al punto deseado.

- (1)  $i_c = C V'_c$
- (2)  $V_L = L i'_L$
- (3)  $i_{R1} = (V_i - V_c)/R_1$
- (4)  $V_{R2} = i_L R_2$
- (5)  $i_{R3} = V_c/R_3$

Aplicando leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff se tiene que

- (6)  $V_i = V_L + V_{R2} + V_c$
- (7)  $i_L + i_{R1} = i_c + i_{R3}$

Reemplazando y despejando se obtiene

- (8)  $i'_L = i_L \left( -\frac{R_2}{L} \right) - \frac{V_c}{L} + \frac{V_i}{L}$
- (9)  $V'_c = \frac{i_L}{C} - \frac{V_c}{C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{V_i}{R_1 C}$

Donde se termina que el voltaje en el capacitor  $V_c$  y la corriente en el inductor  $i_L$  son nuestras variables de estado, ya que son los elementos del sistema que almacenan energía y le brindan al sistema una dinámica. También se define a  $V_i$  como la entrada del sistema. Con esto en mente se procede a realizar la representación en espacios de estados para el sistema

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & (-\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_3 C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} V_i$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix}$$

Dado que se tienen los parámetros de  $R_1 = R_3 = 1000\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$ ,  $L = 1mH$  y  $C = 470\mu F$  se procede a realizar la simulación en tiempo continuo de la planta, esto aplicando una entrada de voltaje de 4V

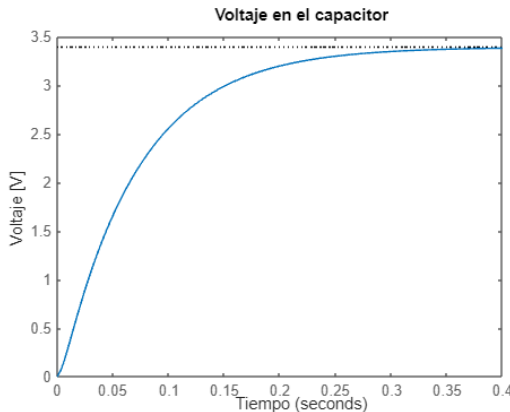


Figura 2. Simulación respuesta planta RLC

Donde se puede observar que el sistema en lazo abierto no alcanza la referencia puesta, además, se observa que la respuesta que tiene el sistema es rápida, dado que se estabiliza en menos de 4 segundos.

### 3. Estabilidad, Controlabilidad y representación de la función de transferencia

Ya que el sistema se encuentra planteado en espacio de estado se determina la función de transferencia asociada al sistema

$$G(s) = \frac{2.128s + 2596}{s^2 + 224.3s + 3064}$$

Y se buscan obtener otras 2 realizaciones de esta, para lo cual se plantea la realización Controlable y la realización Modal

- Realización controlable

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & (-\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_3 C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} V_i$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix}$$

- Realización modal

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & (-\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_3 C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} V_i$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix}$$

Para así realizar un análisis de estabilidad, tanto interno como externo

Para la estabilidad externa se tomó la función de transferencia, y al analizar sus polos se observó que estos se encontraban en el semiplano izquierdo, estando estos polos ubicados exactamente en  $-2.1999 \times 10^5$  y  $-13.9271$  con lo que se concluye que el sistema es estable

Para la estabilidad interna se buscó encontrar los valores propios de la matriz A del sistema, siendo estos eigenvalores  $-2.1999 \times 10^5$  y  $-13.9271$ , lo cual concuerda con la posición de los polos de la

función de transferencia, por lo cual el sistema tanto interna como externamente es estable

Luego de tratar el tema de la estabilidad se busca analizar la controlabilidad del sistema. Para esto se revisa la matriz  $[A \ AB]$  y si esta es de rango pleno el sistema es controlable. Los valores de la matriz de controlabilidad para el sistema son

$$\begin{bmatrix} 0.0010 & -0.221 \\ 0.0021 & 2.1186 \end{bmatrix}$$

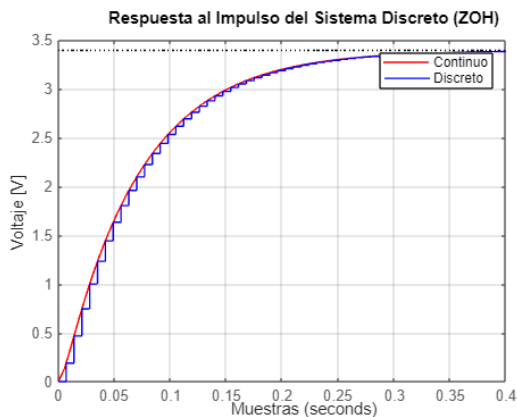
Y al determinar que las dos columnas son linealmente independientes, es decir, el rango de la matriz es 2, se dice que tenemos una matriz de rango pleno y por ende es controlable

#### 4. Comparación datos tomados por la planta RLC vs Respuesta del modelo

Dado que la planta es un sistema discreto, se procede a discretizar la función de transferencia y obtener la respuesta a la entrada de 4V

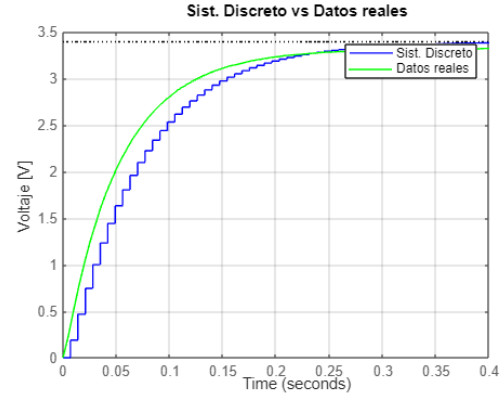
Para adaptar el sistema al dominio digital, se implementa un proceso de discretización. Se selecciona un intervalo de muestreo de 7 milisegundos ( $T_s = 7\text{ms}$ ) para este procedimiento. Se selecciona este periodo de muestreo para capturar los cambios relativamente rápidos de la señal

El período elegido también proporciona un margen de seguridad respecto al teorema de Nyquist. Este margen es crucial para prevenir el fenómeno de aliasing, que podría distorsionar la representación digital de la señal.



**Figura 3. Respuesta planta discretizada a entrada**

Luego de tomar los datos en la planta RLC, dando un voltaje de entrada de 4V se procedió a graficar estos datos contra los obtenidos mediante la simulación del modelo obtenido



**Figura 4. Datos reales vs simulados**

La comparación entre el modelo discreto y los datos obtenidos de la planta física revela una gran similitud, lo que valida la precisión del modelo discreto. Este hallazgo respalda la efectividad del enfoque de modelado fenomenológico utilizado en este estudio, ya que tanto el tiempo de estabilización como el valor final son prácticamente idénticos en ambos casos.

Es notable la presencia de saltos evidentes entre las muestras cuantizadas. Este fenómeno se atribuye a la naturaleza altamente dinámica de la planta en cuestión, a pesar de haber seleccionado un período de muestreo relativamente corto. Aunque el intervalo de muestreo elegido ( $T_s$ ) cumple su objetivo principal de crear una representación discreta precisa del comportamiento real del sistema, estos saltos entre muestras son visibles.

Sin embargo, es importante destacar que esta característica no representa un obstáculo significativo para el diseño y la implementación del control del sistema. La discretización lograda captura adecuadamente la esencia del comportamiento dinámico de la planta, proporcionando una base sólida para el desarrollo de estrategias de control efectivas.

## 5. Creación del controlador por pre compensación y retro de estado

En el diseño del controlador por retroalimentación de estados, se emplea el método de asignación de polos para modificar el tiempo de estabilización y el sobrepaso (overshoot) del sistema. Las ecuaciones fundamentales para este proceso son:

$$\xi = \frac{\log(\%Overshoot)^2}{\sqrt{\pi^2 + \log(\%Overshoot)^2}}$$

$$w_n = \frac{4}{t_{establecimiento} \xi}$$

Se establecen objetivos de diseño específicos: un sobrepaso del 15% y un tiempo de estabilización de 0.2 segundos. Estos parámetros permiten derivar un polinomio de segundo orden que representa la dinámica deseada del sistema.

El proceso de diseño implica igualar este polinomio deseado (con sus polos discretizados) a la ecuación característica del sistema discreto actual. Mediante la introducción de parámetros variables  $k_i$ , se determinan las ganancias necesarias para cada estado del sistema.

Para este ejemplo, se considera una entrada al sistema de 3V.

Un aspecto crucial a considerar es el esfuerzo de control requerido. Dado que el Convertidor Digital-Analógico (DAC) tiene una limitación teórica de salida máxima de 5V, es imperativo evaluar si el control diseñado se mantiene dentro de este límite. Si el controlador demanda un voltaje superior a 5V, su implementación práctica sería inviable en el sistema físico.

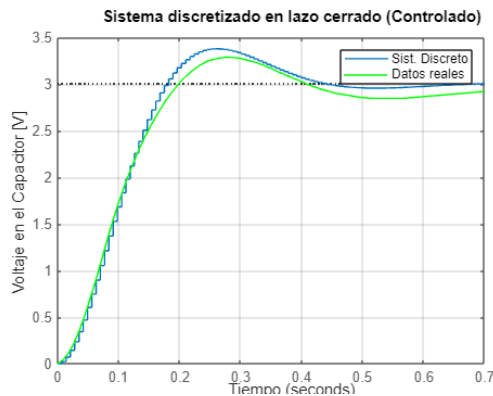


Figura 5. Datos reales vs simulados controlado

Luego de crear el controlador por el método de pre compensación y retro de estado, se aplicó este en la planta RLC física, con el apoyo de un código de Arduino. Se estableció una referencia de 3 voltios, y como se puede verificar en la figura 5 el sistema trata de seguir la referencia y lo consigue en gran manera. Cabe recalcar que el sistema controlado por retro de estado puede seguir un cambio en la referencia siempre y cuando esta sea aplicada desde la propia entrada

## 6. Creación del controlador mediante acción integral

El análisis previo ha demostrado la capacidad del sistema para seguir una referencia dada, incluso cuando se producen cambios en la entrada. Esta respuesta positiva indica un buen diseño del controlador para condiciones normales de operación. Sin embargo, es crucial considerar el escenario relacionado a las perturbaciones externas.

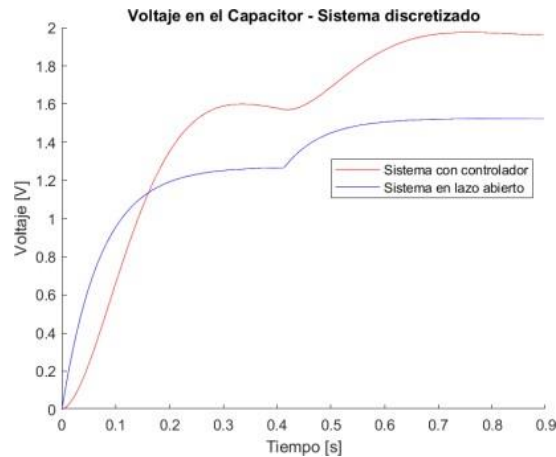


Figura 6. Simulación con perturbación

El análisis de la Figura 6 revela una limitación significativa en el desempeño del sistema de control actual. Se observa que, cuando el sistema está operando con una referencia estable de 1.5V, la introducción de una perturbación externa altera esta referencia. Lo más notable es que el sistema no demuestra la capacidad de rechazar eficazmente esta perturbación.

La acción integral se introduce para mejorar la capacidad del sistema para rechazar perturbaciones y eliminar errores de estado estacionario. En un sistema discreto como este, la acción integral se implementa mediante la suma acumulada del error

multiplicada por una ganancia específica. Este proceso implica varios pasos y modificaciones en el modelo del sistema:

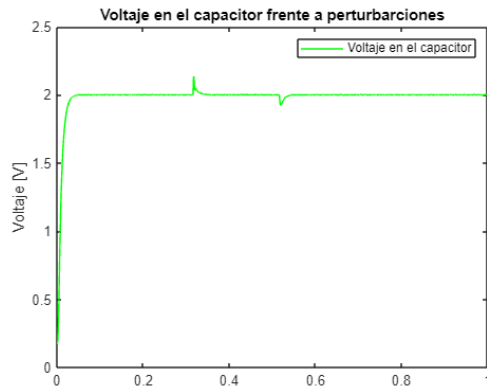
**Expansión del espacio de estados:** Se añade una nueva variable de estado al sistema, representando la integral (o suma) del error. Esto aumenta la dimensión del espacio de estados.

**Modificación de las matrices del sistema:** El sistema expandido se representa mediante una nueva ecuación de estado:

$$\dot{x}_{exp} = \begin{bmatrix} A_d & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -C_d & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Donde  $A_d$ ,  $B_d$  y  $C_d$  son las matrices discretizadas del sistema.

En el experimento con la planta física, se estableció inicialmente una referencia de 2V para el sistema de control. Durante su funcionamiento, se introdujo una alteración significativa al activar el interruptor de la planta, lo que conectó un potenciómetro en paralelo con la resistencia R1 existente. Al aplicar esta perturbación se obtiene



**Figura 7. Sistema con perturbación controlado**

Donde se observan dos perturbaciones. La primera al activar el switch y la segunda al desactivarlo, lo cual hace cambiar el voltaje de salida en el condensador y hace generar una perturbación, pero gracias al control integral se logra corregir este error y llevarlo nuevamente a la referencia

## 7. Conclusiones

**Facilidad de Representación:** Utilizar variables de estado simplifica la representación del sistema al transformar las ecuaciones diferenciales en una forma matricial en el espacio de estados ( $S$ ).

**Retroalimentación de Estado:** Basada en la asignación de polos, en sistemas discretos se usa el círculo unitario. Esta retroalimentación, junto con la precompensación, garantiza que el sistema siga la referencia sin atenuación en su respuesta.

**Limitaciones de la Precompensación:** Frente a perturbaciones, la precompensación pierde efectividad, ya que no puede detectar dichas perturbaciones.

**Función de la Acción Integral:** La acción integral se introduce para rechazar perturbaciones y llevar el error en estado estacionario a cero.

**Robustez del Control:** Al trabajar directamente con la variación de los estados en el espacio de estados, se logra una mayor robustez. Esto hace que una retroalimentación de estados con acción integral sea más robusta que un control PID, que se centra solo en la variación del error.