

Sea  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números reales, es decir  $a_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \geq 1$ . Llamamos suma parcial de los primeros  $n$  elementos a

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n a_j.$$

Los elementos  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  forman una nueva sucesión de números reales. Si esta sucesión tiene un límite finito, entonces definimos la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Si la sucesión  $\{s_n\}$  tiene por límite  $+\infty$  o  $-\infty$ , entonces decimos que la serie diverge. Decimos que la serie converge *absolutamente* si la serie correspondiente a  $|a_n|$  también converge.

Existen múltiples criterios que aseguran la convergencia de una serie. Algunos de ellos son los siguientes

1. Si la serie asociada a  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Es decir, si los  $a_n$  no tienden a 0, entonces la serie no es convergente.

2. **Criterio del cociente (o de d'Alambert).** Supongamos que existe

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Si  $r < 1$  entonces la serie converge absolutamente.

3. **Criterio de la raíz (o de Cauchy).** Sea

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si  $r < 1$  entonces la serie converge absolutamente.

4. **Criterio integral.** Supongamos que existe una función  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  no-negativa y no-creciente tal que  $a_n = f(n)$ . Entonces la serie asociada a  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  converge absolutamente si y sólo si

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$