

El teorema de la divergencia

Sea Ω un abierto acotado y regular de \mathbb{R}^3 .

Definición 1. Sea $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función C^1 . Llamaremos divergencia de F a la función

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Teorema 2 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Dada $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función C^1 se tiene*

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F = \iint_{\partial\Omega} F \cdot n$$

donde n es el vector unitario normal exterior a Ω .

Demostración. Escapa a los objetivos del curso. □



Figura 1: Carl Friedrich Gauss (30 abril 1777 – 23 febrero 1855). Imagen tomada de Wikipedia².

Ejercicio 3. Utiliza el Teorema 2 para calcular la integral sobre la esfera unidad

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2yz) dS(x, y, z)$$

²Fuente de la figura https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg