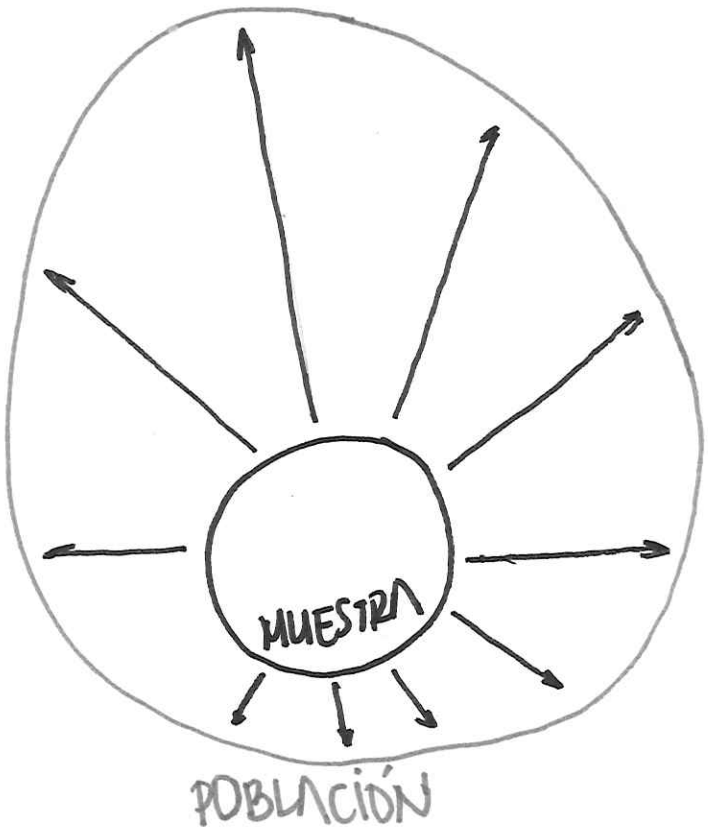
INTERVALOS DE CONFIANZA

Daniel E. Gonzalez
Pontificia Universidad
Javeriana Cali

INFERENCIA ESTADÍSTICA



Estimación $\hat{\theta}$ — Puntual

Por intervalos de confianza

Pruebas de Hipótesis

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_a: \theta \neq \theta_0$

CUANDO NO SE CONOCE EL VALOR DE UN
PARÁMETRO, SE UTILIZA LA ESTIMACIÓN
PARA ENCONTRAR UN VALOR APROXIMADO A
PARTIR DE LOS VALORES DE UNA MUESTRA

CUANDO SE QUIERE VALIDAR UNA AFIRMACIÓN
SOBRE UN PARÁMETRO DE UNA POBLACIÓN

INFERENCIA ESTADISTÍCA

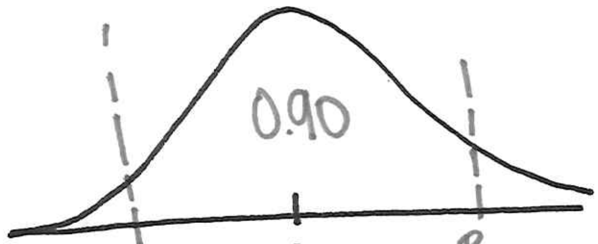
ESTIMACIÓN

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS
DE CONFIANZA

(LIC ; LSC)

INTERVALOS DE CONFIANZA

μ :



$$P(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$$

$$P\left(Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-1.645 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.645\right) = 0.90$$

$$P\left(-1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

$$P\left(-1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\mu < 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}\right) = 0.90$$

$$P\left(\bar{X} - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

$IC_{\mu:1-\alpha}$

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

INTERVALOS DE CONFIANZA

SUPUESTO

μ. $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- σ^2 CONOCIDA

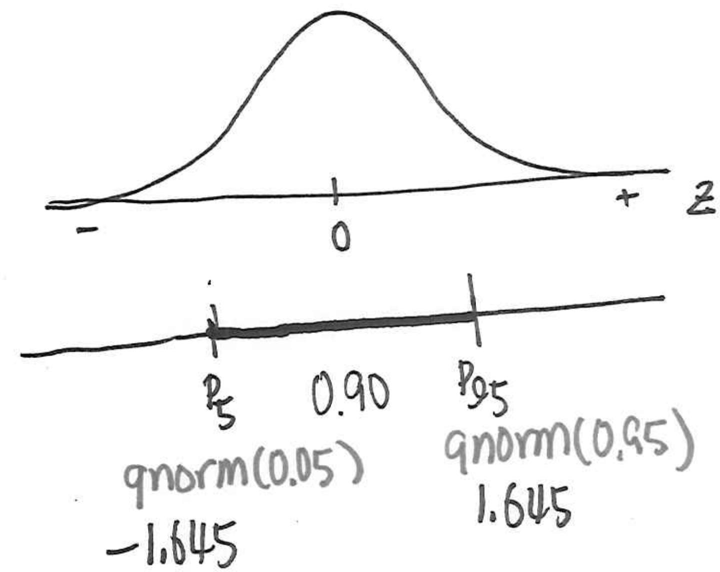
$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, \, v=n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$

- $X \sim$ NORMAL
- σ^2 DESCONOCIDA

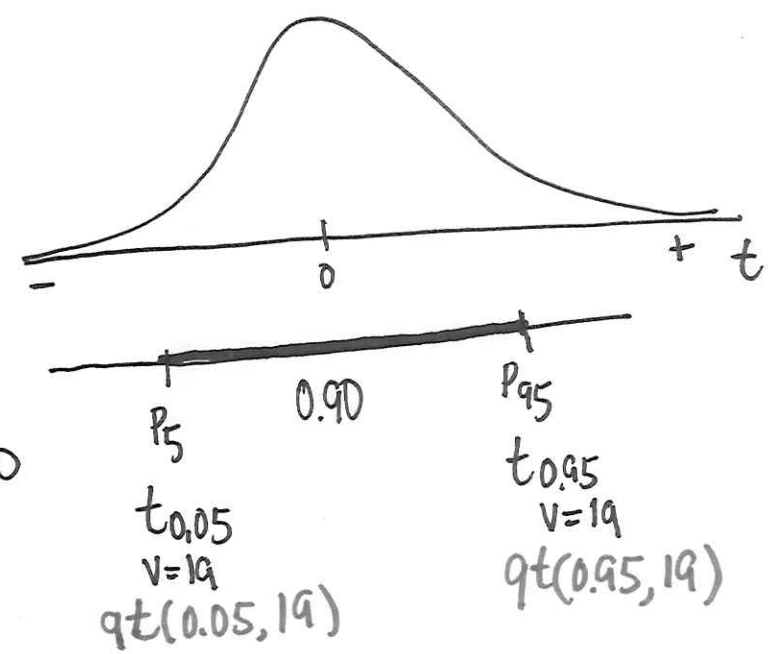
$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$

- $X \sim$ DESCONOCIDA
- $n \gg$ TCL

$\bar{X} \sim$ NORMAL

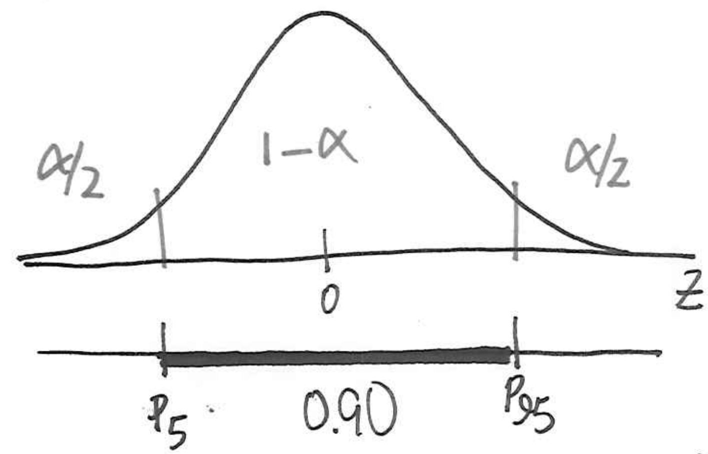


n=20



P $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

SUPUESTO
$n >>$



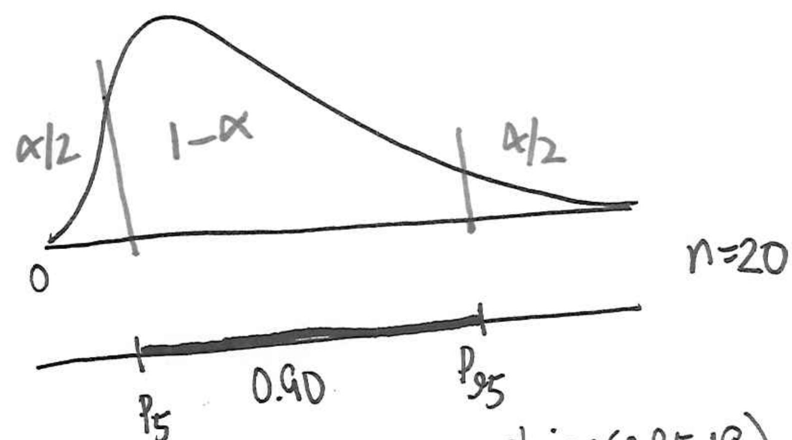
qnorm(0.05)
−1.645

qnorm(0.95)
1.645

σ^2 $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} ; \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}} \right)$

$v = n-1$

$\chi^2_{1-\alpha/2}$
$v = n-1$



qchisq(0.05, 19)
10,12

qchisq(0.95, 19)
30.14

IC μ.

SUPUESTO$_1$	SUPUESTO$_2$	IC
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	σ^2 CONOCIDA	: $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2 DESCONOCIDA	: $\bar{X} \pm t_{v=n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$
$X \sim ?$	$n >>$	: TCL $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$
	$n <$	: MÉTODO NO PARAMETRICO (REMUESTREO)

DIFERENCIA DE MEDIAS

$\mu_1 - \mu_2$

- GRUPOS PAREADOS O EMPAREJADOS

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2,\; v=n-1} \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

X_1	X_2	$d = X_1 - X_2$
X_{11}	X_{21}	d_1
X_{12}	X_{22}	d_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{1n}	X_{2n}	d_n

$$\left.\right\} \quad \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \qquad S_d$$

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- GRUPOS INDEPENDIENTES
  - SUPUESTOS: ASUMO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2,\; v=n_1+n_2-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

donde $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1) S_1^2 + (n_2-1) S_2^2}{n_1+n_2-2}$

- $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2,\; v^*} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$v^* = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

NOTA:

$(-,-)$ $\mu_1 < \mu_2$

$(-,+)$ $\mu_1 = \mu_2$

$(+,+)$ $\mu_1 > \mu_2$

COMPARACIÓN DE PROPORCIONES

$P_1 - P_2$

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

NOTA:

$(-,-)$: $P_1 < P_2$

$(-,+)$: $P_1 = P_2$

$(+,+)$: $P_1 > P_2$

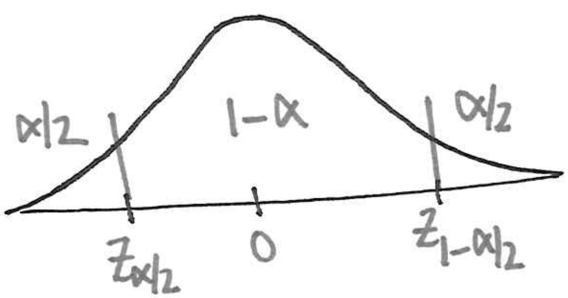
RAZÓN DE VARIANZAS

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \left(\frac{S_1^2/n_1-1}{S_2^2/n_2-1} \, f_{\alpha/2\ v_1,v_2} \ ; \ \frac{S_1^2/n_1-1}{S_2^2/n_2-1} \, f_{1-\alpha/2\ v_1 \cdot v_2} \right)$$

;

TAMAÑO DE MUESTRA

- ESTIMACIÓN DE μ.



$$P(Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

$$\mu = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

DESPEJAMOS n

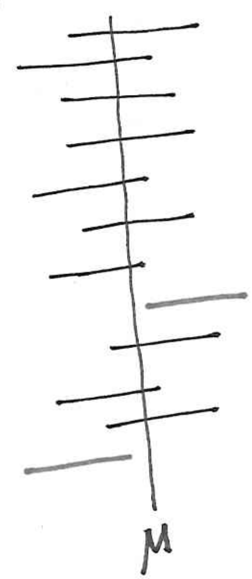
$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \times \sigma^2}{e^2}$$

$$e = |\mu - \bar{x}| < e$$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\,\sigma^2}{e^2}$$

- $Z^2_{\alpha/2}$ — CONFIANZA (1)
- σ^2 — VARIANZA (2)
- e^2 — ERROR DE MUESTREO (3)

(1) CONFIANZA



(2) VARIANZA

- PRUEBA PILOTO
- ESTUDIO PREVIO
- EXPERTO

$$\sigma \simeq \frac{\text{máx} - \text{mín}}{4}$$

(2) ERROR DE MUESTREO

(1) y (2) A CARGO DEL INVESTIGADOR
3

TAMAÑO DE MUESTRA

- ESTIMACIÓN DE p

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \, pq}{e^2}$$

CONFIANZA (1)

VARIANZA (2)

ERROR DE MUESTREO (3)

(1) CONFIANZA	$Z_{\alpha/2}$
90%	1.645
95%	1.96
99%	2,576

ERROR DE MUESTREO

$$|p-\hat{p}|<e$$

VARIANZA

- PRUEBA PILOTO,
- VARIANZA MÁXIMA
- EXPERTO

p	q	pq
0.1	0.9	0.09
0.2	0.8	0.16
0.3	0.7	0.21
0.4	0.6	0.24
0.5	0.5	0.25
0.6	0.4	0.24
0.7	0.3	0.21
0.8	0.2	0.16
0.9	0.1	0.09

VARIANZA MÁX

TAMAÑO DE MUESTRA

μ.

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^{2}\,\sigma^{2}}{e^{2}}$$

CONFIANZA (1)

VARIANZA (2)

- PRUEBA PILOTO

ERROR DE MUESTREO (3)

P.

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^{2}\,pq}{e^{2}}$$

CONFIANZA (1)

VARIANZA (2)

- PRUEBA PILOTO
- VARIANZA MÁX

ERROR DE MUESTREO (3)

(1) y (3)
A CARGO DEL
INVESTIGADOR

SI $\frac{n}{N} > 0,05$ SE DEBE CORREGIR EL TAMAÑO DE MUESTRA POR POBLACION FINITA

$$n = \frac{n_0 N}{n_0 + N - 1}$$

INTERVALOS DE CONFIANZA NO PARAMÉTRICOS

CUANDO $n<30$

$X \sim ?$ (NO NORMAL)

MÉTODO NO PARAMÉTRICO

- MUESTRA: $X_1, X_2, \ldots X_n$
- REMUESTREO
  MUESTREO ALEATORIO CON REPETICIÓN
- SE RECONSTRUYE POBLACIÓN SIMULANDO UNA GRAN CANTIDAD DE VALORES DEL ESTIMADOR
- SE CALCULAN LOS PERCENTILES

MÉTODO 1: $\left(P_{\alpha/2} ; P_{1-\alpha/2}\right)$

MÉTODO 2:

$$\left(2\bar{X}-P_{1-\alpha/2} ; 2\bar{X}-P_{\alpha/2}\right)$$

NAVIDI (2006)

INTERVALOS DE CONFIANZA

IC_μ: $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$ (1)

$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,\, v=n-1}\, S/\sqrt{n}$ (2)

$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\, S/\sqrt{n}$ (3)

IC_p: $\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ (4)

IC_{σ^2}: $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}} ; \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right)$ (5)

$IC_{\mu_1-\mu_2}$: $\bar{d} \pm t_{\alpha/2,\, v=n-1}\, S_d/\sqrt{n}$ (6)

$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2,\, v=n_1+n_2-2}\, S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ (7)

$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2,\, v^\circ} \sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$ (8)

$IC_{p_1-p_2}$:

$(\hat{p}_1-\hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p})}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ (9)

$IC_{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \dfrac{1}{f_{1-\alpha/2,\, v_1,\, v_2}} ; \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \dfrac{1}{f_{\alpha/2,\, v_1,\, v_2}} \right)$ (10)