

Profesor Daniel Enrique González Gómez
Monitores : Lizeth Suarez
Lina Ramirez Marulanda

1. Para una variable aleatoria con distribución binomial $X \sim \text{binom}(x, n = 10, p = 0.5)$. Determine: la función de distribución asociada a X .
 - (a.) $P(X = 5)$
 - (b.) $P(X \leq 2)$
 - (c.) $P(3 \leq X < 5)$
 - (d.) $P(X \geq 8)$
 - (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
2. Sea una variable geométrica $X \sim \text{geom}(x, p = 0.05)$
 - (a.) $P(X = 1)$
 - (b.) $P(X \leq 2)$
 - (c.) $P(X = 8)$
 - (d.) $P(X \geq 2)$
 - (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
3. Suponga que X tiene una distribución hipergeométrica con $N = 100, n = 4, K = 20$. ($X \sim \text{hyper}(x, N = 100, n = 4, K = 20)$) Determine:
 - (a.) $P(X = 1)$
 - (b.) $P(X \leq 6)$
 - (c.) $P(X \geq 1)$
 - (d.) $P(X = 4)$
 - (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
4. Suponga que X tiene una distribución Poisson con media $\lambda = 4$ ($X \sim \text{pois}(x, \lambda = 4)$). Determine:
 - (a.) $P(X = 0)$
 - (b.) $P(X = 4)$
 - (c.) $P(X \geq 2)$
 - (d.) $P(X \leq 2)$
 - (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
5. Sea la variable X con distribución binomial negativa con $N=100, K=20, n=5$ ($X \sim \text{nbinom}(x, n, p, mu)$)
 - (a.) $P(X = 0)$
 - (b.) $P(X = 6)$
 - (c.) $P(X \geq 10)$
 - (d.) $P(X \leq 12)$
 - (e.) $E[X]$ y $V[X]$
 - (f.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
6. En un cargamento grande de llantas para automóviles, el 5% tiene imperfecciones. Se eligen de manera aleatoria 4 llantas para ser instalada en un automóvil. (Sea X el número de llantas con imperfecciones. $X \sim \text{binom}(n = 4, p = 0.05)$)
 - (a.) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las llantas tenga imperfecciones?
7. Los clientes llegan al mostrador de una tienda de acuerdo con una variable aleatoria Poisson con una frecuencia promedio de ocho clientes por hora.
 - (a.) Calcule la probabilidad de que entre las 8 AM y las 9 AM lleguen exactamente cinco clientes.
 - (b.) Calcule la probabilidad de que entre las 2:30 PM y las 3:30 PM no lleguen más de tres clientes.
 - (c.) Calcule la probabilidad de que lleguen exactamente dos clientes dentro de un intervalo de dos horas continuas, por ejemplo entre 10 AM y 12 M.
 - (d.) Calcule el valor esperado del número de personas que llegan a la tienda entre las 2 PM y las 4:30 PM.
8. Se está desarrollando una nueva variedad de maíz en una extensión de experimentación agrícola. Se espera que tenga una tasa de germinación del 90%. Para verificar esto, se plantan 20 semillas en suelos de idéntica composición y se les dedican los mismos cuidados. Si la cifra 90% es correcta, ¿cuántas semillas se espera que germinen? Si sólo germinan 15 o menos, ¿hay razón para sospechar de la cifra 90%?
9. Un examen de Probabilidad consta de 100 preguntas de selección múltiple, cada una con cuatro opciones de respuesta. María responde cada pregunta al azar y sus respuestas son independientes
 - (a.) Si para aprobar el examen Juan debe responder mínimo 60 preguntas correctamente, calcule la probabilidad de que María apruebe el examen.
 - (b.) Calcule la probabilidad de que María deba responder 10 preguntas hasta responder la primera pregunta correctamente.
 - (c.) ¿Cuál es el número esperado de preguntas que María responderá erróneamente hasta responder 5 preguntas correctamente?
10. Se sospecha que muchas muestras de agua, todas del mismo tamaño y tomadas del Hillbank River, han sido contaminadas por operarios irresponsables de una planta de tratamiento de aguas. Se contó el número de microorganismos por muestra. El número medio de microorganismos por muestra fue de 15. Suponiendo que el número de microorganismos se distribuye según una distribución de Poisson, calcular la probabilidad de que:
 - (a.) La siguiente muestra contenga al menos 17 microorganismos.
 - (b.) La siguiente muestra contenga 18 o menos microorganismos.
 - (c.) La siguiente muestra contenga exactamente dos microorganismos.
11. Una aerolínea nacional tiene aviones de 100 asientos para el servicio de transporte nacional. Se estima que la probabilidad de que una persona llegue al vuelo es de 0.90, debido a lo cual la aerolínea vende 105 tiquetes con el fin de minimizar la partida de aviones con sillas vacías. ¿cuál es la probabilidad de que todas las personas que lleguen para abordar el avión tengan asiento?
12. El número de grietas en un pavimento se estima en una grieta por cada 100m en promedio. Se desea estimar la probabilidad de:
 - (b.) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de las llantas tenga imperfecciones?
 - (c.) ¿Cuál es la probabilidad de una o más llantas tenga imperfecciones?

13. Un sistema de seguridad para casas está diseñado para tener
- Haya exactamente 8 grietas en una longitud de 500 m
 - No se presente ninguna grieta en 100 m
 - Se presenten menos de 2 grietas en 500 m
- una confiabilidad del 95%. Suponga que 10 casas equipadas con este dispositivo sufrieron tentativa de robo. Se requiere calcular la probabilidad de que en siete de las nueve, la alarma se activará.

FORMULARIO

Distribución Bernoulli

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } X = 1 \\ q & \text{si } X = 0 \end{cases} \quad E[X] = p \quad V[X] = pq$$

Distribución Binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E[X] = np \quad V[X] = np(1-p)$$

X : número de éxitos en los n ensayos

Distribución Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x \geq 0$$

$$E[X] = \lambda, \quad V[X] = \lambda$$

X : número de eventos que ocurren por unidad de tiempo, longitud, superficie o volumen.

Distribución Geométrica

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, x \geq 1$$

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

X : número del evento donde ocurre el primer éxito

Distribución Hipergeométrica

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{R}{x} \binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ si } 0 \leq x \leq \min(n, R)$$

$$E[X] = \frac{nR}{N} \quad V[X] = n \left(\frac{R}{N} \right) \left(1 - \frac{R}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

X : número de éxitos encontrados en una muestra de tamaño n (sin orden, sin repetición), extraída de una urna que contiene N elementos de los cuales K son éxitos.

Distribución Binomial negativa

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x = r, r+1, \dots$$

$$E[X] = \frac{r}{p} \quad V[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

X : número del evento donde ocurre el r-ésimo éxito

RStudio

Distribución binomial

```
dbinom(x, size, prob)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE)
rbinom(n, size, prob)
```

Distribución Poisson

```
dpois(x, lambda)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE)
rpois(n, lambda)
```

Distribución geométrica

```
dgeom(x, prob)
pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE)
qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE)
rgeom(n, prob)
```

Distribución hipergeométrica

```
dhyper(x, m, n, k)
phyper(q, m, n, k, lower.tail = TRUE)
qhyper(p, m, n, k, lower.tail = TRUE)
rhyper(m, n, k)
```

Distribución binomial negativa

```
dbinom(x, size, prob, mu)
pbinom(q, size, prob, mu, lower.tail = TRUE)
qbinom(p, size, prob, mu, lower.tail = TRUE)
rbinom(n, size, prob, mu)
```

EXCEL

```
=0.2460938$ \texttt{dbinom}(5,10,0.50)
=DIST.BINOM.N(núm_éxitos;ensayos;éxitos,acumulado)
=DIST.HIPERGEOM.N(muestra;éxito;núm_de_muestra;población;éxito)
=POISSON.DIST(x;media,acumulado)
```

TABLE 3.07

1. $X \sim \text{binom}(n=10, p=0.50)$

$$a) P(X=5) = \binom{10}{5} 0.50^5 (1-0.50)^5 = 0.24609$$

$\text{dbinom}(2, 10, 0.50)$

$$b) P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= \binom{10}{0} 0.50^0 (1-0.50)^{10} + \binom{10}{1} 0.50^1 (1-0.50)^9 + \binom{10}{2} 0.50^2 (1-0.50)^8 = 0.05469$$

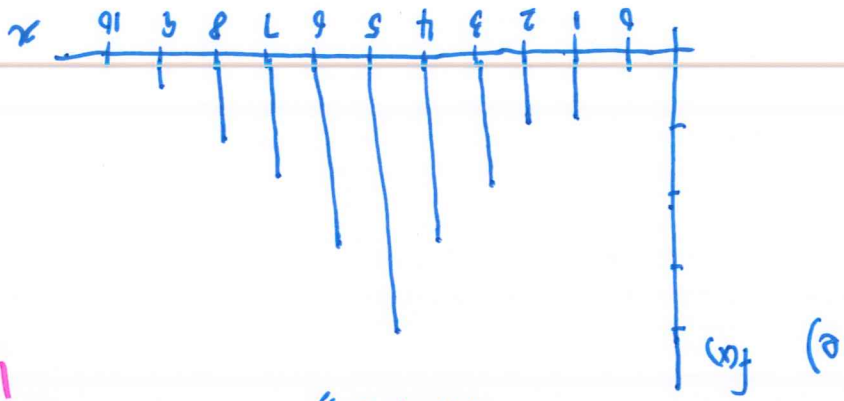
$\text{dbinom}(3, 10, 0.50) + \text{dbinom}(4, 10, 0.50)$

$$c) P(3 \leq X < 5) = f(3) + f(4) = 0.11719 + 0.20508 = 0.32227$$

$$d) P(X \geq 8) = f(8) + f(9) + f(10)$$

$$= 0.01394 + 0.00976 + 0.000976 = 0.02468$$

$\text{dbinom}(7, 10, 0.50)$
lower.tail = FALSE



2) $X \sim \text{geom}(p=0.05)$

a) $P(X=1) = 0.05$

b) $P(X \leq 2) = f(1) + f(2)$

$= 0.05 + 0.05 \times 0.95$

$= 0.0975$

c) $P(X=8) = 0.05^7 \times 0.95 = 0.03491$

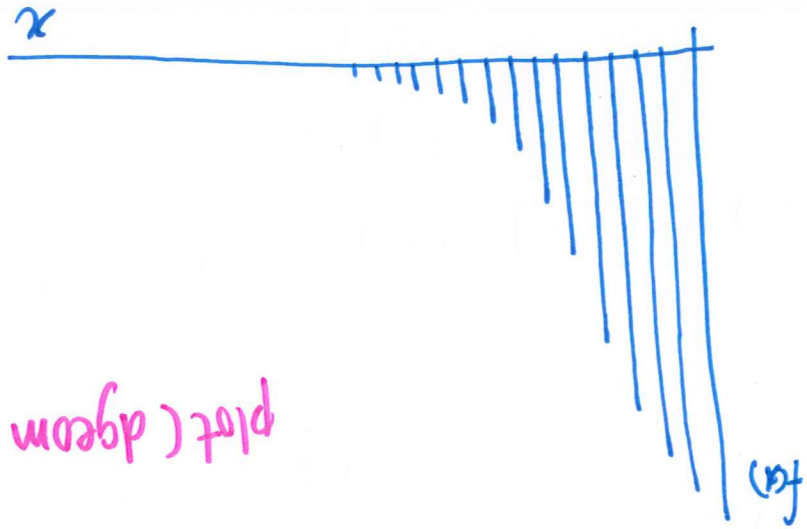
$\text{pggeom}(1, 0.05,$

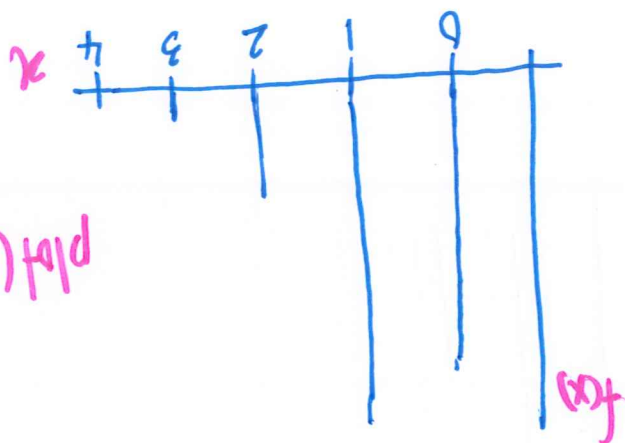
lower.tail = FALSE)

$1 - 0.05 = 0.95$

d) $P(X \geq 2) = 1 - f(1)$

$\text{plot}(\text{dgeom}(x, 0.05))$





plot(hyper(x, 20, 80, 4))

hyper(4, 20, 80, 4)

$$d) P(X=4) = \frac{\binom{4}{4} \binom{80}{100}}{\binom{20}{80} \binom{4}{80}} = 0.06124$$

$$1 - 0.41905 = 0.58095$$

e) $P(X \geq 1) = 1 - f(0)$
 hyper(1, 20, 80, 4, lower.tail=FALSE)

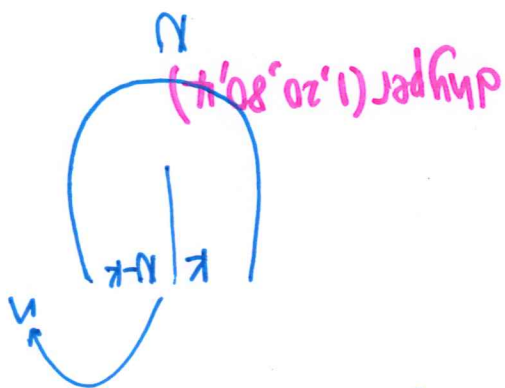
ii) $P_X = 4, 1, 2, 3, 4$

b) $P(X=6) \rightarrow$ NO JE PUTE

$$= 0.41905$$

$$a) P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{100}{80}}{\binom{20}{1} \binom{80}{80}}$$

3) $X \sim \text{hyper}(N=100, n=4, k=20)$



4.

$X \sim \text{pois}(\lambda=4)$

a) $P(X=0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = 0.1353$ dpois(0,4)

b) $P(X=4) = e^{-2} \frac{2^4}{4!} = 0.19537$ dpois(4,4)

c) $P(X \geq 2) = 1 - [f(0) + f(1)]$ ppois(1,4, lower.tail=F)
 $= 1 - (0.1353 + 0.2149)$

$= 1 - 0.3502$
 $= 0.6497$

d) $P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$= 0.1353 + 0.2149 + 0.1465$
 $= 0.4967$ ppois(2,4)

e) $\text{plot}(\text{dpois}(x, 4), \text{type} = "n")$

$$V(X) = \frac{p^2}{r(1-p)} = \frac{0.20}{5 \times 0.80} = 0.025$$

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{5}{0.20} = 25$$

$$= 0.07256$$

$$f(11) + f(12)$$

$$f(12) + f(11) + f(10) + f(9) + f(8) = \sum_{x=5}^{\infty} f(x) = P(X \geq 12)$$

$$= 0.98042$$

$$P(X \geq 10) = 1 - (f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10))$$

$$P(X=6) = \binom{5-1}{6-1} 0.20^5 \times 0.80 = 0.00128$$

$$P(X=0) = 0 \quad \text{since } X \sim \text{Binomial}(n=5, p=0.20)$$

$$p=0.20$$

$$X \sim \text{Binomial}(n=5, p=0.20)$$

6) $X = \#$ de plantas imperfectas

$$n=4 \quad p=0.05$$

$$X \sim \text{binom}(4, 0.05)$$

a) $P(X=0) = \binom{4}{0} 0.05^0 0.95^4 = 0.81451$

b) $P(X=1) = \binom{4}{1} 0.05^1 0.95^3 = 0.17148$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.18549$

7) X : número de clientes que llegan a un mostrador / hora

$$\lambda = E(X) = 8 \text{ clientes / hora}$$

a) $P(X=5) = \frac{e^{-8} 8^5}{5!} = 0.09160$

b) $P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$
 0.07238

c) $\psi \sim \text{pois}(\lambda = 16 \text{ clientes / 2 hrs})$

$$P(Y=2) = e^{-16} \frac{16^2}{2!} = 0.01073$$

d) $E(W) = 8 \times \frac{2}{5} = 20 \text{ cliente / 2.5h}$

8)

$$p = 0.90$$

$$n = 20$$

$$a) E(X) = 20 \times 0.90 = 18$$

se espera que de las 20
semillas en promedio
germinen 18.

X: número de semillas que
germinan

$$X \sim \text{binom}(n=20, p=0.90)$$

$$b) P(X \leq 15) = \sum_{x=0}^{15} \binom{20}{x} 0.90^x (1-0.90)^{20-x}$$

$$= 0.04317451$$

Es decir, la probabilidad de que 15 o menos
germinen es 0.04317451.

9)

$$n = 100$$

$$p = 0.14$$

$$X \sim \text{binom}(100, 0.14)$$

$$P(\text{binom}(59, 100, 0.25, \text{lower.tail} = \text{FALSE}))$$

Para resolver este problema también podemos utilizar una
aproximación de la distribución binomial a la distribución

NORMAL

$$\text{sea } Y \sim N(\mu=np, \sigma^2=npq)$$

$$\mu = np = 25 \quad \sigma^2 = npq = 18.75 \quad \sigma = \sqrt{18.75}$$

$$\approx P(Y > 59.5) = P\left(Z \geq \frac{59.5 - 25}{\sqrt{18.75}}\right)$$

$$P(Z \geq 7.9) \approx 0$$

b) $X \sim \text{geometria} (p=0.25)$
 $P(X=10) = 0.25 \times 0.75^9 = 0.01877$

c) $Y \sim \text{binnm negativ}$

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.25} = 4$$

10) $X \sim \text{pois} (\lambda = 15 \text{ mikroorganismen Invertebra})$

a) $P(X \geq 17) = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{15^x e^{-15}}{x!}$

$$1 - \sum_{x=0}^{16} \frac{15^x e^{-15}}{x!} = 1 - 0.66412 = 0.33587$$

b) $P(X \leq 18) = \sum_{x=0}^{18} \frac{15^x e^{-15}}{x!} = 0.81947$

c) $P(X=2) = \frac{15^2 e^{-15}}{2!} = 0.00036$

$$P(Z < 1.95) = 0.9744$$

$$P(Z < \frac{100.5 - 94.5}{3.074})$$

$$P(X \leq 100) \approx P(Y < 100.5)$$



$$\sigma^2 = 9.45 \quad \sigma = 3.074$$

$$\mu = 94.5$$

$$Y \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$$

Aproximación BINOMIAL a la NORMAL

$$= 0.98328$$

$$P(X \leq 100) = \sum_{x=0}^{100} \binom{105}{x} 0.90^x 0.10^{105-x}$$

X = número de pasajeros que forman el vuelo. (caeden al aeropuerto)

- 105 tickets vendidos
- 0.90 probabilidad de que un pasajero forme el vuelo
- 100 asientos

11)