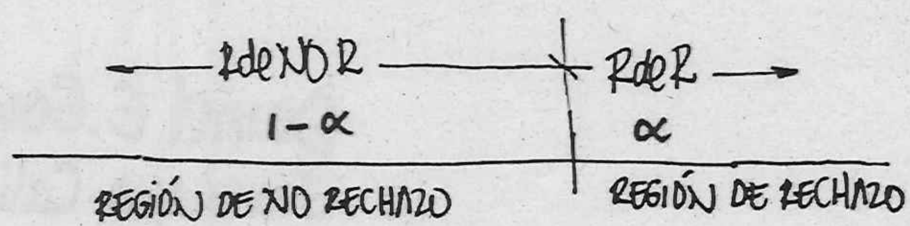
PRUEBAS DE HIPOTESIS

Daniel E. Gonzalez
Javeriana Cali

RdeD: REGLA DE DECISIÓN — REGLA QUE PERMITE CONDICIONES SOBRE LAS CUALES Ho ES RECHAZADA O NO RECHAZADA.

REGLA 1: SI EL X EdeP CAE EN LA RdeR, ENTONCES SE RECHAZA Ho, SE ACEPTA Ha COMO VERDADERA

SI EL EdeP NO CAE EN LA RdeR, NO EXISTE SUFICIENTE EVIDENCIA ESTADISTICA EN LA MUESTRA QUE PERMITA RECHAZAR Ho. SE ASUME QUE Ho ES VERDAD



DECISIÓN

- SE RECHAZA H_0 : SE ACEPTA QUE H_a ES VERDAD

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_a: \theta \neq \theta_0$

- NO SE RECHAZA H_0 : SE DICE NO TENER EVIDENCIA SUFICIENTE EN LA MUESTRA EN CONTRA DE H_0, SE ASUME H_0 COMO VERDAD.

ACEPTAR $\neq$ ASUMIR

DECISIÓN SOBRE H_0	ESTADO DE H_0 (V)	LA NATURALEZA H_0 (F)
RECHAZAR H_0	ERROR TIPO I $P(E.T.I) = \alpha$	DECISIÓN CORRECTA $1-\beta$: POTENCIA
NO RECHAZAR H_0	DECISIÓN CORRECTA	ERROR TIPO II $P(E.T.II) = \beta$

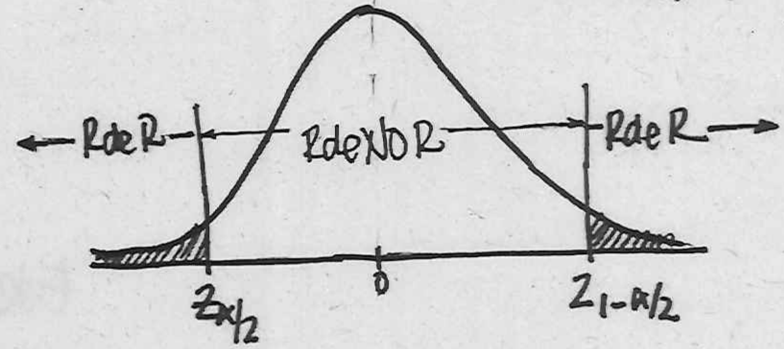
P de H para μ

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_a: \mu \neq \mu_0$

E de P

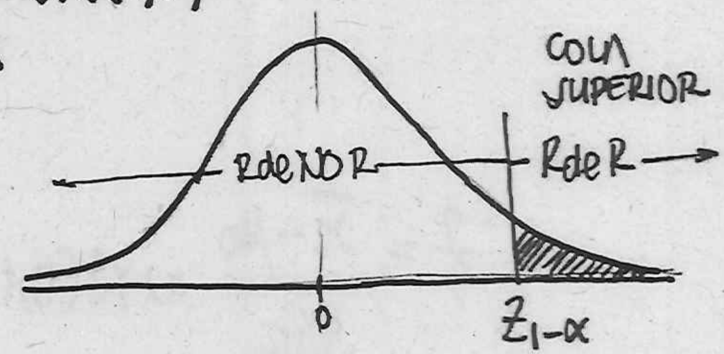
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

DOS COLAS



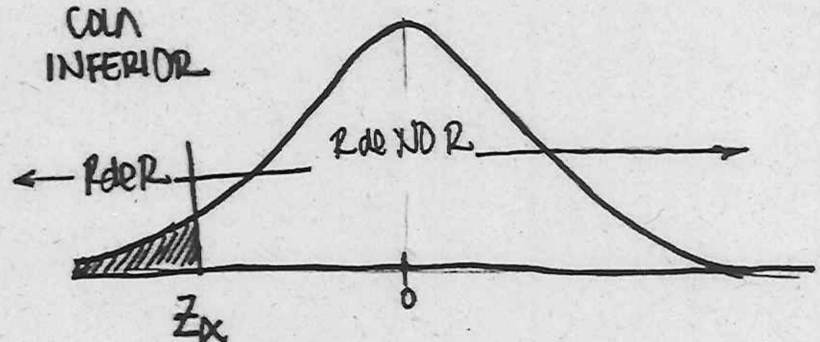
$H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_a: \mu > \mu_0$

COLA SUPERIOR



$H_0: \mu \geq \mu_0$
$H_a: \mu < \mu_0$

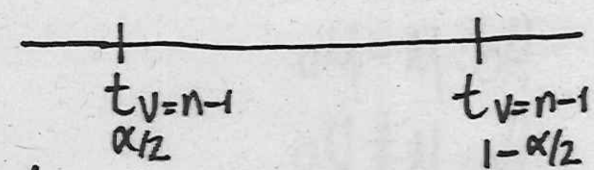
COLA INFERIOR



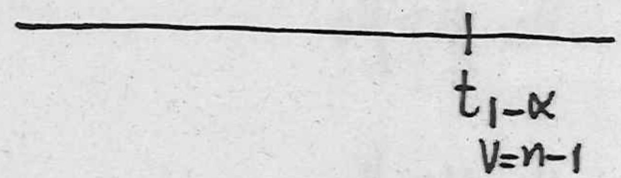
UNA COLA

EdeP

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{v=n-1}$$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



PdeH. PARA P

$H_0: P = P_0$

$H_a: P \neq P_0$

EdeP

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$H_0: P \leq P_0$

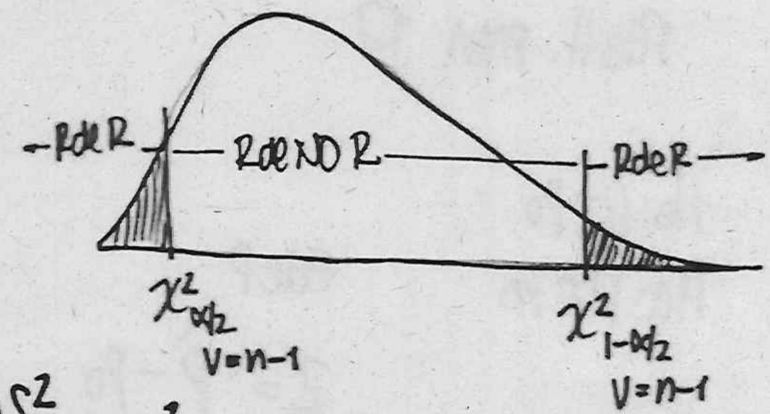
$H_a: P > P_0$

$H_0: P \geq P_0$

$H_a: P < P_0$

P de H PARA σ^2

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

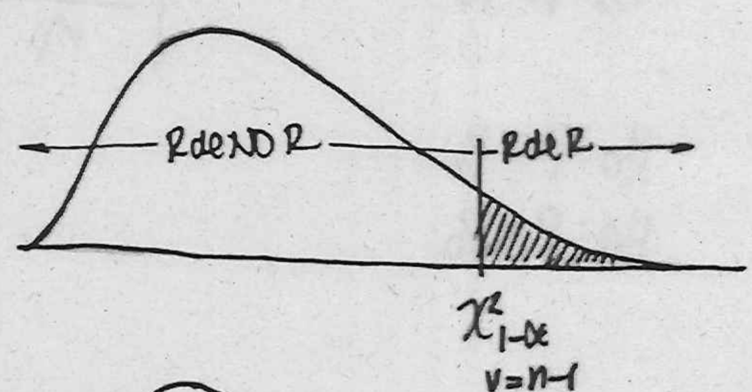


E de P

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{v=n-1}$$

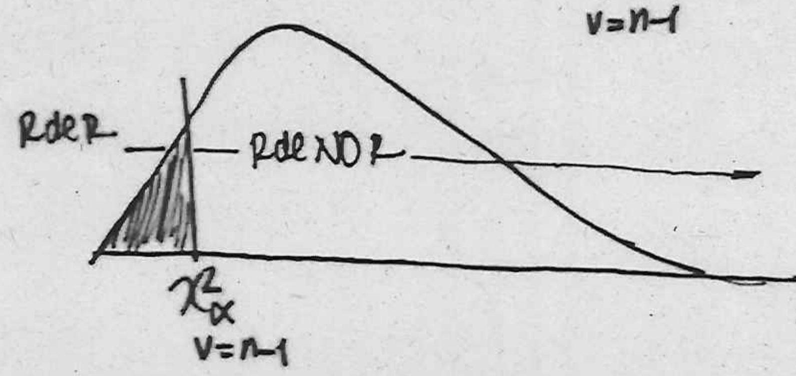
=

$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$
$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$



$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$



PdeH PARA DIFERENCIA DE MEDIAS $\mu_1-\mu_2$

SUPUESTOS:
$X_1 \sim N$
$X_2 \sim N$

EdeP

$H_0: \mu_1-\mu_2 = \cancel{\mu_0}\ \Delta_0$
$H_a: \mu_1-\mu_2 \neq \Delta_0$

$$T=\frac{\bar{d}-\Delta_0}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{v=n-1}$$

GRUPOS PAREADOS

$H_0: \mu_1-\mu_2 \leq \Delta_0$
$H_a: \mu_1-\mu_2 > \Delta_0$

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{v=n_1+n_2-2}$$

ASUME $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

GRUPOS INDEPENDIENTES

$H_0: \mu_1-\mu_2 \geq \Delta_0$
$H_a: \mu_1-\mu_2 < \Delta_0$

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{v'}$$

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

PdeH PARA DIFERENCIA DE PROPORCIONES P_1-P_2

$H_0: P_1-P_2=\Delta_0$
$H_a: P_1-P_2\neq\Delta_0$

EdeP

$$Z=\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-\Delta_0}{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{(\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}\sim N(0,1)$$

$H_0: P_1-P_2\leq\Delta_0$
$H_a: P_1-P_2>\Delta_0$

$H_0: P_1-P_2\geq\Delta_0$
$H_a: P_1-P_2<\Delta_0$

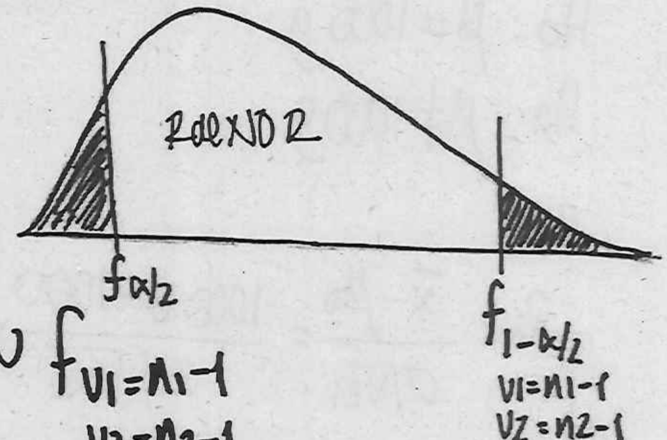
PdeH PARA LA RAZÓN DE VARIANZAS σ_1^2/σ_2^2

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

EdeP

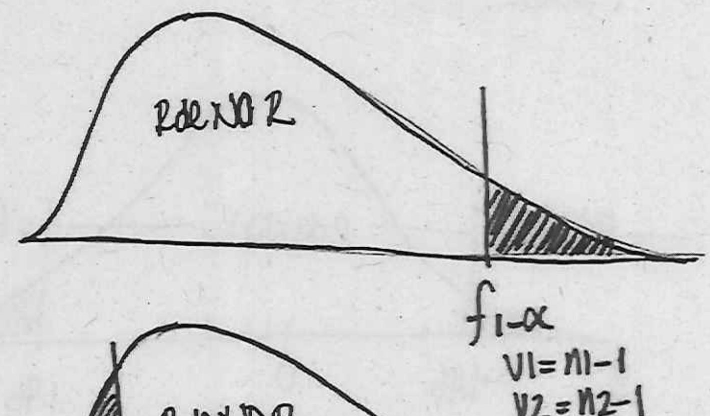
$$F = \frac{S_1^2/(n_1-1)}{S_2^2/(n_2-1)} \sim f_{\substack{v_1=n_1-1 \\ v_2=n_2-1}}$$



Ho

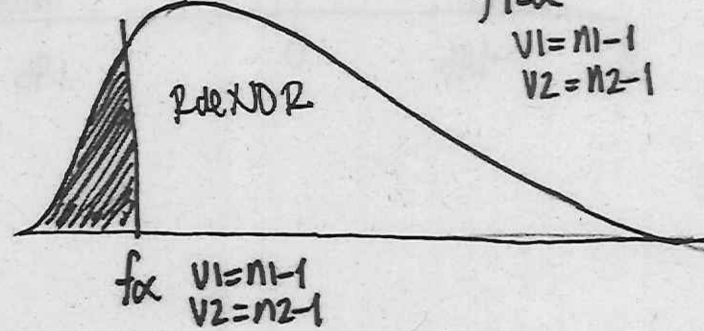
$H_a: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$

$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$



$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$



PROBLEMA 1.

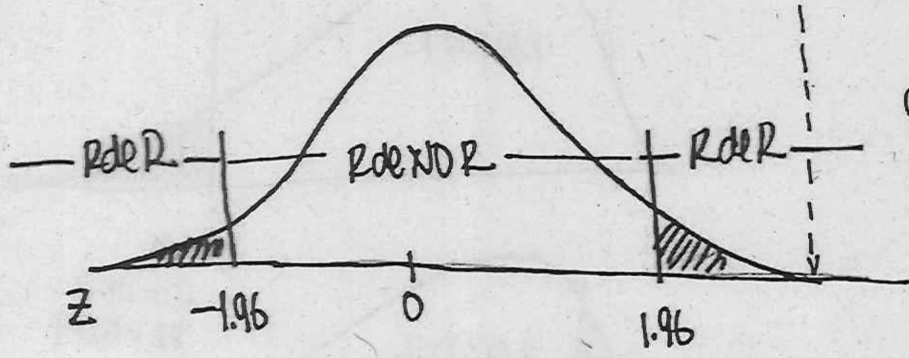
$H_0: \mu = 1000\,g$

$H_a: \mu \neq 1000\,g$

EdeP

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1000.6 - 1000}{2 / \sqrt{60}} = 2{,}323$$

RdeR:



COMO EL EdeP CAE EN LA RdeR, RECHAZAMOS Ho ACEPTAMOS Ha COMO VERDAD

$\mu \neq 1000g$

SE RECOMIENDA HACER CALIBRAR LA BALANZA

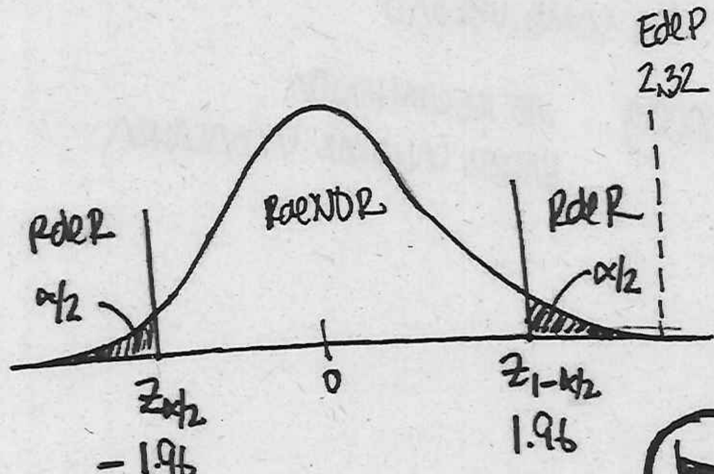
NIVEL DE SIGNIFICANCIA (α)

PROBABILIDAD DE COMETER ERROR TIPO I : RECHAZAR H_0, CUANDO H_0 ES VERDADERA (FALSO ~~DE~~ POSITIVO)

VALOR-P (AREA): PROBABILIDAD DE TENER UN RESULTADO EXTREMO SUPONIENDO QUE H_0 ES VERDAD

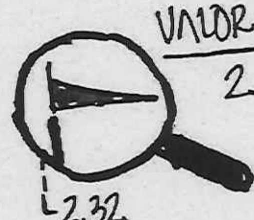
- AREA DELIMITADA POR EL EdeP
- EN CASO DE UNA PRUEBA DE DOS COLAS, EL AREA ENCONTRADA CORRESPONDE A LA MITAD DEL VALOR-P

VALOR-P = 0.02034



pnorm(2,32, lower.tail=FALSE)

$$\frac{\text{VALOR-P}}{2} = 0.01017$$



REGLA 2: SI EL VALOR-P $< \alpha$, ENTONCES SE RECHAZA Ho, SE ACEPTA Ha COMO VERDAD

Ho: $\mu = 1000$ g

Ha: $\mu \neq 1000$ g

VALOR-P: 0.02034

$\therefore$ COMO $0.02034 < 0.05$, SE RECHAZA Ho, SE ACEPTA Ha COMO VERDAD

$\mu \neq 1000$g SE RECOMIENDA HACER CALIBRAR LA BALANZA

PROBLEMA 2.

INFORMACIÓN

$n=15$

$\bar{x}=4.66$

$S=1.21$

$H_0: \mu \geq 5\,\text{min}$

$H_a: \mu < 5\,\text{min}$

EdeP

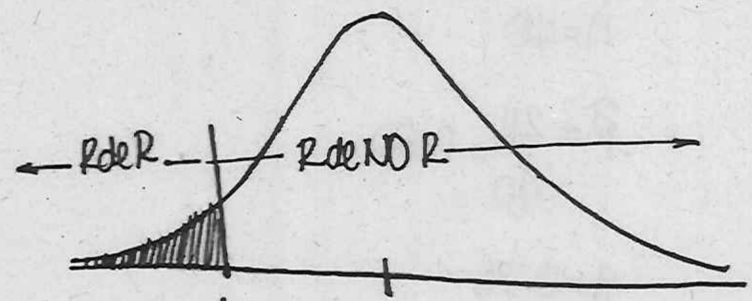
$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{v=n-1}$$

SUPUESTOS:

$X \sim$ NORMAL

σ^2 DESCONOCIDA

$$T=\frac{4.66-5}{1.21/\sqrt{15}} = -1.088$$



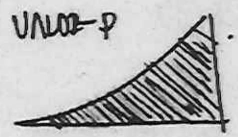
t_α

$v=n-1$

qt(0.05, 14)

-1.761

VALOR-P



pt(−1.088, 14)

0.1494

-1.088

EdeP

COMO $0.1494 > 0.05$, NO SE RECHAZA H_0,
SE ASUME QUE H_0 ES VERDAD
EL GERENTE NO TIENE RAZÓN.

PROBLEMA 3.

INFORMACIÓN:

$X = 24$

$n = 40$

$\hat{p} = \frac{24}{40} = 0.60$

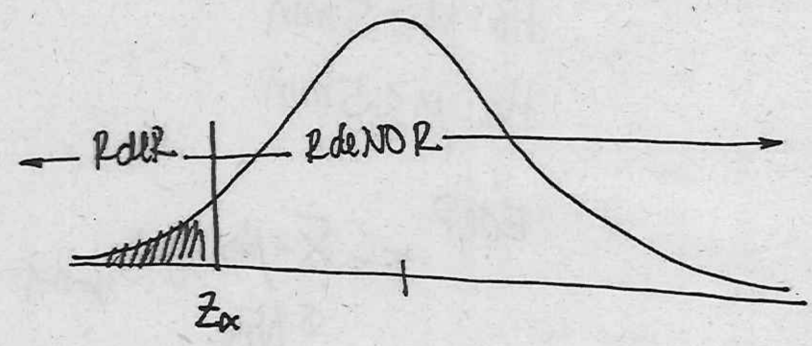
$p_0 = 0.76$

$H_0: p \geq 0.76$

$H_a: p < 0.76$

EdeP

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.60 - 0.76}{\sqrt{\frac{0.76 \times 0.24}{40}}} = -2{,}369$$



-1.645

qnorm(0.05)

VALOR-P : pnorm(-2,369)

0.00892

COMO $0.00892 < 0.05$
SE RECHAZA H_0, SE ACEPTA
H_a COMO VERDAD
$p < 0.76$
SE PUEDE AFIRMAR QUE
LA PROPORCION SE REDUJO. //

PROBLEMA 4

INFORMACIÓN

	TAMAÑO MUESTRA	MEDIA MUESTRAL	DES. ESTAND. MUESTRAL
GRUPO 1	36	6.0	4.0
GRUPO 2	40	8.2	4.3

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$
$H_a: \mu_1 < \mu_2$

COMPARACIÓN DE MEDIAS
GRUPOS INDEPENDIENTES

$\mu_1 \geq \mu_2$
$\mu_1 - \mu_2 \geq 0$

$\mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$

EdeP —— ASUMO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

DEPENDE

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

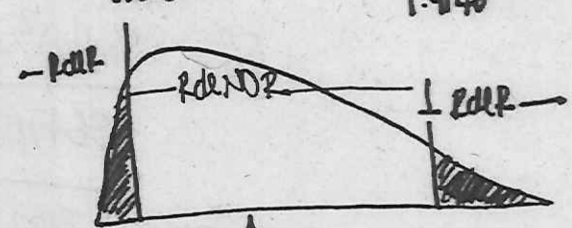
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

EdeP

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{4.0^2}{4.3^2} = \underline{0.8653}$$

qf(0.025, 35, 39) 0.5162

qf(0.975, 35, 39) 1.9148



NO SE RECHAZA H_0
ASUMO QUE $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$

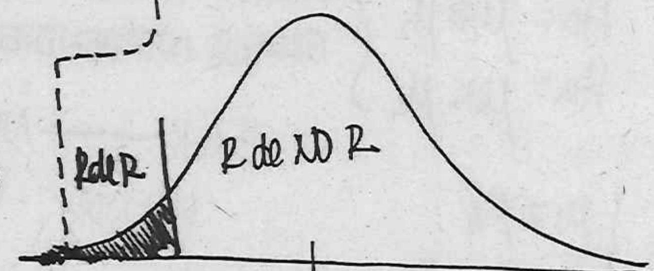
$H_a: \mu_1 < \mu_2$

EdeP

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(6{,}0 - 8{,}2) - 0}{4.16 \times \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{40}}} = -2{,}301$$

$$S_p^2 = \frac{35 \times 4{,}0^2 + 39 \times 4{,}3^2}{36 + 40 - 2} = 17{,}3123$$

$$S_p = \sqrt{17{,}3123} = 4{,}16$$



$qt(0.05, 74)$

VALOR-P: $pt(-2{,}301, 74)$

0.012049

∴ SE RECHAZA H_0, SE ACEPTA H_a

$\mu_1 < \mu_2$. SE PUEDE AFIRMAR QUE EL MÉTODO APLICADO AL SEGUNDO GRUPO GENERA MEJORES RESULTADOS.

PROBLEMA 5

INFORMACIÓN:

$X = 3$

$n = 40$

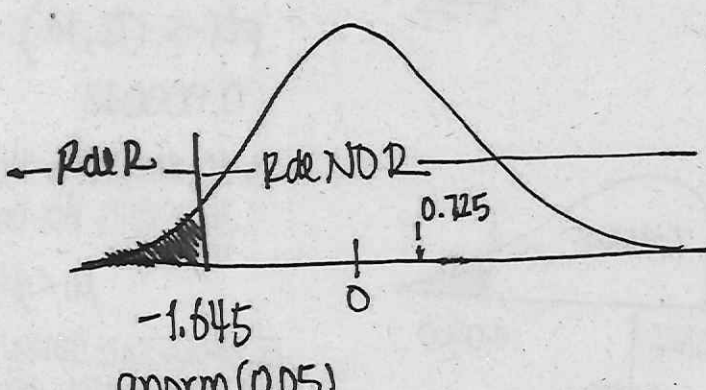
$\hat{p} = \frac{3}{40} = 0{,}075$

$H_0: p \geq 0.05$

$H_a: p < 0.05$

E de P

$$Z = \frac{(\hat{p} - p_0) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.075 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{40}}} = 0.725$$



VALOR-P: pnorm(0.725)

0.7657

$\therefore$ NO SE RECHAZA H_0,
NO EXISTE SUFICIENTE EVIDENCIA EN LA MUESTRA QUE PERMITA RECHAZAR H_0
ASUMIMOS QUE H_0 ES VERDAD.

SE RECOMIENDA NO COMPRAR.

PROBLEMA 6

INFORMACIÓN:

	n	$\bar{x}$	s
GRUPO 1:	10	75.10	2,56
GRUPO 2:	10	82,40	3,66

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ COMPARACION DE MEDIAS INDEPENDIENTES

$H_a: \mu_1 < \mu_2$

SUPUESTOS:

$X_1 \sim$ NORMAL

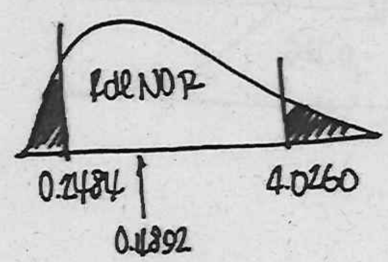
$X_2 \sim$ NORMAL

ASUME $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ EdP $F = 0.4892$

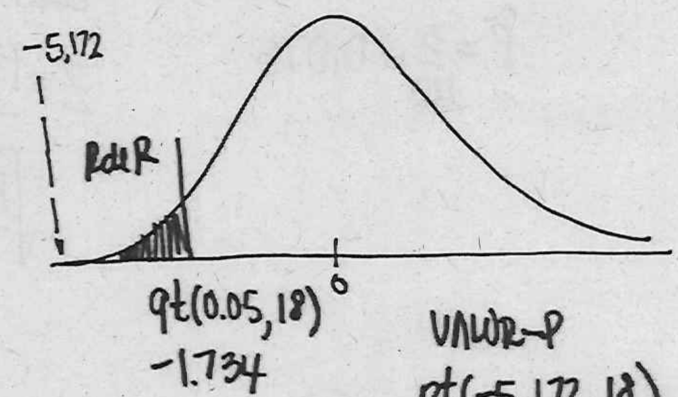
$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\therefore$ NO ASUMO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ///



EdP

$$T = \frac{75,10 - 82,40}{3,156\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = -5.172$$



VALOR-P

pt(-5.172, 18)

0.000032

$\therefore$ SE RECHAZA H_0 SE ACEPTA H_a COMO VERDAD. $\mu_1 < \mu_2$

EL PROMEDIO OBTENIDO POR EL SEGUNDO GRUPO ES MAYOR AL DEL PRIMER GRUPO.

PROBLEMA 7

INFORMACIÓN

$n_1 = 400 \quad x_1 = 80 \quad \hat{p}_1 = 0.20$

$n_2 = 400 \quad x_2 = 88 \quad \hat{p}_2 = 0.22$

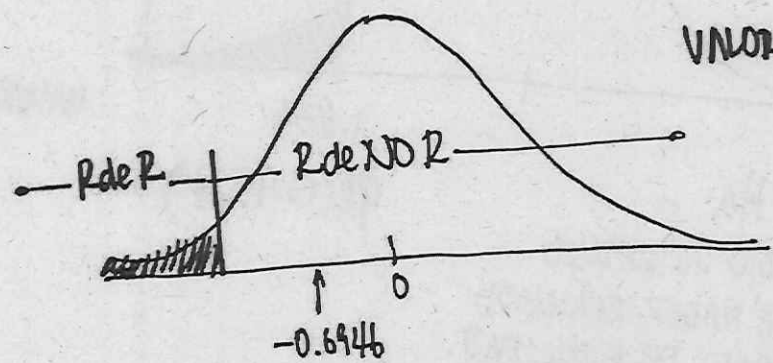
$H_0: p_1 \geq p_2$

$H_a: p_1 < p_2$

EdeP $$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{0.20 - 0.22}{\sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{400} + \frac{0.22 \times 0.78}{400}}}$$

0.78

$= -0.6946$



VALOR-P: pnorm(-0.6946)

0.2436

NO SE RECHAZA H_0
SE ASUME COMO VERDAD
LA PUBLICIDAD NO MUESTRA HABER MEJORADO LA PROPORCIÓN DE CLIENTES QUE PREFIEREN EL TAMAÑO ESPECIAL

PROBLEMA 8

INFORMACION

	G1	G2	di
1	45	36	9
2	73	60	13
3	46	44	2
4	124	119	5
5	30	35	-5
6	57	51	6
7	83	77	6
8	34	29	5
9	26	24	2
10	17	11	6

$n=10$

$\bar{d}=4.9$

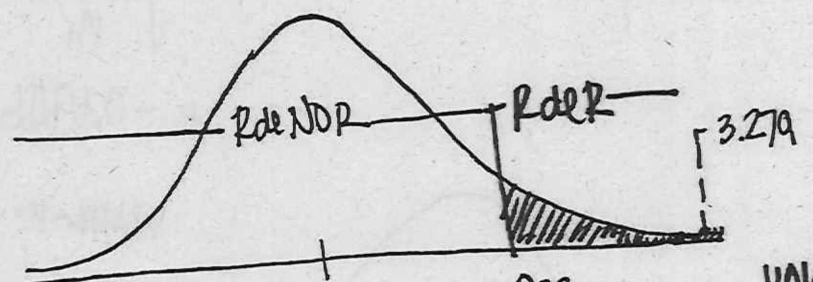
$S_d=4.72$

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

$H_a: \mu_1 > \mu_2$

EdeP

$$T_0 = \frac{\bar{d}-\Delta_0}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{4.9-0}{4.72/\sqrt{10}} = 3.279$$



$qt(0.95,9)$

VALOR-P: 0.005

RECHAZO Ho. ACEPTO Ha

$\mu_1 > \mu_2$. EL PROMEDIO SE REDUJO DESPUES DE HABER REALIZADO EL PROGRAMA DE SEGURIDAD.

PROBLEMA 9

INFORMACIÓN

$d_i = X_{ant.} - X_{des.}$

6.5
3.5
-0.5
2.5
1.5
1.0
-0.5
0.0
3.0
0.5
2.0
1.5
1.0
3.0
6.0
2.0

$\bar{d} = 2.06$

$S_d = 2.03$

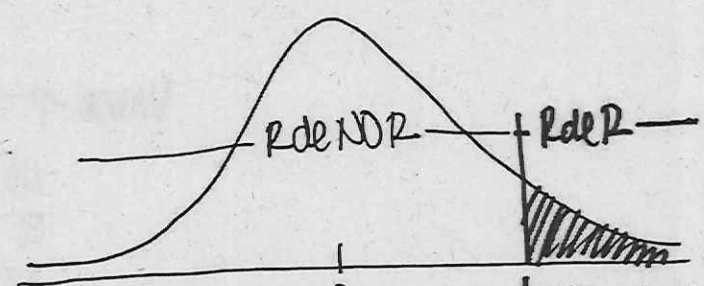
$n = 16$

$H_0: \mu_a \leq \mu_d$

$H_a: \mu_a > \mu_d$

EdeP

$$T = \frac{\bar{d} - \Delta_0}{S_d / \sqrt{n}} = \frac{2.06}{2.03/\sqrt{16}} = 4.059$$



$t_{0.95},\ v=15$

qt(0.95,15)

1.753

VALOR-P

pt(4.059,15,lower.tail=FALSE)

0.00051

$\therefore$ SE RECHAZA H_0, SE ACEPTA H_a COMO VERDAD $\mu_1 > \mu_2$

SE PUEDE AFIRMAR QUE EN PROMEDIO HAY UNA REDUCCIÓN DE PESO.

PROBLEMA 10

INFORMACIÓN:

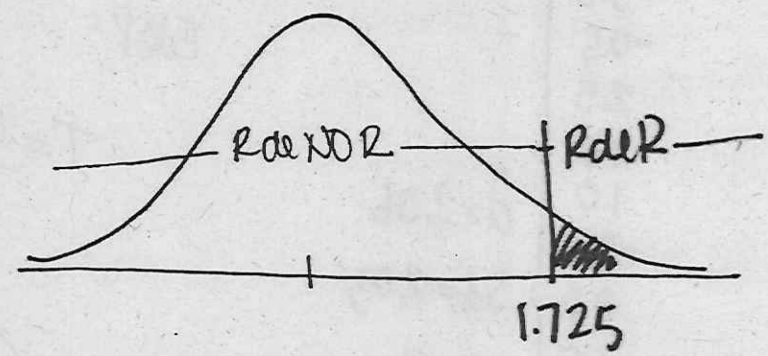
	n	$\bar{x}$	s^2
G1	12	21.58	289.5
G2	10	17.30	125.6

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

$H_a: \mu_1 > \mu_2$

EdeP

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(21.58 - 17.30)}{14.69\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}} = 0.6805$$



VALOR-P: 0.251995

NO RECHAZO Ho. ASUMO QUE Ho ES VERDAD.
NO SE PUEDE AFIRMAR QUE LOS EMPLEADOS CON MAYOR EDAD PIERDAN MÁS DIAS DE TRABAJO QUE EL GRUPO DE JOVENES

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

EdeP

$$F = \frac{289.5}{125.6} = 2.30$$

$\therefore$ ASUMO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

VALOR-P: mín(pf(2.3,11,9); pf(2.3,11,9, lower.tail=FALSE))

0.2214