FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS 300MAE004 - ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
NOMBRE Y CODIGO:

Octubre 19 de 2016
Profesor Daniel E. González Gómez

Instrucciones: Apague sus equipos de comunicación. Mientras dure la prueba, no se debe ausentarse del salón de clase ni prestar objetos. Concéntrese en la prueba. La evaluación le será retirada en el momento de ser sorprendido en fraude o intento y será reportado al Decano de la Facultad. Use la hoja cuadriculada adjunta para realizar las operaciones que justifiquen cada una de las respuestas. Marque tanto el cuestionario como la hoja de respuestas. El examen consta de 3 preguntas que se califican con igual peso, teniendo en cuenta los indicadores y pesos porcentuales que aparecen a continuación:
Criterios de evaluación:

(50 %) A : Habilidad para aplicar conocimientos de matemáticas, ciencias e ingeniería.
(75 %) E. Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
(25 %) G : Habilidad para comunicarse efectivamente.

---

1. Un fabricante de escapes para automóviles desea garantizar que su producto dure un periodo igual al de la duración del vehículo en el cual se instala. El fabricante supone que el tiempo de duración de su producto es una variable aleatoria con una distribución aproximadamente normal, con una vida promedio de tres años y una desviación estándar de seis meses. Si el costo de reemplazo por unidad es de \$400.000 , ¿ cuál puede ser el costo total de reemplazo para los primeros dos años, si se instalan un millón de unidades? (Canavos(1988))

2. Sea X el tiempo de reacción en segundos, antes de cierto estimulo, y Y la temperatura (en $\circ F$) a la cual inicia la reacción. Suponga que las variables aleatorias, X y Y tienen la función de distribución conjunta :

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determine : a) $P(0 \leq X \leq 1/2; 1/4 \leq Y \leq 3/4)$, b) $P(X < Y)$. (Tomado de Walpole (2012))

3. Un sistema consiste en dos componentes conectados en serie. El sistema fallará cuando alguno de los componentes falle. Sea T el momento en que el sistema falla, expresado en años. Sean X_1 y X_2 las duraciones de los dos componentes en años. Suponga que X_1 y X_2 son independientes y que cada uno sigue una distribución de Weibull con $\alpha = 0.2$ y $\beta = 2$. Determinar a) $P(X_1 > 5)$, b) Determinar $P(X_1 > 5; X_2 > 5)$, c) Es el evento $(T > 5)$ igual al evento $(X_1 > 5$ y $X_2 > 5)$?, d) Determinar $P(T < 5)$. d) Determine la tasa de falla de este sistema después de 5 años.

FORMULARIO

- $f(x,y)$ es función de densidad de probabilidad conjunta de dos variables discretas si:
  - $f(x,y) \geq 0$
  - $\sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x,y) = 1$
- $g(x)$ corresponde a la función de densidad marginal de la variable discreta X, la cual se puede hallar a partir de $f(x,y)$
$$g(x) = \sum_{R_Y} f(x,y)$$
- $h(y)$, corresponde al función de densidad marginal de la variable discreta Y, que se puede hallar a partir de $f(x,y)$
$$h(y) = \sum_{R_X} f(x,y)$$
- Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces
$$f(x,y) = g(x).h(y)$$
- $f(x|y)$ es la función de distribución condicional de que ocurra y dado x y la cual define como:
$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$
- Valor esperado de la variable discreta X se define como:
$$E[X] = \sum_{R_X} x.g(x)$$
Análogamente se puede obtener el valor esperado de Y
$$E[Y] = \sum_{R_Y} x.h(y)$$
- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \sum_{R_X} x^2.g(x), \, , \quad E[Y^2] = \sum_{R_Y} x^2.h(y)$
- Valor esperado de la variable conjunta como:
$$E[XY] = \sum_{R_X}\sum_{R_Y} x.y.f(x,y)$$

- Covarianza entre las variables X,Y
$$COV[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$
- Correlación entre las variables X,Y
$$\rho = \frac{COV[XY]}{\sqrt{V[X].V[Y]}}$$
La correlación es una medida que mide el grado de asociación lineal entre dos variables. $0 \leq \rho \leq 1$

En el caso de las variables continuas se reemplaza la sumatoria por integral

- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1, \quad f(x,y) \geq 0$
- $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$
- $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx,$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ g(x)dx, \quad E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\ h(y)\,dy$
- $E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.y.f(x,y)\,dx\,dy$

Distribución Bernoulli ....

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } X = 1 \\ q & \text{si } X = 0 \end{cases}$$
$$E[X] = p \quad V[X] = pq$$

Distribución Binomial ....

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n$$
$$E[X] = np \qquad V[X] = np(1-p)$$

Distribución Poisson...

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\ e^{-\lambda}, x \geq 0$$
$$E[X] = \lambda, \qquad V[X] = \lambda$$

Distribución Hipergeometrica..................................

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ \text{si } 0 \leq x \leq \text{mín}(n,R)$$
$$E[X] = \frac{nR}{N} \qquad V[X] = n\binom{R}{N}\left(1 - \frac{R}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Distribución Geométrica...

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, x \geq 1$$
$$E[X] = \frac{1}{p} \quad V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución Binomial negativa ....

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x = r, r+1, \ldots$$
$$E[X] = \frac{r}{p} \qquad V[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Distribución Uniforme ....

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$
$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$
$$V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Normal ....

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$
$$E[X] = \mu \qquad V[X] = \sigma^2$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Distribución LogNormal...

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2\right) \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$
$$E[X] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$$
$$V[X] = \exp(2\mu + \sigma^2)\exp(\sigma^2) - 1$$

Distribución Exponencial ....

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$
$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Distribución Gamma ....

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, x > 0$$
$$E[X] = \frac{r}{\lambda} \qquad V[X] = \frac{r}{\lambda^2}$$

Distribución Weibull ....

$$f(x) = \alpha\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha}, \quad x > 0$$
$$F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x^\beta\}$$
$$E[X] = \frac{1}{\beta}\ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$V[X] = \frac{1}{\beta^2}\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right)$$

Aproximaciones ....
Si $X \sim Bin(n,p)$ y si $np > 10$ y $nq > 10$, entonces se puede aproximar $X \sim N(np, np(1-p))$
Si $X \sim Poisson(\lambda)$, donde $\lambda > 10$, entonces se puede aproximar $X \sim N(\lambda, \lambda)$

Tasa de fallas ....

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$