TALLER 3.09- DISTRIBUCIONES CONJUNTAS
300MAE005 - PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA

Profesor Daniel Enrique González Gómez

- $f(x, y)$ es función de densidad de probabilidad conjunta de dos variables discretas si:
  - $f(x, y) \geq 0$
  - $\sum_{R_X} \sum_{R_Y} f(x, y) = 1$
- $g(x)$ corresponde a la función de densidad marginal de la variable discreta X, la cual se puede hallar a partir de $f(x, y)$
$$g(x) = \sum_{R_Y} f(x, y)$$
- $h(y)$, corresponde al función de densidad marginal de la variable discreta Y, que se puede hallar a partir de $f(x, y)$
$$h(y) = \sum_{R_X} f(x, y)$$
- Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces
$$f(x, y) = g(x).h(y)$$
- $f(x|y)$ es la función de distribución condicional de que ocurra y dado x y la cual define como:
$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$
- Valor esperado de la variable discreta X se define como:
$$E[X] = \sum_{R_X} x.g(x)$$
Análogamente se puede obtener el valor esperado de Y
$$E[Y] = \sum_{R_Y} x.h(y)$$
- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \sum_{R_X} x^2.g(x),\quad E[Y^2] = \sum_{R_Y} x^2.h(y)$
- Valor esperado de la variable conjunta como:
$$E[XY] = \sum_{R_X} \sum_{R_Y} x.y.f(x, y)$$
- Covarianza entre las variables X,Y
$$COV[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$
- Correlación entre las variables X,Y
$$\rho = \frac{COV[XY]}{\sqrt{V[X].V[Y]}}$$
La correlación es una medida que mide el grado de asociación lineal entre dos variables. $0 \leq \rho \leq 1$

En el caso de las variables continuas se reemplaza la sumatoria por integral

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1, \quad f(x, y) \geq 0$
- $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$
- $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x) dx, \quad E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\, dy$
- $E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x.y.f(x, y)\, dx\, dy$

-1	-0-90	-75	-0.50	-0.25	-0.10	0	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	1.0
Negativa perfecta	Negativa muy fuerte	Negativa considerable	Negativa media	Negativa debil	Negativa muy debil	No existe correlación	Positiva muy debil	Positiva debil	Positiva media	Positiva considerable	Positiva muy fuerte	Positiva perfecta

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Considere como X el número que falla una máquina de control numérico ($R_X = \{0, 1, 2\}$) al día y Y el número de veces en que se llama a un ingeniero para restaurar el proceso ($R_Y = \{0, 1, 2\}$). Su función de distribución conjunta esta dada por :

x \ y	0	1	2
0	0.15	0.05	0
1	0	0.20	0.35
2	0	0.10	0.15

   (a.) Detarmine : $P(X \geq 1; Y \geq 1)$; $P(X = 1)$; $P(Y \leq 1)$

   (b.) Encuentre $P(Y = 1|X = 2)$, exprese en palabras el resultado

   (c.) Determine si existe dependencia entre estas dos variables (calcule el valor de ρ_{XY}), analice el resultado obtenido

2. Un restaurante de comidas rápidas opera tanto en un local que da servicio en automovil (autoservicio) como en un segundo local que atiende a clientes que llegan caminando. En un dia cualquiera, la proporción del tiempo en servicio del autoservicio se representa por X, mientras que Y representa la proporción del tiempo en que el segundo local esta en servicios. La función de densidad conjunta que representa el comportamiento de estas dos variables está dado por :
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   (a.) Determine si $f_{XY}(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta

   (b.) Determine $P(X \leq 0{,}5; Y \leq 0{,}3)$, $P(X \leq 0{,}80)$, $P(Y \geq 0{,}60)$

   (c.) Determine ρ_{XY}, interprete su resultado

Correlación

Solución Problema 1

Solución problema 2

SOLUCION PROBLEMA 1

función de DISTRIBUCION CONJUNTA

$f_{XY}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$g(x)$
$x=0$	0,15	0.05	0	0.20
$x=1$	0	0.20	0.35	0.55
$x=2$	0	0.10	0,15	0.25
$h(y)$	0,15	0,35	0.50	1.00

función de DISTRIBUCION MARGINAL DE X

función de DISTRIBUCIÓN MARGINAL DE Y

$f_{XY}(x,y)$ debe cumplir:

i) $f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y$

ii) $\sum_{R_X} \sum_{R_Y} f(x,y) = 1 \rightarrow$ 0.15 + 0,05 + 0 + 0 + 0.20 + 0.35 + 0 + 0.10 + 0,15 = 1 //

OK

FUNCION MARGINAL DE X

$$g(x) = \sum_{R_Y} f(x,y)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0.20, & si\ x=0 \\ 0.55, & si\ x=1 \\ 0.25, & si\ x=2 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

FUNCION MARGINAL DE Y

$$h(y) = \sum_{R_X} f(x,y)$$

$$h(y) = \begin{cases} 0.15, & si\ y=0 \\ 0.35, & si\ y=1 \\ 0.50, & si\ y=2 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

(a) $P(X \geq 1 ; Y \geq 1) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} f(x,y) = 0.20 + 0.35 + 0.10 + 0.15 = 0.80$

x \ y	0	1	2
0	0.15	0.05	0
1	0	0.20	0.35
2	0	0.10	0.15

c) $\rho_{XY} = \dfrac{COV(XY)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$g(x)$

x	$g(x)$	$x\,g(x)$	$x^2 g(x)$
0	0.20	0	0
1	0,55	0.55	0.55
2	0,25	0.50	1.00
		1.05 $\rightarrow E(X)$	1.55 $\rightarrow E(X^2)$

$V(X) = 1.55 - 1.05^2$
$= 0.4475$

y	$h(y)$	$y\,h(y)$	$y^2 h(y)$
0	0.15	0	0
1	0.35	0.35	0.35
2	0.50	1.00	2,00
		1.35 $\rightarrow E(Y)$	2,35 $\rightarrow E(Y^2)$

$V(Y) = 2.35 - (1.35)^2$
$= 0.5275$

$P(X=1) = 0.55$

		y			
		0	1	2	$g(x)$
x	0				0.20
	1				$\boxed{0.55}$
	2				0.25

$P(Y \leq 1) = 0.15 + 0.35$
$= 0.50$

	y		
	0	1	2
$h(y)$	0.15	0.35	0.50

(b) $P(Y=1 \mid X=2)$

Distribucion CONDICIONAL

$$f(y \mid x=2) = \begin{cases} 0, & si\ y=0 \\ 0.40, & si\ y=1 \\ 0.60, & si\ y=2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$P(Y=1 \mid X=2) = 0.40$

	y			
x 2	0	0.10	0.15	0.25
$f(y \mid x=2)$	0	$0.10/0.25$ 0.40	$0.15/0.25$ 0.60	

$$E(XY) = \sum_{R_X} \sum_{R_Y} xy\, f(x,y) =$$

		y		
		0	1	2
x	0	0.15	0.05	0
	1	0	0.20	0.35
	2	0	0.10	0.15

$$\sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} xy\, f(x,y)$$

$= 0\times0\times0.15 + 0\times1\times0.05 + 0\times2\times0 +$
$1\times0\times0 \quad + 1\times1\times0.20 + 1\times2\times0.35 +$
$2\times0\times0 \quad + 2\times1\times0.10 + 2\times2\times0.15$

$= 0 + 0 + 0 +$
$0 + 0.20 + 0.70 +$
$0 + 0.20 + 0.60 \quad = 1.70$ //

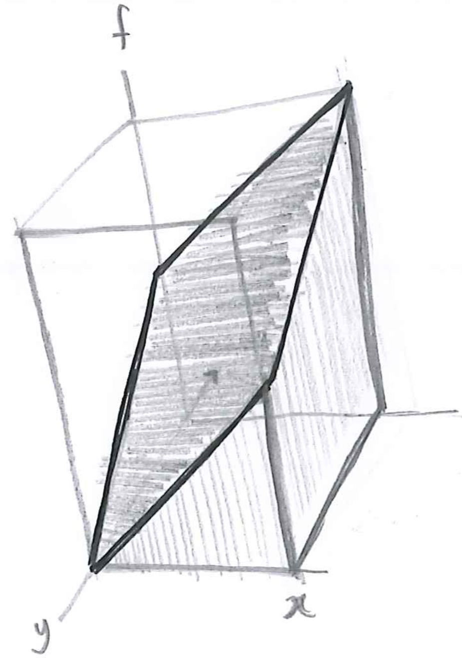
$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$1.70 - 1.05 \times 1.35 = 0{,}2825$

$$\rho_{XY} = \frac{0{,}2825}{\sqrt{0.4475 \times 0.5275}} = 0.5814$$

RELACIÓN POSITIVA DE MAGNITUD MEDIA.

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$



$$\int_0^1 \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx}\,dy$$

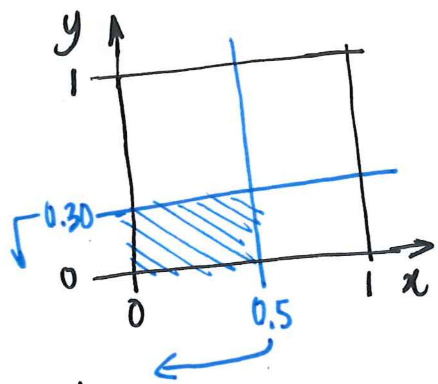
$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_0^1 \right) dy$$

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 2y\right) dy$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{y}{2} + \frac{2y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

OK

(b) $P(X \leq 0.5\,;\, Y \leq 0.30)$



$$\int_0^{0.30}\int_0^{0.50} \frac{2}{3}(x+2y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^{0.30} \frac{2}{3}\left(\frac{0.5^2}{2} + y\right) dy = \int_0^{0.30} \frac{2}{3}(0.125 + y)\,dy$$

$$\frac{2}{3}\left(0.125y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{0.30} = 0.055$$

$P(X \leq 0.80) \rightarrow$ se debe hallar $g(x)$: función MARGINAL de X

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\, dy = \frac{2}{3}\left(xy + \frac{2y^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora:

$$\int_0^{0.80} g(x)\, dx = \int_0^{0.80} \frac{2}{3}(x+1)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{0.80}$$

$$= 0.7467$$

$P(Y \geq 0.60)$ debemos hallar la función MARGINAL de Y

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$h(y) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$P(Y \geq 0.60) = 1 - P(X < 0.60)$$

$$1 - \int_0^{0.60} \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right) dy = 1 - \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2y^2}{2} + \frac{y}{2}\right)\Big|_0^{0.60}\right)$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\left(0.60^2 + \frac{0.60}{2}\right)\right) = 0.56 \,//$$

(c) $\rho_{XY} = \dfrac{COV(XY)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(xy)\, dx\, dy$

$V(X) = E(X^2) - E(X)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, g(x)\, dx$

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{2}{3}(x+1)\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x^2+x)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{5}{\cancel{6}_{3}}\right) = \frac{5}{9}\ //$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \frac{2}{3}(x+1)\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x^3+x^2)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{7}{\cancel{12}_{6}}\right) = \frac{7}{18}\ //$$

$$V(X) = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}\ //$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \, \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(2y^2 + \frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{18} \,//$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \, \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(2y^3 + \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2y^4}{4} + \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{4}{\cancel{6}_{3}}\right) = \frac{4}{9} \,//$$

$$V(Y) = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{23}{324} \,//$$

$$\mathrm{COV}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \frac{2}{3}(x + 2y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{3}\left(x^2 y + 2xy^2\right) dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{yx^3}{3} + \frac{\cancel{2}y^2x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1\right) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{y}{3} + y^2\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_{\cancel{3}}}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{COV}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{9} \times \frac{11}{18} = -\frac{1}{162} \simeq -0.00617$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{COV}(XY)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{-0.00617}{\sqrt{\frac{13}{162} \times \frac{23}{324}}} \simeq -0.0817$$

RELACIÓN
NEGATIVA
MUY DEBIL