TALLER 3.10
DISTRIBUCIONES CONTINUAS
300MAE005-PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Profesor Daniel Enrique González Gómez
Lina Ramirez Marulanda

1. Un vendedor de salsas quiere vender a Mc Donas un lote de cuarenta barriles del producto. El gerente del supermercado sospecha que los barriles están próximos a su vencimiento (una semana para su vencimiento, los cuales son considerados de baja calidad). El vendedor manifiesta enfáticamente que solo seis barriles estan proximos a su vencimiento y esta dispuesto a permitír que se analicen tres barriles sin costo alguno para el comprador, con el fin que este decida si adquiere el lote. El comprador manifiesta que de encontrar al menos un barril proximo a su vencimiento rechazara el lote.
   a) El vendedor acostumbra mezclar 6 barriles próximos a su vencimiento y 34 buenos para aumentar sus ganancias de venta. Este año ha repetido similar negociación a la realizada con el gerente de Mc Donas con 200 establecimientos más. Todos ellos han rechazado el lote, si tienen detectan al menos un barril próximo a su fecha de vencimiento entre los tres barriles seleccionados al azar. Cada vez que logra hacer la venta gana dos mil dolares adicionales, ¿Cuanto dinero deja de ganar el vendedor como producto de devolución?
   b) Determinar la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable del problema. Graficar.

2. Sea X la proporción de agua (sustancia 1) y Y la proporción de alcohol (sustancia 2) que se encuentran en una muestra de una mezcla usada en la industria. La cantidad de ambas sustancias en la muestra se modela con la función f_{XY} dada como:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x+y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) ¿Qué porcentaje de las muestras seleccionadas aleatoriamente tienen menos del setenta y cinco por ciento de ambas sustancias?
   b) Se han seleccionado cien preparaciones de la mezcla aleatoriamente. ¿Cuántas de estas tienen menos del cincuenta por ciento de cada sustancia?
   c) Cien muestras contienen menos del cincuenta por ciento de la sustancia 2, ¿cuántas muestras de estas contienen menos del cuarenta por ciento de la sustancia 1?
   d) Una mezcla seleccionada aleatoriamente contiene el cincuenta por ciento de la sustancia 2, ¿cuál es la probabilidad que contenga menos del cuarenta por ciento de la sustancia 1?

3. Una empresa arma paquetes de maní y chocolate. Cada paquete contiene pesos diferentes de maní y chocolate. Para un paquete seleccionado al azar, sea X la cantidad de maní y Y la cantidad de chocolate. Los pesos están dados en kilogramos. La función de densidad conjunta de X y Y esta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & 5 \leq x \leq 9, \quad 4 \leq y \leq 9 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determinar la función de densidad conjunta que modela la cantidad de maní y chocolate que contiene un paquete.
   b) ¿Qué porcentaje de las veces que se seleccionan paquetes al azar, contienen menos cantidad de maní que de chocolate?
   c) Cien paquetes contienen menos de seis kilogramos de maní, ¿cuántos de ellos contienen menos de cinco kilogramos de chocolate?
   d) Doscientos paquetes seleccionados aleatoriamente contienen cinco kilogramos de chocolate, ¿cuántos de ellos contienen más de ocho kilogramos de maní?

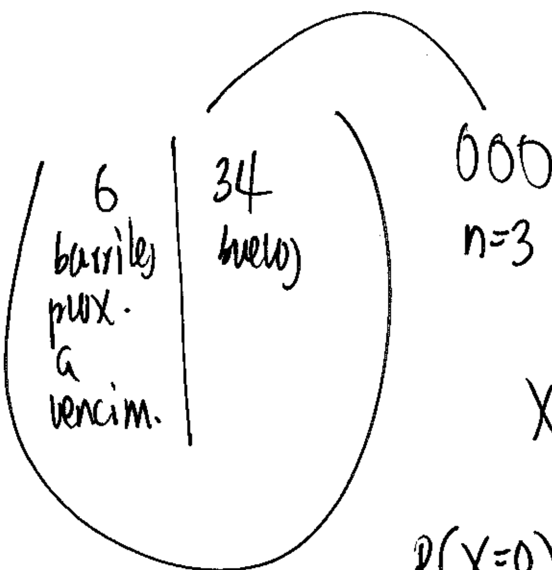
4. Sea X la cantidad de encogimiento (en %) que experimenta una fibra de cierto tipo elegida aleatoriamente cuando se calienta a una temperatura de ciento veinte $^\circ C$. Y representa el encogimiento adicional (en %) cuando la fibra se calienta a ciento cuarenta $^\circ C$. Suponga que la función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy^2 & , \quad 3 \leq x \leq 4 \quad 0.5 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 & , \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

   a) Determinar el valor de k para que f_{XY} cumpla las condiciones de una función de densidad conjunta de X y Y.
   b) ¿Qué porcentaje de las fibras al calentarse a una temperatura de ciento veinte grados centígrados tienen un encogimiento inferior a 3.2 % y al calentarse a una temperatura de ciento cuarenta grados centígrados tienen un encogimiento mayor a 0.8 %?
   c) Cien fibras al calentarse a una temperatura de ciento cuarenta grados centígrados se encogieron 0.8 %, ¿cuántas fibras de estas al calentarse a una temperatura de ciento veinte grados centígrados tienen un encogimiento inferior a 3.8 %?
   d) Quinientas fibras al calentarse a una temperatura de ciento cuarenta grados centígrados presentaron un encogimiento inferior a 0.8 %, ¿cuántas de estas fibras al calentarse a una temperatura de ciento veinte grados centígrados se encogen menos de 3.8 %?
   e) ¿Son independientes las variables del problema?

TALLER 3,10

1) $N = 40$ barriles



X: numero de barriles con fecha de vencimiento proxima.

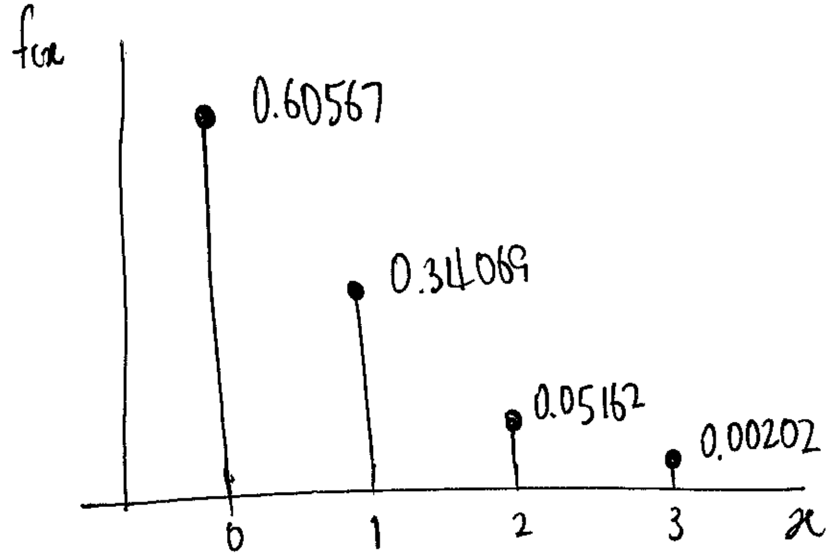
$X \sim$ hipergeometrica

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{34}{3}}{\binom{40}{3}} = 0.60567$$

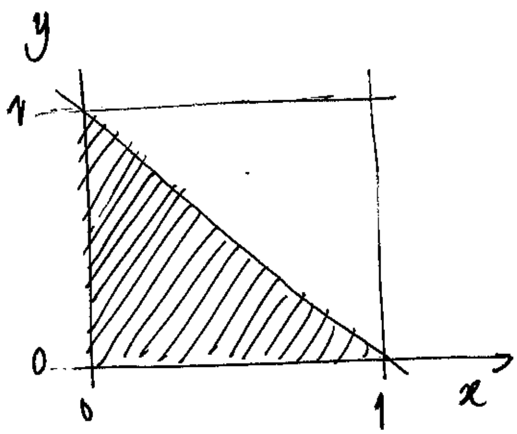
$P(X \geq 1) = 0.39433$ — probabilidad de que sea rechazado un lote con estas caracteristicas.

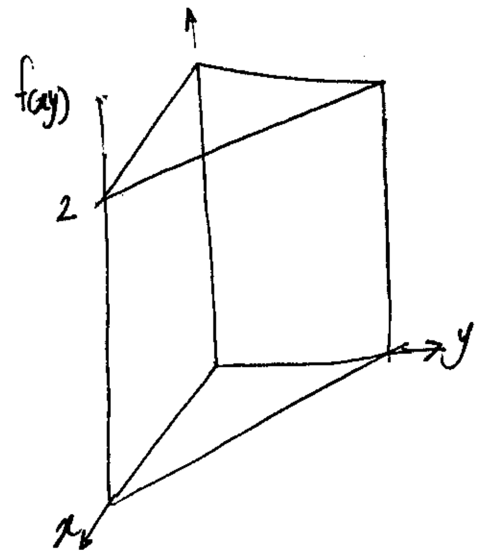
$0.39433 \times 200 \times 2000$ us $= 157.732$ us deja de ganar!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{6}{x}\binom{34}{3-x}}{\binom{40}{3}}, & x = 0,1,2,3 \\ 0, \text{ en otro caso} & \end{cases}$$



2.)

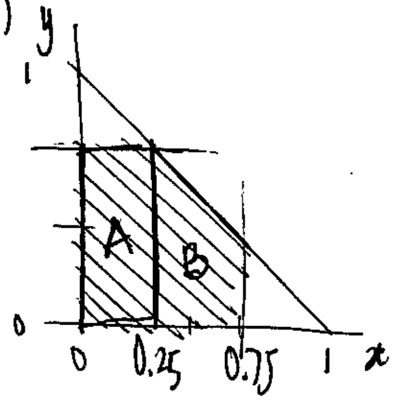


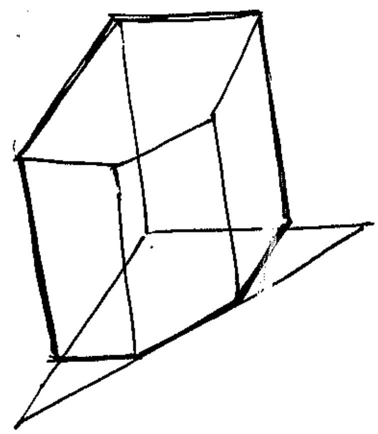


$x + y \leq 1$

$y = 1 - x$

a)





$$P(X<0.75;\ Y<0.75) = \int_0^{0.75}\int_0^{0.25} 2\,dx\,dy + \int_{0.25}^{0.75}\int_0^{1-x} 2\,dy\,dx = 0.375 + 0.50$$

$$= 0.875$$

$$A = \int_0^{0.75} 2x\Big|_0^{0.25} dy$$

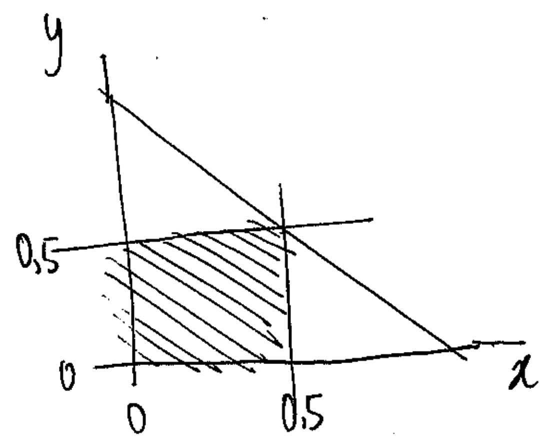
$$\int_0^{0.75} 0.5\,dy$$

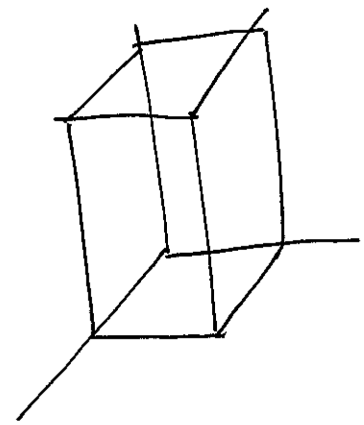
$$0.5\Big|_0^{0.75} = 0.375$$

$$B = \int_{0.25}^{0.75} \left(2y\Big|_0^{1-x}\right) dx = \int_{0.25}^{0.75} 2(1-x)\,dx =$$

$$2x - x^2\Big|_{0.25}^{0.75} = 0.50$$

b)





$$\int_0^{0.5}\int_0^{0.5} 2\, dx\, dy = \int_0^{0.5}\left(2x\Big|_0^{0.5}\right) dy = \int_0^{0.5} 1\, dy = y\Big|_0^{0.5} = 0.50$$

$100 \times 0.50 = 50$ muestras contendran menos de 50% de cada sustancia

c) $$P(X<0.50 \mid Y<0.50) = \frac{P(X<0.50;\, Y<0.50)}{P(Y<0.50)} = \frac{0.50}{0.75} = 0.667$$

se requiere encontrar la distribucion MARGINAL de Y

$$h(y) = \int_0^{1-y} 2\, dx = 2x\Big|_0^{1-y} = 2(1-y)$$

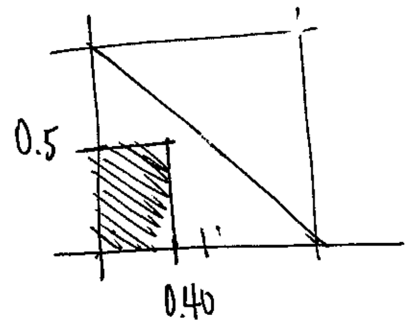
$$P(Y<0.50) = \int_0^{0.50} 2(1-y)\, dy = 2y - y^2\Big|_0^{0.5} = 0.75$$

R/ Aproximadamente 67 mezclas de las 100 que contienen menos de un 50% de la sustancia 2, tendran menos del 50% de la sustancia 1.

d) $P(X<0.40 \mid Y=0.50) = \dfrac{P(X<0.40;\, Y=0.50)}{P(Y=0.50)}$

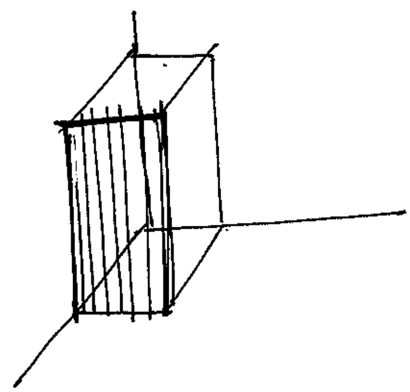
$P(X<0.40;\, Y=0.50) =$

$= f_{X|Y}(x \mid y_0) = \dfrac{f_{XY}(x, y_0)}{2(1-y_0)}$



$\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-y_0)} = \dfrac{1}{1-y_0}$

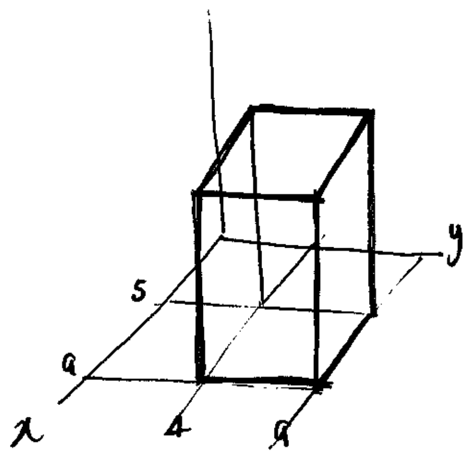
$= \dfrac{1}{1-0.5} = 2$

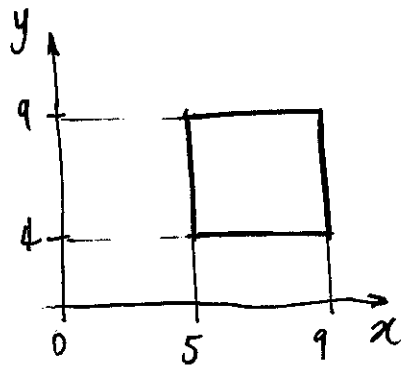


$P(X<0.40 \mid Y=0.50) = \int_0^{0.40} 2\,dx = 0.80$

3)

a)





$$\int_4^9 \int_5^9 k \, dx \, dy = \int_4^9 \left(kx \Big|_5^9 \right) dy$$

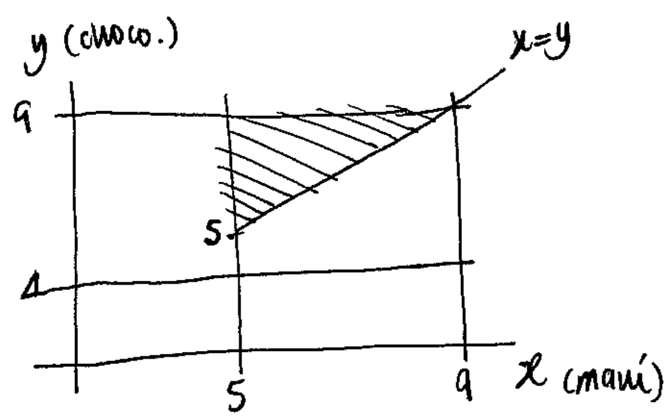
$$\int_4^9 k(9-5)\, dy = 4ky \Big|_4^9 = 4k(9-4)$$

$$20k = 1$$

$$k = \frac{1}{20}$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/20 \;, & 5<x<9 \\ & 4<y<9 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

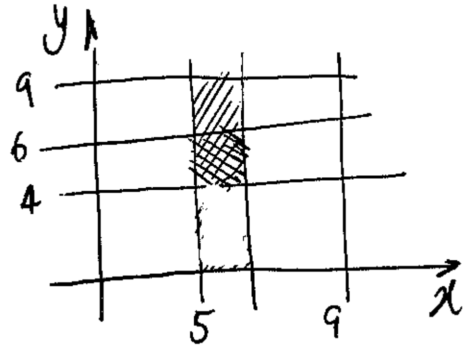
b)



$$\int_5^9 \int_x^9 1/20 \; dy \, dx = \int_5^9 \frac{(9-x)}{20} \, d = \frac{9x}{20} - \frac{x^2}{40} \Big|_5^9 = 0.40$$

R| El 40% de las veces en que se selecciona un paquete de manera aleatoria contiene menos cantidad de MANI que de CHOCOLATE.

c) $P(Y<5 \mid X<6)$



$$= \frac{P(X<6\,;\,Y<5)}{P(X<6)} = \frac{1/20}{1/4} = 0.20$$

$100 \times 0.20 = 20$ paquetes

$$P(X<6\,;Y<5) = \int_5^6 \int_4^5 \frac{1}{20} \, dy \, dx = \int_5^6 \frac{(5-4)}{20} \, dx = \frac{(6-5)}{20}$$

$$= 1/20$$

R/ de 100 paquetes que contienen menos de 6 kg de maní, 20 paquetes contienen menos de 5 kg de chocolate.

$$g(x) = \int_4^9 \frac{1}{20} \, dy = \frac{(9-4)}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(X<6) = \int_5^6 \frac{1}{4} \, dx = \frac{(6-5)}{4} = \frac{1}{4}$$

d) $P(X>8 \mid Y=5) =$

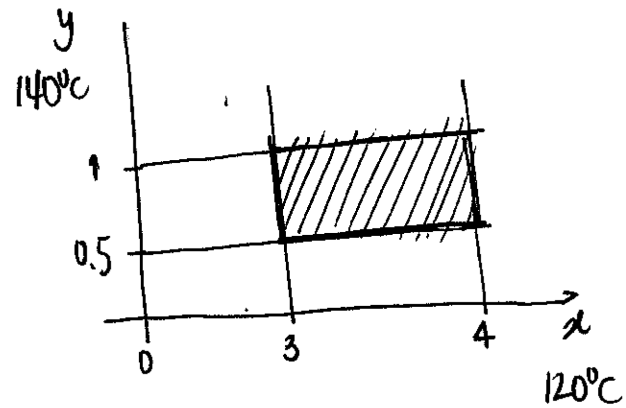
$$f_{X|Y}(x \mid y=5) = \frac{f(x, y_0)}{h(y_0)} = \frac{1/20}{1/5} = 0{,}25$$

$$h(y) = \int_5^9 \frac{1}{20}\,dx = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$200 \times 0.25 = 50$

R/ De los 200 paquetes que contienen 5 kg de CHOCOLATE, 50 paquetes contienen más de 8 kg de MANÍ.

4.) a)



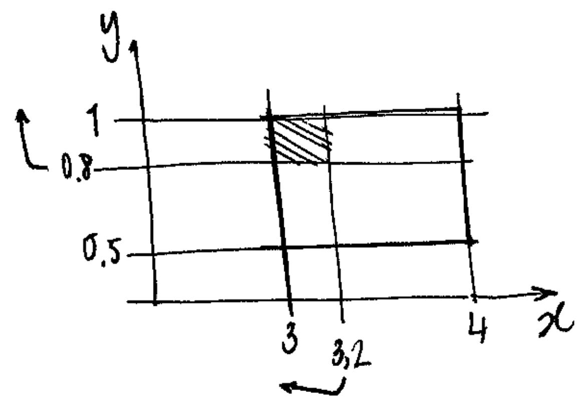
$$\int_3^4 \int_{1/2}^1 kxy^2 \, dy \, dx = 1$$

$$\int_3^4 \left(\frac{kxy^3}{3} \Big|_{1/2}^1 \right) dx = 1$$

$$\int_3^4 \left(\frac{7kx}{24} \right) dx = 1 \qquad \frac{7kx^2}{48} \Big|_3^4 = 1$$

$$\frac{49}{48} k = 1 \qquad k = \frac{48}{49} \;///$$

b) $P(X < 3{,}2 \,;\, Y > 0.80)$

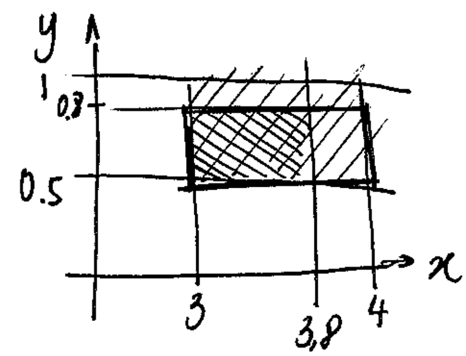


$$\int_3^{3,2} \int_{0.80}^{1.0} \frac{48xy^2}{49} \, dy \, dx$$

$= 0.0987951$ //

Solo el 9.8% de las fibras tienen un encogimiento por debajo del 3,2% al calentarse a una temperatura de 120°C y más de un 0.8% al calentarse a una temperatura de 140°C

d) $P(X<3.8 \mid Y<0.80) = \dfrac{P(X<3.8\,;\,Y<0.80)}{P(Y<0.80)} = \dfrac{0.343719}{0.442286}$



- $P(X<3.8\,;\,Y<0.80) =$

$$\int_{3}^{3.8}\int_{0.5}^{0.8} \frac{48xy^2}{49}\,dy\,dx$$

$= 0.343719$

- $$h(y) = \int_{3}^{4} \frac{48xy^2}{49}\,dx = \frac{24y^2}{7}$$

$$\int_{0.5}^{0.80} \frac{24}{7}y^2\,dy = 0.442286$$

$$500 \times \frac{0.343719}{0.442286} = 388.57 \simeq 389$$

R/ De las 500 fibras que se calientan a 140°C y se encogen en menos de 0.8%, 389 fibras se encogen por menos de 3,8% al calentarse a 120°C.

e) X y Y son independiente si $\rho = 0$

X y Y son independiente si $f_{XY}(x,y) = g_X(x)\, h_Y(y)$

$f_{XY}(x,y) = \dfrac{48xy^2}{49}$

$\dfrac{2x}{7} \times \dfrac{24y^2}{7} = \dfrac{48xy^2}{49}$ //

R/ SI SON INDEPENDIENTES

$g(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{48xy^2}{49}\, dy = \frac{2x}{7}$

$h(y) = \displaystyle\int_{3}^{4} \frac{48xy^2}{49}\, dx = \frac{24y^2}{7}$