Taller Unidad 3.2

Profesor Daniel Enrique González Gómez

Resumen de conceptos

- $f(x,y)$ es función de densidad de probabilidad conjunta de dos variables discretas si:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x,y) = 1$$

- $g(x)$ corresponde a la función de densidad marginal de la variable discreta X, la cual se puede hallar a partir de $f(x,y)$

$$g(x) = \sum_{R_Y} f(x,y)$$

- $h(y)$, corresponde al función de densidad marginal de la variable discreta Y, que se puede hallar a partir de $f(x,y)$

$$h(y) = \sum_{R_X} f(x,y)$$

- Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$f(x,y) = g(x).h(y)$$

- $f(x|y)$ es la función de distribución condicional de que ocurra y dado x y la cual define como:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

- Valor esperado de la variable discreta X se define como:

$$E[X] = \sum_{R_X} x.g(x)$$

Análogamente se puede obtener el valor esperado de Y

$$E[Y] = \sum_{R_Y} x.h(y)$$

- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \sum_{R_X} x^2.g(x), \qquad E[Y^2] = \sum_{R_Y} x^2.h(y)$

- Valor esperado de la variable conjunta como:

$$E[XY] = \sum_{R_X} \sum_{R_Y} x.y.f(x, y)$$

- Covarianza entre las variables X,Y

$$COV[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

- Correlación entre las variables X,Y

$$\rho = \frac{COV[XY]}{\sqrt{V[X].V[Y]}}$$

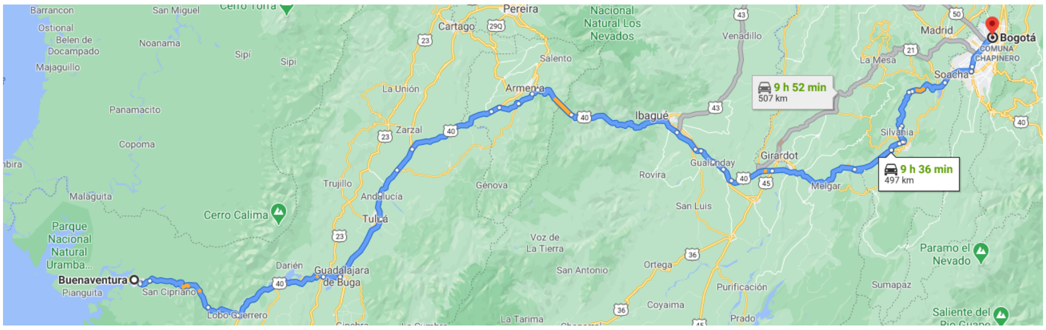
La correlación es una medida que mide el grado de asociación lineal entre dos variables. $0 \leq \rho \leq 1$

En el caso de las variables continuas se reemplaza la sumatoria por integral

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1, \qquad f(x, y) \geq 0$
- $\displaystyle P(a \leq X \leq b; c \leq Y \leq d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) dy dx$
- $\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,$
- $\displaystyle E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x) dx, \qquad E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\, dy$
- $\displaystyle E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x.y.f(x, y)\, dx\, dy$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un camión de entregas, viaja de una ciudad que denominaremos A a otra ciudad que llamaremos B. Antes de iniciar cada recorrido es revisado y puesto a punto por un equipo de mantenimiento. Durante el recorrido de ida, el camión puede realizar el viaje de manera continua o presentar una, dos y hasta tres inconvenientes (averiás o accidentes en la carretera) que hacen que se deba detener por un tiempo. De igual manera ocurre para el viaje de regreso.



Sea X el número de inconvenientes presentados por el camión en su viaje de día y Y el número de inconvenientes para el viaje de regreso. Un ingeniero ha estudiado el problema y encuentra que la distribución de probabilidad conjunta de X y Y se puede representar como lo indica la siguiente tabla:

$f_{XY}(x,y)$		x			
		0	**1**	**2**	**3**
	0	0.01	0.02	0.07	0.01
y	**1**	0.03	0.06	0.10	0.06
	2	0.05	0.12	0.15	0.08
	3	0.02	0.09	0.08	0.05

(a). ¿Qué porcentaje de las veces el camión puede hacer el recorrido completo (ida y regreso) sin problemas?

(b). ¿Qué porcentaje de las veces el camión encuentra un inconveniente cuando va de la ciudad A hacia la ciudad B?

(c). ¿Qué porcentaje de las veces el camión encuentra en el camino de regreso de la ciudad B a la cuidad A dos inconvenientes?

(d). ¿Qué porcentaje de las veces se presentan menos de cuatro inconvenientes en el recorrido completo de la ciudad A hasta la ciudad B y de regreso desde la ciudad B hasta la ciudad A (ida y regreso)?

(e). Los registros indican que en cien viajes de regreso desde la ciudad B hasta la ciudad A, en cada uno de ellos presentaron tres inconvenientes, ¿cuántos veces de estos viajes presentaron dos inconvenientes en camino de ida a la ciudad B?.

(f). Determinar la función de probabilidad del número de inconvenientes que el camión puede presentar en su camino a la ciudad B y función de probabilidad del número de inconvenientes que puede presentar el camión en su viaje de regreso a la ciudad A (funciones de distribución marginales)

(g). Determinar la funciones de probabilidad condicional $(Y|X = 0)$

(h). Cuantos inconvenientes se esperan tener en un viaje completo (ida y regreso)?

(i). Construya los gráficos de la función de probabilidad conjunta de X y Y, funciones de probabilidades marginales de X y Y, funciones de probabilidades condicionales de X y Y, descrita en el punto (g).

(j). Se pueden considerar las variables X y Y independientes?

2. Sea X la cantidad de encogimiento (en %) que experimenta una fibra de cierto tipo elegida aleatoriamente cuando se calienta a una temperatura de ciento veinte C. Y representa el encogimiento adicional (en %) cuando la fibra se calienta a ciento cuarenta C. Suponga que la función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy^2 & , \quad 3 \leq x \leq 4 \quad 0{,}5 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 & , \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

(a). Determinar el valor de k para que f_{XY} cumpla las condiciones de una función de densidad conjunta de X y Y.

(b). ¿Qué porcentaje de las fibras al calentarse a una temperatura de ciento veinte grados centígrados tienen un encogimiento inferior a $3{,}2\,\%$ y al calentarse a una temperatura de ciento cuarenta grados centígrados tienen un encogimiento mayor a $0{,}8\,\%$?

(c). Quinientas fibras al calentarse a una temperatura de ciento cuarenta grados centígrados presentaron un encogimiento inferior a $0{,}8\,\%$, ¿cuántas de estas fibras al calentarse a una temperatura de ciento veinte grados centígrados se encogen menos de $3{,}8\,\%$?

(d). ¿Son independientes las variables del problema?

3. Una empresa comercializadora de café produce mezclas de tres tipos de variedades con el fin de obtener un mejor producto. Cada mezcla contiene diversas proporciones de las variedades de café tipo Colombia, Bourbon y de café Caturra. Suponga que el peso de cada paquete de café es de 1 kilogramo, pero que el peso de cada una de las variedades utilizadas en la mezcla varia de un paquete a otro. Para un paquete seleccionado al azar, el contenido de la variedad tipo Colombia (X) y de la variedad tipo Bourbon (Y) siguen la siguiente función de distribución de probabilidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & , \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \quad x+y \le 1 \\ \\ 0 & , \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

(a). ¿Qué porcentaje de las veces los paquetes contienen más de la mitad del peso en café tipo Colombia?

(b). Se han distribuido doscientos paquetes con menos de la mitad del peso en variedad Bourbon, ¿cuántas de estos paquetes tienen más de 3/4 de su peso en café tipo Colombia?

(c). En la bodega hay trescientos paquetes con la mitad de pesos en café variedad Colombia, ¿cuántos de ellos tienen menos de la mitad en Bourbon?

(d). Un comprador desea que la cantidad de café Bourbon represente más de la mitad de la mezcla. Que tan probable es esta exigencia? Determinar:

(e). Funciones marginales para las variables X y Y definidas en el problema

(f). Gráficas de las funciones marginales $g(x)$ y $h(y)$ de las variables del problema

Tomados de Walpole-Myers-Myers (2012)