PRUEBAS DE HIPÓTESIS NO PARAMÉTRICAS

Daniel Enrique González

Pontificia Universidad Javeriana Cali

19 de mayo de 2021

PRUEBAS NO PARAMETRICAS

Hasta el momento nos hemos dedicado a la estadística parametrica, que exige la estimación de parámetros y de la comprobación de supuestos sobre las distribuciones de las variables, como por ejemplo que se distribuyan normal.

Note que la distribución *normal* esta relacionada con las distribuciones $t - student$, χ^2 $chi - cuadrado$ y F entre otras.

$$
\begin{array}{ccc}
N(\mu, \sigma^2) & \longrightarrow & Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \\
 & & \downarrow \\
F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} \sim F_{v_1,v_2} & \longleftarrow & \chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_{v=n-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathrm{T}=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2/v}} \sim t_{v=n-1}
\end{array}
$$

CUANDO SE UTILIZAN PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

- Cuando no se cumplen los supuestos como:
  - Normalidad
  - Tamaños mínimos de muestra
  - Número igual de elementos en cada muestra
  - Homogeneidad de varianza, entre otros
- Cuando se usan tamaños de muestra pequeños. Tamaños menores a 30 datos no permiten comprobar supuestos sobre la población.
- Cuando se convierten datos cualitativas (escalas nominales u ordinales) a información útil para la toma de decisiones (escala de intervalo). Utilizado en estudios mercadeo para medir variables como gustos, satisfacción, nivel de necesidad etc.

VENTAJAS DE LAS PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

- Son fáciles de usar
- No se requieren comprobar supuestos
- Se pueden usar con muestras pequeñas
- Se pueden usar con variables cualitativas

DESVENTAJAS DE LAS PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

- Ignoran información
- No son tan eficientes como las pruebas parametricas, tienen menor potencia.(P(Rechazar Ho|Ho es Falsa) = 1-β)
- Llevan a una mayor probabilidad de cometer error tipo II (no rechazar Ho falsa). P(No rechazar Ho| Ho es Falsa)=β

PRUEBAS DE HIPÓTESIS NO PARAMÉTRICAS

1. Prueba de Signos
2. Prueba Wilcoxon
3. Prueba de Mann-Whitney
4. Prueba de Rachas
5. Correlación de Rangos de Sperarman
6. Prueba Chi-Cuadrado χ^2 de Independencia
7. Prueba Chi-Cuadrado χ^2 de Bondad de Ajuste

Prueba de Signos

No. de grupos de datos : 1 o 2

Variable dependiente : En escala al menos ordinal

Objetivo	Esta prueba puede ser utilizada para determinar si la diferencia entre el numero de veces que los datos caen a un lado de la media verdadera es significativamente diferente al número de veces que cae en el otro lado . Determinar si la diferencia entre el numero de veces en que el valor de una variable es mayor que el de la otra y el numero de veces que es menor es estadísticamente significativa. Versión no parametrica de la prueba t para una muestra o de la prueba t para muestras pareadas. Esta prueba se realiza sobre la mediana de los datos Me

Ejemplo 1

Calos y Ángela, Administradores de una firma de artículos deportivos tienen la creencia que el deporte afecta la imagen que cada persona tiene de si misma. Para investigar esta posibilidad eligieron a 18 personas de manera aleatoria, para participar en un programa de ejercicios. Antes de empezar el programa las personas respondieron un cuestionario para medir su propia imagen. Un nivel de 15 puntos en la prueba establece que la persona tiene un concepto indiferente frente a la afirmación, valores menores de 15 que la afecta en forma negativa y valores por encima de 15 que afectan su imagen en forma positiva. Los siguientes son resultados obtenidos :

16, 15, 12, 17, 18, 14, 16, 14, 16, 17, 19, 16, 14, 21, 20, 16, 16, 16.

Hipotesis nula	$Ho: Me = 15$
Hipotesis alterna	$Ha: Me \neq 15$
Estadístico de Prueba	$M^+ = 13$, número de signos positivos
Valor-p :	$P(X \geq 13)$=0.02452 pbinom(12,17,0.50, lower.tail=FALSE)

16	15	12	17	18	14	16	14	16	17	19	16	14	21	20	16	16	16
12	14	14	14	15	16	16	16	16	16	16	16	17	17	18	19	20	21
-	-	-	-		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

```
install.packages("BSDA")
library(BSDA)
x=c(16,15,12,17,18,14,16,14,16,17,19,16,14,21,20,16,16,16)
SIGN.test(x,md=15,alternative = "greater")
pbinom(12,17,0.50, lower.tail=FALSE)

One-sample Sign-Test
data: x
s = 13, p-value = 0.02452
alternative hypothesis: true median is greater than 15
95 percent confidence interval:
16 Inf
sample estimates:
median of x
16
```

Ejemplo 2

Santiago, investigador del CIPUJ esta interesado en determinar si la acupuntura afecta la tolerancia al dolor. Realiza un experimento en el cual elige al azar a 10 estudiantes universitarios. Cada uno de ellos es utilizado en dos condiciones y recibe un choque eléctrico de corta duración en la pulpa de un diente, la intensidad del choque eléctrico es corta pero produce un dolor moderado al sujeto. Después de cada choque percibido, cada individuo califica el nivel de dolor percibido en una escala de 0 a 10 (10 dolor máximo) Los resultados obtenidos son:

Con acupuntura :	3	4	6	2	3	4	5	7	7	6
Sin acupuntura :	8	9	4	7	9	4	5	10	7	4

¿Dan evidencia los datos sobre un buen efecto de la acupuntura sobre el dolor?

```
sa=c(8,9,4,7,9,4,5,10,7,4)
SIGN.test(sa,ca, md=0, alternative = "greater")
pbinom(4,7,0.50,lower.tail = FALSE)
```

```
Dependent-samples Sign-Test
data: sa and ca
S = 5, p-value = 0.2266
alternative hypothesis: true median difference is
greater than 0
95 percent confidence interval:
-0.2133333 Inf
sample estimates:
median of x-y
1.5
```

Prueba U de Mann-Whitney

Número de grupos: 2

Variable dependiente : En escala al menos ordinal

Objetivo	Determinar si la diferencia entre el numero de veces en que el valor de la variable en un grupo es mayor que el otro y el numero de veces en que es menor es estadísticamente significativa. Versión no parametrica de la prueba t para muestras independientes

Ejemplo 3

Los siguientes datos se tomaron de un estudio de comparación de adolescentes sanos (G1) y adolescentes con bulimia (G2). El primero esta conformado por 15 estudiantes y el segundo grupo (G2) por 14 estudiantes, corresponden al consumo diario de calorías. Los datos obtenidos son los siguientes :

Grupo 1	3.9	1.0	2.1	2.9	1.1	2.6	0.7	1.2
	2.8	8.2	3.0	2.7	5.0	1.9	2.4	
Grupo 2	6.8	3.2	5.8	1.6	2.3	5.3	5.5	3.2
	6.1	2.9	5.0	6.4	6.7	3.7		

```
g1=c(3.9,1,2.1,2.9,1.1,2.6,0.7,1.2,2.8,8.2,3.0,2.7,5.0,1.9,2.4)
g2=c(6.8,3.2,5.8,1.6,2.3,5.3,5.5,3.2,6.1,2.9,5.0,6.4,6.7,3.7)
wilcox.test(g1,g2,paired = FALSE,alternative = "less")
Wilcoxon rank sum test with continuity correction
data: g1 and g2
W = 42, p-value = 0.003179
alternative hypothesis: true location shift is less than 0
```

Prueba de Wilcoxon

Número de grupos : 2

Variable dependiente: En escala al menos ordinal

Objetivo	Determinar su la diferencia entre la magnitud de las diferencias positivas entre los valores de las dos variables y la magnitud de las diferencias negativas es estadísticamente significativas. Versión no parametrica de la prueba t para muestras pareadas

Ejemplo 4

Suponga que le interesa analizar los efectos de la transición de la circulación fetal a la circulación postnatal entre niños prematuros. Para cada uno de 12 niños recién nacidos saludables, se midió el ritmo respiratorio en dos momentos diferentes: cuando el niño tiene menos de 15 días de nacido y de nuevo cuando tiene mas de 25 días de nacido.

niño	$<$ 15 dias	$>$ 25 dias
1	42	40
2	57	60
3	38	38
4	49	47
5	63	65
6	36	39
7	48	49
8	58	50
9	47	47
10	51	52
11	83	72
12	27	33

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data: m15 and M25
V = 27, p-value = 1
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Chi-cuadrado - prueba de bondad de ajuste

Tipo de variable: Cualitativa

Variables : $k > 2$ valores

Objetivo	Determinar si la diferencia entre las frecuencias de cada uno de los valores de la variable y unas determinadas frecuencias teóricas son estadísticamente significativas. Utilizada para comprobar el supuesto de normalidad, o de otras distribuciones.

Ejemplo 5

El Dueño de una panadería tiene la posibilidad de controlar los niveles de inventarios de leche para cuatro marcas diferentes. Con el fin de establecer políticas para la realización de nuevos pedidos requiere saber si la demanda de estas marcas son iguales. Con este propósito tomo la información de un día.

Producto	ventas
Alpina	33
Alqueria	22
Parmalat	21
Colanta	24

```
obs=c(33,22,21,24)
esp=c(0.25,0.25,0.25,0.25)
chisq.test(x=obs,p=esp)

Chi-squared test for given probabilities
data: obs
X-squared = 3.6, df = 3, p-value = 0.308
```

Ho : La demanda es UNIFORME para las cuatro marcas

Ha : La demanda NO es UNIFORME para las cuatro marcas

EdeP $\quad X^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{k-m-1}$

$$X^2 = \frac{(33-25)^2}{25} + \frac{(22-25)^2}{25} + \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(24-25)^2}{25} = 3.6$$

Pruebas de Rachas

Tipo de variable: Cualitativa - con 2 valores

Objetivo	Determinar si la diferencia entre la secuencia de apariciones de uno y otro valor de la variable y la secuencia de apariciones aleatorias es estadísticamente significativa Con esta prueba se prueba si un grupo de valores son aleatorios o no. (aleatoriedad en la extracción de una muestra, aleatoriedad en los errores, etc.)

Ejemplo 7

Comprobar que los números aleatorios generados en Excel son realmente aleatorios.
Para generarlos se tomo la función =aleatorio() de la hoja electrónica y la prueba no parametrica de rachas.

Ho : La muestra es aleatoria

Ha: La muestra no es aleatoria

```
library(randtests", lib.loc=Γ/R/win-library/3.5")
y=rnorm(100,120,20)
runs.test(y,pvalue="normal")

Runs Test
data: y
statistic = -0.80407, runs = 47, n1 = 50, n2 = 50, n = 100, p-value =0.4214
alternative hypothesis: nonrandomness
```

Coeficiente de correlación de Spearman

Escala de medida: intervalo u ordinal

Observaciones	Son medidas de asociación lineal entre dos variables. Toman valores entre -1 y 1 los cuales indican máximo grado de asociación lineal negativa y positiva Utiliza rangos para calcular este valor

Ejemplo 8

Se requiere establecer si existe relación entre el tiempo de estudio y la nota obtenida en un examen. Como la calificación del examen corresponde a una variable cualitativa se debe utilizar una prueba no parametrica (Coeficiente de correlación de Spearman) Los datos obtenidos son :

Tiempo	21	18	15	17	18	25	18	4	6	5
Nota	4	4	4	3	3	5	3	1	1	2

```
x=c(21,18,15,17,18,25,18,4,6,5)
y=c(4,4,4,3,3,5,3,1,1,2)
cor.test(x,y, method = "spearman",continuity = FALSE,conf.level = 0.95)

Spearman's rank correlation rho
data: x and y
S = 30.693, p-value = 0.004157
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
rho
0.8139814
```

Conclusión: ρ es diferente de cero, existe una relación entre el tiempo dedicado a estudiar y la nota obtenida.

Chi-cuadrado en tablas de contingencia

Objetivo Determinar si la diferencia entre las frecuencias observadas en la tabla de contingencia correspondiente al cruce de las dos variables y las frecuencias esperadas, suponiendo que las dos variables son independientes, son estadísticamente significativas.

Ejemplo : Un investigador desea establecer la relación que puede existir entre la calificación un producto realizada por sus consumidores y su ubicación de residencia. Con este fin recoge información de 100 clientes :

	Lugar		
Calicación	urbano	rural	total
Bueno	20	11	31
Regular	40	8	48
Malo	15	6	21
Total	75	25	100

Ho: La calificación y la ubicación del consumidor son independientes
Ha: La calificación y la ubicación del consumidor no son independiente

EdeP: $$X^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} \sim \chi^2_{v=(f-1)(c-1)}$$

```
m=c(20,40,15,11,8,6)
M=as.table(matrix(m,nrow=3))
chisq.test(M)
Pearson's Chi-squared test
data: M
X-squared = 3.7378, df = 2, p-value = 0.1543
```

Conclusión : No se rechaza la hipótesis de que las variables sean independientes. Se asume que no hay relación entre la calificación y la residencia del consumidor

Valores OBSERVADOS

Calicación	Lugar urbano	rural	total
Bueno	20	11	31
Regular	40	8	48
Malo	15	6	21
Total	75	25	100

Valores ESPERADOS

Calicación	Lugar urbano	rural	total
Bueno	23.25	7.75	31
Regular	36	12	48
Malo	15.75	5.25	21
Total	75	25	100

$$X^2 = \frac{(20-23.25)^2}{23.25} + \frac{(11-7.75)^2}{7.75} + \frac{(40-36)^2}{36} + \frac{(8-12-)^2}{12} + \frac{(15-15.75)^2}{15.75} + \frac{(6-5.25)^2}{5.25} = 3.7378$$