INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Daniel E. González G.
Javeriana Cali.

INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

CONCEPTOS BÁSICOS

- POBLACIÓN
- CENSO
- PARÁMETRO (θ)

MUESTRA

MUESTREO

ESTIMADOR ($\hat{\theta}$)

TAMAÑO DE MUESTRA

TIPOS DE MUESTREO

DISTRIBUCIONES MUESTRALES

- N
- t-Student
- χ^2
- F

MODELOS DE PROBABILIDAD

$f(x)$ $F(x)$ $E(X)$ $V(X)$

$E(XY)$ $COV(XY)$ ρ_{XY}

- NORMAL (μ, σ^2)
- UNIFORME (a, b)
- EXPONENCIAL (λ)
- WEIBULL (α, β)

- BINOMIAL (n, p)
- POISSON (λ)
- GEOMÉTRICA (p)

- PUNTUAL

- INTERVALOS DE CONFIANZA

- $\bar{X}$ $E(\bar{X})$ $V(\bar{X})$
- $\hat{p}$ $E(\hat{p})$ $V(\hat{p})$

- MÉTODOS DE ESTIMACIÓN
  - M. DE MOMENTOS
  - M. DE MAX. VEROSIMILITUD

- PROPIEDAD DE LOS ESTIMADORES
  - INSESGADEZ
  - EFICIENCIA
  - CONSISTENCIA

- PRUEBAS DE HIPÓTESIS

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL ($\bar{X}$)

SUPUESTO: $E(X) = \mu$

$V(X) = \sigma^2$

$E(\bar{X})$

$V(\bar{X})$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\left(E(X_1 + X_2 + \cdots X_n)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\mu + \mu + \mu + \cdots \mu\right) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n\right) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots \sigma^2\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

DISTRIBUCIÓN DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$

$\hat{p}$: $\dfrac{\text{\# DE EVENTOS QUE CUMPLEN UNA CARACTERISTICA}}{n} = \dfrac{\text{SUMA DE VARIABLES BERNOULLI}}{n} = \dfrac{\sum X_i}{n}$

$X \sim$ BERNOULLI

$E(X) = p$

$V(X) = pq$

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n} E(\sum X_i) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n))$$

$$\frac{1}{n}(p + p + \cdots p) = \frac{1}{n} np = p$$

$$V(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} V(\sum X_i) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + V(X_2) + \cdots V(X_n))$$

$$\frac{1}{n^2}(pq + pq + \cdots pq) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$$

MÉTODO DE MOMENTOS

MOMENTOS POBLACIONALES

$\mu' = E(X) = \mu$

$\mu'' = E(X^2)$

$\vdots$

$\mu^k = E(X^k)$

MOMENTOS MUESTRALES

$m' = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$

$m'' = \frac{\sum X_i^2}{n}$

$\vdots$

$m^k = \frac{\sum X_i^k}{n}$

NOTA

$E(X^k) = \sum_{R_X} x^k f(x)$

VA DISCRETAS

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$

VA CONTINUAS

MÉTODO: SE IGUALAN LOS MOMENTOS

SE DESPEJA EL PARÁMETRO

MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD

$$L(\theta, X_1, X_2, \dots X_n) = f(x_1)\, f(x_2) \dots f(x_n)$$

MÉTODO : MAXIMIZAR L

- ENCONTRAR LOS VALORES DE θ QUE MAXIMICEN
  $L = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_n = x_n)$
- EQUIVALENTE A REALIZAR EL PROCESO CON $\ln L$

Ej.

ENCONTRAR EL ESTIMADOR DE MÁX VEROSIMILITUD PARA μ EN UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\, e^{-1/2\sigma^2 (x-\mu)^2}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-1/2\sigma^2 \sum (x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i-\mu)^2$$