Profesor Daniel Enrique González Gómez

1. Suponga que $f_X(x) = \exp(-x)$ para $0 < x$, 0 para cualquier otro caso. Determine:
   a. $E[X]$
   b. $V[X]$
2. Para una variable aleatoria con función de densidad : $f_X(x) = x/8$ para $3 < x < 5$, determine:
   a. μ_X
   b. σ_X
3. Suponga que X tiene una función de distribución acumulada:
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2x & , 0 < x < 5 \\ 1 & , 5 \leq x \end{cases}$$
   a. $E[X]$
   b. $V[X]$
   c. ¿Se podría calcular el coeficiente de variación?. En caso afirmativo, ¿que valor tendría?
4. Para una variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución de probabilidad:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

   a. $E[X]$
   b. $V[X]$
5. Para una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad :
   $$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{25} & , x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & , \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$
   a. $E[X]$
   b. $V[X]$
   c. Coeficiente de variación
6. Para una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad : $f_X(x) = (3/4)(1/4)^x$,para $x = 0, 1, 2, \ldots$
   a. $E[X]$
   b. $V[X]$
7. Suponga que X tiene una función de distribución acumulada:
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0.2x & , 0 \leq x < 5 \\ 1 & , 5 \leq x \end{cases}$$ Determine
   a. $E[X]$
   b. $V[X]$

Problemas basados en ejercicios de Mongomery (2003)

8. El tiempo de reparación (en minutos) de unas máquinas fotocopiadora tiene una función de densidad,
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{22}\exp\{-x/22\}, & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   Cuando el profesor de estadística se preparaba para imprimir el cuestionario del segundo examen parcial, fue enterado por la secretaria del departamento que la máquina fotocopiadora se había averiado y que el técnico había acabado de llegar en ese instante y empezado a repararla. El profesor debe contar con por lo menos 10 minutos extras - tiempo de fotocopiado de los 35 exámenes, organizar sus respectivas hojas de respuesta, sumado el tiempo de su desplazamiento hasta el salón de clase, arreglo de los escritorios y entrega de los cuestionarios a los estudiantes. Al mirar su reloj, el profesor observa que faltan 20 minutos para la hora en que debe empezar el examen y decide esperar a que el técnico arregle la máquina. Determine el valor esperado del tiempo que tardaría el técnico en reparar la máquina. A partir de este valor determine si fue una buena decisión la que tomó el profesor.
9. Una preocupación que tienen los padres hoy en dia está relacionada con el tiempo que pasan sus hijos usando el celular. Un estudio determinó que el número de llamadas que un joven realiza durante un dia es una variable aleatoria (X)con función de distribución :
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8^x \exp\{-8\}}{x!}, & x = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   El estudio afirma también que los jóvenes en promedio reciben al rededor de 12 llamadas por dia, valor que es considerado muy alto, debido a que a esa edad por lo regular no se tienen actividades económicas que lo amerite. También mencionan debido a que se ha logrado identificar la función de distribución de probabilidad es fácil establecer que se trata de una variable con un comportamiento homogéneo. ¿Está de acuerdo con la información suministrada en el artículo. Justifique su respuesta.

RESUMEN

- $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} f(x_i)$
- $E[X^k] = \sum_{R_X} x_i^k f_X(x_i)$
- $\mu = E[X] = \sum_{R_X} x_i f_X(x_i)$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x_i)dx$
- $F_X = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
- $f_x(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x}$
- $E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$
- $\sigma^2 = V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

COMPLEMENTO - TALLER 3,04
VALOR ESPERADO Y VARIANZA

V.A DISCRETAS

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{R_X} x_i^k f(x_i)$$

$$\mu_x = \mathbb{E}(X) = \sum_{R_X} x_i f(x_i)$$

$$V(X) = \sigma_x^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\sum_{R_X} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

VA CONTINUAS

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$$

MOMENTO k-esimo de una variable aleatoria

$$\mu_x = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

---

1) $f(x) = \exp(-x)\ ,\ x > 0$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} x \exp(-x)\,dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^{\infty}$$

NOTA: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^{-x} \\ du &= dx \\ v &= -e^{-x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &\int x e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx \\ &\qquad -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$2 - 1^2 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = e^{-x}(-x^2-2x-2)\Big|_0^{\infty} = 2$$

---

2) $f(x) = \dfrac{x}{8}, \quad 3 < x < 5$

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_3^5 \frac{x^2}{8}\,dx = \frac{x^3}{24}\Big|_3^5 = 4{,}0833$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_3^5 \frac{x^3}{8}\,dx = \frac{x^4}{32}\Big|_3^5 = 17$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0.3266111$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0.5715$$

3) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 2x, & 0 < x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 0.5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{0.5} 2x \, dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^{0.5} = 0.25 \,//$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{0.5} 2x^2 \, dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{0.5} = 0.08\overline{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$0.08\overline{3} - 0.25^2 = 0.0208\overline{3} \,//$$

---

4)

x	$f(x)$	$x f(x)$	$x^2 f(x)$
-2	1/8	-2/8	4/8
-1	2/8	-2/8	2/8
0	2/8	0	0
1	2/8	2/8	2/8
2	1/8	2/8	4/8
		0	12/8

$\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i)$

$\mathbb{E}(X) = \sum x_i f(x_i) = \mu_x = 0 \,//$

$$V(X) = \frac{12}{8} - 0^2 = \frac{12}{8} \,//$$

5.) $f(x) = \frac{2x+1}{25}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	1/25	0	0
1	3/25	3/25	3/25
2	5/25	10/25	20/25
3	7/25	21/25	63/25
4	9/25	36/25	144/25
		70/25	230/25

230/25 — $E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i)$

$E(X) = \sum_{R_X} x_i f(x_i) = \frac{70}{25} = 2.8 = \mu_X$

$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\frac{230}{25} - \left(\frac{70}{25}\right)^2 = 1.36$

6) $f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^x, & x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{R_X} x\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right] x_i$$

$$E(X^2) = \sum_{R_X} x^2 \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{5}{9}$$

Nota: Wolfram Alpha
sum(x^2*(3/4)*(1/4)^x) x=0 to inf

$$V(X) = \frac{5}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

---

7) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0.2x, & 0 < x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases} \quad f_X(x) = 0.2 \quad 0 < x < 5$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^5 0.2x = \frac{0.2x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^5 0.2x^2 = \frac{0.2x^3}{3}\Big|_0^5 = 8{,}33\overline{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2{,}08\overline{3}$$

8) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{22} e^{-x/22}, & x > 0 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \int_0^{\infty} \frac{x}{22} e^{-x/22} dx = \frac{1}{22} e^{-x/22}(-22x - 484) = 22 //$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{22} e^{-x/22} dx = \frac{1}{22}(e^{-x/22})(-22x^2 - 968x - 21296)$$

$$= 968$$

$$V(X) = 968 - 22^2 = 484 ///$$

- El técnico demora en promedio 22 min en reparar la máquina fotocopiadora. ($E(X) = 22$)
Con una varianza de 968 min^2, equivalente a una desviación estandar de 22 min ($\sigma = \sqrt{\sigma^2}$)

9. X = número de llamadas / día

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{8^x e^{-8}}{x!}, & x = 0,1,2,3\ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = \cancel{0 \times f(0)}^{0} + 1 \times f(1) + 2 \times f(2) + \ldots$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x_i \frac{8^x e^{-8}}{x!} = e^{-8} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x_i 8^x}{x!}$$

$$= e^{-8} \sum \frac{8^x}{(x-1)!}$$

$$e^{-8}\, 8 \underbrace{\sum \frac{8^{x-1}}{(x-1)!}}_{\underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{8^y}{y!}}_{e^{8}}}$$

$$\cancel{e^{-8}} \times 8 \times \cancel{e^{8}} = 8$$

WolframAlpha $\boxed{\text{sum x*(8^x)*exp(-8)/x! x=0 to inf}}$