TALLER 3.07
DISTRIBUCIONES ESPECIALES -DISCRETAS
300MAE005-PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Profesor Daniel Enrique González Gómez
Monitoras : Lizeth Suarez
Lina Ramirez Marulanda

1. Para una variable aleatoria con distribución binomial $X \sim binom(x, n = 10, p = 0.5)$. Determine: la función de distribución asociada a X.
   (a.) $P(X = 5)$
   (b.) $P(X \leq 2)$
   (c.) $P(3 \leq X < 5)$
   (d.) $P(X \geq 8)$
   (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
2. Sea una variable geométrica $X \sim geom, (x, p = 0.05)$
   (a.) $P(X = 1)$
   (b.) $P(X \leq 2)$
   (c.) $P(X = 8)$
   (d.) $P(X \geq 2)$
   (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
3. Suponga que X tiene una distribución hipergeometrica con $N = 100$, $n = 4$ y $K = 20$. ($X \sim hyper(x, N = 100, n = 4, k = 20)$)Determine:
   (a.) $P(X = 1)$
   (b.) $P(X = 6)$
   (c.) $P(X \geq 1)$
   (d.) $P(X = 4)$
   (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
4. Suponga que X tiene una distribución Poisson con media $\lambda = 4$ ($X \sim pois(x, \lambda = 4)$). Determine:
   (a.) $P(X = 0)$
   (b.) $P(X = 4)$
   (c.) $P(X \geq 2)$
   (d.) $P(X \leq 2)$
   (e.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
5. Sea la variable X con distribución binomial negativa con N=100 , K=20, n=5 ($X \sim nbinom(x, n, p, mu)$)
   (a.) $P(X = 0)$
   (b.) $P(X = 6)$
   (c.) $P(X \geq 10)$
   (d.) $P(X \leq 12)$
   (e.) $E[X]$ y $V[X]$
   (f.) Construya la gráfica de $f_X(x)$
6. En un cargamento grande de llantas para automóviles, el 5 % tiene imperfecciones. Se eligen de manera aleatoria 4 llantas para ser instalada en un automóvil. (Sea X el número de llantas con imperfecciones. $X \sim binom(n = 4, p = 0.05)$)
   (a.) ¿ Cuál es la probabilidad de que ninguna de las llantas tenga imperfecciones?
   (b.) ¿ Cuál es la probabilidad de que sólo una de las llantas tenga imperfecciones?
   (c.) ¿ Cuál es la probabilidad de una o más llantas tenga imperfecciones?
7. Los clientes llegan al mostrador de una tienda de acuerdo con una variable aleatoria Poisson con una frecuencia promedio de ocho clientes por hora.
   (a.) Calcule la probabilidad de que entre las 8 AM y las 9 AM lleguen exactamente cinco clientes.
   (b.) Calcule la probabilidad de que entre las 2:30 PM y las 3:30 PM no lleguen más de tres clientes.
   (c.) Calcule la probabilidad de que lleguen exactamente dos clientes dentro de un intervalo de dos horas continuas, por ejemplo entre 10 AM y 12 M.
   (d.) Calcule el valor esperado del número de personas que llegan a la tienda entre las 2 PM y las 4:30 PM.
8. Se está desarrollando una nueva variedad de maíz en una extensión de experimentación agrícola. Se espera que tenga una tasa de germinación del 90 %. Para verificar esto, se plantan 20 semillas en suelos de idéntica composición y se les dedican los mismos cuidados. Si la cifra 90 % es correcta, ¿cuántas semillas se espera que germinen? Si sólo germinan 15 o menos, ¿hay razón para sospechar de la cifra 90 %?
9. Un examen de Probabilidad consta de 100 preguntas de selección múltiple, cada una con cuatro opciones de respuesta. Maria responde cada pregunta al azar y sus respuestas son independientes
   (a.) Si para aprobar el examen Juan debe responder mínimo 60 preguntas correctamente, calcule la probabilidad de que Maria apruebe el examen.
   (b.) Calcule la probabilidad de que Maria deba responder 10 preguntas hasta responder la primera pregunta correctamente.
   (c.) ¿Cuál es el número esperado de preguntas que Maria responderá erróneamente hasta responder 5 preguntas correctamente?
10. Se sospecha que muchas muestras de agua, todas del mismo tamaño y tomadas del Hillbank River, han sido contaminadas por operarios irresponsables de una planta de tratamiento de aguas. Se contó el número de microorganismos conformes en cada muestra. El número medio de microorganismos por muestra fue de 15. Suponiendo que el número de microorganismos se distribuye según una distribución de Poisson, calcular la probabilidad de que:
    (a.) La siguiente muestra contenga al menos 17 microorganismos.
    (b.) La siguiente muestra contenga 18 o menos microorganismos.
    (c.) La siguiente muestra contenga exactamente dos microorganismos.
11. Una aéreolinea nacional tiene aviones de 100 asientos para el servicio de transporte nacional. Se estima que la probabilidad de que una persona llegue al vuelo es de 0.90, debido a lo cual la aereolinea vende 105 tiquetes con el fin de minimizar la partida de aviones con sillas vacias. ¿cuál es la probabilidad de que todas las personas que lleguen para abordar el avión tengan asiento?
12. El número de grietas en un pavimento se estima en una grieta por cada 100m en promedio. Se desea estimar la probabilidad de:

(a.) Haya exactamente 8 grietas en una longitud de 500 m
(b.) No se presente ninguna grieta en 100 m
(c.) Se presenten menos de 2 grietas en 500 m

13. Un sistema de seguridad para casas está diseñado para tener una confiabilidad del 95 % . Suponga que 10 casas equipadas con este dispositivo sufrieron tentativa de robo. Se requiere calcular la probabilidad de que en siete de las nueve, la alarma se activará.

FORMULARIO

Distribución Bernoulli

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } X = 1 \\ q & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

$$E[X] = p \quad V[X] = pq$$

Distribución Binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$E[X] = np \qquad V[X] = np(1-p)$$

X : número de éxitos en los n ensayos

Distribución Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\ e^{-\lambda}, x \geq 0$$

$$E[X] = \lambda, \qquad V[X] = \lambda$$

X : número de eventos que ocurren por unidad de tiempo, longitud, superficie o volumen.

Distribución Geométrica

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, x \geq 1$$

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

X: número del evento donde ocurre el primer éxito

Distribución Hipergeometrica

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ si } 0 \leq x \leq \text{mín}(n, R)$$

$$E[X] = \frac{nR}{N} \qquad V[X] = n\left(\frac{R}{N}\right)\left(1 - \frac{R}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

X: número de éxitos encontrados en una muestra de tamaño n (sin orden, sin repetición), extraída de una urna que contiene N elementos de los cuales K son éxitos.

Distribución Binomial negativa

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x = r, r+1, \ldots$$

$$E[X] = \frac{r}{p} \qquad V[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

X : número del evento donde ocurre el r-esimo éxito

```
# RStudio

# Distribución binomial
dbinom(x, size, prob)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE)
rbinom(n, size, prob)

# Distribución Poisson
dpois(x, lambda)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE)
rpois(n, lambda)

# Distribución geometrica
dgeom(x, prob)
pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE)
qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE)
rgeom(n, prob)

#Distribución hipergeometrica
dhyper(x, m, n, k)
phyper(q, m, n, k, lower.tail = TRUE)
qhyper(p, m, n, k, lower.tail = TRUE)
rhyper(nn, m, n, k)

# Distribución binomial negativa
dnbinom(x, size, prob, mu)
pnbinom(q, size, prob, mu, lower.tail = TRUE)
qnbinom(p, size, prob, mu, lower.tail = TRUE)
rnbinom(n, size, prob, mu)
```

```
EXCEL
=0.2460938$ \texttt{dbinom(5,10,0.50)}
=DIST.BINOM.N(núm_éxitos;nensayos;éxitos,acumulado)
=DIST.HIPERGEOM.N(muestra;éxito;núm_de_muestra;población;éxito)
=POISSON.DIST(x;media,acumulado)
```

TALLER 3,07

1

1. $X \sim binom(n=10, p=0.50)$

dbinom(5,10,0.50)

a) $P(X=5) = \binom{10}{5} 0.50^5 \times (1-0.50)^5 = 0.24609$

b) $P(X\leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

pbinom(2,10,0.50)

$= \binom{10}{0} 0.50^0 (1-0.50)^{10} +$

$\binom{10}{1} 0.50^1 (1-0.50)^9 +$

$\binom{10}{2} 0.50^2 (1-0.50)^8 = 0.05469$

c) $P(3\leq X<5) = f(3) + f(4) =$

dbinom(3,10,0.50) +
dbinom(4,10,0.50)

$= 0.11719 + 0.20508$

$= 0.32227$

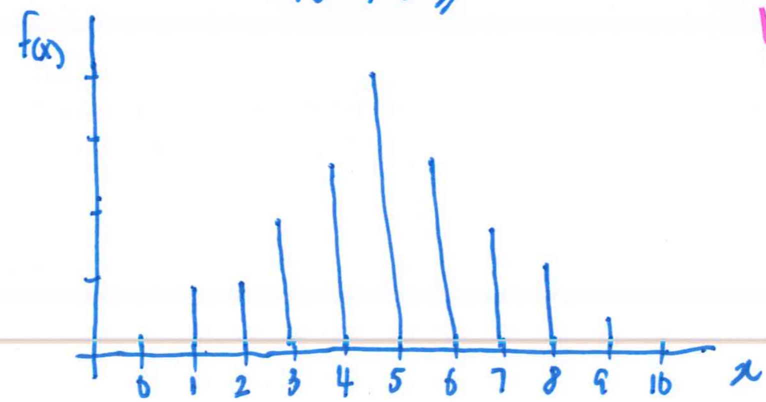
d) $P(X\geq 8) = f(8) + f(9) + f(10)$

$= 0.04394 + 0.00976 + 0.000976$

$= 0.05468$

pbinom(7,10,0.50,
lower.tail = FALSE)

e)



2) $X \sim geom(p=0.05)$

a) $P(X=1) = 0.05$ //   dgeom(1, 0.05)

b) $P(X \leq 2) = f(1) + f(2)$ pgeom(2, 0.05)

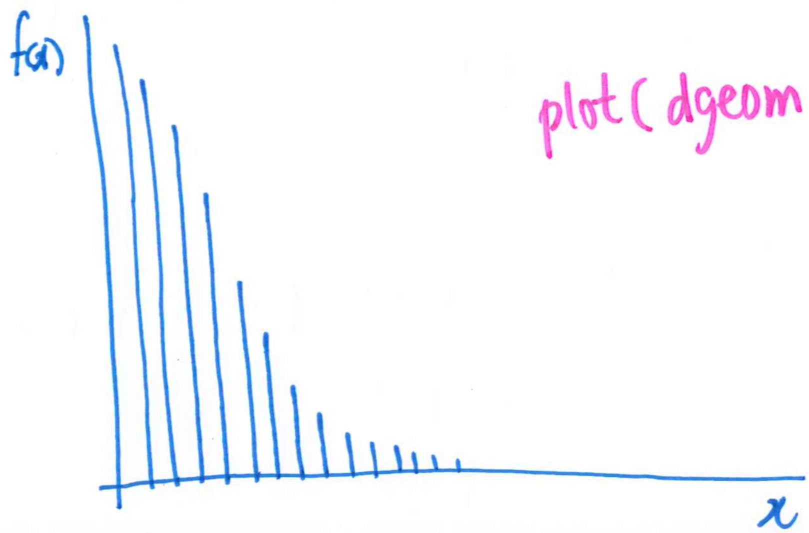
$= 0.05 + 0.05 \times 0.95$

$= 0.0475$ ///

c) $P(X=8) = 0.05^1 \times 0.95^7 = 0.03491$ ///   dgeom(8, 0.05)

d) $P(X \geq 2) = 1 - f(1) +$ pgeom(1, 0.05, lower.tail = FALSE)

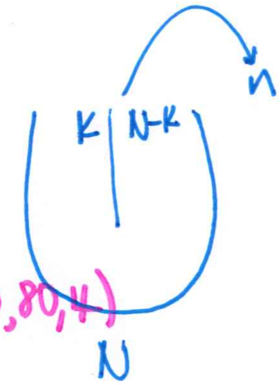
$1 - 0.05 = 0.95$ //



plot(dgeom(x, 0.05))

3) $X \sim hyper(N=100,\ n=4,\ k=20)$

a) $P(X=1) = \dfrac{\binom{20}{1}\binom{80}{3}}{\binom{100}{4}}$



$= 0.41905$ dhyper(1,20,80,4)

b) $P(X=6) \rightarrow$ NO SE PUEDE CALCULAR

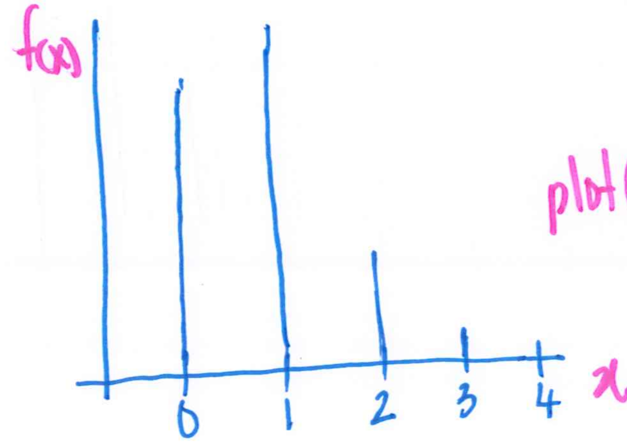
$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 0 !!

c) $P(X \geq 1) = 1 - f(0)$ phyper(1,20,80,4, lower.tail=FALSE)

$1 - 0.41905 = 0.59666$

d) $P(X=4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{80}{0}}{\binom{100}{4}} = 0.00124$

dhyper(4,20,80,4)



plot(dhyper(x,20,80,4))

4. $X \sim pois(\lambda = 4)$

a) $P(X=0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0.01832$ dpois(0,4)

b) $P(X=4) = \frac{e^{-2} 2^4}{4!} = 0.19537$ dpois(4,4)

c) $P(X \geq 2) = 1 - [f(0) + f(1)]$ ppois(1,4,lower.tail=F)

$= 1 - (0.01832 + 0.07326)$

$= 1 - 0.09158$

$= 0.90842$

d) $P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$= 0.01832 + 0.07326 + 0.14653$

$= 0.23810$ ppois(2,4)

e) plot(dpois(x, 4), type="h")

5) $X \sim nbinom(N=100, k=20, n=5)$

$p=0.20$

a) $P(X=0) = \overset{0}{\text{NO EXISTE}}$ $\quad R_X = \{5, 6, 7, 8, 9 \ldots\}$

b) $P(X=6) = \binom{6-1}{5-1} 0.20^5 \times 0.80 = 0.00128$ //

c) $P(X \geq 10) = 1 - (f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10))$

$= 0.98042$ //

d) $P(X \leq 12) = \sum_{x=5}^{12} f(x) = f(5) + f(6) + f(7)$
$f(8) + f(9) + f(10)$
$f(11) + f(12)$

$= 0.07256$ //

e) $E(X) = \frac{r}{p} = \frac{5}{0.20} = 25$ //

$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{5 \times 0.80}{0.20} = 100$ //

6) X = # de llantas imperfectas

$n=4 \quad p=0.05$

$X \sim binom(4, 0.05)$

a) $P(X=0) = \binom{4}{0} 0.05^0 \, 0.95^4 = 0.81451$

b) $P(X=1) = \binom{4}{1} 0.05^1 \, 0.95^3 = 0.17148$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.18549$

7) X: número de clientes que llegan a un mostrador / hora

$\lambda = E(X) = 8$ clientes / hora

a) $P(X=5) = \dfrac{e^{-8} \, 8^5}{5!} = 0.09160$

b) $P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$

0.04238

c) $Y \sim pois(\lambda = 16$ clientes / 2 horas$)$

$P(Y=2) = \dfrac{e^{-16} \, 16^2}{2!} = 0.01073$

d) $E(W) = 8 \times \frac{5}{2} = 20$ clientes / 2.5h

8) $p = 0.90$
$n = 20$

a) $E(X) = 20 \times 0.90 = 18$

Se espera que de las 20 semillas en promedio germinen 18.

X: número de semillas que germinan

$X \sim binom(n=20, p=0.90)$

b) $P(X \leq 15) = \sum_{x=0}^{15} \binom{20}{x} 0.90^x (1-0.90)^{20-x}$

$= 0.0431745$,

No, lo que indica es que es poco probable que germinen 15 o menos.

9) $n = 100$
$p = 1/4$

a) $P(X \geq 60) = \sum_{x=60}^{100} \binom{100}{x} 0.25^x \, 0.75^{100-x}$

$X \sim binom(100, 0.25)$ pbinom(59, 100, 0.25, lower.tail=FALSE)

Para resolver este problema también podemos utilizar una aproximación de la DISTRIBUCIÓN BINOMIAL a la DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sea $Y \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$ $np = 25$ $npq = 18.75 = \sigma^2$

$\sigma =$

$\simeq P(Y > 59.5) = P\left(Z \gtrsim \frac{59.5 - 25}{4.33}\right)$

$P(Z \gtrsim 7.9) = 0$

b) $X \sim$ geometrica ($p=0.25$)

$$P(X=10) = 0.25 \times 0.75^{9} = 0.01877$$

c) $Y \sim$ binom negativa

$$E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{5}{0.25} = 10$$

10) $X \sim$ pois ($\lambda = 15$ microorganismos/muestra)

a) $$P(X \geq 17) = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{15^{x} e^{15}}{x!}$$

$$1 - \sum_{x=16}^{0} \frac{15^{x} e^{15}}{x!} = 1 - 0.66412 = 0.33587$$

b) $$P(X \leq 18) = \sum_{x=0}^{18} \frac{15^{x} e^{15}}{x!} = 0.81947$$

c) $$P(X=2) = \frac{15^{2} e^{15}}{2!} = 0.00003$$

11) • 100 asientos

• 0.90 probabilidad de que un pasajero tome el vuelo

• 105 tiquetes vendidos

• X = número de pasajeros que toman el vuelo. (acuden al aeropuerto)

$$P(X \leq 100) = \sum_{x=0}^{100} \binom{105}{x} 0.90^{x} \, 0.10^{105-x}$$

$$= 0.98328$$

Aproximación BINOMIAL a la NORMAL

$$Y \sim N(\mu = np, \; \sigma^2 = npq)$$

$$\mu = 94.5$$

$$\sigma^2 = 9.45 \qquad \sigma = 3,074$$

$$P(X \leq 100) \cong P(Y < 100.5)$$

$$P\left(Z < \frac{100.5 - 94.5}{3,074}\right)$$

$$P(Z < 1.95) = 0.9744$$