TALLER 3.03 - VARIABLE ALEATORIA
300MAE005-PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Daniel Enrique González Gómez

1. Suponga que $f_X(x) = \exp(-x)$ para $0 < x$, 0 para cualquier otro caso. Determine:
   a. $P(1 < X)$
   b. $P(1 < X < 2.5)$
   c. $P(X = 3)$
   d. $P(X < 4)$
   e. Los valores de Me, Q_1 y Q_3

2. Para una variable aleatoria con función de densidad : $f_X(x) = x/8$ para $3 < x < 5$, determine:
   a. $P(X < 4)$
   b. $P(X > 3.5)$
   c. $P(4 < X < 5)$
   d. $P(X < 3.5 \text{ o } X > 4.5)$
   e. El valor de Me

3. Suponga que X tiene una función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ 2x & ,0 < x < 5 \\ 1 & ,5 \leq x \end{cases}$$

   a. $P(X < 2)$
   b. $P(X = 1.5)$
   c. $P(X > 3)$
   d. $P(0.5 < X < 2.7)$

4. Para una variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución de probabilidad:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

   a. $P(X \leq 2)$
   b. $P(X > 3)$
   c. $P(-1 \leq X \leq 1)$
   d. $P(X < 3.5 \text{ o } X > 4.5)$
   e. El valor de Me

5. Para una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{25} & ,x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   a. $P(X = 4)$
   b. $P(X \leq 1)$
   c. $P(2 \leq X < 4)$

6. Para una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad : $f_X(x) = (3/4)(1/4)^x$,para $x = 0, 1, 2, \ldots$
   a. $P(X = 2)$
   b. $P(X \leq 2)$
   c. $P(2 \leq X)$

7. Suponga que X tiene una función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ 0.2x & ,0 \leq x < 5 \\ 1 & ,5 \leq x \end{cases} \text{ Determine}$$

   a. $P(X < 2.8)$
   b. $P(X > 1.5)$
   c. $P(X < -2)$
   d. Determine $f_X(x)$

8. El tiempo de reparación (en minutos) de unas máquinas fotocopiadora tiene una función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{22}\exp\{-x/22\}, & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cuando el profesor de estadística se preparaba para imprimir el cuestionario del segundo examen parcial, fue enterado por la secretaria del departamento que la máquina fotocopiadora se había averiado y que el técnico había acabado de llegar en ese instante y empezado a repararla. El profesor debe contar con por lo menos 10 minutos extras - tiempo de fotocopiado de los 35 exámenes, organizar sus respectivas hojas de respuesta, sumado el tiempo de su desplazamiento hasta el salón de clase, arreglo de los escritorios y entrega de los cuestionarios a los estudiantes. Al mirar su reloj, el profesor observa que faltan 20 minutos para la hora en que debe empezar el examen y decide esperar a que el técnico arreglé la máquina. ¿Es acertada o no la decisión que tomó el profesor?. Justifique su respuesta.

RESUMEN

- Variable aleatoria discreta
- $f_X(x) \geq 0$
- $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} f(x_i)$
- $P(X = x) = f_X(x)$
- $\sum_{x=a}^{b} f(x_i)$

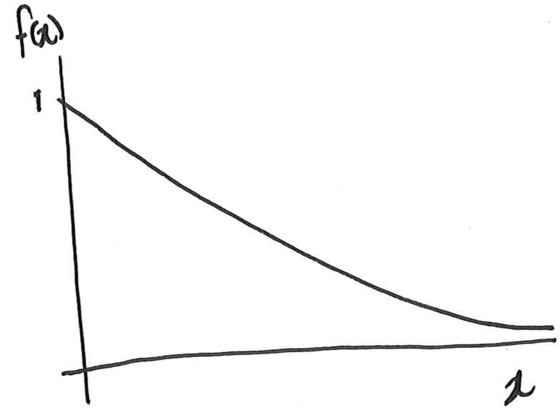
- Variable aleatoria continua
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x_i)\,dx$
- $F_X = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
- $f_x(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x}$

TALLER 3.03

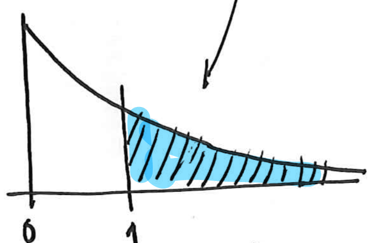
VARIABLE ALEATORIA

NOTA: $\exp(-1) \equiv e^{-x}$

1. $$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



a) $P(1<X)$



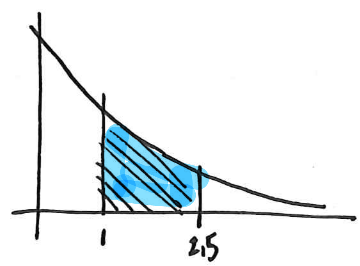
$$P(X>1) = \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-x}\Big|_1^{\infty} = (1-e^{-\infty}) - (1-e^{-1})$$

$$1 - 1 - e^{-1}$$

$$= e^{-1} = 0.3679 \;///$$

b) $P(1 < X < 2{,}5) =$

$$\int_1^{2,5} e^{-x}\,dx = F(2{,}5) - F(1)$$



$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$$

$$P(1<X<2{,}5) = (1-e^{-2,5}) - (1-e^{-1})$$

$$0.9179 - 0.6321 = 0.2858 \;///$$

c) $P(X=3)=0$ NOTA: $\int_a^a f(x)\,dx=0$

d) $P(X<4)=F(4)=1-e^{-4}=0.9817$

e) $Me=?$ $F(Me)=0.50$

$P(X\leq Me)=0.50$

$1-e^{-Me}=0.50$

$1-0.50=e^{-Me}$

$\ln(0.50)=\ln(e^{-Me})$

$-0.6931=-Me$

$Me=0.6931$ //

$Q_1=?$

$F(Q_1)=0.25$

$-Q_1=\ln(-0.75)$

$Q_1=0.2878$ //

$Q_3=?$

$F(Q_3)=0.75$

$-Q_3=\ln(-0.25)$

$Q_3=1.3863$ //

---

2. $f_x(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}, & 3<5\\ 0, & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$

$F_x(x)=\int_3^x \frac{t}{8}\,dt=\frac{t^2}{16}\Big|_3^x$

$\frac{x^2}{16}-\frac{9}{16}=\frac{x^2-9}{16}$ ///

a) $P(X<4)=F(4)=\frac{4^2-9}{16}=\frac{7}{16}$

b) $P(X>3.5)=1-F(3.5)=1-\frac{3.5^2-9}{16}=0.7969$ //

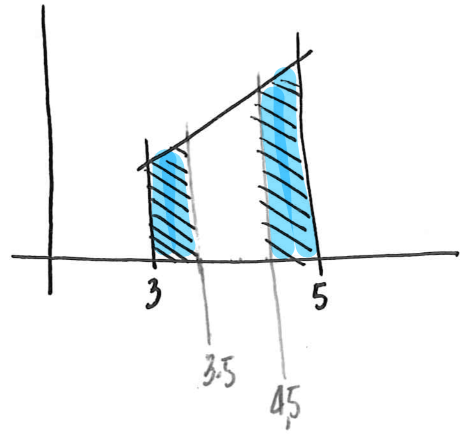
c) $P(4<X<5)=F(5)-F(4)=\frac{5^2-9}{16}-\frac{4^2-9}{16}=\frac{16}{16}-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}=0.5625$ //

d) $P(X<3.5 \text{ o } X>4.5)$

$= P(X<3.5) + P(X>4.5)$

$\left[\frac{3.5^2-9}{16}\right] + \left[1 - \frac{4.5-9}{16}\right]$

$0.2031 + 0.2969 = 0.499975$ //



e) $Me = ?$

$P(X \leq Me) = 0.5$

$F(Me) = 0.5$

$\frac{Me^2 - 9}{16} = 0.5$

$Me^2 = 8 + 9 = 17$

$Me = 4.1231$ //

---

3. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & 0<x<5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$

$F(0)=0$

$F(5)=10$ X

NO PUEDE SER !!

$F(x)$ NO ES UNA FUNCION DE PROBABILIDAD ACUMULADA.

la podemos arreglar

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 , & x>0 \\ 2x , & 0<x<0.5 \\ 1 , & x>0.5 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0<x<0.5 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) $P(X<2) = 1$

b) $P(X>1.5) = 0$

c) $P(X>3) = 0$

d) $P(0.5<X<2.7) = 0$

4.

x	$f_X(x)$
-2	1/8
-1	2/8
0	2/8
1	2/8
2	1/8
	1.00

a) $P(X\leq 2) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$
$= 1.00$

b) $P(X>3) = 0$

c) $P(-1<X\leq 1) = f(-1) + f(0) + f(1)$
$\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) $P(X<3.5 \text{ o } X>4.5)$
$P(X<3.5) + P(X>4.5)$
$P(X\leq 3) + P(X\geq 4)$
$1 + 0 = 1$

$Me = 0$

5.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{25}, & x = 0, 1, 2, 3, 4. \\ 0, \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) $P(X=4) = \dfrac{2\times 4+1}{25} = \dfrac{9}{25} = 0.36$ //

b) $P(X\leq 1) = f(0) + f(1) = \dfrac{1}{25} + \dfrac{2}{25} = \dfrac{3}{25} = 0.12$ //

c) $P(2\leq X<4) = f(2) + f(3) = \dfrac{5}{25} + \dfrac{7}{25} = \dfrac{12}{25} = 0.48$ //

6.

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^x, & x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) $P(X=2) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.046875$

b) $P(X\leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{64} = \dfrac{63}{64} = 0.9844$ //

c) $P(X\geq 2) = 1 - P(X\leq 1)$

$= 1 - (f(0) + f(1)) = 0.0625$

7. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2x, & 0 < x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$

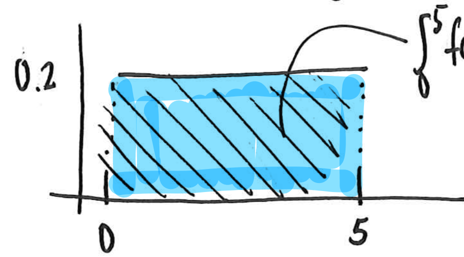
a) $P(X < 2.5) = 0.2 \times 2.5 = 0.50$

b) $P(X > 1.5) = 1 - (0.2 \times 1.5)$

0.70

c) $P(X < -2) = 0$

d) $f_X(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \dfrac{0.2x}{\partial x} = 0.2$



$\int_0^5 f(x)\,dx = 1$

OK

$f(x) = \begin{cases} 0.2, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

8.

X: tiempo reparación fotocopiadora

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{22} e^{-x/22}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

0 — 10min — 20m

$\underbrace{\hspace{3cm}}_{\text{TIEMPO MAXIMO PARA REPARAR FOTOCOPIADORA}}$

requiere el profesor tiempo extra: fotocopiar, organizar, desplazamiento al salón, arreglo de escritorios, entrega cuestionario

$$P(X < 10\,\text{min}) = \int_0^{10} \frac{1}{22} e^{-10/22}\, dx$$

$$1 - e^{-10/22} = 0.3653$$

$$P(X > 10\,\text{min}) = 1 - 0.3653 = 0.6347$$

La probabilidad de que la maquina sea reparada en mas de 10 min. es de 0.6347 muy alta!

Por tal razón el profesor tomó una mala decisión.