Taller Unidad 301

Profesor Daniel Enrique González Gómez

Resumen de conceptos

Variable Aleatoria

Una variable aleatoria X es una función cuyo dominio es el espacio muestral S y su rango (R_X) es un subconjunto de números reales $X(S)$, que tiene asociado un conjunto de valores determinados por la probabilidad de ocurrencia de cada valor de $X(S)$, $f(x) = P(X = x)$.

Variable Aleatoria Discreta y Continua

Si R_X es un conjunto finito o infinito numerable, entonces la variable aleatoria se clasifica como DISCRETA.
En caso de que R_X sea un conjunto infinito no numerable, la variable aleatoria se clasifica como CONTINUA

Función de distribución de probabilidad

Se llama función de probabilidad de una variable aleatoria X a la función que asocia a cada valor x_i, su probabilidad $P(X = x_i) = f(x_i)$. En este caso la variable aleatoria es discreta.

Propiedades de $f(x)$: $\quad 0 \leq f(x) \leq 1 \qquad \sum f(x_i) = 1$

Función de densidad de probabilidad

Representa la densidad de una variable aleatoria continua y describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable aleatoria tomará determinado valor. ($f_X(x)$)

Propiedades de $f(x)$: $0 \leq f(x) \leq 1$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\, dx = 1$.

Función de Distribución Acumulada

Si X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, se define la función de distribución acumulada, $F(x)$, para los casos discreto y continuo, como:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{caso discreto}$$

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad$ caso continuo

Propiedades de $F_X(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $F(x) = 0$ para todo valor de X anterior al menor de X.
- $F(x) = 1$ para todo valor de X igual o posterior al mayor de X.
- $F(x)$ es creciente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Clasifique las siguientes variables como discretas o continuas:
   (a). X: el número de accidentes automovilísticos que ocurren al año en la ciudad de Cali
   (b). Y : tiempo que se tarda una persona en recorrer 100 metros
   (c). M : cantidad de leche que una vaca produce semanalmente
   (d). N : el número de huevos que una gallina produce mensualmente
   (e). P : numero de permisos para la construcción que son aprobados mensualmente en la ciudad
   (f). Q : peso en gramos de automóvil

2. Determine el valor de C de modo que cada una de las siguientes funciones sirva como una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

$$f(x) = C\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}, \text{ para } x = 0, 1, 2$$

3. Un embarque de 7 televisores contiene 2 unidades defectuosas. Un hotel compra al azar 3 de los televisores. Si X es el número de unidades defectuosas en un grupo de tres televisores comprados por el hotel al azar, encuentra la función de probabilidad de X. Expresa los resultados de forma gráfica. Construye la función de distribución acumulada de X. Usar $F(X)$ para responder, ¿cuál es la probabilidad que hayan cero televisores defectuosos en el grupo de tres televisores?, ¿cuál es la probabilidad que haya más de 1 televisor defectuoso en la selección de tres televisores?.

4. Una firma de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de varios años. La función de distribución acumulada de T, el número de años de vencimiento para un bono que se elige al azar, es,

$$F(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<1\\ 1/4 & , \quad 1\leq t<3\\ 1/2 & , \quad 3\leq t<5\\ 3/4 & , \quad 5\leq t<7\\ 1 & , \quad t\geq 7\end{cases}$$

¿cuál es la probabilidad que al seleccionar un bono al azar venza exactamente a los 5 años de su entrega?, ¿qué tan probable es que un bono cualquiera venza después de tres años de su entrega?, ¿qué tan probable es que el bono venza antes de los seis años, pero no antes del año y medio de su entrega?.

5. La distribución de probabilidad de X, el número de imperfecciones por 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

Construya la función de distribución acumulada de X. Graficar la función de probabilidad y la distribución de probabilidad de X. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 3 imperfecciones en 10 metros de una tela seleccionada al azar?.

6. Sea W el número de sellos en tres lanzamientos de una moneda. Liste los elementos del espacio muestral S para los tres lanzamientos de la moneda y asigne un valor w de W a cada punto muestral.

7. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria W del ejercicio anterior; suponga que la cara está cargada de manera que una cara tenga doble de probabilidad de ocurrir que un sello.

8. La vida útil en días, para frascos de cierta medicina de prescripción es una variable aleatoria que tiene función de densidad,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{20000}{(x+100)^3} & , \quad x>0\\ \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que un frasco de esta medicina tenga una vida útil de,

(a). al menos 22 días.

(b). cualquier lapso entre 80 a 120 días.

9. El número total de horas, medidas en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que un periodo de un año, una familia utilice una aspiradora,

(a). menos de 120 horas.

(b). entre 50 y 100 horas.

10. Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores entre $x = 1$ y $x = 3$ tiene una función de densidad dada por $f(x) = 1/2$.

(a). Muestre que el área bajo la curva es igual a 1.

(b). Encuentre $P(2 < X < 2{,}5)$; $P(X = 2{,}5)$; $P(2 \leq X < 2{,}5)$; $P(X > 2{,}5)$; $P(X \geq 2{,}5)$.

(c). Para la función de densidad del ejercicio anterior encuentre $F(x)$. Utilícela para encontrar $P(2 < X < 2{,}5)$; $P(X = 2{,}5)$; $P(2 \leq X < 2{,}5)$; $P(X > 2{,}5)$; $P(X \geq 2{,}5)$.

11. En una tarea de laboratorio, cuando el equipo está operando la función de densidad del resultado, X, es el tiempo,

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & , \quad 0 < x < 1 \\ & \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

(a). Calcule $P(X \leq 1/3)$

(b). ¿Cuál es la probabilidad que X excederá a $0{,}5$?

(c). Dado que $X \geq 0{,}5$, ¿cuál es la probabilidad de que X será menor que $0{,}75$?

12. La probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de $P = 0{,}05$. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, la función de probabilidad de número de unidades defectuosas está dada por,

$$f(x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x},\ x = 0, 1, \ldots, 10$$

(a). ¿cuál es la probabilidad de que en diez unidades dos se encuentren defectuosas?

(b). ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?

(c). ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

13. El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe, por experiencia, que el $20\,\%$ de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?. La función de probabilidad del número de personas que llegan al restaurante es,

$$f(x) = \binom{25}{x} (0{,}80)^x (0{,}20)^{25-x}$$

Nota: En todos los casos represente gráficamente la función de probabilidad correspondiente y resalte la(s) probabilidad(es) solicitada(s).

Problemas seleccionados de Walpole(2012).