Resumen de probabilidad

Conceptos básicos

1. **Experimento aleatorio**: Proceso que se puede repetir en las mismas condiciones varias veces, del cual se puede establecer sus posibles resultados, pero no se conoce con certeza cual de ellos se obtendrá finalmente.

   Ejemplos:

   E_1 : Lanzar una moneda dos veces y observar sus resultados

   E_2 : Lanzar dos datos y observar la resta de sus resultados

   E_3 : Realizar una prueba de estadística y obtener su calificación

   E_4 : Preguntar a una persona si en su vida como conductor, ha propiciado un accidente.

2. **Espacio muestral**: Es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar el experimento aleatorio y se representa con la letra **S**

   Ejemplos:

   $S_1 = \{(cc), (cs)(sc), (ss)\}$

   $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   $S_3 = \{x \in R | 0 \leq x \leq 5\}$

   $S_4 = \{si, no\}$

3. **Evento aleatorio**: Subconjunto del espacio muesral en el cual tenemos interés

   Ejemplos:

   A_1 : Sale solo caras

   A_2 : La resta es cero

   A_3 : Gana el examen

   A_4 : La persona responde que si ha propiciado un accidente al conducir un automóvil

4. **Eventos mutuamente excluyentes**: Dos eventos A y B se consideran mutuamente excluyentes, su cuando un evento ocurre, el otro no, y viceversa.

5. **Eventos independientes** Dos eventos A y B se consideran independientes estadísticamente si la probabilidad de que ocurra A no afecta la probabilidad de ocurrencia de B

Enfoques de probabilidad

1. **Enfoque Clásico**. Este enfoque nace a partir de los juegos de asar. En este caso la probabilidad de un evento A esta definida así:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

donde $n(A)$ representa el numero de elementos que tiene el conjunto A y $n(S)$, el numero de elementos del espacio muestra.

2. **Enfoque Frecuentista**. Este enfoque esta basado en la frecuencia relativa de un evento y se define como:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre A}}{n}$$

donde n es el tamaño de la muestra. A mayor tamaño de muestra, el valor de la probabilidad $P(A)$ tiende a estabilizarse a un valor, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{frecuencia}}{n} = P(A)$$

3. **Enfoque subjetivo**: Probabilidad generada por un experto.

Relación de eventos y reglas de probabilidad

- $P(\phi) = 0$
- $P(S) = 1$
- Probabilidad simple o marginal: $P(A)$
- Probabilidad conjunta: $P(A \cap B)$
- La probabilidad es un numero entre cero y uno: $0 \leq P(A) \leq 1$
- Regla de complementos: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Regla de la adición : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilidad condicional : $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Regla de la multiplicación : $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

- Regla de independencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Probabilidad total: $P(D) = \sum_{i=1}^{k} P(D \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)P(D|E_i)$
- Teorema de Bayes: $P(E_1|D) = \frac{P(E_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E_1)P(D|E_1)}{\sum_{i=1}^{k} P(E_i)P(D|E_i)}$

Tecnicas de conteo

- **Regla de a adición** :Si un experimento puede realizarse mediante dos métodos difernte̲s, que conducen a un mismo resultado. Existiendo del primer método m maneras diferentes y n maneras diferentes de realizar el segundo. Entoces para realizar el experimento utilizando el método uno o el método dos se tendrán $m + n$ formas diferentes.
- **Regla de la multiplicación**: Si un experimento se realiza en dos etapas. Si la primera etapa se puede realizar de m maneras diferentes y la segunda etapa de n maneras diferentes, entonces hay $m \times n$ formas diferentes de realizar el experimento.
- **Importa el orden con repetición**:El número de maneras diferentes como se puede extraer una muestra de k elementos de una urna que contiene n elementos, importando el orden es:
$$\mathscr{P}(n, k) = n^k$$
- **Importa el orden sin repetición**: El número de maneras diferentes como se puede obtener una muestra de k elementos de una urna que contiene n elementos, importando el orden sin repetición o sustitución/ remplazo (llamada también Permutación) es:
$$\mathscr{P}(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- **No importa el orden sin repetición**: El numero de maneras diferentes como se puede extraer una muestra de tamaño k de una urna que contiene n elementos, sin importar el orden y sin sustitución o reemplazo(llamada también combinación)

es:

$$\mathscr{C}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- **No importa el orden con repetición**: El numero de maneras diferentes como se puede extraer una muestra de tamaño k de una urna que contiene n elementos, sin importar el orden y con repetición o reemplazo es:

$$\mathscr{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Problemas

1. Una compañia de seguros de automóviles trabaja con cuatro modelos de autos : M_1, M_2, M_3 y M_4 y cuenta con la siguiente información.

Modelo	Proporción de automóviles	probabilidad de accidentes	
M_1	0.27	0.03	
M_2	0.17	0.03	
M_3	0.35	0.05	
M_4	0.21	0.04	

Calcule cada una de las probabilidades señaladas en la tabla. A partir los cálculos realizados responda el siguiente interrogante: Un automóvil de un de los modelos ha tenido un accidente. Cuál es modelo que mayor probabilidad tiene de haber tenido este accidente?

	A	$\overline{A}$			
M_1	$P(M_1 \cap A)$ 1	$P(M_1 \cap \overline{A})$ 2	$P(M_1)$ 3	$P(A\|M_1)$ 4	$P(\overline{A}\|M_1)$ 5
M_2	$P(M_2 \cap A)$ 6	$P(M_2 \cap \overline{A})$ 7	$P(M_2)$ 8	$P(A\|M_2)$ 9	$P(\overline{A}\|M_2)$ 10
M_3	$P(M_3 \cap A)$ 11	$P(M_3 \cap \overline{A})$ 12	$P(M_3)$ 13	$P(A\|M_3)$ 14	$P(\overline{A}\|M_3)$ 15
M_4	$P(M_4 \cap A)$ 16	$P(M_4 \cap \overline{A})$ 17	$P(M_4)$ 18	$P(A\|M_4)$ 19	$P(\overline{A}\|M_4)$ 20
	$P(A)$ 21	$P(\overline{A})$ 22			
	$P(M_1\|A)$ 23	$P(M_1\|\overline{A})$ 24			
	$P(M_2\|A)$ 25	$P(M_2\|\overline{A})$ 26			
	$P(M_3\|A)$ 27	$P(M_3\|\overline{A})$ 28			
	$P(M_4\|A)$ 29	$P(M_4\|\overline{A})$ 30			

2. Un dispositivo sirve para identificar una cierta enfermedad. Si alguien está enfermo, hay un 90 % de posibilidades de que la prueba sea positiva. Si no está enfermo hay todavía un 1 % de posibilidades de que la prueba sea positiva. Aproximadamente el 1 % de la población está enferma. Smith pasa la prueba y resulta positiva. La probabilidad de que tenga la enfermedad es? (Carmen Diaz-2005)

3. En una ciudad hay 60 hombres y 40 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres fuman. Si se selecciona al azar un fumador, ¿qué es más probable, que sea hombre o mujer? (Carmen Diaz-2005)

4. En un grupo de 1000 sujetos se encontraron 500 sujetos aptos de los que 300 tenían inteligencia superior. De los 400 con inteligencia superior 300 resultaron aptos. ¿Son los sucesos A: “ser superior a la media en inteligencia” y B “ser apto en rendimiento” independientes? (Botella, León y San Martín, 1993, p. 283)