TALLER – 3,02 VARIABLE ALEATORIA
300MAE005 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

3.1 Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

X: el número de accidentes automovilísticos que ocurren al año en Virginia.

Y: el tiempo para jugar 18 hoyos de golf.

M: la cantidad de leche que una vaca específica produce anualmente.

N: el número de huevos que una gallina pone mensualmente.

P: el número de permisos para construcción que los funcionarios de una ciudad emiten cada mes.

Q: el peso del grano producido por acre.

3.14 El tiempo que pasa, en horas, para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad es una variable aleatoria continua con una función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-8x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el tiempo que pase para que el radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad sea menor de 12 minutos

a) usando la función de distribución acumulativa de X;
b) utilizando la función de densidad de probabilidad de X.

3.18 Una variable aleatoria continua X, que puede tomar valores entre $x = 2$ y $x = 5$, tiene una función de densidad dada por $f(x) = 2(1 + x)/27$. Calcule

a) $P(X < 4)$;
b) $P(3 \leq X < 4)$.

3.33 Suponga que cierto tipo de pequeñas empresas de procesamiento de datos están tan especializadas que algunas tienen dificultades para obtener utilidades durante su primer año de operación. La función de densidad de probabilidad que caracteriza la proporción Y que obtiene utilidades está dada por

$$f(y) = \begin{cases} ky^4(1-y)^3, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de k que hace de la anterior una función de densidad válida?
b) Calcule la probabilidad de que al menos 50% de las empresas tenga utilidades durante el primer año.
c) Calcule la probabilidad de que al menos 80% de las empresas tenga utilidades durante el primer año.

3.24 Calcule la distribución de probabilidad para el número de discos compactos de jazz cuando, de una colección que consta de 5 de jazz, 2 de música clásica y 3 de rock, se seleccionan 4 CD al azar. Exprese sus resultados utilizando una fórmula.

3.25 De una caja que contiene 4 monedas de 10 centavos y 2 monedas de 5 centavos se seleccionan 3 monedas al azar y sin reemplazo. Calcule la distribución de probabilidad para el total T de las 3 monedas. Exprese la distribución de probabilidad de forma gráfica como un histograma de probabilidad.

3.31 Con base en pruebas extensas, el fabricante de una lavadora determinó que el tiempo Y (en años) para que el electrodoméstico requiera una reparación mayor se obtiene mediante la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Los críticos considerarían que la lavadora es una ganga si no hay probabilidades de que requiera una reparación mayor antes del sexto año. Comente sobre esto determinando $P(Y > 6)$.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lavadora requiera una reparación mayor durante el primer año?

3.65 Sea el número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador durante un intervalo de 5 minutos una variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-2}2^x}{x!}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

a) Determine la probabilidad de que X sea igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
b) Grafique la función de masa de probabilidad para estos valores de x.
c) Determine la función de distribución acumulada para estos valores de X.

3.72 El congestionamiento de pasajeros es un problema de servicio en los aeropuertos, en los cuales se instalan trenes para reducir la congestión. Cuando se usa el tren, el tiempo X, en minutos, que toma viajar desde la terminal principal hasta una explanada específica tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que la función de densidad de probabilidad anterior es válida.
b) Calcule la probabilidad de que el tiempo que le toma a un pasajero viajar desde la terminal principal hasta la explanada no exceda los 7 minutos.

Ejercicios tomados de Walpole (2012)

TALLER 302. Variable Aleatoria

3.1. X: DISCRETA

Y: CONTINUA

M: Depende: en litros: CONTINUA

en tinacas (número de tinacas) DISCRETA

N: DISCRETA

P: DISCRETA

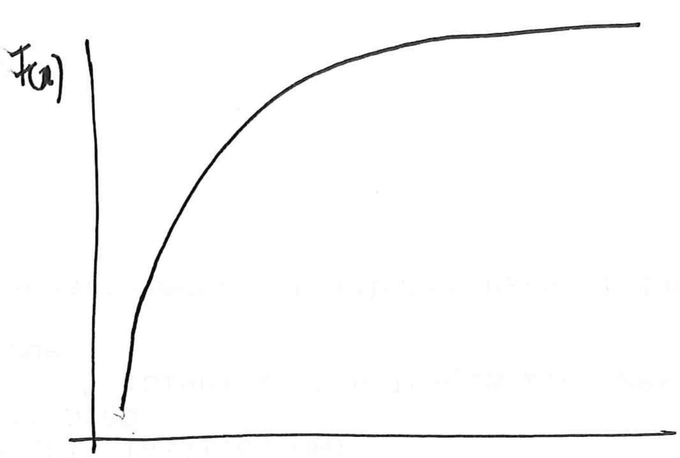
Q: CONTINUA

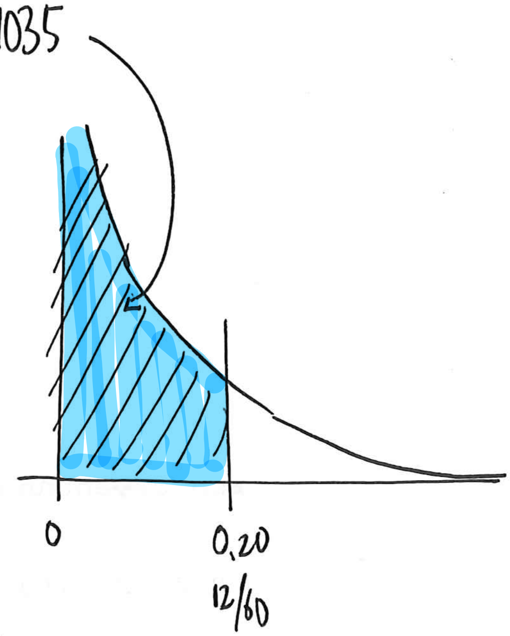
3.14

a) $F(12) = P(X \leq 12) = 1 - e^{-8 \times 12/60} = 0.7981035$

b) $f(x) = \dfrac{\partial F(x)}{\partial x} = \dfrac{\partial\, 1 - e^{-8x}}{\partial x} = 8e^{-8x}$

$$\int_0^{12/60} 8e^{-8x}\,dx = 1 - e^{-8x}\Big|_0^{12/60} = 0.7981035$$

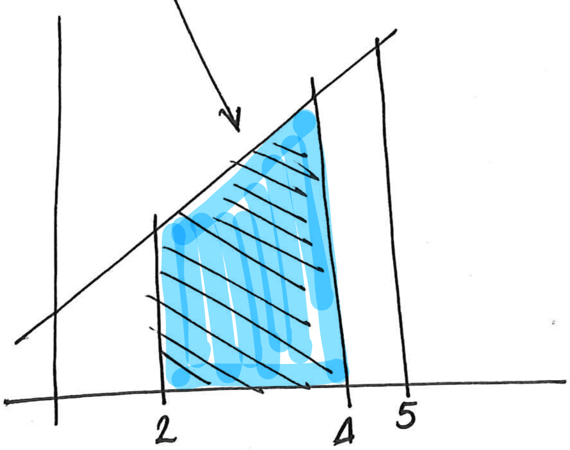


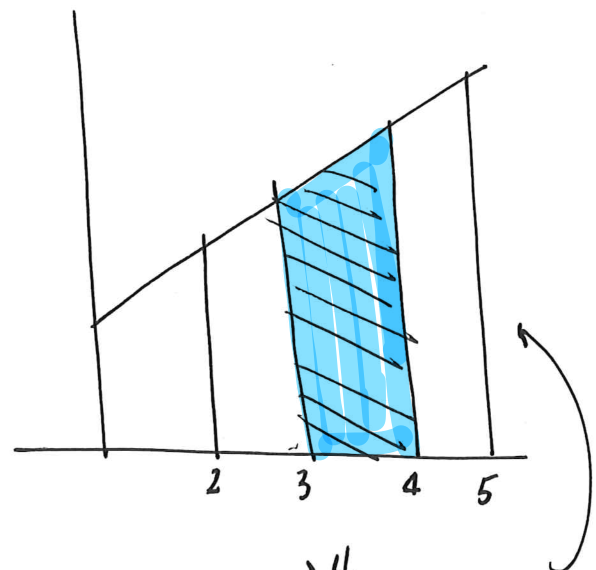


3.18 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1+x)}{27}, & 2 \le x \le 5 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

a) $P(X<4) = \int_2^4 \frac{2}{27}(1+x)\,dx = \frac{2}{27}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4$

$= 0.59259$





b) $P(3 \le X < 4) = \int_3^4 \frac{2}{27}(1+x)\,dx = \frac{2}{27}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^4 = 0.3333$

3.33

$$f(y) = \begin{cases} ky^4(1-y)^3 & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) $k = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \int_0^1 k \cdot y^4(1-y)^3\,dy = 1$$

$$k\int_0^1 y^4(-y^3+3y^2-3y+1)\,dy = 1$$

$$k\int(-y^7+3y^6-3y^5+y^4)\,dy = 1$$

$$k\left[-\frac{y^8}{8}+\frac{3y^7}{7}-\frac{3y^6}{6}+\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = 1$$

$$k\left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{7}-\frac{3}{6}+\frac{1}{5}\right] = 1$$

$$k \times \frac{1}{280} = 1$$

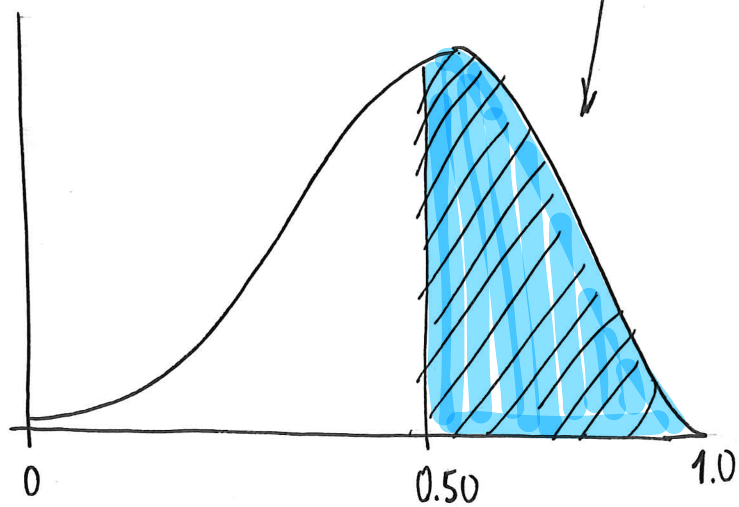
$$k = 280$$

$$f(y) = \begin{cases} 280\,y^4(1-y^3), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

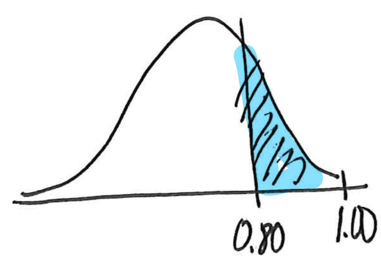
b) $P(Y>0.50) = 1 - P(Y<0.50)$

$$1-\int_0^{0.5} f(y)\,dy = 280\times\left(-\frac{0.5^8}{8}+\frac{3\times0.5^7}{7}-\frac{3\times0.5^6}{6}+\frac{0.5^5}{5}\right)$$

$$1-0.36328 = 0.6367$$



c) $P(Y>0.80) = 1-P(Y<0.80)$



$$1-\int_0^{0.80} 280(y^4\times(1-y^3))\,dy$$

$$1-280\times\left(-\frac{y^8}{8}+\frac{3y^7}{7}-\frac{3y^6}{6}+\frac{y^5}{5}\Big|_0^{0.80}\right)$$

$$1-0.9437184 = 0.05628$$

3.24.

5 jazz

2 musica clasica

3 Rock

COLECCION DE 10 DISCOS

0000

$k=4$

$\underbrace{\text{NO ORDEN, SIN REPETICION,}}_{\text{COMBINACIÓN}}$

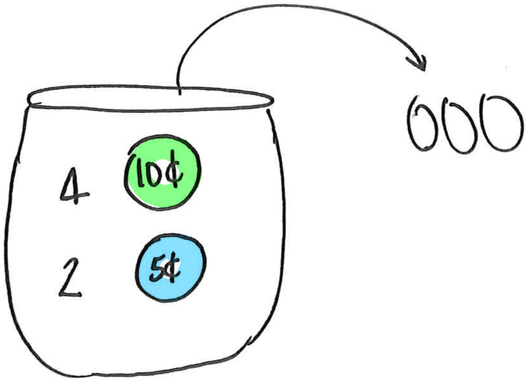
X: número de discos de jazz

$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$P(X=0) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{0}}{\binom{10}{4}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{5}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{10}{4}}, & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3.25.



NO ORDEN
SIN REEMPLAZO

$\underbrace{\hphantom{SIN REEMPLAZO}}$

COMBINACION

JJ 10

T: total en dinero de las 3 monedas

$R_T = \{20¢, 25¢, 30¢\}$

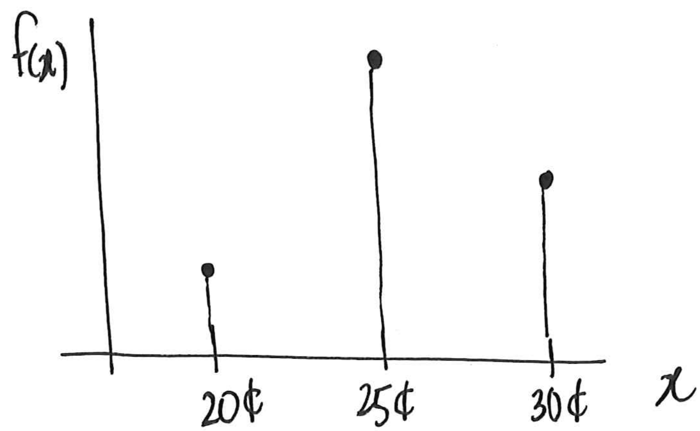
$$P(T=20¢) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1 \times 4}{20}$$

$$P(T=25¢) = \binom{2}{1}\binom{4}{2} \Big/ \binom{6}{3} = \frac{2 \times 6}{20}$$

$$P(T=30¢) = \binom{2}{0}\binom{4}{3} \Big/ \binom{6}{3} = \frac{1 \times 6}{20}$$

T	f(t)
20¢	4/20
25¢	12/20
30¢	6/20

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1



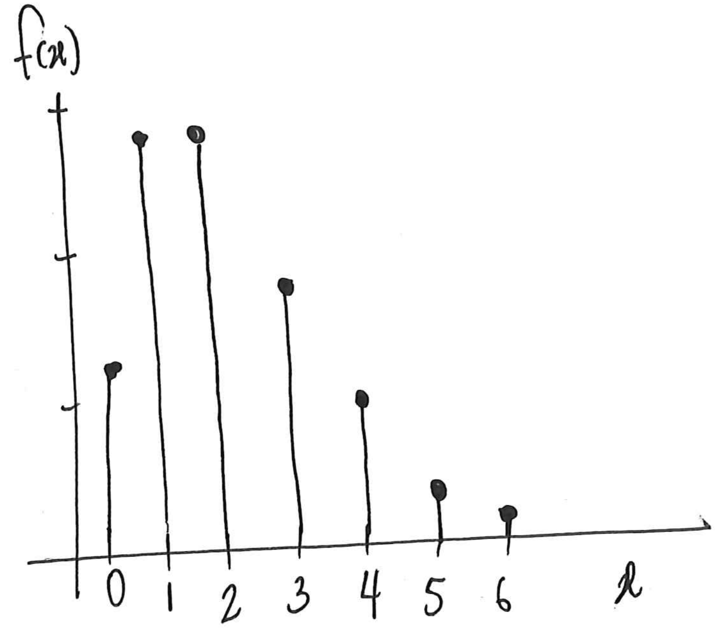
3,65.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}\, 2^{x}}{x!}, & \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a)

x	$f(x)$
0	$e^{-2} \times 2^{0}/0! = 0.1353$
1	$e^{-2} \times 2^{1}/1! = 0.2707$
2	$e^{-2} 2^{2}/2! = 0.2707$
3	$e^{-2} 2^{3}/3! = 0.1804$
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0120

b)



c)

$$F_{(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{x} \frac{e^{-2}\, 2^{x}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

3.31

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-y/4}, & y\geq 0\\ 0, & \text{cualquier otro caso}\end{cases}$$

a) $P(X<6)=1-e^{-y/4}=1-e^{-6/4}=0.7768$

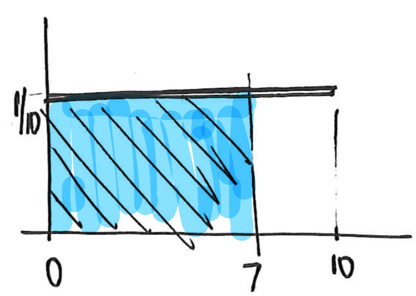
probabilidad de que requiera reparacion antes de 6 años!

Es muy alta.
Es arriesgado comprarla.

b) $P(X<1)=1-e^{-1/4}=0.2211$

3.72 X: tiempo que tarda un pasajero

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & 0\leq x\leq 10\\ 0, & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$$



a) $\int_0^{10}\frac{1}{10}dx=\frac{x}{10}\Big|_0^{10}=1$ ok

b) $P(X<7)=\frac{x}{10}\Big|_0^{7}=\frac{7}{10}=0.70$