PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Considere como X el número que falla una máquina de control numérico ($R_X = \{0, 1, 2\}$) al día y Y el número de veces en que se llama a un ingeniero para restaurar el proceso ($R_Y = \{0, 1, 2\}$). Su función de distribución conjunta esta dada por :

	$f(x,y)$	y = 0	1	2
	0	0.15	0.05	0
x	1	0	0.20	0.35
	2	0	0.10	0.15

(a.) Detarmine : $P(X \geq 1; Y \geq 1)$; $P(X = 1)$; $P(Y \leq 1)$

(b.) Encuentre $P(Y = 1|X = 2)$, exprese en palabras el resultado

(c.) Determine si existe dependencia entre estas dos variables (calcule el valor de ρ_{XY}), analice el resultado obtenido

2. Un restaurante de comidas rápidas opera tanto en un local que da servicio en automovil (autoservicio) como en un segundo local que atiende a clientes que llegan caminando. En un dia cualquiera, la proporción del tiempo en servicio del autoservicio se representa por X, mientras que Y representa la proporción del tiempo en que el segundo local esta en servicios. La función de densidad conjunta que representa el comportamiento de estas dos variables está dado por :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a.) Determine si $f_{XY}(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta

(b.) Determine $P(X \leq 0{,}5; Y \leq 0{,}3)$, $P(X \leq 0{,}80)$, $P(Y \geq 0{,}60)$

(c.) Determine ρ_{XY}, interprete su resultado

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

función de distribución de probabilidad conjunta

	$f(x,y)$	y = 0	1	2	$g(x)$
	0	0.15	0.05	0	0.20
X	1	0	0.20	0.35	0.55
	2	0	0.10	0.15	0.25
	$h(y)$	0.15	0.35	0.50	1.00

$g(x)$: FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN MARGINAL DE X

$h(y)$: FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN MARGINAL DE Y

$f_{XY}(x,y)$ debe cumplir:

i) $f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$

ii) $\sum_{R_X} \sum_{R_Y} f(x,y) = 0$

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$g(x)$
$x=0$	0.15	0.05	0	0.20
$x=1$	0	0.20	0.35	0.55
$x=2$	0	0.10	0.15	0.25
$h(y)$	0.15	0.35	0.50	1.00

$$\sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} f(x,y) = 0.15 + 0.05 + 0 + 0 + 0.20 + 0.35 + 0 + 0.10 + 0.15 = 1 \quad \text{OK}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0.20, & \text{si } x=0 \\ 0.55, & \text{si } x=1 \\ 0.25, & \text{si } x=2 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{R_y} f(x,y)$$

DISTRIBUCION MARGINAL DE X

$$h(y) = \begin{cases} 0.15, & \text{si } y=0 \\ 0.35, & \text{si } y=1 \\ 0.50, & \text{si } y=2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$h(y) = \sum_{R_x} f(x,y)$$

a) $P(X \geq 1 ; Y \geq 1) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} f(x,y)$

$= 0{,}20 + 0{,}35 + 0.10 + 0{,}15 = 0.80$

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$X=0$	0,15	0.05	0
$X=1$	0	0.20	0.35
$X=2$	0	0.10	0.15

$P(X=1) = 0.55$

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$g(x)$
$X=0$	0,15	0.05	0	0.20
$X=1$	0	0.20	0.35	0.55
$X=2$	0	0.10	0.15	0.25
$h(y)$	0.15	0.35	0.50	1.00

$P(Y \leq 1) = 0{,}15 + 0{,}35$

$= 0{,}50$

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$g(x)$
$X=0$	0,15	0.05	0	0.20
$X=1$	0	0.20	0.35	0.55
$X=2$	0	0.10	0.15	0.25
$h(y)$	0.15	0.35	0.50	1.00

b) $P(Y=1 \mid X=1) = 0.40$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$f(x,y)$	y: 0	1	2	$g(x)$
x: 0				
1				
2	0	0.10	0.15	0.25
$f(y \mid x=2)$	0.	$\frac{0.10}{0.25}$	$\frac{0.15}{0.25}$	
	0	0.40	0.60	

$$f(y \mid x=2) = \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ 0.40 & \text{si } y=1 \\ 0.60 & \text{si } y=2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

c) $\rho_{XY} = \dfrac{cov(XY)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

$cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$h(y)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$g(x)$

x	$g(x)$	$xg(x)$	$x^2 g(x)$
0	0.20	0	0
1	0.55	0.55	0.55
2	0.25	0.50	1.00
		1.05	1.55

$1.05 \to E(x)$

$1.55 \to E(X^2)$

$V(X) = 1.55 - (1.05)^2$
$= 0.4475$

y	$h(y)$	$y\,h(y)$	$y^2 h(y)$
0	0.15	0	0
1	0.35	0.35	0.35
2	0.50	1.00	2,00
		1.35	2,35

$1.35 \to E(Y)$

$2,35 \to E(Y^2)$

$V(Y) = 2,35 - (1.35)^2$
$= 0.5275$ //

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy\, f(x,y) = 0\times0\times0.15 + 0\times1\times0.05 + 0\times2\times0$$
$$1\times0\times0 + 1\times1\times0.20 + 1\times2\times0.35$$
$$2\times0\times0 + 2\times1\times0.10 + 2\times2\times0.15$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & & y & \\
 & f(x,y) & 0 & 1 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0.15 & 0.05 & 0 \\
x & 1 & 0 & 0.20 & 0.35 \\
 & 2 & 0 & 0.10 & 0.15
\end{array}$$

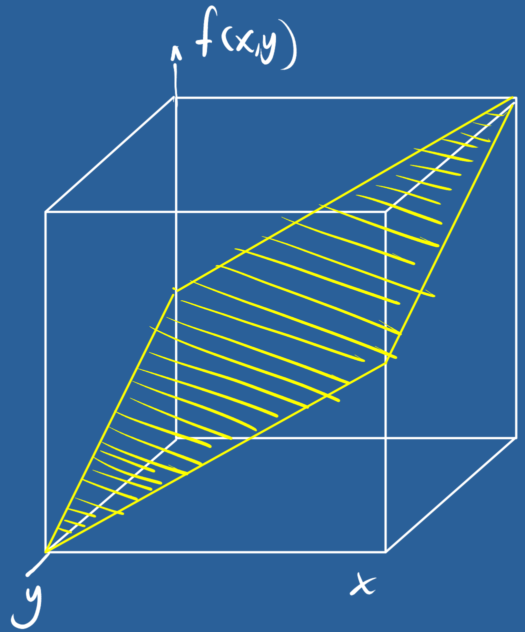
$$= 0 + 0 + 0 +$$
$$0 + 0.20 + 0.70 +$$
$$0 + 0.20 + 0.60 = 1.70$$

$$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$1.70 - 1.05 \times 1.35 = 0.2825$$

$$\rho_{XY} = \frac{COV(XY)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{0.2825}{\sqrt{0.4475 \times 0.5275}} = 0.5814$$

RELACIÓN POSITIVA
DE MAGNITUD MEDIA

SOLUCIÓN PROBLEMA 2.



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y), & 0 \le x \le 1 \\ & 0 \le y \le 1 \\ 0, \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

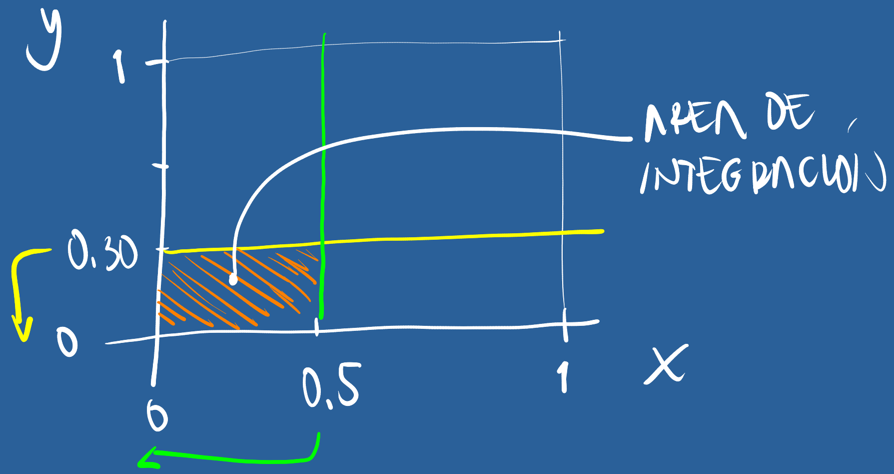
a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_0^1\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2y\right)dy = \frac{2}{3}\left(\frac{y}{2}+\frac{2y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = 1 \;//$$

SE CUMPLE CONDICIÓN — OK

b) $P(X \le 0.5 \,;\, Y \le 0.30) = \int_0^{0.30}\int_0^{0.50} \frac{2}{3}(x+2y)\,dx\,dy$



$$= \int_0^{0.30} \left(\frac{2}{3}\left(\frac{0.5^2}{2}+y\right)\right) dy = \int_0^{0.30} \frac{2}{3}(0.125+y)\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(0.125\,y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{0.30} = 0.055$$

$P(X \le 0.80) \longrightarrow$ se debe hallar $g(x)$ FUNCION DE DENSIDAD MARGINAL DE X

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(xy + \frac{2y^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$P(X \leq 0.80) = \int_0^{0.80} g(x)\,dx = \int_0^{0.80} \frac{2}{3}(x+1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{0.80} = 0.7467$$

$P(Y \geq 0.60)$ — debemos hallar $h(y)$ FUNCION DE DENSIDAD MARGINAL DE Y

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$P(Y \geq 0.60) = 1 - P(Y < 0.60) = 1 - \int_0^{0.60} \frac{2}{3}\left(2y + \frac{1}{2}\right)dy$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2y^2}{2} + \frac{y}{2}\right)\Big|_0^{0.60}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\left(0.60^2 + \frac{0.60}{2}\right)\right)$$

$$= 0.56$$

c) $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(XY)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

$\operatorname{cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(xy)\,dx\,dy$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\,dy$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\,dx$

$$E(X) = \int_0^1 x\left(\tfrac{2}{3}(x+1)\right)dx = \int_0^1 \tfrac{2}{3}(x^2+x)\,dx = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{6}\right) = \tfrac{5}{9}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\left(\tfrac{2}{3}(x+1)\right)dx = \int_0^1 \tfrac{2}{3}(x^3+x^2)\,dx =$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{7}{12}\right) = \tfrac{7}{18}$$

$$V(X) = \tfrac{7}{18} - \left(\tfrac{5}{9}\right)^2 = \tfrac{13}{162}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y\,h(y)\,dy = \int_0^1 y\left(\frac{2}{3}\left(2y+\frac{1}{2}\right)\right)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(2y^2+\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{18}.$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2\,h(y)\,dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{2}{3}\left(2y+\frac{1}{2}\right)\right)dy =$$

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\left(2y^3+\frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{2}{3}\left(\frac{2y^4}{4}+\frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{4}{9}.$$

$$V(Y) = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{23}{324}.$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy\, f(xy)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{3}(x^2y + 2xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{yx^3}{3} + \frac{2y^2x^2}{2} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{y}{3} + y^2\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{9} \times \frac{11}{18} = -\frac{1}{162} \simeq -0.00617 \,//$$

$$\rho_{XY} = \frac{COV(XY)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-0.00617}{\sqrt{\frac{13}{162} \times \frac{23}{324}}} \simeq -0.0817 \,//$$

RELACION
NEGATIVA
MUY DEBIL //