

Metateoria Musical:

$$T = S_2 \times A_3 \sim M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

Rodrigo Trevisan Braga

28 de novembro de 2025

Resumo

Este artigo apresenta uma fundamentação unificada do sistema musical tonal através da ação de grupo $T \sim M$, onde $T = S_2 \times A_3$ modela estruturas temporais e $M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ representa o espaço harmônico-melódico completo.

1 Introdução

A metateoria musical proposta unifica aspectos rítmicos e harmônicos através de uma estrutura algébrica coerente, combinando a elegância dos grupos de simetria com a precisão dos grupos cíclicos.

2 Grupo Temporal: $T = S_2 \times A_3$

Definição 1 (Grupo Temporal T). *O **grupo temporal** é definido como:*

$$T = S_2 \times A_3$$

onde:

- S_2 : Grupo simétrico em 2 elementos (dualidade binária)
- A_3 : Grupo alternado em 3 elementos (estruturas ternárias)

Teorema 1 (Propriedades de T). • $|T| = 2 \times 3 = 6$

- T é abeliano
- $T \cong \mathbb{Z}_6$
- *Geradores: transposição binária e rotação ternária*

Teorema 2 (Interpretação Musical de T). • S_2 : Pulso forte \leftrightarrow pulso fraco

- A_3 : Rotações em compassos ternários
- T : Todas as combinações métricas básicas

3 Grupo Musical: $M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

Definição 2 (Grupo Musical M). *O grupo musical completo é definido como:*

$$M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

onde:

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$: Espaço cromático (12 alturas)
- \mathbb{Z}_5 : 5 escalas geradoras
- \mathbb{Z}_7 : 7 modos

Teorema 3 (Isomorfismo Cromático).

$$\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$$

Teorema 4 (Propriedades de M). • $|M| = 12 \times 5 \times 7 = 420$

- M é abeliano
- $M \cong \mathbb{Z}_{420}$

4 Ação do Grupo: $T \sim M$

Teorema 5 (Ação Temporal-Harmônica). *O grupo temporal age sobre o grupo musical:*

$$T \sim M \quad \text{com} \quad T = S_2 \times A_3, \quad M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

Teorema 6 (Mecanismo da Ação). *A ação é definida por:*

$$(s, a) \cdot (h, c, d) = (s \cdot h, a \cdot c, d)$$

onde:

- $s \in S_2, a \in A_3$
- $h \in \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4, c \in \mathbb{Z}_5, d \in \mathbb{Z}_7$
- Ação compatível com estruturas temporais e harmônicas

5 Interpretação Musical Completa

Teorema 7 (Configurações Musicais). *Cada elemento de M representa uma configuração musical:*

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$: 12 transposições tonais
- \mathbb{Z}_5 : 5 sistemas harmônicos fundamentais
- \mathbb{Z}_7 : 7 colorações modais

- Total: 420 configurações harmônico-melódicas

Teorema 8 (Ação Temporal). *O grupo T age preservando:*

- Estruturas métricas básicas
- Relações de acentuação
- Padrões rítmicos fundamentais
- Compatibilidade com progressões harmônicas

6 Sistema Integrado

Corolário 1 (Sistema Completo). *O sistema musical total é descrito pela ação:*

$$T \sim M \quad \text{com} \quad |T \times M| = 6 \times 420 = 2520$$

configurações espaço-temporais possíveis.

Teorema 9 (Decomposição em Subgrupos).

$$\begin{aligned} M_{cromático} &= \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12} \\ M_{harmônico} &= \mathbb{Z}_5 \\ M_{modal} &= \mathbb{Z}_7 \\ T_{binário} &= S_2 \\ T_{ternário} &= A_3 \end{aligned}$$

7 Conclusão

Teorema 10 (Vantagens da Formulação). *A metateoria $T = S_2 \times A_3 \sim M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ oferece:*

- Fundamentação algébrica rigorosa
- Unificação de temporalidade e harmonia
- Interpretação musical intuitiva
- Generalização natural
- Estrutura computacionalmente tratável

Teorema 11 (Significado Musicológico). *A estrutura revela que:*

- O sistema tonal é governado por simetrias discretas
- Operações musicais correspondem a ações de grupo
- A complexidade emerge de combinações sistemáticas
- Existe uma base matemática unificada para a música tonal