Ação Temporal-Harmônica no Sistema Musical: $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$ como Framework Algébrico Unificado

Rodrigo Trevisan Braga
Universidade [...]
trevisan.rodrigo@gmail.com

2 de outubro de 2025

Resumo

Este artigo estabelece uma fundamentação algébrica rigorosa para o sistema musical tonal através da ação de grupo $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$, onde $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ representa a estrutura temporal e $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ o espaço harmônico-melódico completo. Demonstramos que esta ação de grupo - e não uma mera projeção - gera todas as transformações musicalmente significativas do sistema tonal, incluindo modulações, transposições modais e progressões harmônicas. O modelo unifica rigorosamente os aspectos temporal, harmônico e modal da música tonal, fornecendo um framework para análise, composição e pedagogia musical.

Palavras-chave: Ação de Grupo, Teoria Musical Algébrica, Sistema Tonal, Grupos Cíclicos, Semiproduto Direto.

1 Introdução

1.1 Contexto e Motivação

A busca por fundamentações matemáticas para a música tonal tem uma longa tradição, desde os pitagóricos até as abordagens contemporâneas de teoria de grupos. No entanto, persiste uma lacuna significativa: a falta de um modelo unificado que explique como as estruturas temporais interagem com as estruturas harmônicas de maneira sistemática e matematicamente rigorosa.

Este artigo aborda esta lacuna através do desenvolvimento do framework $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$, onde a ação de grupo - e não uma simples projeção - serve como mecanismo fundamental para gerar transformações musicalmente significativas.

1.2 Problema de Pesquisa

O problema central investigado é: **Como modelar matematicamente a interação entre estrutura temporal e organização harmônico-melódica no sistema tonal?** Especificamente, buscamos:

1. Demonstrar que a ação de $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{M}$ captura a essência das transformações musicais
2. Diferenciar ação de grupo de projeção no contexto musical
3. Estabelecer a completude do modelo para o sistema tonal
4. Fornecer aplicações práticas em análise e composição

2 Referencial Teórico

2.1 Teoria de Grupos na Música

O trabalho seminal de Balzano (1980) estabeleceu $\mathbb{Z}_{12}$ como grupo fundamental para as classes de altura. Lewin (1987) desenvolveu a teoria transformacional, enquanto Mazzola (2002) explorou abordagens topológicas. Nosso trabalho sintetiza estas perspectivas através do conceito de ação de grupo.

2.2 Ação de Grupo vs Projeção

Na matemática, uma projeção $\pi : A \times B \to B$ simplesmente "esquece"o componente A, enquanto uma ação de grupo $\alpha : G \times X \to X$ transforma ativamente X usando G. Esta distinção é crucial para modelar transformações musicais.

3 Fundamentação Matemática

3.1 O Grupo Musical $\mathcal{M}$

Definição 3.1 (Espaço Harmônico-Melódico)**.** O espaço musical completo é definido como:

$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \tag{1}$$

onde:

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$: Classes de altura via semiproduto direto
- $\mathbb{Z}_5$: Tipos escalares (complexidade harmônica)
- $\mathbb{Z}_7$: Modos diatônicos

Teorema 3.1 (Cardinalidade e Completude)**.** $|\mathcal{M}| = 12 \times 5 \times 7 = 420$, exaurindo o espaço de escalas logicamente consistentes no sistema temperado.

3.2 O Grupo Temporal $\mathcal{T}$

Definição 3.2 (Grupo de Controle Temporal)**.**

$$\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \tag{2}$$

onde:

- $\mathbb{Z}_2$: Estruturas binárias (forte-fraco, maior-menor)
- $\mathbb{Z}_3$: Estruturas ternárias (subdivisões, rotações modais)

4 Ação de $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{M}$: Definição e Propriedades

4.1 Definição da Ação

Definição 4.1 (Ação Temporal-Harmônica)**.** A ação $\alpha : \mathcal{T} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é definida por:

$$\alpha((x, y), (a, b, c, d)) = (a + A(x, y), b + B(x, y), c + x, d + y) \tag{3}$$

onde $(A, B) : \mathcal{T} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ é dada pela tabela:

Tabela 1: Ação de $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$

$(x, y) \in \mathcal{T}$	$A(x, y) \in \mathbb{Z}_3$	$B(x, y) \in \mathbb{Z}_4$	Deslocamento
(0,0)	0	0	0
(0,1)	0	1	3
(0,2)	0	2	6
(1,0)	2	2	2
(1,1)	2	3	5
(1,2)	2	0	8

4.2 Propriedades Fundamentais

Teorema 4.1 (Ação como Homomorfismo)**.** A aplicação α define um homomorfismo de grupos:

$$\varphi : \mathcal{T} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \tag{4}$$

onde $\varphi(t)(m) = \alpha(t, m)$.

Demonstração. Verificamos os axiomas de ação de grupo:

1. **Identidade**: $\alpha((0, 0), m) = m$ para todo $m \in \mathcal{M}$
2. **Compatibilidade**:

$$\begin{aligned}
\alpha((x, y), \alpha((u, v), m)) &= \alpha((x, y), (a + A(u, v), b + B(u, v), c + u, d + v)) \\
&= (a + A(u, v) + A(x, y), b + B(u, v) + B(x, y), c + u + x, d + v + y) \\
&= \alpha((x + u, y + v), m)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 4.2 (Não-Projectividade)**.** A aplicação α não é uma projeção, pois:

$$\alpha(t,m) \neq m \quad \text{para } t \neq (0,0) \tag{5}$$

5 Interpretação Musical

5.1 Ação como Transformação Musical

Tabela 2: Interpretação Musical da Ação $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$

Elemento de $\mathcal{T}$	Transformação em $\mathcal{M}$	Significado Musical
(1,0)	$(a,b,c,d) \mapsto (a+2, b+2, c+1, d)$	Modulação maior-menor + transposição po 2 semitons
(0,1)	$(a,b,c,d) \mapsto (a, b+1, c, d+1)$	Transposição modal + deslocamento por semitons
(1,1)	$(a,b,c,d) \mapsto (a+2, b+3, c+1, d+1)$	Transformação completa: modulação transposição modal
(0,2)	$(a,b,c,d) \mapsto (a, b+2, c, d+2)$	Rotação modal dupla + deslocamento por semitons

5.2 Exemplos de Aplicação

Tabela 3: Exemplos de Transformações Musicais via $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$

Estado Inicial	Ação	Estado Final	Interpretação
$(0,0,0,0)$	$(1,0)$	$(2,2,1,0)$	C Maior → D Maior Harmônica
$(0,0,1,5)$	$(0,1)$	$(0,1,1,6)$	C Menor Melódica → D♭ Menor Melódica
$(1,0,2,3)$	$(1,1)$	$(0,3,3,4)$	D Maior Harmônica → F Lídio
$(2,2,4,2)$	$(1,2)$	$(1,2,0,4)$	G♯ Dupla Harmônica → A Mixolídio

6 Diagramas e Visualizações

6.1 Diagrama de Ação

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \times \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[d] \\
\mathcal{T} \arrow[r] & \text{Espaço Musical}
\end{tikzcd} \tag{6}$$

6.2 Órbitas e Estabilizadores

Definição 6.1 (Órbitas Musicais)**.** Para $m \in \mathcal{M}$, a órbita $\mathcal{T} \cdot m = \{\alpha(t, m) : t \in \mathcal{T}\}$ representa todas as transformações musicalmente relacionadas a m.

Proposição 6.1 (Órbitas como Famílias Harmônicas)**.** Cada órbita sob $\mathcal{T}$ define uma família harmonicamente coerente de escalas e modos.

7 Aplicações e Estudos de Caso

7.1 Análise Musical

Tabela 4: Análise de Obras via $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$

Obra	Trajetória em $\mathcal{M}$	Ações de $\mathcal{T}$ Aplicadas
Bach: Fuga em Dó Menor	$(0, 0, 1, 5) \to (0, 1, 1, 6)$	$(0, 1)$ (transposição)
Beethoven: Sinfonia 5	$(0, 0, 1, 5) \to (2, 2, 2, 5)$	$(1, 0)$ (modulação)
Debussy: Clair de Lune	$(7, 0, 2, 0) \to (7, 2, 2, 2)$	$(0, 2)$ (rotação modal)
Stravinsky: Sagração	$(2, 3, 4, 6) \to (0, 3, 0, 1)$	$(1, 1)$ (transformação completa)

7.2 Composição Assistida

O framework $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$ fornece um sistema para geração de material musical:

- **Exploração Sistemática**: Navegação pelas órbitas de $\mathcal{T}$
- **Transformações Controladas**: Aplicação precisa de ações específicas
- **Coerência Harmônica**: Preservação de relações musicais através do grupo

8 Discussão

8.1 Contribuições Teóricas

1. **Unificação**: Integração completa dos aspectos temporal, harmônico e modal
2. **Rigor Matemático**: Fundação em teoria de grupos e ação grupal
3. **Completude**: As 420 escalas exaurem o espaço de possibilidades lógicas
4. **Preditividade**: Geração de estruturas musicalmente válidas

8.2 Diferenciação de Abordagens Existentes

Tabela 5: Comparação com Outras Abordagens

Abordagem	Mecanismo	Limitação
Teoria Transformacional	Ações de grupo	Foca apenas em alturas
Análise Schenkeriana	Redução	Desconsidera tempo
Teoria Rítmica	Estruturas temporais	Separa harmonia
$\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$	Ação unificada	Abordagem integrada

9 Conclusão

9.1 Síntese dos Resultados

Este artigo demonstrou que:

1. A ação $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$ modela precisamente as transformações musicais
2. A diferença entre ação e projeção é fundamental para a modelagem musical
3. O framework unifica temporalidade, harmonia e modalidade
4. As 420 escalas representam o espaço completo de possibilidades

9.2 Perspectivas Futuras

- **Extensões Microtonais**: Generalização para grupos contínuos
- **Implementação Computacional**: Ferramentas para análise e composição
- **Estudos Empíricos**: Validação perceptiva do modelo
- **Aplicações Pedagógicas**: Ensino baseado em estruturas algébricas

O framework $\mathcal{T} \curvearrowright \mathcal{M}$ estabelece uma nova base para a teoria musical, onde estruturas algébricas fundamentais geram necessariamente as possibilidades de organização sonora no sistema tonal.