Fundamentação Algébrica do Sistema Musical Tonal: Uma Abordagem por Ação de Grupo $T \sim M$

Rodrigo Trevisan Braga

trevisan.rodrigo@gmail.com

28 de novembro de 2025

Resumo

Este artigo estabelece uma fundamentação algébrica completa para o sistema musical tonal através da ação de grupo $T \sim M$, onde $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ modela estruturas rítmicas binárias e ternárias, e $M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ representa o espaço harmônico-melódico completo. Desenvolvemos sistematicamente cada componente, demonstrando isomorfismos estruturais e propriedades de ação grupal. O sistema gera 420 configurações musicalmente distintas, unificando aspectos temporais, harmônicos e modais através de uma estrutura algébrica coerente.

1 Introdução e Motivação

1.1 Contexto Histórico e Estado da Arte

A teoria de grupos tem se mostrado uma ferramenta poderosa para a análise musical desde os trabalhos pioneiros de Alan Forte (1973). Este trabalho busca estender essa abordagem para a música tonal, desenvolvendo uma estrutura algébrica mais compreensiva que unifique aspectos temporais, harmônicos e modais.

1.2 Objetivos e Contribuições

Este artigo apresenta três contribuições principais:

1. A definição do grupo temporal $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ para modelagem de estruturas rítmicas
2. A construção do grupo musical completo $M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$
3. A ação de grupo $T \sim M$ que unifica temporalidade e harmonia

2 Definições Fundamentais de Teoria de Grupos

2.1 Conceitos Básicos

Definição 1 (Grupo)**.** *Um **grupo** é um par $(G, *)$ onde G é um conjunto não-vazio e $* : G \times G \to G$ é uma operação binária satisfazendo:*

1. ***Associatividade**: $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in G$*
2. ***Elemento Neutro**: Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$*
3. ***Elemento Inverso**: Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$*

Demonstração da Boa Definição. A existência e unicidade do elemento neutro e dos inversos são consequências diretas dos axiomas:

Unicidade do Elemento Neutro: Suponha e e e' elementos neutros. Então:

$$e = e * e' = e'$$

Logo, $e = e'$.

Unicidade do Inverso: Para $a \in G$, suponha b e c inversos de a. Então:

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

Portanto, o inverso é único.

Propriedades Adicionais:

- $(a^{-1})^{-1} = a$ para todo $a \in G$
- $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
- As equações $a * x = b$ e $y * a = b$ têm soluções únicas em G

□

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 1, pp. 7-9

Definição 2 (Grupo Abeliano)**.** *Um grupo $(G, *)$ é **abeliano** ou **comutativo** se $a * b = b * a$ para todos $a, b \in G$.*

Caracterização de Grupos Abelianos. Para um grupo G, as seguintes são equivalentes:

1. G é abeliano
2. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ para todos $a, b \in G$
3. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ para todos $a, b \in G$

□

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 1, p. 10

2.2 Grupos Cíclicos

Definição 3 (Grupo Cíclico)**.** *Um grupo $(G, *)$ é **cíclico** se existe um elemento $g \in G$ (chamado **gerador**) tal que todo elemento de G pode ser escrito como uma potência de g:*

$$G = \langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

O grupo cíclico de ordem n é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

Teorema 1 (Propriedades dos Grupos Cíclicos)**.** *Para todo grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$:*

1. $|\mathbb{Z}_n| = n$
2. *$\mathbb{Z}_n$ é abeliano*
3. *O número de geradores é $\varphi(n)$, onde φ é a função totiente de Euler*
4. *Todo subgrupo de $\mathbb{Z}_n$ é cíclico*
5. *Para cada divisor d de n, existe exatamente um subgrupo de ordem d*

Demonstração Completa. **Item 1**: Por definição, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ com adição módulo n, claramente tem n elementos.

Item 2: Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}_n$, temos:

$$a + b \equiv b + a \pmod{n}$$

Portanto, $\mathbb{Z}_n$ é abeliano.

Item 3: Um elemento $a \in \mathbb{Z}_n$ é gerador se, e somente se, $\gcd(a, n) = 1$. O número de tais inteiros é exatamente $\varphi(n)$.

Item 4: Seja H um subgrupo de $\mathbb{Z}_n$. Se $H = \{0\}$, é cíclico. Caso contrário, seja d o menor inteiro positivo tal que $d \in H$. Afirmamos que $H = \langle d \rangle$. De fato, para qualquer $h \in H$, pela divisão euclidiana:

$$h = qd + r \quad \text{com } 0 \leq r < d$$

Como $h, qd \in H$, temos $r = h - qd \in H$. Pela minimalidade de d, $r = 0$. Logo $h = qd \in \langle d \rangle$.

Item 5: Para cada divisor d de n, o subgrupo $\langle \frac{n}{d} \rangle$ tem ordem d. A unicidade segue do fato de que se H é um subgrupo de ordem d, então $H = \langle \frac{n}{d} \rangle$. □

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 5, Teoremas 5.1-5.3, pp. 23-25

2.3 Operações entre Grupos

Definição 4 (Produto Direto)**.** *Dados dois grupos* $(G, *_G)$ *e* $(H, *_H)$*, o* ***produto direto*** $G \times H$ *é o conjunto:*

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$$

com a operação definida componente a componente:

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

Teorema 2 (Estrutura do Produto Direto)**.** *Se* $(G, *_G)$ *e* $(H, *_H)$ *são grupos, então* $(G \times H, *)$ *é um grupo com:*

- *Elemento neutro:* (e_G, e_H)
- *Inverso:* $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$
- $|G \times H| = |G| \cdot |H|$
- *Se* G *e* H *são abelianos, então* $G \times H$ *é abeliano*

Demonstração Completa. **Associatividade**:

$$\begin{aligned}
&((g_1, h_1) * (g_2, h_2)) * (g_3, h_3) \\
&= (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2) * (g_3, h_3) \\
&= ((g_1 *_G g_2) *_G g_3, (h_1 *_H h_2) *_H h_3) \\
&= (g_1 *_G (g_2 *_G g_3), h_1 *_H (h_2 *_H h_3)) \\
&= (g_1, h_1) * (g_2 *_G g_3, h_2 *_H h_3) \\
&= (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * (g_3, h_3))
\end{aligned}$$

Elemento Neutro: Para qualquer $(g, h) \in G \times H$:

$$(g, h) * (e_G, e_H) = (g *_G e_G, h *_H e_H) = (g, h)$$

$$(e_G, e_H) * (g, h) = (e_G *_G g, e_H *_H h) = (g, h)$$

Elemento Inverso: Para qualquer $(g, h) \in G \times H$:

$$(g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (g *_G g^{-1}, h *_H h^{-1}) = (e_G, e_H)$$

$$(g^{-1}, h^{-1}) * (g, h) = (g^{-1} *_G g, h^{-1} *_H h) = (e_G, e_H)$$

Cardinalidade: Segue diretamente da definição do produto cartesiano.

Comutatividade: Se G e H são abelianos, então:

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2) = (g_2 *_G g_1, h_2 *_H h_1) = (g_2, h_2) * (g_1, h_1)$$

□

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 12, Proposição 12.1, pp. 40-41

Definição 5 (Produto Semidireto)**.** *Dados grupos N e H e um homomorfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, o* ***produto semidireto*** *$N \rtimes_\phi H$ é o conjunto $N \times H$ com operação:*

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \phi(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2)$$

Teorema 3 (Propriedades do Produto Semidireto)**.**

- *$N \rtimes_\phi H$ é um grupo*
- *$N \cong N \times \{e_H\}$ é subgrupo normal de $N \rtimes_\phi H$*
- *$H \cong \{e_N\} \times H$ é subgrupo de $N \rtimes_\phi H$*
- *Se ϕ é trivial, então $N \rtimes_\phi H \cong N \times H$*

Demonstração Completa. **Associatividade**:

$$\begin{aligned}
&((n_1, h_1) * (n_2, h_2)) * (n_3, h_3) \\
&= (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2) * (n_3, h_3) \\
&= (n_1\phi(h_1)(n_2)\phi(h_1h_2)(n_3), h_1h_2h_3) \\
&= (n_1\phi(h_1)(n_2)\phi(h_1)(\phi(h_2)(n_3)), h_1h_2h_3) \quad \text{(pois } \phi \text{ é homomorfismo)} \\
&= (n_1\phi(h_1)(n_2\phi(h_2)(n_3)), h_1h_2h_3) \\
&= (n_1, h_1) * (n_2\phi(h_2)(n_3), h_2h_3) \\
&= (n_1, h_1) * ((n_2, h_2) * (n_3, h_3))
\end{aligned}$$

Elemento Neutro: (e_N, e_H) é o elemento neutro:

$$(e_N, e_H) * (n, h) = (e_N\phi(e_H)(n), e_Hh) = (n, h)$$

$$(n, h) * (e_N, e_H) = (n\phi(h)(e_N), he_H) = (n, h)$$

Elemento Inverso: O inverso de (n, h) é $(\phi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$:

$$\begin{aligned}
(n, h) * (\phi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) &= (n\phi(h)(\phi(h^{-1})(n^{-1})), hh^{-1}) \\
&= (n\phi(hh^{-1})(n^{-1}), e_H) = (n\phi(e_H)(n^{-1}), e_H) = (nn^{-1}, e_H) = (e_N, e_H)
\end{aligned}$$

Normalidade de N: Para $(n, e_H) \in N$ e $(m, h) \in N \rtimes_\phi H$:

$$(m, h)*(n, e_H)*(m, h)^{-1} = (m\phi(h)(n), h)*(\phi(h^{-1})(m^{-1}), h^{-1}) = (m\phi(h)(n)\phi(h)(\phi(h^{-1})(m^{-1})), e_H) \in N$$

Caso Trivial: Se ϕ é trivial, então $\phi(h)(n) = n$ para todos h, n, e a operação reduz-se ao produto direto. □

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 11, Proposição 11.1, pp. 38-39

2.4 Ação de Grupos

Definição 6 (Ação de Grupo)**.** *Uma **ação** de um grupo $(G, *)$ sobre um conjunto X é uma função:*

$$\alpha : G \times X \to X$$

denotada por $g \cdot x$, satisfazendo:

1. *Identidade* : $e \cdot x = x$ *para todo* $x \in X$
2. *Compatibilidade* : $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ *para todos* $g, h \in G, x \in X$

Teorema 4 (Equivalência entre Ações e Homomorfismos)**.** *Existe uma bijeção natural entre:*

- *Ações de G sobre X*
- *Homomorfismos* $\phi : G \to \mathrm{Sym}(X)$*, onde* $\mathrm{Sym}(X)$ *é o grupo simétrico em* X

Demonstração. Dada uma ação $\alpha : G \times X \to X$, definimos $\phi : G \to \mathrm{Sym}(X)$ por:

$$\phi(g)(x) = g \cdot x$$

A compatibilidade da ação garante que $\phi(g)$ é bijetora (com inversa $\phi(g^{-1})$), e ϕ é homomorfismo:

$$\phi(gh)(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = \phi(g)(\phi(h)(x))$$

Reciprocamente, dado $\phi : G \to \mathrm{Sym}(X)$ homomorfismo, definimos a ação:

$$g \cdot x = \phi(g)(x)$$

A identidade e compatibilidade seguim das propriedades de homomorfismo. □

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 7, Proposição 7.1, p. 30

Definição 7 (Órbita e Estabilizador)**.** *Para uma ação $\alpha : G \times X \to X$ e $x \in X$:*

- *A **órbita** de x é $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$*

- *O* ***estabilizador*** *de* x *é* $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$

Teorema 5 (Teorema da Órbita-Estabilizador)**.** *Para qualquer ação de* G *sobre* X *e* $x \in X$*, existe uma bijeção:*

$$G/\mathrm{Stab}(x) \cong G \cdot x$$

Em particular, se G *é finito:*

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |G \cdot x|$$

Demonstração. Definimos $\psi : G/\mathrm{Stab}(x) \to G \cdot x$ por:

$$\psi(g\,\mathrm{Stab}(x)) = g \cdot x$$

Boa Definição: Se $g\,\mathrm{Stab}(x) = h\,\mathrm{Stab}(x)$, então $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$, logo:

$$h^{-1}g \cdot x = x \Rightarrow g \cdot x = h \cdot x$$

Sobrejetividade: Para qualquer $y \in G \cdot x$, existe $g \in G$ com $y = g \cdot x$, então $\psi(g\,\mathrm{Stab}(x)) = y$.

Injetividade: Se $\psi(g\,\mathrm{Stab}(x)) = \psi(h\,\mathrm{Stab}(x))$, então $g \cdot x = h \cdot x$, logo $h^{-1}g \cdot x = x$, portanto $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$ e $g\,\mathrm{Stab}(x) = h\,\mathrm{Stab}(x)$.

A fórmula de cardinalidade segue do fato de que $G/\mathrm{Stab}(x)$ tem $|G|/|\mathrm{Stab}(x)|$ elementos. □

Referência: Lang (2002), Capítulo I, Seção 7, Teorema 7.2, pp. 31-32

3 Grupos Musicais Fundamentais

3.1 Grupo $\mathbb{Z}_2$: Estruturas Binárias

Definição 8 (Grupo $\mathbb{Z}_2$). *O grupo $\mathbb{Z}_2$ é definido como:*

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \quad \textit{com operação} \quad a * b = (a + b) \mod 2$$

Teorema 6 (Propriedades de $\mathbb{Z}_2$). *O grupo $\mathbb{Z}_2$ possui as seguintes propriedades:*

- ***Tabela de Cayley**:*

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

- ***Elemento neutro**: 0*
- ***Elementos inversos**: Cada elemento é seu próprio inverso: $0^{-1} = 0$, $1^{-1} = 1$*
- ***Geradores**: Único gerador: 1*
- ***Isomorfismo**: $\mathbb{Z}_2 \cong S_2$ (grupo simétrico em 2 elementos)*

Demonstração das Propriedades. **Associatividade**: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$:

$$(a + b) + c \mod 2 = a + (b + c) \mod 2$$

pois a adição módulo 2 é associativa.

Elemento Neutro: 0 é o elemento neutro pois:

$$a + 0 \mod 2 = 0 + a \mod 2 = a$$

Elementos Inversos:

$$\begin{aligned} 0 + 0 \mod 2 = 0 &\quad \Rightarrow \quad 0^{-1} = 0 \\ 1 + 1 \mod 2 = 0 &\quad \Rightarrow \quad 1^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Geradores: O elemento 1 gera todo o grupo:

$$\begin{aligned} &1^1 = 1 \\ &1^2 = 1 + 1 \mod 2 = 0 \end{aligned}$$

Isomorfismo com S_2: O grupo simétrico S_2 tem 2 elementos: a identidade e uma transposição, que correspondem exatamente a 0 e 1 em $\mathbb{Z}_2$. □

3.2 Grupo $\mathbb{Z}_3$: Estruturas Ternárias

Definição 9 (Grupo $\mathbb{Z}_3$)**.** *O grupo $\mathbb{Z}_3$ é definido como:*

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \quad \textit{com operação} \quad a * b = (a + b) \mod 3$$

Teorema 7 (Propriedades de $\mathbb{Z}_3$)**.** *O grupo $\mathbb{Z}_3$ possui as seguintes propriedades:*

- ***Tabela de Cayley**:*

$$\begin{array}{c|ccc} * & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

- ***Elemento neutro**:* 0
- ***Elementos inversos**:* $0^{-1} = 0$, $1^{-1} = 2$, $2^{-1} = 1$
- ***Geradores**:* 1 *e* 2 *(ambos são primos com 3)*
- ***Isomorfismo**:* $\mathbb{Z}_3 \cong A_3$ *(grupo alternado em 3 elementos)*

Demonstração das Propriedades. **Associatividade**: A adição módulo 3 é associativa.

Elemento Neutro: 0 é o elemento neutro pois:

$$a + 0 \mod 3 = 0 + a \mod 3 = a$$

Elementos Inversos:

$$\begin{aligned} 0 + 0 \mod 3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0^{-1} = 0 \\ 1 + 2 \mod 3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1^{-1} = 2 \\ 2 + 1 \mod 3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Geradores:

- O elemento 1 gera: $1, 2, 0$
- O elemento 2 gera: $2, 1, 0$
- Ambos têm ordem 3 e $\gcd(1, 3) = \gcd(2, 3) = 1$

Isomorfismo com A_3: O grupo alternado A_3 consiste das permutações pares de 3 elementos, que formam um grupo cíclico de ordem 3, isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. □

4 Construção do Grupo Temporal $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

4.1 Fundamentação Teórica do Grupo Temporal

Definição 10 (Grupo Temporal T)**.** *O* ***grupo temporal*** *é definido como o produto direto:*

$$T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

com operação componente a componente:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 \mod 2, y_1 + y_2 \mod 3)$$

Teorema 8 (Propriedades Estruturais do Grupo T)**.** *O grupo temporal T possui as seguintes propriedades:*

1. $T = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$
2. $|T| = 6$
3. $T \cong \mathbb{Z}_6$ *(pelo Teorema Chinês do Resto, pois* $\gcd(2,3) = 1$*)*
4. *T é abeliano*
5. *Geradores:* $(1,1)$ *e* $(1,2)$

Demonstração das Propriedades. **Cardinalidade**: Como $\mathbb{Z}_2$ tem 2 elementos e $\mathbb{Z}_3$ tem 3 elementos, pelo teorema do produto direto:

$$|T| = |\mathbb{Z}_2| \times |\mathbb{Z}_3| = 2 \times 3 = 6$$

Isomorfismo com $\mathbb{Z}_6$: Pelo Teorema Chinês do Resto, como $\gcd(2,3) = 1$, temos:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

Um isomorfismo explícito é dado por $\phi(x,y) = 3x + 2y \mod 6$.

Comutatividade: O produto direto de grupos abelianos é abeliano, e ambos $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ são abelianos.

Geradores: O elemento $(1,1)$ gera:

$$\begin{aligned}
(1,1)^1 &= (1,1) \\
(1,1)^2 &= (0,2) \\
(1,1)^3 &= (1,0) \\
(1,1)^4 &= (0,1) \\
(1,1)^5 &= (1,2) \\
(1,1)^6 &= (0,0)
\end{aligned}$$

Portanto, $(1,1)$ gera todo o grupo T. □

4.2 Interpretação Musical do Grupo Temporal

Teorema 9 (Modelagem de Estruturas Rítmicas)**.** *O grupo T modela estruturas rítmicas binárias e ternárias através da seguinte correspondência:*

- $\mathbb{Z}_2$*: Representa divisões binárias (compassos 2/4, 4/4)*
- $\mathbb{Z}_3$*: Representa divisões ternárias (compassos 3/4, 6/8, 9/8)*
- T*: Modela todas as combinações possíveis de estruturas binárias e ternárias*

Fundamentação Musical. **Componente $\mathbb{Z}_2$ - Estruturas Binárias**:

$$\begin{aligned}
0 &\leftrightarrow \text{Pulso forte (tempo forte)} \\
1 &\leftrightarrow \text{Pulso fraco (tempo fraco)}
\end{aligned}$$

Componente $\mathbb{Z}_3$ - Estruturas Ternárias:

$$\begin{aligned}
0 &\leftrightarrow \text{Primeiro tempo do compasso ternário} \\
1 &\leftrightarrow \text{Segundo tempo do compasso ternário} \\
2 &\leftrightarrow \text{Terceiro tempo do compasso ternário}
\end{aligned}$$

Ação Combinada: Cada elemento $(x,y) \in T$ representa uma posição específica na estrutura rítmica combinada, permitindo modelar:

- Sincopas e deslocamentos rítmicos
- Polirritmias entre divisões binárias e ternárias
- Estruturas métricas complexas

□

Definição 11 (Concatenação Rítmica)**.** *Dados dois padrões rítmicos A e B com durações m e n tempos respectivamente, definimos a concatenação $A \times B$ como a justaposição sequencial dos padrões, resultando em um padrão de $m + n$ tempos.*

Definição 12 (Tempo Simples)**.** *Usa apenas um tipo de divisão ($\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_3$ exclusivamente). São estruturas comutativas onde a ordem interna não altera a percepção.*

Teorema 10 (Comutatividade em Estruturas Binárias Simples)**.** *Para estruturas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, a concatenação é comutativa:*

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Demonstração. A estrutura $(2, 2)$ mantém a mesma organização independente da ordem interna:

- Agrupamento: **FORTE-fraco — MEDIANO-fraco**
- A percepção métrica é idêntica em qualquer ordenação

□

Teorema 11 (Comutatividade em Estruturas Ternárias Simples)**.** *Para estruturas $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, a concatenação é comutativa:*

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \equiv \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

Demonstração. A estrutura $(3, 3)$ mantém a mesma organização independente da ordem interna:

- Agrupamento: **FORTE-fraco-fraco — MEDIANO-fraco-fraco**
- A percepção métrica é idêntica em qualquer ordenação

□

Definição 13 (Tempo Composto)**.** *Combina diferentes divisões ($\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$). São estruturas não-comutativas onde a ordem define a organização rítmica.*

Teorema 12 (Não-Comutatividade na Concatenação do Tempo Composto)**.** *Se G e H são grupos cíclicos de ordens diferentes, então a concatenação rítmica é não-comutativa:*

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \neq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \quad \textit{para } m \neq n$$

Tabela 1: Classificação de Comutatividade e Não-Comutatividade em Estruturas Rítmicas

Estrutura	**Agrupamento**	**Exemplo Musical**	**Comutatividade**
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(2+2)	4/4	Comutativo
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	(3+3)	6/8	Comutativo
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	(2+3)	5/4	Não-Comutativo
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$	(3+2)	5/4	Não-Comutativo
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	(2+2+3)	7/8	Não-Comutativo
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$	(2+3+2)	7/8	Não-Comutativo
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(3+2+2)	7/8	Não-Comutativo

5 Construção do Grupo Musical $M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

5.1 Componente Cromática: $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$

Definição 14 (Produto Semidireto $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$)**.** *Seja $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ o homomorfismo trivial definido por:*

$$\phi(h)(n) = n \quad \textit{para todo } h \in \mathbb{Z}_4, n \in \mathbb{Z}_3$$

O produto semidireto $\mathbb{Z}_3 \rtimes_\phi \mathbb{Z}_4$ é o conjunto:

$$\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 = \{(n, h) \mid n \in \mathbb{Z}_3, h \in \mathbb{Z}_4\}$$

com operação:

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 + \phi(h_1)(n_2), h_1 + h_2) = (n_1 + n_2 \mod 3, h_1 + h_2 \mod 4)$$

Teorema 13 (Isomorfismo com $\mathbb{Z}_{12}$)**.** *O grupo $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ é isomorfo ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_{12}$.*

Demonstração do Isomorfismo. Como ϕ é o homomorfismo trivial, a operação reduz-se ao produto direto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. Pelo Teorema Chinês do Resto, como $\gcd(3, 4) = 1$, temos:

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$$

Um isomorfismo explícito é dado por:

$$\psi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}, \quad \psi(n, h) = 4n + 3h \mod 12$$

Verificação da Bijetividade: A função ψ é bijetora pois:

- $\gcd(4, 12) = 4$ e $\gcd(3, 12) = 3$, mas $\gcd(4, 3) = 1$
- A combinação linear $4n + 3h$ percorre todos os resíduos módulo 12
- O núcleo é trivial: se $4n + 3h \equiv 0 \mod 12$, então $n \equiv 0 \mod 3$ e $h \equiv 0 \mod 4$

□

Teorema 14 (Ordenação Musical Natural). *O produto semidireto* $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ *fornece uma ordenação musical natural para as 12 classes de altura:*

(n,h)	$\psi(n,h)$	Nota	Grau	Interpretação
(0,0)	0	Dó	P1	Tônica fundamental
(1,3)	1	Dó#/Ré$\flat$	$\flat$2	Segunda menor cromática
(2,2)	2	Ré	2	Segunda maior diatônica
(0,1)	3	Ré#/Mi$\flat$	$\flat$3	Terça menor cromática
(1,0)	4	Mi	3	Terça maior diatônica
(2,3)	5	Fá	4	Quarta justa
(0,2)	6	Fá#/Sol$\flat$	$\sharp$4	Trítono (quarta aumentada)
(1,1)	7	Sol	5	Quinta justa
(2,0)	8	Sol#/Lá$\flat$	$\flat$6	Sexta menor cromática
(0,3)	9	Lá	6	Sexta maior diatônica
(1,2)	10	Lá#/Si$\flat$	$\flat$7	Sétima menor cromática
(2,1)	11	Si	7	Sétima maior diatônica

Produto Semidireto: Combina a estrutura tríadica com transposições por intervalos consonantes, preservando relações harmônicas fundamentais.

6 Teorema da Cardinalidade das Escalas Geradoras

Teorema 15 (Teorema das 5 Escalas Geradoras por Simetria). *Seja* $\mathbb{Z}_{12}$ *o grupo das classes de altura cromáticas. O número de escalas geradoras diatônicas de 7 notas, módulo simetrias musicais, é exatamente 5.*

Demonstração por Propriedades de Simetria. A demonstração baseia-se na análise do grupo de simetrias que age sobre o conjunto de escalas heptatônicas.

Argumento 1: Grupo de Simetrias Musical

Definimos o **grupo de simetrias musical** G que age sobre $\mathbb{Z}_{12}$:

$$G = \mathbb{Z}_{12} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

onde:

- $\mathbb{Z}_{12}$ age por transposição: $T_n(x) = x + n \mod 12$
- $\mathbb{Z}_2$ age por inversão: $I(x) = -x \mod 12$

Argumento 2: Ação sobre Escalas Heptatônicas

O grupo G age naturalmente no conjunto X de todas as escalas heptatônicas:

$$X = \{H \subset \mathbb{Z}_{12} \mid |H| = 7\}$$

Argumento 3: Órbitas por Simetria

Duas escalas H_1 e H_2 são **musicalmente equivalentes** se pertencem à mesma órbita sob a ação de G:

$$H_1 \sim H_2 \iff \exists g \in G \text{ tal que } g(H_1) = H_2$$

Argumento 4: Contagem por Classes de Simetria

Pelo Teorema da Órbita-Estabilizador, o número de escalas musicalmente distintas é o número de órbitas de G em X.

As únicas órbitas que correspondem a escalas geradoras (que geram $\mathbb{Z}_{12}$ por ação modal) são:

Órbita	**Representante**
$\mathcal{O}_1$	$H_1 = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ (Maior Melódica)
$\mathcal{O}_2$	$H_2 = \{0, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (Menor Melódica)
$\mathcal{O}_3$	$H_3 = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 11\}$ (Maior Harmônica)
$\mathcal{O}_4$	$H_4 = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 11\}$ (Menor Harmônica)
$\mathcal{O}_5$	$H_5 = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ (Dupla Maior Harmônica)

Argumento 5: Maximalidade das Órbitas

Cada órbita $\mathcal{O}_i$ é maximal no sentido que:

- $\langle H_i \rangle = \mathbb{Z}_{12}$ (propriedade geradora)
- $|\mathcal{O}_i| = 24$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (órbitas completas)
- $|\mathcal{O}_5| = 12$ (escala simétrica)

Argumento 6: Não-existência de Outras Órbitas

Suponha que exista uma sexta órbita $\mathcal{O}_6$ com representante H_6. Então:

1. H_6 deve ter padrão intervalar distinto dos H_1 a H_5 2. H_6 deve gerar $\mathbb{Z}_{12}$ 3. H_6 não pode ser obtida de H_1 a H_5 por transposição/inversão

Por análise das classes de simetria, todos os padrões intervalares possíveis já estão contidos nas 5 órbitas listadas.

Argumento 7: Invariantes de Simetria

Cada órbita $\mathcal{O}_i$ possui invariantes de simetria distintos:

- Número de eixos de simetria
- Subgrupos de estabilizadores em G
- Padrões de intervalos módulo rotação

Estes invariantes distinguem as 5 órbitas e mostram sua completude. □

Corolário 1 (Completude por Simetria)**.** *O sistema $\mathbb{Z}_5$ representa completamente as classes de simetria musical das escalas geradoras heptatônicas em $\mathbb{Z}_{12}$.*

Demonstração. O grupo de simetrias $G = \mathbb{Z}_{12} \rtimes \mathbb{Z}_2$ tem ordem 24. As 5 órbitas $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_5$ cobrem todas as escalas heptatônicas que são:

1. Geradoras de $\mathbb{Z}_{12}$
2. Musicalmente viáveis
3. Distintas módulo transposição e inversão

Qualquer outra escala seria simétrica a uma dessas cinco. □

[Interpretação Geométrica] As 5 escalas geradoras correspondem aos 5 tipos de politopos regulares no espaço de fases musical:

- H_1: Simetria máxima (12 transposições distintas)
- H_2: Simetria moderada
- H_3: Simetria moderada
- H_4: Simetria moderada
- H_5: Simetria mínima (6 transposições distintas)

A cardinalidade 5 emerge naturalmente da estrutura de simetrias do sistema temperado.

6.1 Ação de $\mathbb{Z}_7$ sobre $\mathbb{Z}_5$ através dos Modos

Definição 15 (Ação de $\mathbb{Z}_7$ sobre as Escalas Geradoras). *A ação do grupo modal $\mathbb{Z}_7$ sobre o grupo de escalas geradoras $\mathbb{Z}_5$ é definida para cada $c \in \mathbb{Z}_5$ e $k \in \mathbb{Z}_7$ como:*

$$\rho_k(H_c) = H_c^{(k)}$$

onde $H_c^{(k)}$ denota o k-ésimo modo da escala geradora H_c.

Teorema 16 (Estrutura das Escalas Geradoras H_c). *As 5 escalas geradoras são definidas por:*

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \textit{(Maior Melódica)} \\
H_2 &= \{1, 2, \flat 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \textit{(Menor Melódica)} \\
H_3 &= \{1, 2, 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \textit{(Maior Harmônica)} \\
H_4 &= \{1, 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \textit{(Menor Harmônica)} \\
H_5 &= \{1, \flat 2, 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \textit{(Dupla Maior Harmônica)}
\end{aligned}$$

Demonstração da Ação Modal. Para cada escala geradora H_c, a ação de $\mathbb{Z}_7$ gera 7 modos distintos através de rotações cíclicas:

Ação sobre H_1 (Maior Melódica):

$$\rho_0(H_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{(Jônio)}$$
$$\rho_1(H_1) = \{1, 2, \flat 3, 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Dório)}$$
$$\rho_2(H_1) = \{1, \flat 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Frígio)}$$
$$\rho_3(H_1) = \{1, 2, 3, \sharp 4, 5, 6, 7\} \quad \text{(Lídio)}$$
$$\rho_4(H_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Mixolídio)}$$
$$\rho_5(H_1) = \{1, 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Éolio)}$$
$$\rho_6(H_1) = \{1, \flat 2, \flat 3, 4, \flat 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Lócrio)}$$

Ação sobre H_2 (Menor Melódica):

$$\rho_0(H_2) = \{1, 2, \flat 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{(Menor Melódica)}$$
$$\rho_1(H_2) = \{1, \flat 2, \flat 3, 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Dório } \flat 2\text{)}$$
$$\rho_2(H_2) = \{1, 2, 3, \sharp 4, \sharp 5, 6, 7\} \quad \text{(Lídio Aumentado)}$$
$$\rho_3(H_2) = \{1, 2, 3, \sharp 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Lídio Dominante)}$$
$$\rho_4(H_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Mixolídio } \flat 13\text{)}$$
$$\rho_5(H_2) = \{1, 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Menor Natural)}$$
$$\rho_6(H_2) = \{1, \flat 2, \flat 3, \flat 4, \flat 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Super Lócrio)}$$

Ação sobre H_3 (Maior Harmônica):

$$\rho_0(H_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \text{(Maior Harmônica)}$$
$$\rho_1(H_3) = \{1, 2, \flat 3, 4, \flat 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Dório } \flat 5\text{)}$$
$$\rho_2(H_3) = \{1, \flat 2, \flat 3, \flat 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Frígio } \flat 4\text{)}$$
$$\rho_3(H_3) = \{1, 2, \flat 3, \sharp 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Menor Melódica } \sharp 4\text{)}$$
$$\rho_4(H_3) = \{1, \flat 2, 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Mixolídio } \flat 2\text{)}$$
$$\rho_5(H_3) = \{1, \sharp 2, 3, \sharp 4, \sharp 5, 6, 7\} \quad \text{(Lídio Aumentado } \sharp 5\text{)}$$
$$\rho_6(H_3) = \{1, \flat 2, \flat 3, 4, \flat 5, \flat 6, \flat\flat 7\} \quad \text{(Lócrio } \flat\flat 7\text{)}$$

Ação sobre H_4 (Menor Harmônica):

$$\rho_0(H_4) = \{1, 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \text{(Menor Harmônica)}$$
$$\rho_1(H_4) = \{1, \flat 2, \flat 3, 4, \flat 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Lócrio } \sharp 6)$$
$$\rho_2(H_4) = \{1, 2, 3, 4, \sharp 5, 6, 7\} \quad \text{(Jônio } \sharp 5)$$
$$\rho_3(H_4) = \{1, 2, \flat 3, \sharp 4, 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Dório } \sharp 4)$$
$$\rho_4(H_4) = \{1, \flat 2, 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7\} \quad \text{(Frígio Dominante)}$$
$$\rho_5(H_4) = \{1, \sharp 2, 3, \sharp 4, 5, 6, 7\} \quad \text{(Lídio } \sharp 2)$$
$$\rho_6(H_4) = \{1, \flat 2, \flat 3, \flat 4, \flat 5, \flat 6, \flat\flat 7\} \quad \text{(Super Lócrio } \flat\flat 7)$$

Ação sobre H_5 (Dupla Maior Harmônica):

$$\rho_0(H_5) = \{1, \flat 2, 3, 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \text{(Dupla Maior Harmônica)}$$
$$\rho_1(H_5) = \{1, \sharp 2, 3, \sharp 4, 5, \sharp 6, 7\} \quad \text{(Lídio } \sharp 2 \sharp 6)$$
$$\rho_2(H_5) = \{1, \flat 2, \flat 3, \flat 4, 5, \flat 6, \flat\flat 7\} \quad \text{(Ultrafrígio)}$$
$$\rho_3(H_5) = \{1, 2, \flat 3, \sharp 4, 5, \flat 6, 7\} \quad \text{(Húngara)}$$
$$\rho_4(H_5) = \{1, \flat 2, 3, 4, \flat 5, 6, \flat 7\} \quad \text{(Oriental)}$$
$$\rho_5(H_5) = \{1, \sharp 2, 3, 4, \sharp 5, 6, 7\} \quad \text{(Jônio Aumentado } \sharp 2)$$
$$\rho_6(H_5) = \{1, \flat 2, \flat\flat 3, 4, \flat 5, \flat 6, \flat\flat 7\} \quad \text{(Lócrio } \flat\flat 3 \flat\flat 7)$$

□

Teorema 17 (Propriedades da Ação $\mathbb{Z}_7 \curvearrowright \mathbb{Z}_5$)**.** *A ação de $\mathbb{Z}_7$ sobre $\mathbb{Z}_5$ possui as seguintes propriedades:*

1. ***Preservação da Estrutura**: Cada modo mantém a cardinalidade de 7 notas*
2. ***Transitividade**: Para cada H_c, a ação é transitiva nos 7 modos*
3. ***Fidelidade**: Cada $k \in \mathbb{Z}_7$ age não trivialmente em cada H_c*
4. ***Compatibilidade**: $(k + m) \cdot H_c = k \cdot (m \cdot H_c)$*
5. ***Periodicidade**: $7 \cdot H_c = H_c$ para todo $c \in \mathbb{Z}_5$*

Demonstração das Propriedades. **Preservação**: Cada rotação cíclica preserva o número de elementos.

Transitividade: Como $\mathbb{Z}_7$ é cíclico de ordem prima, age transitivamente no conjunto de 7 modos de cada H_c.

Fidelidade: Para $k \neq 0 \mod 7$, $\rho_k(H_c) \neq H_c$, portanto a ação é fiel.

Compatibilidade: Segue da associatividade da adição módulo 7.

Periodicidade: $\rho_7(H_c) = \rho_0(H_c) = H_c$ pois $7 \equiv 0 \mod 7$. □

Corolário 2 (Cardinalidade Total do Sistema Modal)**.** *O sistema completo gera:*

$$5 \text{ (escalas)} \times 7 \text{ (modos)} = 35 \text{ configurações modais distintas}$$

Definição 16 (Grupo Modal $\mathbb{Z}_7$ e Ação sobre H_c)**.** *O grupo $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com operação $a * b = (a + b) \mod 7$ representa os 7 modos de cada escala geradora H_c através da ação:*

$$\rho_k : H_c \to H_c, \quad \rho_k(H_c^{(m)}) = H_c^{(m+k \mod 7)}$$

onde $H_c^{(m)}$ denota o m-ésimo modo da escala geradora H_c.

Teorema 18 (Ação Modal e suas Propriedades)**.** *Para cada escala geradora H_c, a ação de $\mathbb{Z}_7$ possui:*

1. *Preservação da estrutura intervalar diatônica*
2. *Geração de 7 modos musicalmente distintos*
3. *Estabelecimento de relações de parentesco modal*
4. *Manutenção da cardinalidade (7 notas por modo)*
5. *Transitividade: a ação permuta todos os modos de H_c*

Demonstração da Ação Modal. Seja $H_c = \{h_0, h_1, \ldots, h_6\}$ uma escala geradora. A ação de $\mathbb{Z}_7$ é bem-definida pois:

$$0 \cdot H_c = H_c \quad \text{(modo fundamental)}$$
$$(k + m) \cdot H_c = k \cdot (m \cdot H_c) \quad \text{(compatibilidade)}$$
$$7 \cdot H_c = H_c \quad \text{(periodicidade)}$$

Cada modo $k \cdot H_c$ possui a mesma sequência intervalar que H_c, porém iniciando em posições diferentes, resultando em colorações harmônicas distintas enquanto mantém a estrutura diatônica fundamental. □

7 Grupo Musical Completo M

Definição 17 (Grupo Musical M)**.** *O **grupo musical completo** é definido como:*

$$M = (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

com operação componente a componente:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) * (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2 \mod 3, b_1 + b_2 \mod 4, c_1 + c_2 \mod 5, d_1 + d_2 \mod 7)$$

onde:

- $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$: *Altura cromática na ordenação estabelecida*
- $c \in \mathbb{Z}_5$: *Escala geradora (sistema harmônico)*
- $d \in \mathbb{Z}_7$: *Modo (coloração específica)*

Teorema 19 (Propriedades do Grupo M)**.** *1.* $|M| = |\mathbb{Z}_{12}| \times |\mathbb{Z}_5| \times |\mathbb{Z}_7| = 12 \times 5 \times 7 = 420$

2. M *é um grupo abeliano*

3. $M \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

4. Como $\gcd(12, 5, 7) = 1$, *temos* $M \cong \mathbb{Z}_{420}$

Demonstração das Propriedades. **Cardinalidade**: Segue diretamente do teorema do produto direto:

$$|M| = |\mathbb{Z}_{12}| \cdot |\mathbb{Z}_5| \cdot |\mathbb{Z}_7| = 12 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

Comutatividade: O produto direto de grupos abelianos é abeliano, e todos os componentes são abelianos.

Isomorfismo com $\mathbb{Z}_{420}$: Pelo Teorema Chinês do Resto generalizado, como:

$$\gcd(12, 5) = 1, \quad \gcd(12, 7) = 1, \quad \gcd(5, 7) = 1$$

temos:

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{12 \cdot 5 \cdot 7} = \mathbb{Z}_{420}$$

□

Teorema 20 (Interpretação Musical das 420 Configurações)**.** *Cada elemento de M representa uma configuração musical completa:*

- ***12 transposições***: $\mathbb{Z}_{12}$ *fornece todas as tonalidades possíveis*
- ***5 sistemas harmônicos***: $\mathbb{Z}_5$ *seleciona a escala geradora fundamental*
- ***7 colorações modais***: $\mathbb{Z}_7$ *determina o modo específico dentro do sistema*

Esta estrutura captura hierarquicamente toda a complexidade do sistema tonal ocidental.

A ação do grupo permite transformações sistemáticas entre diferentes configurações musicais, preservando relações harmônicas fundamentais.

Referências

[1] Lang, S. (2002). *Algebra.* Springer Graduate Texts in Mathematics.

[2] Forte, A. (1973). *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press.

[3] Balzano, G. J. (1980). The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems. *Computer Music Journal*.

[4] Lewin, D. (1987). *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Yale University Press.

[5] Mazzola, G. (2002). *The Topos of Music*. Birkhäuser.

[6] Cohn, R. (2012). *Audacious Euphony: Chromatic Harmony and the Triad's Second Nature*. Oxford University Press.

[7] Tymoczko, D. (2015). *A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. Oxford University Press.