Mestrado Profissional em Avaliação e
Monitoramento de Políticas Públicas

Métodos Quantitativos I

Aula 2: Descrevendo Variáveis

Professores: Daniel Grimaldi e Arthur Bragança

3º Trimestre - 2025

Conceitos básicos

Variável

- No contexto de pesquisa empírica, **uma variável é um conjunto de realizações (ou observações) de um mesmo fenômeno**.
  - renda mensal dos brasileiros;
  - idade dos moradores do plano piloto;
  - emprego dos alunos da ENAP
- As variáveis podem representar fenômenos quantitativos ou qualitativos...
- Elas sempre possuem uma distribuição
  - Uma distribuição é uma descrição da frequência com que determinada variável assume um valor (ou conjunto de valores) específicos

Definição formal

Denominamos de variável aleatória (V.A.) qualquer função $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Ou seja, é **uma função do espaço amostral Ω nos reais para a qual é possível calcular a probabilidade de ocorrência**.

Sendo X uma V.A., sua **função de distribuição** é definida por:

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x))$$

Sempre vale que: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ e $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

Tipos de variáveis

- Formalmente, a **diferenciação relevante é entre variáveis aleatórias discretas e contínuas**
  - **discreta:** assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito)
  - **contínua:** podem assumir um número não enumerável de valores
- Mas existem outras categorizações comuns: ordinais vs. categóricas; quantitativa vs. qualitativa

Variáveis Discretas

Uma V.A. X **é discreta** se há uma associação entre probabilidades $p_1, p_2, ..., p_k$ e um conjunto de valores possíveis $x_1, x_2, ..., x_k$ **mediada por um função de probabilidade** $p(x)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $0 \geq p(x_i) \leq 1, \ \forall \ i = 1, 2, 3, ..., k$;

ii. $\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$

Exemplos: resultados de um dado, número de carros na garagem da ENAP, número de eleitores que aprova o presidente da república etc.

Notas: [1] Quando uma V.A. discreta assume muitos valores possíveis, ela começa a se parecer muito com uma V.A. contínua - mas isso não significa que ela se torna contínua.

Variáveis Contínuas

Uma V.A. X **é contínua** se há uma associação entre probabilidades $p1, p2, ..., p_k$ e um conjunto de valores possíveis $x1, x2, ..., x_k$ **mediada por uma função de densidade** $f(x)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$;
ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_x = 1$

Exemplos: salário, renda *per capita*, preço do dólar etc.

Notas: [1] Quando a variável é contínua, não é possível associar uma probabilidade positiva a um valor particular, mas pode-se atribuir uma probabilidade para um intervalo arbitrariamente pequeno de valores. [2] Na prática, uma varíavel contínua pode assumir valores em toda a reta real, enquanto uma varíavel discreta somente pode assumir um conjunto enumerável de valores

Principais distribuições teóricas

Uniforme Discreta

Uma V.A. segue um modelo **Uniforme discreto** com valores $x1, x2, ..., x_k$ se tem uma **função de probabilidade** $p(x)$ dada por:

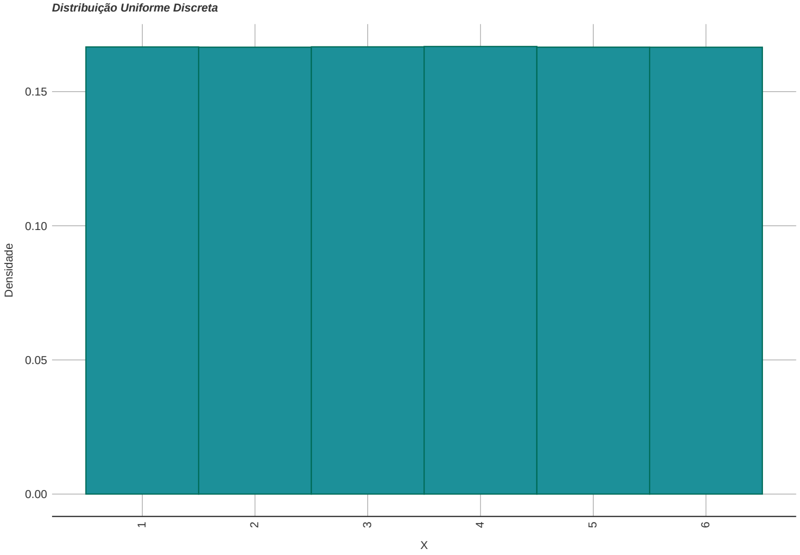
$$p(x_i) = \frac{1}{k} \; \forall i = 1, 2, 3, ..., k$$

Exemplo: o valor observado para 1 lançamento de um dado não viesado.

Notas: [1] Na prática, o modelo uniforme atribui uma mesma probabilidade de ocorrência para cada valor possível. [2] Nesse caso dizemos que $X \sim U_d[E]$ sendo $E = \{1, \ldots, 6\}$

Distribuição Uniforme Discreta

```r
data <- data.frame(X = rdunif(10000000, 1, 6))
fig <- ggplot(data) +
  geom_histogram(aes(X, y=..density..),
                 color=cores$verde_escuro,
                 fill=cores$verde_claro, bins=6) +
  scale_x_continuous(breaks=seq(1, 6)) +
  labs(subtitle="Distribuição Uniforme Discreta",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```



Distribuição Uniforme Discreta
Densidade
0.15
0.10
0.05
0.00
1
2
3
4
5
6
X

Bernoulli

Uma V.A. segue um modelo **Bernoulli** se assume apenas os valores 0 e 1. Sua **função de probabilidade** $p(x)$ é dada por:

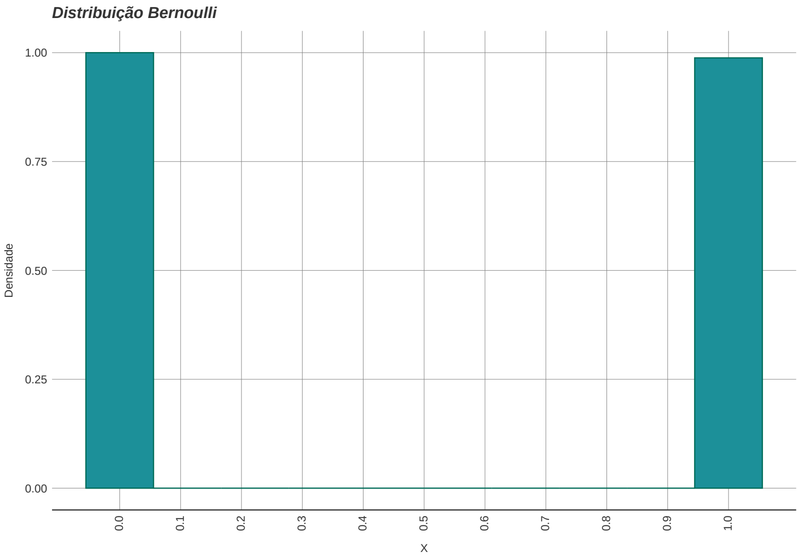
$$p(x_i) = \begin{cases} p & \text{se } x_i = 1 \\ 1 - p & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Exemplo: o resultado do lançamento de uma moeda.

Notas: [1] Nesse caso, dizemos que $X \sim Bernoulli(p)$.

Distribuição Bernoulli

```
data <- data.frame(X = rbern(10000, 0.5))
fig <- ggplot(data) +
  geom_histogram(aes(X, y=..ndensity..),
                 color=cores$verde_escuro,
                 fill=cores$verde_claro,
                 bins=10) +
  scale_x_continuous(breaks=seq(0, 1, by=0.1)) +
  labs(title="Distribuição Bernoulli",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```


Distribuição Bernoulli
Densidade
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
X

Binomial

Uma V.A. segue um modelo **Binomial** se ela representa a quantidade total de sucessos obtidos por meio da realização de n ensaios de Bernoulli. Sua **função de probabilidade** $p(x)$ é dada por:

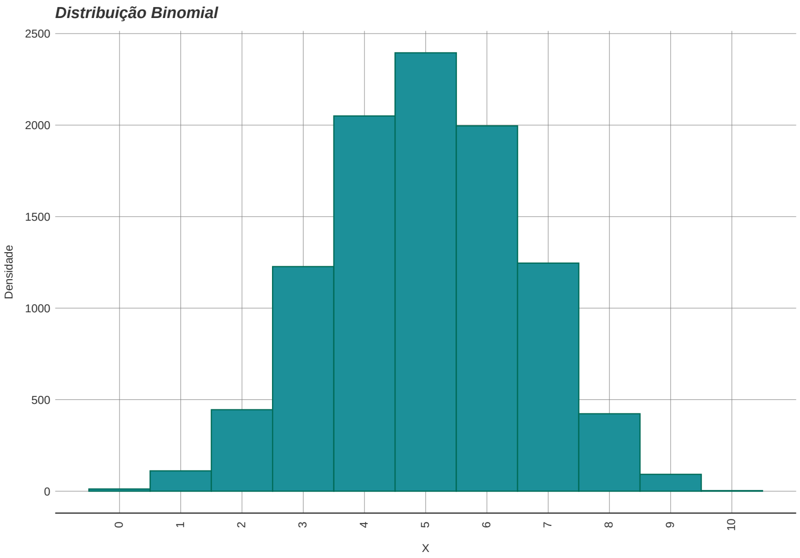
$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Exemplo: A quantidade de "caras" após 10 lançamentos de uma moeda.

Notas: [1] Nesse caso, dizemos que $X \sim B(n, p)$.

Distribuição Binomial

```r
data <- data.frame(X = rbinom(10000, 10, 0.5))
fig <- ggplot(data) +
  geom_histogram(aes(X),
                 color=cores$verde_escuro,
                 fill=cores$verde_claro,
                 bins=11) +
  scale_x_continuous(breaks=seq(0, 10, by=1)) +
  labs(title="Distribuição Binomial",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```


Distribuição Binomial
2500
2000
1500
1000
500
0
Densidade
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
X

Exponencial

Uma V.A. X segue um modelo **Exponencial** se sua **função densidade** $f(x)$ é dada por:

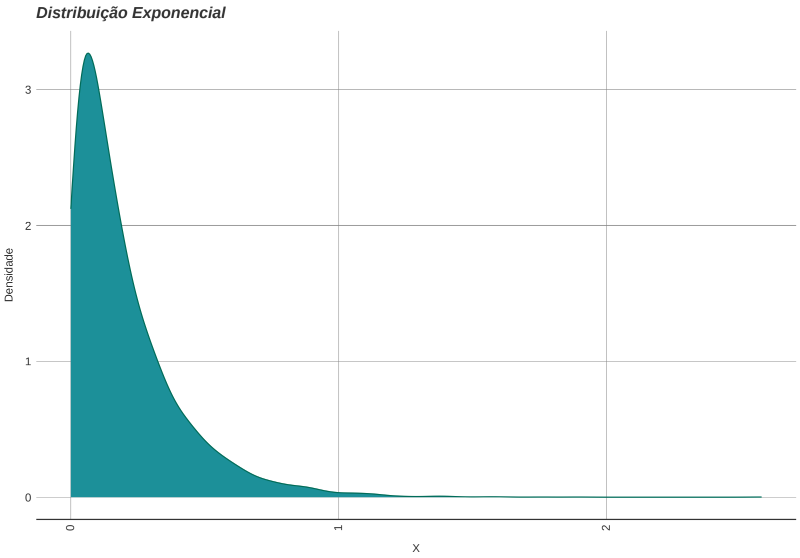
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}$$

Exemplo: A quantidade de ligações que um serviço de atendimento ao consumidor recebe em 1 hora.

Notas: [1] Nesse caso, dizemos que $X \sim Exp(\lambda)$.

Distribuição Exponencial

```r
data <- data.frame(X = rexp(10000, 5))
fig <- ggplot(data) +
  geom_density(aes(X),
               color=cores$verde_escuro,
               fill=cores$verde_claro,
               adjust=2) +
  labs(title="Distribuição Exponencial",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```



Distribuição Exponencial
Densidade
3
2
1
0
0
1
2
X

Normal

Uma V.A. X segue um modelo **Normal** se sua **função densidade** $f(x)$ é dada por:

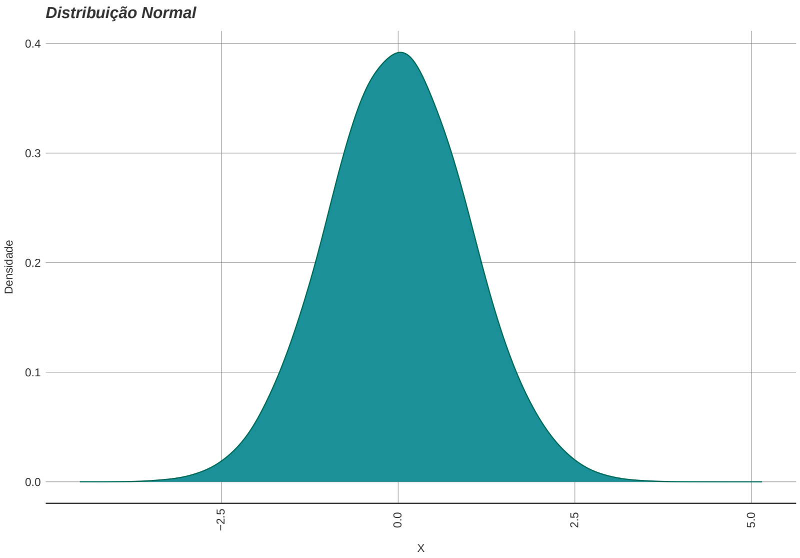
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemplo: Número de beneficiários do PBF em um município.

Notas: ^{1} Nesse caso, dizemos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. ^{2} Sempre que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. ^{3} Quando $log(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, dizemos que X tem distribuição log-normal. ^{4} A distribuição Normal é imensa em estatísitica. Ela serve como modelo para quantidades de interesse em Inferência Estatística e também é usada em aproximações.

Distribuição Normal

```
data <- data.frame(X = rnorm(100000, 0, 1))
fig <- ggplot(data) +
  geom_density(aes(X),
               color=cores$verde_escuro,
               fill=cores$verde_claro,
               adjust=2) +
  labs(title="Distribuição Normal",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```


Distribuição Normal
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Densidade
−2.5
0.0
2.5
5.0
X

Valor Esperado e Variância

Definição de Parâmetro

Formalmente, um **parâmetro é uma constante que caracteriza uma família de distribuições** e, a partir disso, caracteriza uma população que tenha um Processo Gerador de Dados (PGD) orientado por essa distribuição.

- Uma Normal, por exemplo, é caracterizada por ter valor esperado (ou esperança) μ e variância σ^2.
- Portanto, qualquer realização de um PGD que siga uma $N(\mu, \sigma^2)$ terá a influência desses parâmetros.
- Diversos parâmetros podem ser relevantes para caracterizarmos uma distribuição, mas a **esperança e a variância são os mais comumente utilizados**.

Valor Esperado

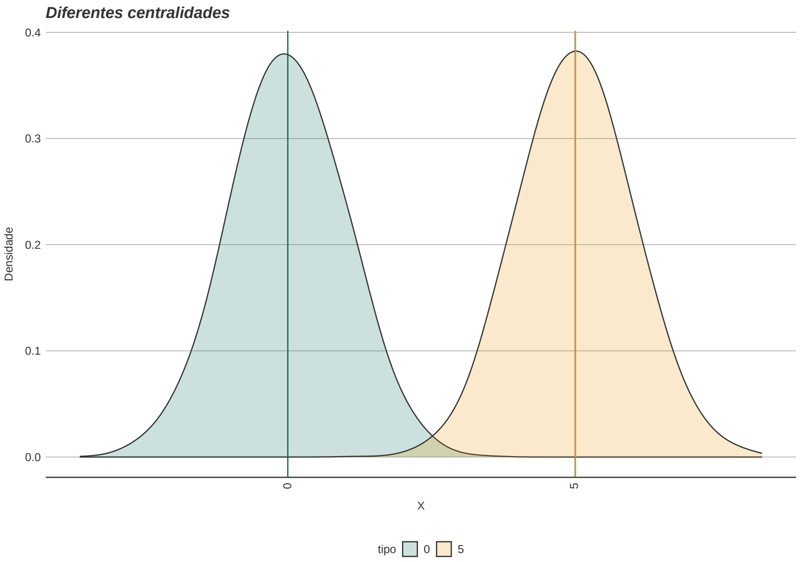
Intuitivamente, o valor esperado (ou esperança) de uma variável X ($E(X)$) **equivale à soma de todos os valores possíveis de X, ponderados pelas suas respectivas probabilidades**.
Formalmente:

$$E(X) \equiv \mu_x = \begin{cases} \sum_i x_i p_X(x_i), \text{ se X tem distribuição discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d_x = 1, \text{ se X tem distribuição contínua} \end{cases}$$

O valor esperado equivale ao momento de ordem 1 de uma V.A. e ele pode ser interpretado como uma medida de centralidade da distribuição.

Centralidade

```r
N <- 5000
data_0 <- data.frame(tipo="0",
                     X=rnorm(N))
data_5 <- data.frame(tipo="5",
                     X=rnorm(N, 5))
data <- rbind(data_0, data_5)
fig <- ggplot(data) +
  geom_density(aes(X, fill=tipo),
               color=cores$cinza_escuro,
               alpha=0.2, adjust=2) +
  scale_fill_manual(values=c(cores$verde_escuro,
                             cores$amarelo_escuro)) +
  geom_vline(xintercept = mean(data_5$X),
             color=cores$amarelo_escuro) +
  geom_vline(xintercept = mean(data_0$X),
             color=cores$verde_escuro) +
  labs(title="Diferentes centralidades",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```


Diferentes centralidades
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Densidade
0
5
X
tipo
0
5

Propriedades do Valor Esperado

Sendo a e b constantes e X e Y duas V.As. quaisquer, vale que:

i. $E(a) = a$;
ii. $E(aX) = aE(X)$;
iii. $E(X + b) = E(X) + b$;
iv. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; e
v. !Se X e Y são independentes
$\Rightarrow E(XY) = E(X) + E(Y)$

Variância

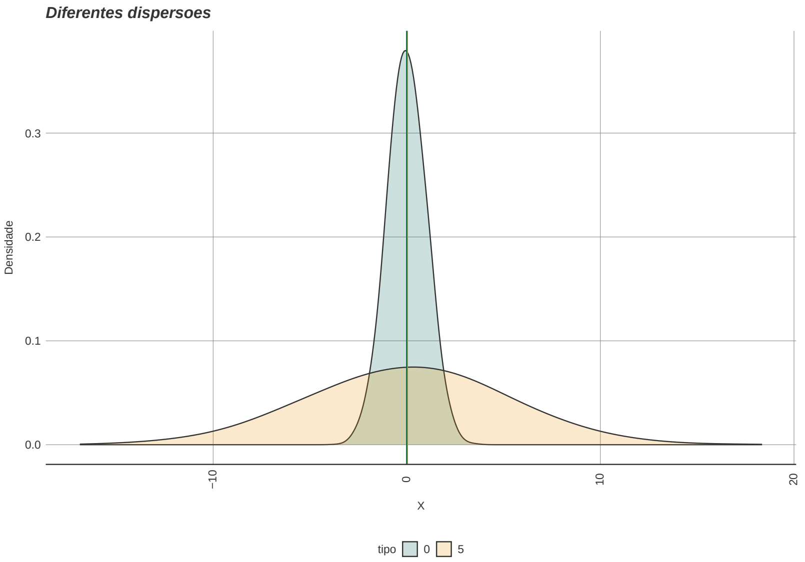
Intuitivamente, a variância é uma medida de quão distante, na média, uma realização específica de uma variável tende a estar do centro da distribuição. Formalmente:

$$Var(X) \equiv \sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2]$$

A variância equivale ao momento de ordem 2 de uma V.A. e ela pode ser interpretada como uma medida de dispersão da distribuição. O desvio-padrão (σ) é a raiz quadrada da variância e tem a mesma unidade de medida da variância.

Dispersão

```
N <- 5000
data_1 <- data.frame(tipo="0",
                     X=rnorm(N, sd=1))
data_5 <- data.frame(tipo="5",
                     X=rnorm(N, sd=5))
data <- rbind(data_0, data_5)
fig <- ggplot(data) +
  geom_density(aes(X, fill=tipo),
               color=cores$cinza_escuro,
               alpha=0.2, adjust=2) +
  scale_fill_manual(values=c(cores$verde_escuro,
                             cores$amarelo_escuro)) +
  geom_vline(xintercept = mean(data_5$X),
             color=cores$amarelo_escuro) +
  geom_vline(xintercept = mean(data_0$X),
             color=cores$verde_escuro) +
  labs(title="Diferentes dispersoes",
       y="Densidade") +
  tema_base_fundobranco()
```


Diferentes dispersoes
Densidade
0.3
0.2
0.1
0.0
−10
0
10
20
X
tipo
0
5

Propriedades da Variância

Sendo a e b constantes e X e Y duas V.As. quaisquer, vale que:

i. $Var(X) \geq 0$;
ii. $Var(a) = 0$;
iii. $Var(aX) = a^2 Var(X)$;
iv. $Var(X + b) = Var(x)$; e
v. Se X e Y são independentes $\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Parâmetro e estimador

População e Amostra

- **População:** grupo completo (exaustivo) de indivíduos que se deseja estudar
- **Amostra:** um subconjunto da população
  - usamos a amostra porque raramente podemos estudar toda a população de interesse;
  - existem diferentes processos de amostragem;
  - a amostra pode ou não ser representativa da população

Estimadores

Um **estimador é uma função que associa a uma amostra um número (estimativa)**, com o objetivo de determinar o valor de um **parâmetro populacional**.

- Como a amostra é um conjunto de realizações de V.A., **todo estimador é também uma V.A.**. Logo, ele tem medidas de centralidade e dispersão
- Usamos $\widehat{\ }$ como notação para um estimador. Por exemplo, $\widehat{\mu_x}$ é um estimador de μ_x
- Existem diferentes famílias de estimadores (máxima verossimilhança, método de momentos etc.). Não vamos nos aprofundar nisso, mas saibam que: **todo parâmetro de interesse pode ter múltiplos estimadores**

Lei dos Grandes Números

Sejam $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ V.As. com esperança finita e $y_1, y_2,.., y_N um conjunto de realizações dessas V.As.. Então, pela Lei dos Grandes Números (LGN), vale que:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \mu_y \xrightarrow{p} 0$$

Intuitivamente: a média amostral ($\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$) converge para a média populacional (μ_y) conforme aumenta o tamanho da amostra.

Teorema do Limite Central

Sejam $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ V.As. iid. com esperança μ e variância σ^2, e $y_1, y_2, .., y_N$ um conjunto de realizações dessas V.As.. Então, pel Teorema do Limite Central (TLC), vale que:

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \mu_y}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Intuitivamente: a distribuição da média amostral converge para uma distribuição normal conforme aumenta o tamanho da amostra.

Hands on

Caso Desenrola

- Suponha que o governo queira desenvolver um programa para reduzir o endividamento da população.
- Para tanto, ele pretende criar um fundo público, que será usado para pagar 50% do valor das dívida de pessoas físicas, desde que o endividado aceite pagar pelos 50% restante.
- O governo precisa definir o montante total a ser aportado nesse fundo. Contudo, o governo não sabe exatamente o número de endividados nem o valor médio da dívida deles.
- Como podemos ter uma ideia do tamanho amostral necessário para uma boa estimativa?

Simulando um PGD

- Primeiro, vamos definir nossa tolerância para uma *boa estimativa*
  - Suponhamos que um erro de $\pm\, 2\%$ no valor de aporte do fundo
- Agora vamos definir alguns parâmetros para o nosso PGD
  - Suponhamos uma população de 200 milhões
  - Suponhamos que a proporção de endividados na população seja de 15%
  - Suponhamos que, dentre os endividados, o valor esperado da dívida - $E(D)$ - é igual BRL 130 $+\epsilon$ e $\epsilon \sim EXP(\lambda)$ e que $\lambda = 5 * 10^{-5}$.

Amostra: 100 mil

Simulação

```
set.seed(seed)
sample_n=100000
data <- data.frame("id"=paste("cpf",
                              1:sample_n,
                              sep="_")) %>%
  mutate(endividado = rbinom(sample_n, 1, 0.15),
         divida = endividado * (130+rexp(sample_n, 5*10^(-5
head(data, 3)
```

```
##      id endividado   divida
## 1 cpf_1          0     0.00
## 2 cpf_2          0     0.00
## 3 cpf_3          1 10939.57
```

Endividamento médio

```r
# Endividamente populacional
mu <- 130 + 1/(5*10^(-5))
mu
```

```
## [1] 20130
```

```r
# Endividamento médio amostral
mu_hat <- sum(data$divida)/sum(data$endividado)
mu_hat
```

```
## [1] 20169.45
```

```r
# Erro percentual no endividamento médio
(mu_hat - mu)*100 / mu
```

```
## [1] 0.1959679
```

Proporção de endividados

```
endiv_d <- 0.15
endiv_d_hat <- sum(data$endividado)/nrow(data)
# Proporção de endividados
endiv_d_hat
```

```
## [1] 0.14926
```

```
# Erro percentual na proporção de endividados
(endiv_d_hat - endiv_d)*100 / endiv_d
```

```
## [1] -0.4933333
```

Aporte no fundo

```
aporte <- 200000000 * endiv_d * mu
# Valor necessário do aporte (em milhões)
aporte/1000000
```

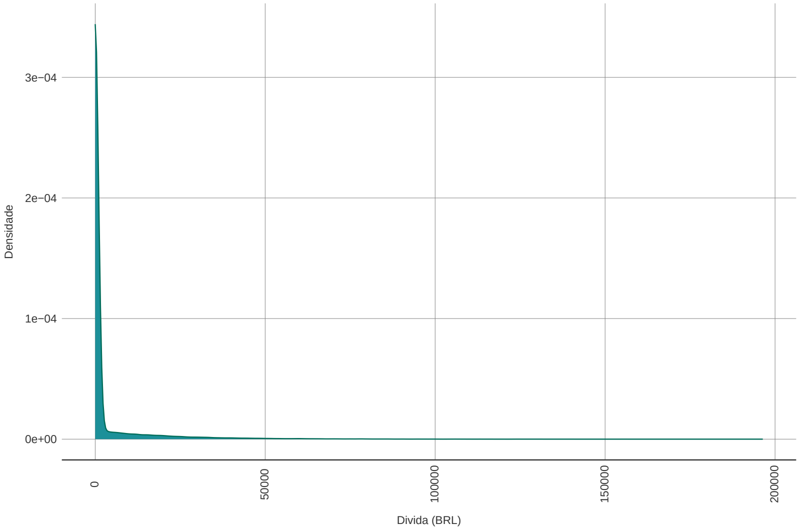
```
## [1] 603900
```

```
aporte_hat <- 200000000 * endiv_d_hat * mu_hat
# Valor estimado do aporte (em milhões)
aporte_hat/1000000
```

```
## [1] 602098.4
```

```
# Erro percentual no aporte
(aporte_hat - aporte)*100 / aporte
```

```
## [1] -0.2983322
```



Amostra: 100 mil

Amostra: 20

Simulação

```
set.seed(seed)
sample_n=20
data <- data.frame("id"=paste("cpf",
                              1:sample_n,
                              sep="_")) %>%
  mutate(endividado = rbinom(sample_n, 1, 0.15),
         divida = endividado * (130+rexp(sample_n, 5*10^(-5
head(data, 3)
```

```
##       id endividado   divida
## 1 cpf_1          0    0.000
## 2 cpf_2          0    0.000
## 3 cpf_3          1 4837.632
```

Endividamento médio

```r
# Endividamente populacional
mu <- 130 + 1/(5*10^(-5))
mu
```

```
## [1] 20130
```

```r
# Endividamento médio amostral
mu_hat <- sum(data$divida)/sum(data$endividado)
mu_hat
```

```
## [1] 15428.75
```

```r
# Erro percentual no endividamento médio
(mu_hat - mu)*100 / mu
```

```
## [1] -23.35444
```

Proporção de endividados

```r
endiv_d <- 0.15
endiv_d_hat <- sum(data$endividado)/nrow(data)
# Proporção de endividados
endiv_d_hat
```

```
## [1] 0.35
```

```r
# Erro percentual na proporção de endividados
(endiv_d_hat - endiv_d)*100 / endiv_d
```

```
## [1] 133.3333
```

Aporte no fundo

```
aporte <- 200000000 * 0.5 * endiv_d * mu
# Valor necessário do aporte (em milhões)
aporte/1000000
```

```
## [1] 301950
```

```
aporte_hat <- 200000000 * 0.5 * endiv_d_hat * mu_hat
# Valor estimado do aporte (em milhões)
aporte_hat/1000000
```

```
## [1] 540006.3
```

```
# Erro percentual no aporte
(aporte_hat - aporte)*100 / aporte
```

```
## [1] 78.83964
```

Convergência pela LGN

Criação de amostra, para um dado N

```r
gen_data <- function(sample_size){
  data <- data.frame("id"=paste("cpf",
                                1:sample_size,
                                sep="_")) %>%
  mutate(N=sample_size,
         endividado = rbinom(sample_size, 1, 0.15),
         divida = endividado * (130+rexp(sample_size, 5*10
  data
  }
```

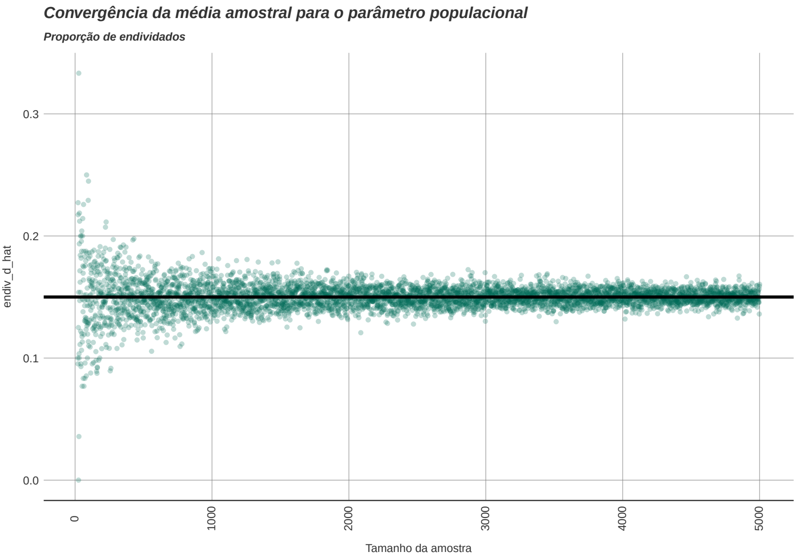
Cálculo de estimativa

```r
get_estimativa <- function(data){

  N = first(data$N)
  mu_hat = sum(data$divida)/sum(data$endividado)
  endiv_d_hat <- sum(data$endividado)/nrow(data)
  aporte_hat <- 200 * 0.5 * endiv_d_hat * mu_hat

  estimativa <- data.frame(
    "N"=N,
    "mu_hat"=mu_hat,
    "endiv_d_hat"=endiv_d_hat,
    "aporte_hat"=aporte_hat
  )
  estimativa
}
```

Conjunto de estimativas

```
get_estimativas <- function(sample_size){
  estimativa <- get_estimativa(gen_data(sample_size))
}
estimativas <- lapply(20:5000, get_estimativas) %>%
  rbindlist()
head(estimativas, 4)
```

```
##          N    mu_hat endiv_d_hat aporte_hat
##      <int>     <num>       <num>      <num>
## 1:      20  8475.952   0.1000000   84759.52
## 2:      21  6801.356   0.0952381   64774.82
## 3:      22  8677.519   0.2272727  197216.35
## 4:      23 21304.127   0.2173913  463133.19
```



Convergência da média amostral para o parâmetro populacional
Proporção de endividados
0.3
0.2
0.1
0.0
endiv_d_hat
0
1000
2000
3000
4000
5000
Tamanho da amostra

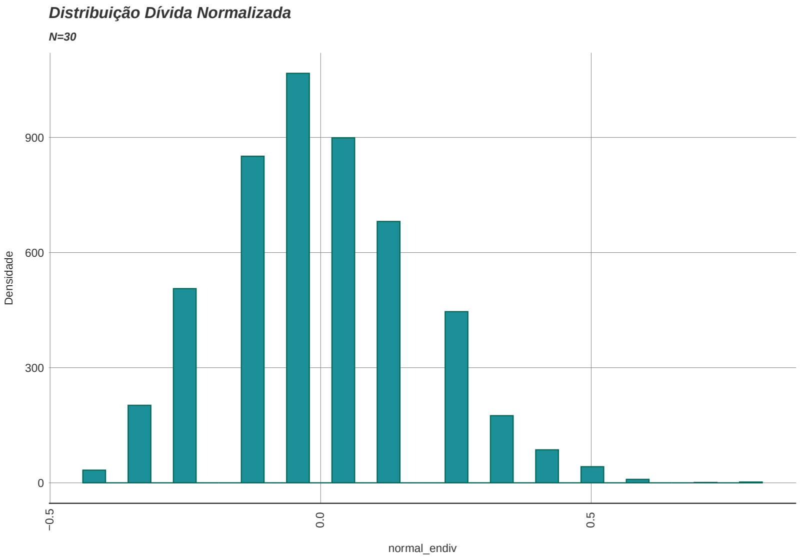
Convergência pelo TLC

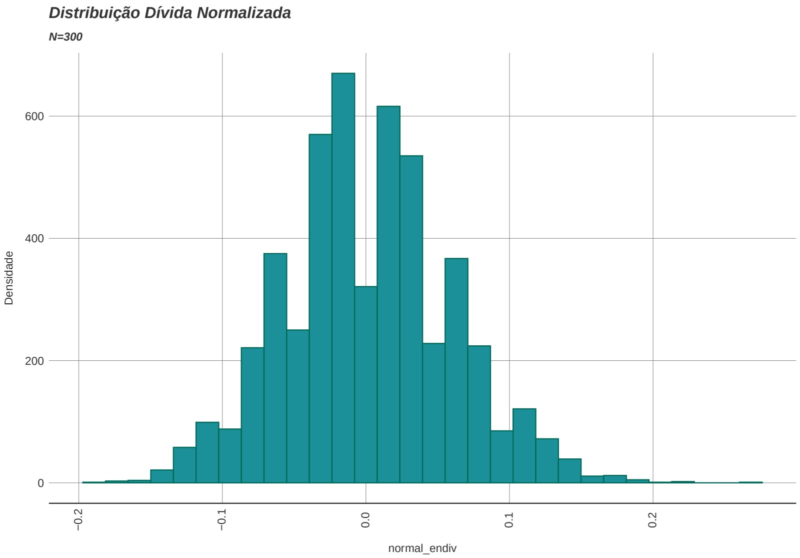
Ajustando a função do PGD

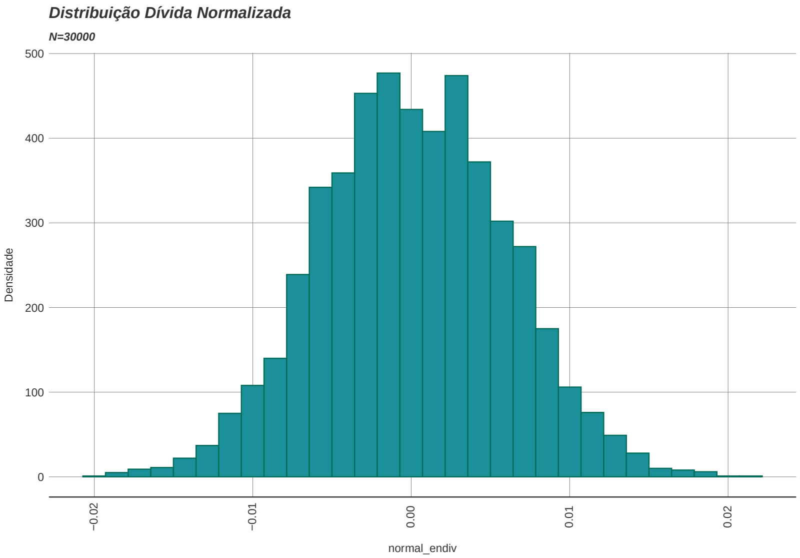
```
gen_data <- function(i, sample_size){
  data <- data.frame("id"=paste("cpf",
                                1:sample_size,
                                sep="_")) %>%
  mutate(i=i,
         N=sample_size,
         endividado = rbinom(sample_size, 1, 0.15),
         divida = endividado * (130+rexp(sample_size, 5*10
  data
  }
```

Função para anaálise de frequência

```
gen_normal_endiv <- function(sample_size, n_samples=5000){
  # parametros teóricos
  mu <- 0.15
  sigma_endiv <- sqrt(sample_size * 0.15 * (1-0.15))

  data <- lapply(1:n_samples, gen_data, sample_size=sample_size) %>%
    rbindlist() %>%
    mutate(normal_endiv =
             sqrt(sample_size)*((endividado - 0.15)/(sigma_endiv))) %>%
    group_by(i) %>%
    summarise(normal_endiv = mean(normal_endiv))

  fig <- ggplot(data) +
    geom_histogram(aes(normal_endiv),
                   color=cores$verde_escuro,
                   fill=cores$verde_claro) +
      labs(title="Distribuição Dívida Normalizada",
       subtitle=paste0("N=",sample_size),
       y="Densidade") +
    tema_base_fundobranco()

  plot(fig)
}
```


Distribuição Dívida Normalizada
N=30
Densidade
900
600
300
0
−0.5
0.0
0.5
normal_endiv


Distribuição Dívida Normalizada
N=300
Densidade
600
400
200
0
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
normal_endiv


Distribuição Dívida Normalizada
N=30000
Densidade
500
400
300
200
100
0
−0.02
−0.01
0.00
0.01
0.02
normal_endiv