Métodos Quantitativos I
Aula 6: Mínimos Quadrados Ordinários

Profs. Arthur Bragança e Daniel Grimaldi

MPAM-ENAP

6 de agosto de 2025

Introdução

- Na aula passada estudamos os modelo de regressão bivariado e multivariado.

- Nessa aula:
  - Estudaremos as propriedades dos estimadores de MQO.
  - Estudaremos como testar hipóteses sobre os parâmetros de MQO.
  - Discutiremos o que ocorre quando variância do termo de erro não é constante.
  - Estudaremos as propriedades dos estimadores de MQO em amostras grandes.
  - Discutiremos o que ocorre quando há correlação entre regressores e termo de erro.

Propriedades (1)

- **Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)**: estimadores com propriedades desejáveis.

- O que são propriedades desejáveis?
    1. **Não viesado**: expectativa do estimador do parâmetro é igual ao parâmetro verdadeiro
    2. **Eficiente**: variância do estimador é a menor possível

- Para ver essas propriedades iremos listar um conjunto de hipóteses.

- Depois derivaremos a média e a variância do estimador.

Propriedades

- **Hipóteses**:
  1. **Modelo populacional:** o modelo populacional é
  $$y = X\beta;$$
  2. **Amostragem aleatória:** $\{(y_i, x_{i1}, \ldots, x_{ik}) : i = 1, ...n\}$ é uma amostra independente e identicamente distribuída;
  3. **Independência condicional**: $E[u|X] = 0$;
  4. **Variação em X:** $X = [X_1', \cdots X_n']'$ é matriz $n \times k$ com posto cheio;
  5. **Homocedasticidade:** a variância o termo de erro é constante:
  $$V[u|X] = E[uu'|X] = \sigma^2 I$$

- As hipóteses acima muitas vezes são chamadas de hipóteses de Gauss-Markov.
  - Muitas vezes é adicionada a hipótese que $u|X \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Média de $\widehat{\beta}$

- A média do estimador de MQO condicional a X é

$$\begin{aligned} E[\widehat{\beta}|X] &= E\left[(X'X)^{-1}X'y|X\right] \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)|X\right] \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E[u|X] \\ &= \beta \end{aligned}$$

- Lembre que $E[\widehat{\beta}] = E\left[E[\widehat{\beta}|X]\right]$.

- Isso significa $E[\widehat{\beta}] = E\left[E[\widehat{\beta}|X]\right] = E[\beta] = \beta$.

- Logo, $\widehat{\beta}$ é um estimador não viesado de β.

Média de $\widehat{\beta}$ (bivariado)

- A média do estimador de MQO condicional a x_i é

$$
\begin{aligned}
E[\widehat{\beta}|x_i] &= E\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum(x_i-\overline{x})^2}|x_i\right] \\
&= E\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})y_i}{\sum(x_i-\overline{x})^2}|x_i\right] - E\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}|x_i\right] \\
&= E\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})(\alpha+\beta x_i+u_i)}{\sum(x_i-\overline{x})^2}|x_i\right] \\
&= \beta + E\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})u_i}{\sum(x_i-\overline{x})^2}|x_i\right] \\
&= \beta + \left[\frac{\sum(x_i-\overline{x})}{\sum(x_i-\overline{x})^2}\right] E\left[u_i|x_i\right] = \beta
\end{aligned}
$$

- Isso significa $E[\widehat{\beta}] = E\left[E[\widehat{\beta}|x_i]\right] = E[\beta] = \beta$.

Variância de $\widehat{\beta}$

- A variância de $\widehat{\beta}$ condicional a X é:

$$V[\widehat{\beta}|X] = E\left[(\widehat{\beta}-\beta)(\widehat{\beta}-\beta)'|X\right]$$

- Note que:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'u \\
&\implies \widehat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u
\end{aligned}$$

- Portanto:

$$\begin{aligned}
V[\widehat{\beta}|X] &= E\left[((X'X)^{-1}X'u)((X'X)^{-1}X'u)'|X\right] \\
&= E\left[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}|X\right] \\
&= (X'X)^{-1}X'E[uu'|X]X(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

Variância de $\widehat{\beta}$

- A lei da variância total diz:

$$V[\widehat{\beta}] = E\left[V[\widehat{\beta}|X]\right] + V\left[E[\widehat{\beta}|X]\right]$$

- Temos:

$$V\left[E[\widehat{\beta}|X]\right] = V[\beta] = 0$$

- Logo,

$$V[\widehat{\beta}] = E\left[V[\widehat{\beta}|X]\right] = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

- Variância do estimador de MQO depende da variância do termo de erro ("variância residual de y") e da variância dos regressores.

Variância de $\widehat{\beta}$ (bivariado)

- A variância de $\widehat{\beta}$ condicional a x_i é:

$$V[\widehat{\beta}|x_i] = E\left[(\widehat{\beta} - \beta)^2 | x_i\right]$$

- Note que:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$$

$$\implies \widehat{\beta} - \beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \sum_{i=1}^n w_i u_i$$

- Portanto:

$$V[\widehat{\beta}|x_i] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i u_i\right)^2 |x_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 u_i^2\right) |x_i\right]$$

$$= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$$

Teorema de Gauss-Markov

- Se as hipóteses 1-5 são válidas, o estimador de MQO é o melhor estimador linear não viesado do vetor β.

- O que isso significa? Considere a classe de estimadores lineares:

  $$\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i,$$

  em que W_i é uma função da amostra.

- Teorema de Gauss-Markov diz que $W_i = (X_i X_i')^{-}1 X_i$ é a função que:
  1. ... faz com que $\widetilde{\beta}$ tenha a menor variância possível ("melhor")
  2. ... entre os estimadores que $E[\widetilde{\beta}] = \beta$ ("não viesado")

Distribuição Normal

- **Hipótese adicional**:

$$u|X \sim N(0, \sigma^2 I)$$

- Essa hipótese adicional caracteriza o que chamamos de **modelo de regressão linear clássico**.
- Ela implica que o estimador $\widehat{\beta}$ tem distribuição normal.
- **Por quê?**

$$\widehat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$
$$u|X \sim N(0, \sigma^2 I) \Longrightarrow \widehat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

Inferência Estatística (1)

- Considere o modelo populacional:

$$y = X\beta + u$$

- Como testar hipóteses sobre $\widehat{\beta}$?
- Vimos que $(\widehat{\beta} - \beta)/\mathrm{sd}(\widehat{\beta}) \sim N(0, 1)$.
- Isso permite construir intervalos de confiança e testar hipóteses.
  - ... se conhecermos σ^2...
  - ... mas na prática precisamos estimar σ^2
- O que fazer?

Inferência Estatística (2)

- Seja $\text{ep}(\widehat{\beta}) = \widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ o erro-padrão dos estimadores de MQO.
- Temos que

$$(\widehat{\beta} - \beta)/\text{ep}(\widehat{\beta}) \sim t_{n-k-1}$$

  em que t_{n-k-1} é a distribuição t-Student com $n - k - 1$ graus de liberdade.
- Essa distribuição pode ser utilizada para testar hipóteses.
  - Essa distribuição converge para uma normal padronizada quando número de graus de liberdade tende a infinito (ex.: > 120).

Inferência Estatística (3)

- Estimamos a variância dos erros com seguinte formula:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2$$
$$= \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - X_i'\widehat{\beta}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n-k-1}(y - X\beta)(y - X\beta)'$$

- Usar $n-k-1$, $n-k$ ou n não faz diferença em grandes amostras.
  - Diferentes pacotes / opções no R utilizam diferentes denominadores.

Teste de Hipóteses (1)

- Começamos considerando um teste cuja hipótese nula é

$$H0 : \beta_k = 0$$

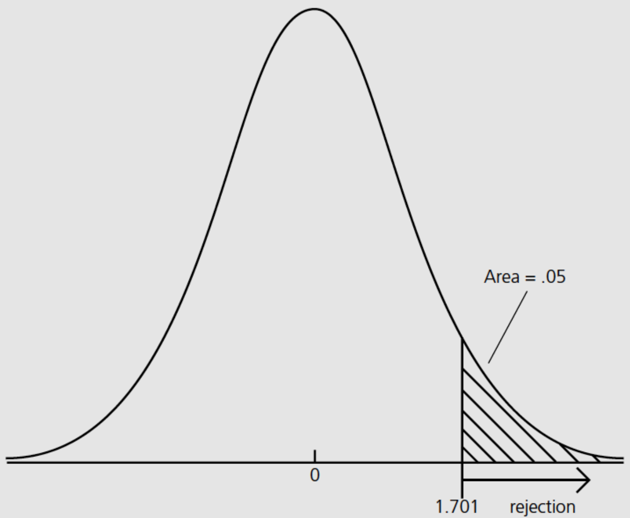
- Calculamos estatística $t_k = \beta_k / \mathrm{ep}\,(\beta_k)$
- Sob a hipótese nula, $t_k \sim N(0,1)$ (em amostras grandes)
- **Regra de decisão:** rejeitamos H0 quando t_k é tal que é improvável que hipótese nula seja verdadeira.
  - $H1 : \beta_k > 0$: H0 é rejeitada se t_k é positivo e "grande"
  - $H1 : \beta_k < 0$: H0 é rejeitada se t_k é negativo e "grande"
  - $H1 : \beta_k \neq 0$: H0 é rejeitada se $|t_k|$ é "grande"

Teste de Hipóteses (2)

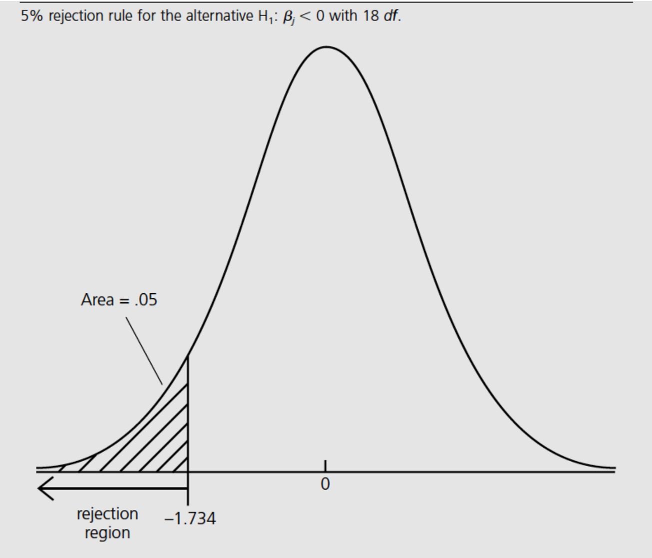
- O que define ser "grande" é nível de significância adotado.
- **Nível de significância:** probabilidade de rejeitar hipótese nula que é verdadeira
- **Níveis típicos:** 10%, 5% e 1% (5% é o mais comum)
- **p-valor**: qual o menor nível de significância para o qual eu não rejeitaria a hipótese nula?
  - Inverte o cálculo.

Teste de Hipóteses (3)

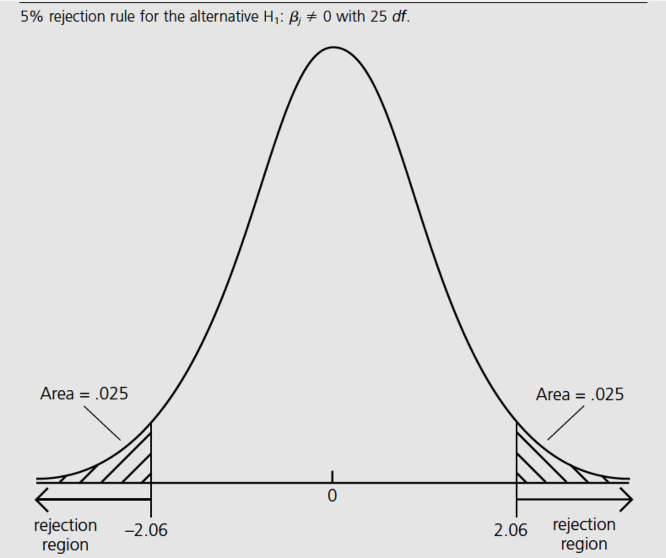
5% rejection rule for the alternative H_1: $\beta_j > 0$ with 28 *df*.



Teste de Hipóteses (4)



Teste de Hipóteses (5)



Hipóteses Múltiplas (1)

- Muitas vezes estamos interessados em fazer testes sobre mais de um coeficiente.
  - Coeficientes conjuntamente iguais a zero?
  - Soma de coeficientes é igual a um determinado valor?
  - Etc.

- **Ideia:**
  - Constrói hipótese nula.
  - Roda modelo impondo que hipótese nula é verdadeira (modelo restrito)
  - Roda modelo sem impor que hipótese nula é verdadeira (modelo irrestrito)
  - Compara os modelos (como?).

Hipóteses Múltiplas (2)

- Como comparar os modelos?
- Podemos utilizar o $R2$ para construir estatística de teste.

$$F = \frac{(R2_{ur} - R2_r)/q}{(1 - R2_{ur})/(n - k - 1)}$$

  em que ur denota o modelo irrestrito, r o modelo restrito e q é o número de restrições sendo testadas
- A estatística F tem distribuição F-Snedecor com q graus de liberdade no numerador e $n - k - 1$ no denominador.
- Logo, podemos utilizar essa distribuição para testar hipóteses múltiplas.

Hipóteses Múltiplas (3)

- Considere o modelo:

$$\log w_i = \beta_0 + \beta_1 \text{educ}_i + \beta_2 \text{age}_i + \beta_3 \text{age}_i^2 + u_i$$

- Suponha que queremos testar $H0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$.
- Rodamos modelo restrito:

$$\log w_i = \beta_0 + \beta_1 \text{educ}_i + u_i$$

  e computamos $R2_r$.
- Depois rodamos modelo completo e computamos $R2_{ur}$.
- Usamos os coeficientes de ajustes para construir estatística F (note que $k = 4$ e $q = 2$).

Hipóteses Múltiplas (4)

- Comando **linearHypothesis()** permite testar hipóteses múltiplas.

```
# Instala e carrega pacote #

  install.packages("car")

  library(car)

# Testando significancia conjunta #

  modelo = lm_robust(lwage ~ educ + age + age2 + female + white, data = twins, se_type = "classical") # modelo
     que queremos analisar #

  hipotese.nula <- c("age=0", "age2=0") # hipotese conjunta a ser testada #

  linearHypothesis(modelo, hipotese.nula, test = "F") # teste F #
```

Heterocedasticidade (1)

Problema! Variância do erro não é constante.

```
# Estimo modelo lm_robust() #

 modelo = lm_robust(lwage ~ educ + age + age2 + female + white, data = twins, se_type = "classical")

# Computo erros #

twins$erro = modelo$residuals

# regressor x erros (ou var. dep.)

plot(twins$educ,twins$erro)

plot(twins$educ,twins$lwage)

plot(twins$age,twins$erro)

plot(twins$age,twins$lwage)
```

Erros padrão robustos a heterocedasticidade dados por:

$$V\left(\widehat{\beta}\right) = (X'X)^{-1}X'E[\hat{u}\hat{u}'|X]X(X'X)^{-1}$$

Heterocedasticidade (2)

Pacote **lm_robust** estima automaticamente erros-padrão robustos a heterocedasticidade.

```
# Estimo modelo com erro-padrão robusto #

 modelo = lm_robust(lwage ~ educ + age + age2 + female + white, data = twins, se_type = "HC1")


# Opção type = "" do comando controla formula utilizada "
```

Diferentes opções do comando denotam diferentes ajustes de graus de liberdade na estimação da matriz de variância $E[\hat{u}\hat{u}'|X]$.

Problema! Mínimos quadrados ordinários deixa de ser eficiente.

Heterocedasticidade (3)

- Mínimos Quadrados Generalizados: opção eficiente.
- Considere que

$$V[u|X] = \sigma^2 h(X)$$

- Note que

$$V\left[u/\sqrt{h(X)}|X\right] = \sigma^2$$

- Estimador eficiente obtido regredindo $y/h(X)$ em $x/h(X)$.
- **Dois casos:**
  - $h(X)$ é conhecido: estimação direta
  - $h(X)$ não é conhecido: roda MQO, computa $\hat{h}(X)$ e estima novamente.

MQO em grandes amostras

- Considere o modelo:

$$y = X\beta + u$$

- Derivamos as propriedades de $\widehat{\beta}$ em amostras finitas.
- Mas, mais e mais, obtemos $\widehat{\beta}$ em amostras cada vez maiores.
- Quais as propriedades dos estimadores de MQO quando o número de observações cresce arbitrariamente ($n \to \infty$)?

Consistência (1)

- $\widehat{\beta}$ é um estimador consistente de β.

$$\text{plim}(\widehat{\beta}) = \beta$$

- **Intuição:** à medida que amostra cresce o vetor de parâmetros estimados fica cada vez mais próximo que o vetor de parâmetros verdadeiro.

- **Prova:**

$$\widehat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u = \beta + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_iX_i')^{-1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_iu_i)\right)$$

$$\Longrightarrow \text{plim}(\widehat{\beta}) = \beta + E[X_iX_i']^{-1}E[X_iu_i] = \beta, \text{ pois } E[X_iu_i] = 0$$

Consistência (2)

- Note que consistência depende da covariância entre regressores e termo de erro ser zero ($E[X_i u_i] = 0$).
- Essa hipótese é implicada pela hipótese de média do termo de erro ser independente dos regressores ($E[u_i|X_i] = 0$).
- Mas a recíproca não é verdadeira! (hipótese mais fraca)
- Consistência ($\sim$ ausência de viés assintótico) depende de hipóteses mais fracas que ausência de viés.

Normalidade Assintótica

- A distribuição de $(\widehat{\beta} - \beta)/\text{ep}(\widehat{\beta})$ converge para uma distribuição $N(0,1)$.
- Isso é uma aplicação do teorema central do limite.
  - Não depende de normalidade do termo de erro (u_i).
  - Só precisamos de que média do erro seja zero e sua variância finita.
- **Implicação:** não precisamos impor normalidade para testar hipóteses em grandes amostras.

O que ocorre quando $E[X_i u_i] \neq 0$?

- Hipótese $E[X_i u_i] = 0$ é a principal hipótese de identificação do modelo de MQO.

- O que ocorre se ela falha?

$$\text{plim}(\widehat{\beta}) = \beta + E[X_i X_i']^{-1} E[X_i u_i]$$

- $E[X_i u_i] \neq 0$ implica que $\text{plim}(\widehat{\beta}) \neq \beta$
  - $E[X_i u_i] > 0$: MQO sobrestima parâmetro real
  - $E[X_i u_i] < 0$: MQO subestima parâmetro real

- Três casos em que $E[X_i u_i] \neq 0$: viés de variável omitida, viés de simultaneidade e viés de atenuação.

Viés de Variável Omitida (1)

- Hipótese $E[X_i u_i] = 0$ é a hipótese de identificação do modelo de MQO.
- O que ocorre se ela falha? Considere o modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i, E[x_{1i}u_i] = E[x_{2i}u_i] = 0$$

- Suponha que observamos x_1, mas não x_2 e considere a regressão de y_i em x_{1i}.
- Defina $\nu_i = \beta_2 x_{2i} + u_i$ e note que:

$$E[x_{1i}\nu_i] \neq 0$$

Viés de Variável Omitida (2)

- Coeficiente da regressão de y_i em x_{1i} é:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{cov(x_{1i}, y_i)}{var(x_{1i})}$$

- Temos:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{cov(x_{1i}, \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i)}{var(x_{1i})} = \beta_1 + \beta_2 \frac{cov(x_{1i}, x_{2i})}{var(x_{1i})}$$

- Efeito de MQO é efeito real mais produto entre efeito da variável omitida sobre y e efeito de x_1 em x_2.

- O viés que surge quando omitimos regressores relevantes é denominado viés de variável omitida.

- **Desafio**: garantir que não existem regressores relevantes não omitidos.

Exemplo

- Relação entre y e os regressores x_1 e x_2 seja descrita pelo modelo populacional:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- Relação entre x_1 e x_2 é descrita por:

$$x_2 = \alpha x_1 + \nu$$

- Suponha que os parâmetros populacionais sejam $\beta_0 = 0.1$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = 0.4$ e $\alpha = 0.5$ e as distribuições $u \sim N(0, 4)$, $\nu \sim N(0, 16)$ e $x_1 \sim N(0, 1)$.

Regressão Longa

Simulo 10.000 observações dos vetores u, ν, x_1, x_2 e y.

```
# Vetores #
set.seed(1985)
beta0 = 0.1
beta1 = 0.6
beta2 = 0.4
alpha = 0.5
u = rnorm(10000, mean = 0, sd = 2)
v = rnorm(10000, mean = 0, sd = 4)
x1 = rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
x2 = alpha*x1+v
y = beta0 + beta1*x1 + beta2*x2 + u
dados = data.frame(cbind(y,x1,x2))
```

Regressão Longa

Rodo regressão longa.

```
# Regressão #

full.model = lm_robust(y ~ x1 + x2, data = dados, se_type = "HC1")

summary(full.model)
```

```
Standard error type:  HC1

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|) CI Lower CI Upper   DF
(Intercept)  0.06576   0.019964   3.294  9.915e-04  0.02663   0.1049 9997
x1           0.61181   0.020065  30.491 2.504e-195  0.57248   0.6511 9997
x2           0.39489   0.005066  77.950  0.000e+00  0.38496   0.4048 9997

Multiple R-squared:  0.4366 , Adjusted R-squared:  0.4364
F-statistic:  3858 on 2 and 9997 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Regressão Curta

Rodo regressão curta.

```
short.model = lm_robust(y ~ x1, data = dados, se_type = "HC1")

summary(short.model)

Standard error type:  HC1

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|)  CI Lower CI Upper   DF
(Intercept)  0.04258    0.02536   1.679  9.323e-02 -0.007139   0.0923 9998
x1           0.80015    0.02548  31.405 1.475e-206  0.750209   0.8501 9998

Multiple R-squared:  0.08995 ,  Adjusted R-squared:  0.08986
F-statistic: 986.3 on 1 and 9998 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Viés de Simultaneidade (1)

- Considere o modelo de oferta e demanda:

$$\log Q_D = c_D + \epsilon_D \log P + X_D' \gamma_D + \varepsilon_D$$

$$\log P = c_S + \epsilon_S \log Q_S + X_S' \gamma_S + \varepsilon_S$$

$$\log Q^* = \log Q_D = \log Q_S$$

- Queremos estimar ϵ_D (elasticidade-preço da demanda) e ϵ_S (elasticidade preço da oferta).

- Note que:

$$\log Q = c_D + \epsilon_D (c_S + \epsilon_S \log Q + X_S' \gamma_S + \varepsilon_S) + X_D' \gamma_D + \varepsilon_D \implies E[\log Q \times \varepsilon_S] \neq 0$$

$$\log P = c_S + \epsilon_S (c_D + \epsilon_D \log P + X_D' \gamma_D + \varepsilon_D) + X_S' \gamma_S + \varepsilon_S \implies E[\log P \times \varepsilon_D] \neq 0$$

Viés de Simultaneidade (2)

- O modelo de oferta e demanda ilustra como a estimação de mínimos quadrados ordinários (MQO) falha quando existe simultaneidade ou causalidade reversa.
- $E[\log P \times \varepsilon_D] > 0$: MQO viesa elasticidade-preço da demanda para cima (i.e., em direção a zero).
- $E[\log Q \times \varepsilon_S] < 0$: MQO viesa elasticidade-preço da oferta para baixo (em direção a zero).
- **Exercício**: prove os fatos acima.

Viés de Atenuação (1)

- Considere o modelo de regressão linear:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon, E[\varepsilon | x_i] = 0$$

- Suponha que x_i não é observado e sim $x_i^* = x_i + \nu_i$. Modelo estimado é:

$$y_i = \alpha + \beta x_i^* + (-\beta \nu_i + \varepsilon)$$

- Defina $\text{var}(x_i) = \sigma_x^2$, $\text{var}(\varepsilon) = \sigma_u^2$, $\text{var}(\nu_i) = \sigma_\nu^2$. Temos:

$$\beta_{MQO} = \frac{\text{cov}(x_i^*, y_i)}{\text{var}(x_i^*)} = \frac{\text{cov}(x_i^*, \alpha + \beta x_i^* - \beta \nu_i + \varepsilon)}{\text{var}(x_i^*)}$$

$$= \beta - \beta \frac{\text{cov}(x_i + \nu_i, \nu_i)}{\text{var}(x_i + \nu_i)} = \beta - \beta \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\nu^2} = \beta \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\nu^2} \right) < \beta$$

Viés de Atenuação (2)

- Considere o seguinte modelo populacional:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

- Suponha que não observamos x e sim $x^* = x + \nu$.
- Os parâmetros populacionais são $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = 0.6$
- x tem distribuição $N(0, 4)$
- Os termos de erro ν e ε tem distribuições $N(0, 1)$ e $N(0, 16)$, respectivamente.

Viés de Atenuação (3)

Simulo 10.000 observações dos vetores u, ν, x, x^* e y.

```
# Vetores #
set.seed(1985)
beta0 = 1
beta1 = 0.6
x = rnorm(10000, mean = 0, sd = 2)
v = rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
u = rnorm(10000, mean = 0, sd = 4)
y = beta0 + beta1*x + u
xs = x + v
dados = data.frame(cbind(y,x,xs))
```

Viés de Atenuação (4)

Viés de atenuação: $\sigma_x^2/(\sigma_x^2 + \sigma_\nu^2) \times \beta = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

```
 # Vetores #

library(estimatr)

summary(lm_robust(y ~ x, data = dados))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|) CI Lower CI Upper   DF
(Intercept)   1.0367    0.03987   26.01 2.520e-144   0.9586   1.1149 9998
x             0.6093    0.01986   30.68 1.129e-197   0.5704   0.6483 9998

Multiple R-squared:  0.08515 ,  Adjusted R-squared:  0.08506
F-statistic: 941.5 on 1 and 9998 DF,  p-value: < 2.2e-16

summary(lm_robust(y ~ xs, data = dados))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|) CI Lower CI Upper   DF
(Intercept)   1.0397    0.04027   25.82 2.231e-142   0.9608   1.1186 9998
xs            0.4857    0.01817   26.73 4.293e-152   0.4501   0.5213 9998

Multiple R-squared:  0.0669 , Adjusted R-squared:  0.06681
F-statistic: 714.5 on 1 and 9998 DF,  p-value: < 2.2e-16
```