

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia C - Traccia 1

Gruppo

H

Autori: Ciampini Matteo, Di Giuseppe Simone, Chergui Jacopo.

Il progetto riguarda il controllo del sistema di sospensione attiva di un veicolo, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{z} = v \quad (1a)$$

$$m\dot{v} = -mg - bv - kz - \beta(v^3 + nv\sin^2(nv)) + u \quad (1b)$$

dove u rappresenta l'ingresso di controllo come forza agente sulla massa $m \in \mathbb{R}$, il parametro $b \in \mathbb{R}$ indica il coefficiente d'attrito dinamico dovuto alla presenza dello smorzatore, il parametro $k \in \mathbb{R}$ rappresenta la costante elastica lineare della molla, mentre $\beta, n \in \mathbb{R}$ rappresentano i coefficienti di non linearità della molla. La funzione $z(t)$ rappresenta l'allungamento della molla, che supponiamo di poter misurare in ogni istante, e si suppone inoltre che sia presente un disturbo $d(t)$ sull'uscita e un disturbo $n(t)$ dovuto ad errori di misura.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := (z(t), \dot{z}(t)), \quad u = gm + kz(t), \quad y := z(t).$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := (x_2, -g - b\frac{x_2}{m} - k\frac{x_1}{m} - \frac{\beta}{m}(x_2^3 + nx_2\sin^2(nx_2)) + \frac{u}{m})$$

$$h(x, u) := x_1$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g - b\frac{x_2}{m} - k\frac{x_1}{m} - \frac{\beta}{m}(x_2^3 + nx_2\sin^2(nx_2)) + \frac{u}{m} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_1. \quad (3b)$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\dot{x}_1 = x_{2e} = 0 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -g - b\frac{x_{2e}}{m} - k\frac{x_{1e}}{m} - \frac{\beta}{m}(x_{2e}^3 + nx_{2e}\sin^2(nx_{2e})) + \frac{u_e}{m} = 0, \quad (5)$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} z_e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_e := gm + kx_{1e}. \quad (6)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come

$$\delta x = x(t) - x_e, \quad \delta u = u(t) - u_e, \quad \delta y = y(t) - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (7a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (7b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$C = [1 \quad 0] \quad (8c)$$

$$D = 0 \quad (8d)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \frac{1}{ms^2 + sb + k} \quad (9)$$

Dunque il sistema linearizzato (7) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (9) con 2 poli:

$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$, $p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$ e nessuno zero, in quanto il numeratore è costante. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

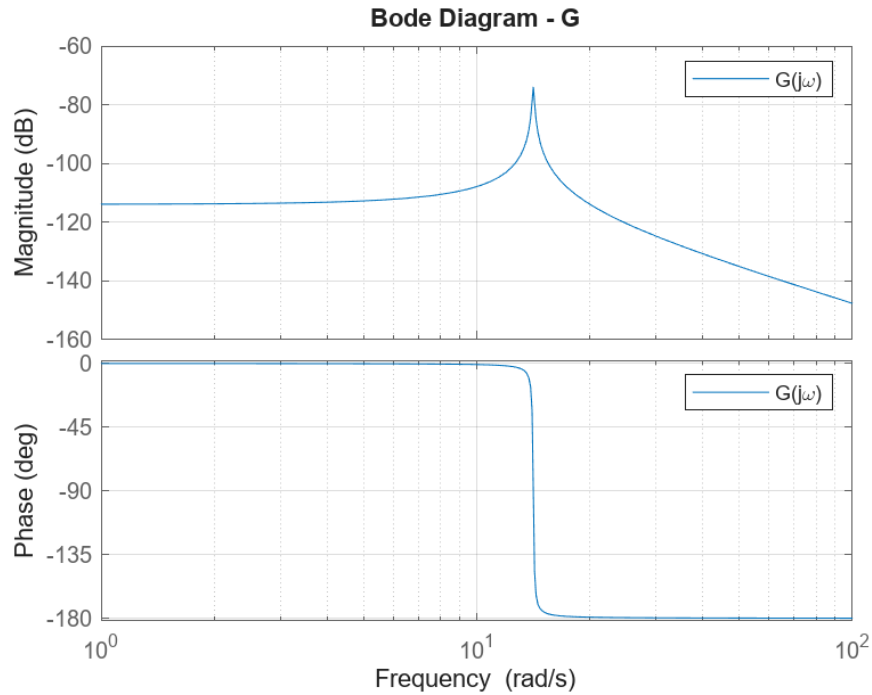


Figura 1: Diagramma di Bode di $G(s)$

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono:

- 1) Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.02$ in risposta a un gradino $w(t) = 1(t)$ e $d(t) = 1(t)$.
- 2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 30^\circ$.
- 3) Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 5% : $S\% \leq 5\%$.
- 4) Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 10^{-2}$ s.
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno 30 dB.
- 6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[8 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 75 dB.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto delle specifiche richieste.

- 1) Per un errore minore o uguale di 0.02, occorre agire sul guadagno calcolando il suo valore ottimale. Per il calcolo del guadagno, si può utilizzare la seguente relazione : $\mu = L(0) \geq \frac{D^*+W^*}{e^*}$. Sostituendo i valori, si ottiene che $\frac{W^*+D^*}{e^*} = \frac{1+1}{0.02} = 100$. Il guadagno statico μ_s calcolato come rapporto tra guadagno voluto e guadagno di $G(0)$ risulta $5 \cdot 10^7$.
- 2) Per trovare il margine di fase occorre calcolare il coefficiente di smorzamento ξ^* . Procedendo con il calcolo del coefficiente di smorzamento, si ottiene che $\xi^* = \frac{|\ln(S^*/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(S^*/100)}} \approx 0.69$, dove $S^* = 5$ rappresenta la sovraelongazione massima specificata nel punto 3. Dato che $M_f = 100 \cdot \xi^*$, calcolando risulta $M_f \approx 69^\circ$.
- 3) Dato che dobbiamo rispettare la relazione $S\% \leq S^*$, allora poniamo $\xi \geq \xi^*$, risulta quindi che $M_f \geq 100 \cdot \xi^*$ in accordo con il punto precedente.
- 4) Troviamo la pulsazione minima per garantire il tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$ fissato a 10^{-2} . Si ha infatti che $M_f \cdot \omega_c \geq \frac{460}{T_{a,\epsilon}}$, e quindi $\omega_c \geq 667$ rad/s circa.
- 5) Occorre trovare il guadagno $\mu_{s,d}$ del regolatore statico alla pulsazione massima di $d(t)$, ossia $\omega_{d,max} = 0.05$. Dato che $|L(j\omega)|$ dB $\geq A_d$ dB, allora $\mu_{s,d} = \frac{10^{A_d/20}}{|G(j\omega_{d,max})|} = 1.58 \cdot 10^7$ dB. Per il guadagno del regolatore statico quindi scegliamo il massimo tra μ_s e $\mu_{s,d}$, che risulta μ_s . La condizione è quindi già rispettata utilizzando il guadagno calcolato nel punto 1.
- 6) Per un attenuazione di 75 dB nel range di frequenze $[8 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^6]$, dobbiamo assicurarci che $|L(j\omega_n)|_{dB} \leq -75$ dB.

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

Realizziamo il regolatore statico per soddisfare la precisione statica e l'attenuazione del disturbo sull'uscita, calcolando il guadagno μ_s come massimo tra due guadagni:

- il guadagno dato dal rapporto tra guadagno voluto e guadagno di G a 0;
- il guadagno del regolatore statico all'infinito.

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 2, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

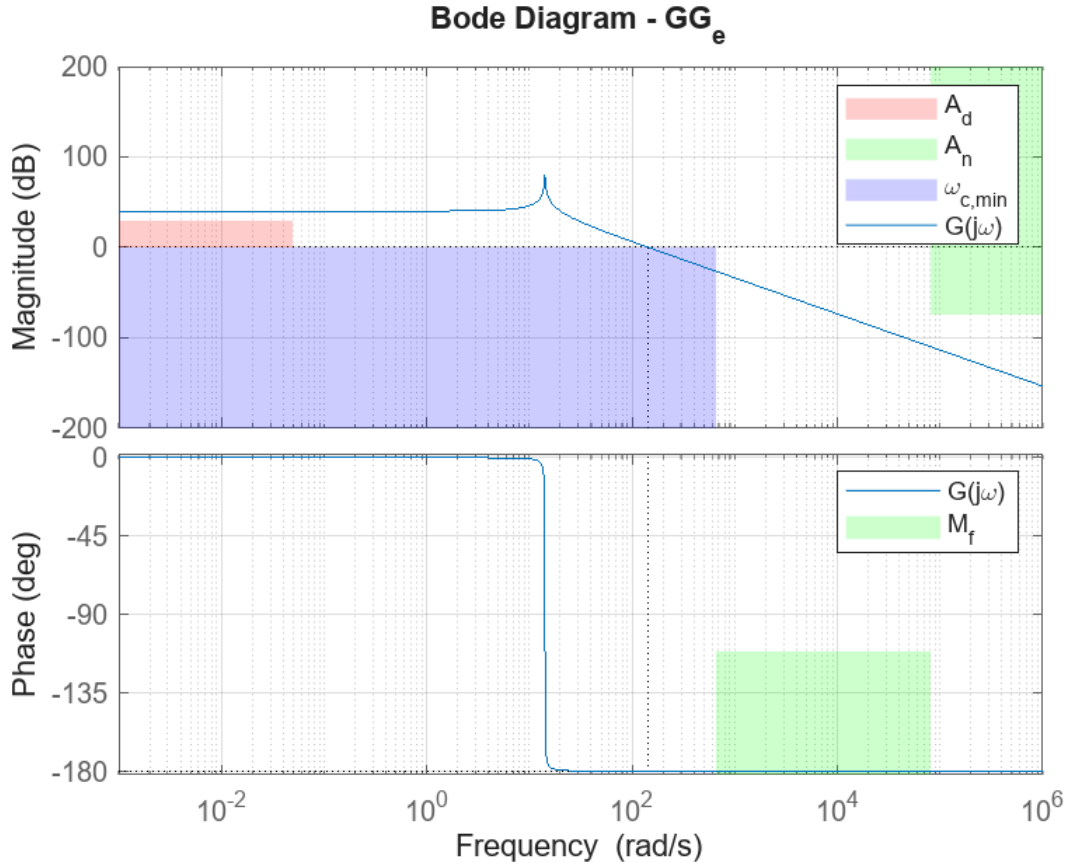


Figura 2: Diagramma di Bode con zone proibite di $G_e(s)$

Da Figura 2, emerge che è rispettata l'attenuazione del disturbo sull'uscita ma non siamo nell'intervallo delle pulsazioni e non rispettiamo il vincolo sul margine di fase.

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello scenario di tipo B, ovvero nell'intervallo delle pulsazioni ammissibili non esistono pulsazioni in cui la fase di $Ge(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.

Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo all'utilizzo di una rete anticipatrice con uno zero per aumentare la fase ed un polo per evitare l'eccessiva amplificazione:

$$RR_d = (1 + \tau * s)/(1 + \alpha\tau * s)$$

Per rispettare il margine di fase inseriamo un polo in alta frequenza:

$$R_{high-frequency} = 1/(1 + s/15000)$$

Il risultato ottenuto rientra quindi nell'intervallo di specifica e il vincolo sul margine di fase è rispettato. In figura 3, mostriamo il diagramma di Bode della funzione in anello aperto $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

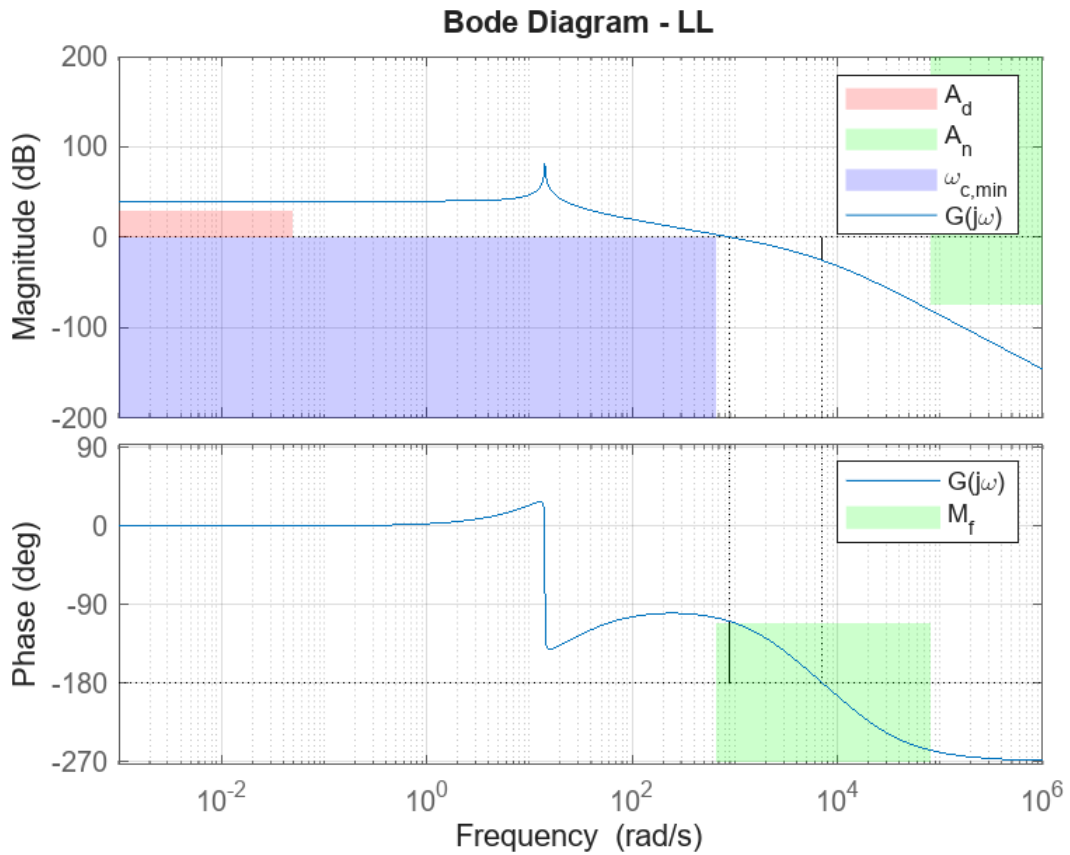


Figura 3: Diagramma di Bode con zone proibite di $LL(s)$

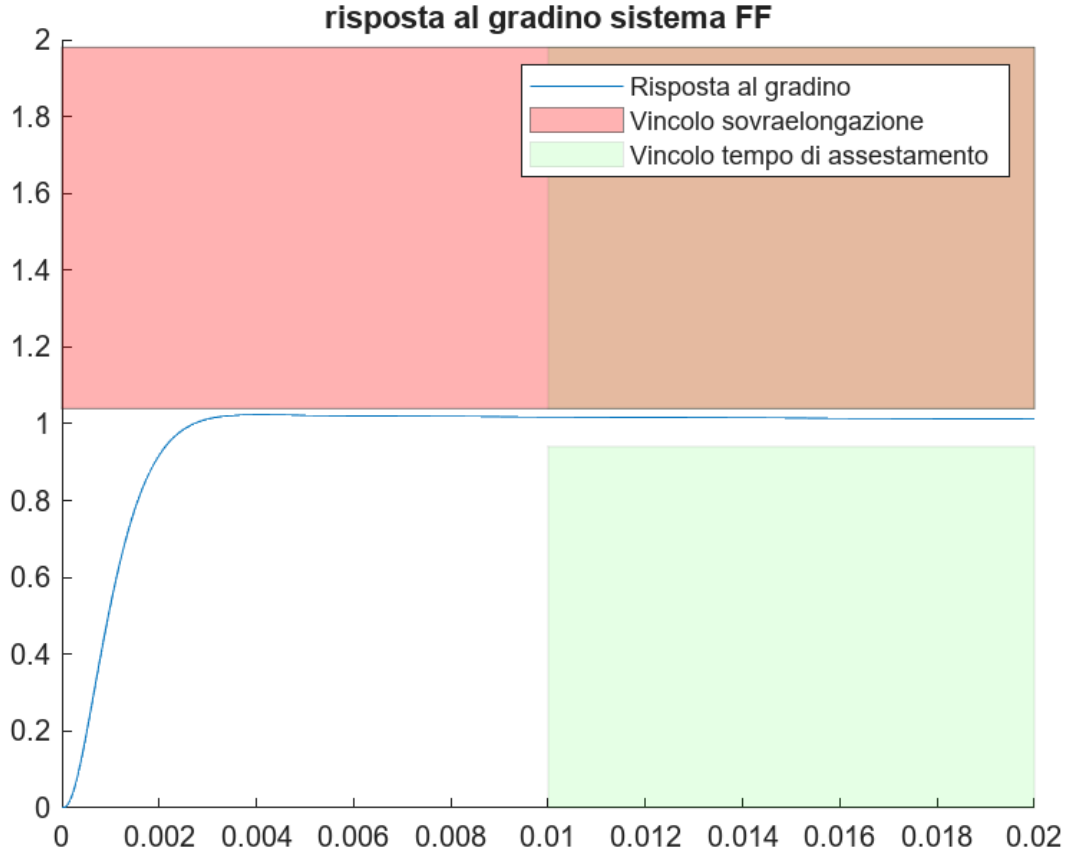


Figura 4: Risposta al gradino di FF

Come dimostrato dalla figura 4 la risposta al gradino rispetta i vincoli sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento, considerando anche il margine di tolleranza $\epsilon\% = 5\%$.

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con $w(t) = 1(t)$ e:

$$d(t) = \sum_{k=1}^4 \sin(0.01kt) \quad (10)$$

$$n(t) = \sum_{k=1}^4 0.2 \sin(8 * 10^4 kt) \quad (11)$$

Calcoliamo l'uscita del sistema tramite il principio di sovrapposizione degli effetti ovvero come sommatoria di tre segnali di uscita vincolati ciascuno solo da w , d o n . Troviamo:

- Yw come prodotto tra la funzione di sensitività complementare e il segnale di riferimento;
- Yd come prodotto tra la funzione di sensitività e il segnale di disturbo in uscita;
- Yn come prodotto tra l'opposto della funzione di sensitività complementare e il segnale di disturbo in misura.

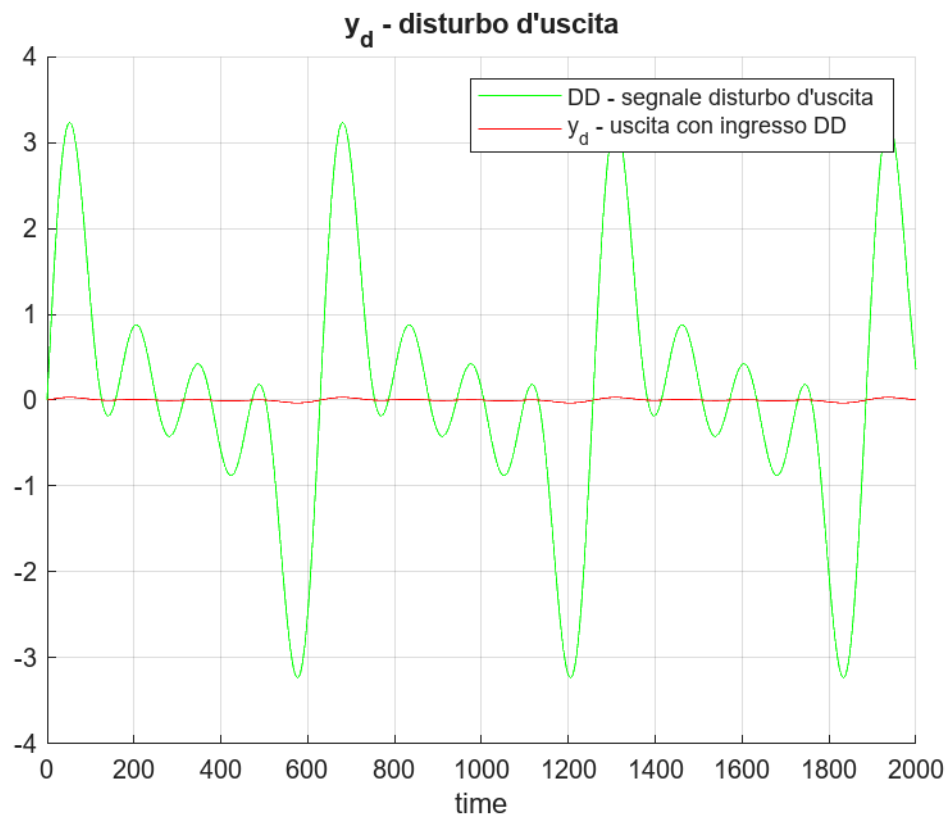


Figura 5: Disturbo d'uscita

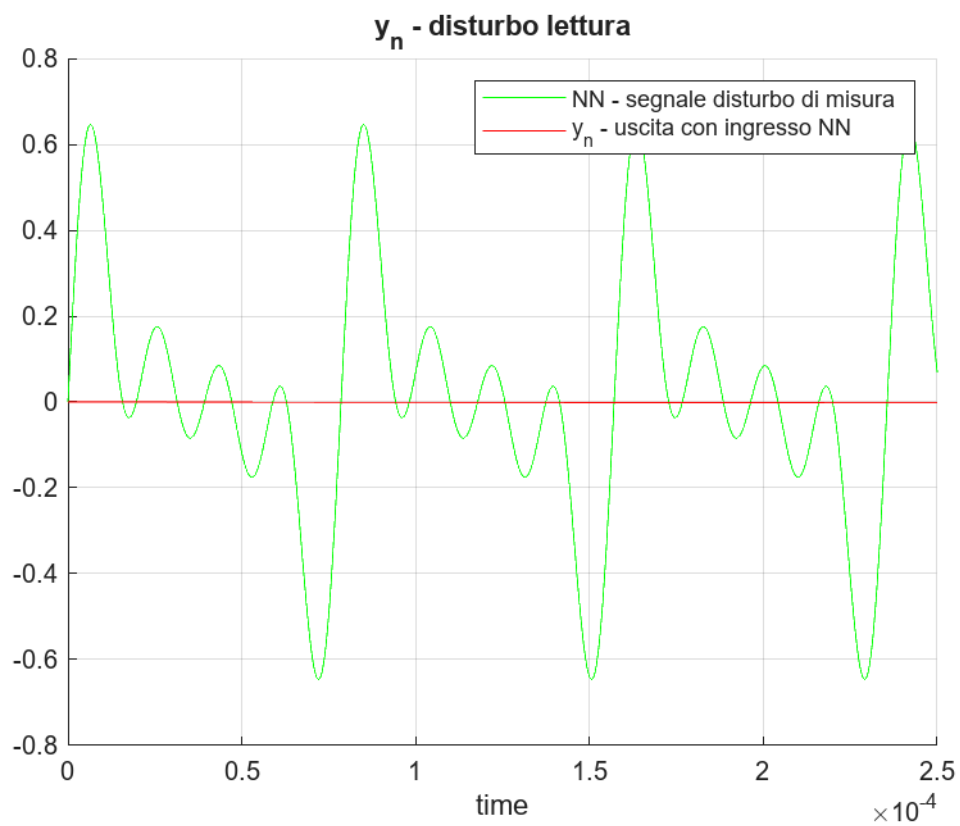


Figura 6: Disturbo di lettura

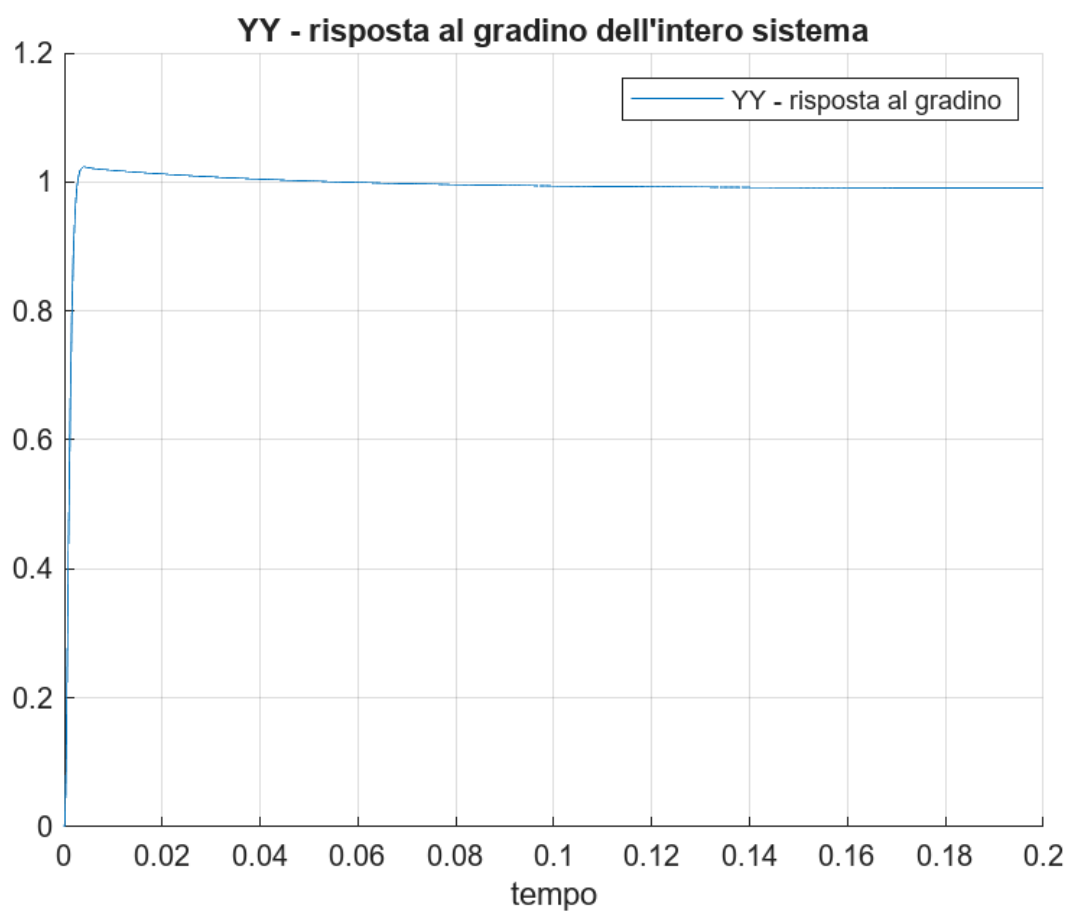


Figura 7: Risposta al gradino dell'intero sistema

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema non lineare. Tramite Simulink andiamo a ricreare il sistema non lineare composto da:

- Una funzione step per il riferimento w ;
- Il regolatore (composto sia dal regolatore statico sia dal dinamico)
- Il segnale di ingresso u_e calcolato al punto 1.6;
- La funzione LTI che calcola i valori di \dot{x}_1 e \dot{x}_2 determinati al punto 1.4 e 1.5;
- Un integratore con stato iniziale x_e calcolato al punto 1.6;
- Il valore z_e che indica la posizione iniziale del sistema;

Senza tenere conto dei disturbi di misura e uscita otteniamo lo schema in figura 8 e la seguente risposta 9

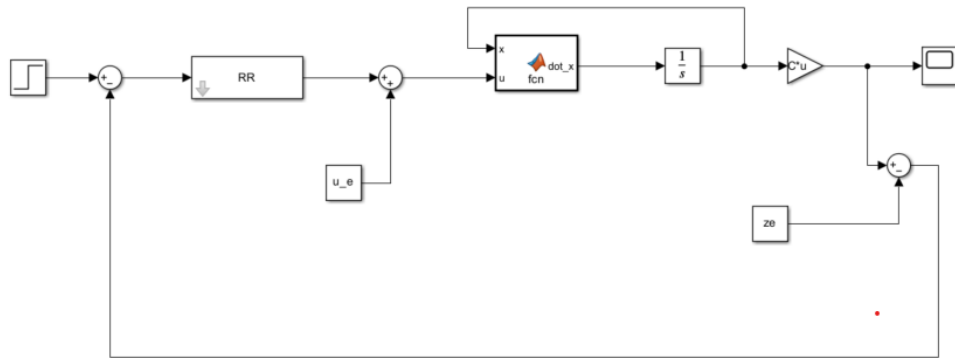


Figura 8: Schema sistema non LTI senza disturbi

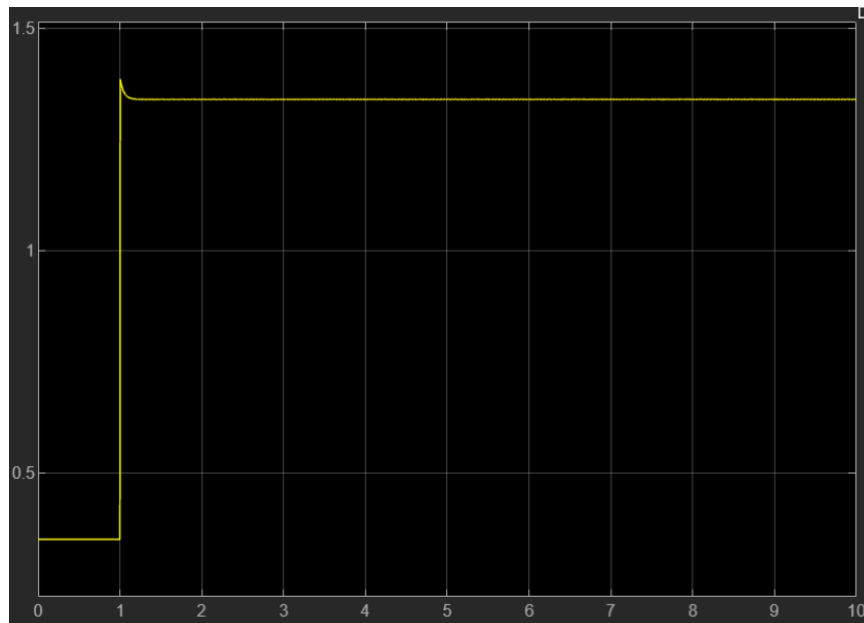


Figura 9: Uscita sistema non LTI senza disturbi

Inserendo nel sistema anche i disturbi, otteniamo lo schema in figura 10 e la seguente risposta 11. Confrontando le due uscite è possibile apprezzare il ruolo dell'attenuazione del sistema in anello chiuso.

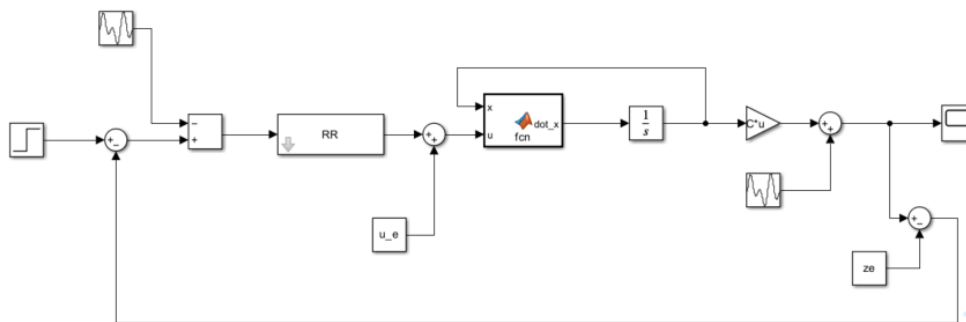


Figura 10: Schema sistema non LTI con disturbi

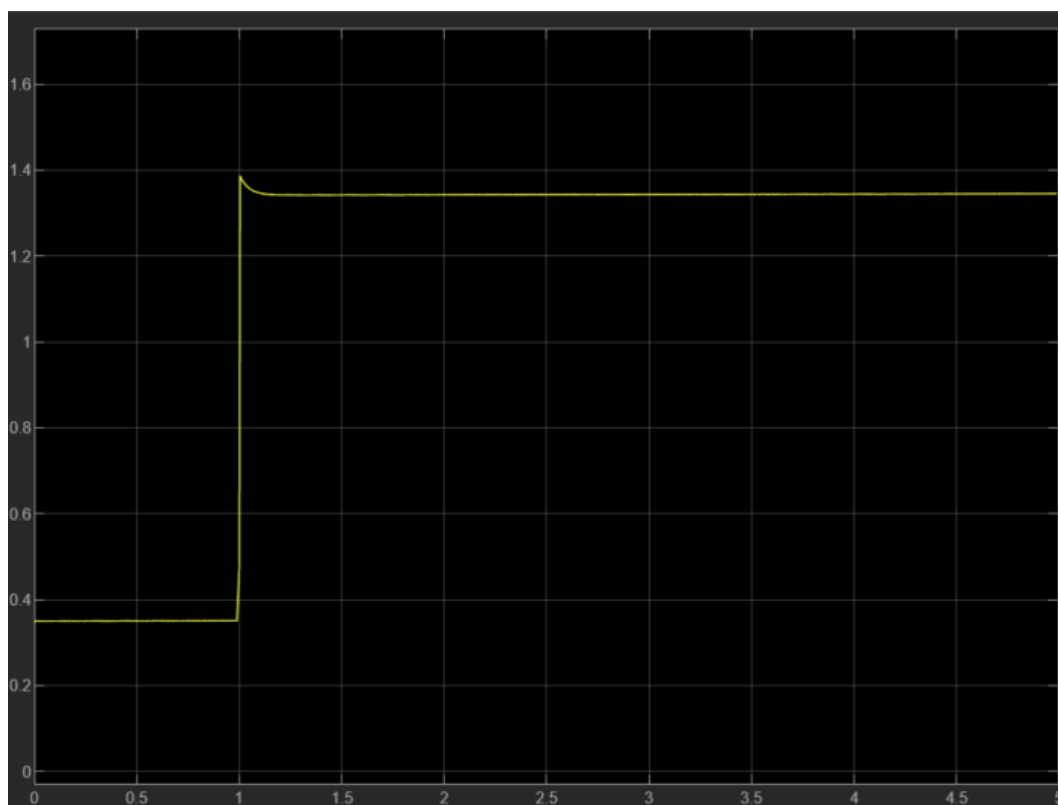


Figura 11: Uscita sistema non LTI con disturbi

8 Conclusioni

In sintesi, abbiamo calcolato un regolatore, analizzandone il comportamento in anello aperto, per poter ottenere una sospensione attiva di un veicolo che rispettasse i vincoli sulla stabilità e sulla uscita come da specifiche. In particolare è emerso nel calcolo del sistema linearizzato, che il punto di equilibrio z_e attorno a cui eseguire la linearizzazione non influenza direttamente il modello LTI ottenuto. Per questo, a velocità sufficientemente vicine allo 0, il modello offre una valida linearizzazione del sistema indifferentemente dal punto di equilibrio considerato.

Una possibile rappresentazione del modello realizzato è quella mostrata in figura 12

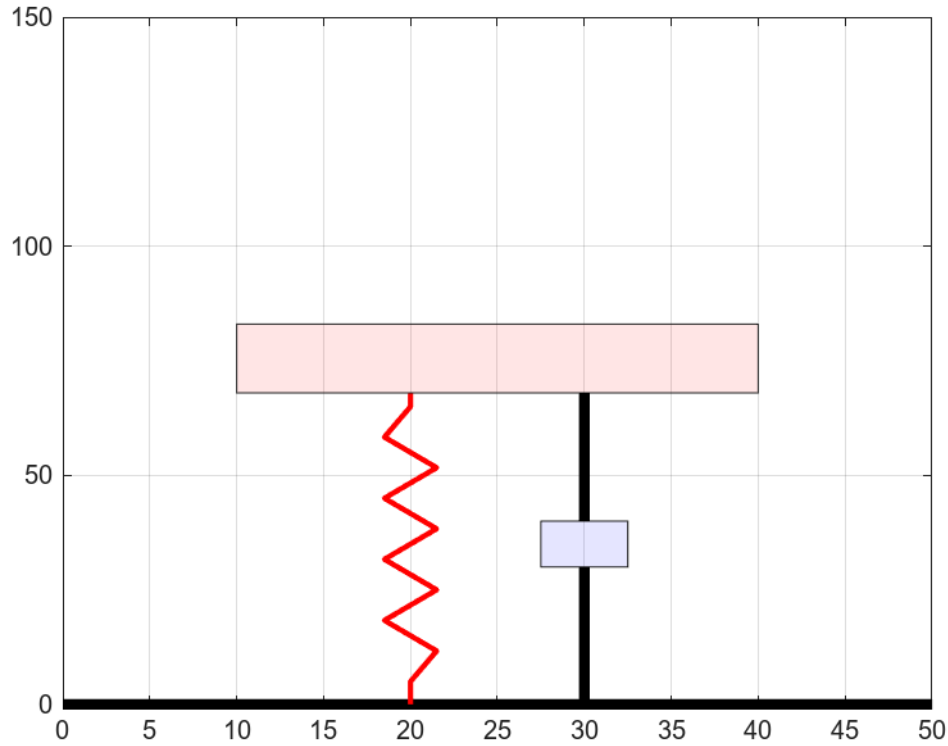


Figura 12: Rappresentazione grafica del modello