ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

****

BÁO CÁO BÀI TẬP NHÓM

TÍNH TOÁN KHOA HỌC

CHỦ ĐỀ: "BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT"

Học phần: Tính toán khoa học – IT4110
Mã lớp học: 147769
Giảng viên hướng dẫn : Vũ Văn Thiệu

Nhóm sinh viên thực hiện

Đỗ Hoàng Đông	20225807	Lại Thành Vinh	20225964
Vũ Ngọc Lâm	20225645	Trần Doãn Huy	20225859
Nguyễn Hà Bách	20225691	Mai Văn Đăng	20225699

Hà Nội, tháng 05 năm 2024

MỤC LỤC

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT BÀI TOÁN HEAT EQUATION

1. Định nghĩa

- Trong toán học và vật lí, phương trình nhiệt là một **phương trình vi phân riêng** (Parabol nguyên mẫu).
- Các nghiệm của phương trình nhiệt đôi khi được gọi là **hàm nhiệt lượng**.

2. Nguồn gốc

- Người đặt nền móng: Nhà vật lý, toán học người Pháp *Joseph Fourier* phát triển lần đầu vào năm 1822 với mục đích mô hình hóa cách một đại lượng như nhiệt khuếch tán qua một vùng nhất định hoặc khuếch tán chất tan trong dung dịch.
- Ngoài ra bài toán còn liên quan mật thiết đến hình học quang phổ, được ứng dụng nghiên cứu rộng rãi trong toán học thuần túy

  → Đây là nền tảng của toán học vi phân.

3. Ứng dụng của bài toán trong thực tế

Mô phỏng khí hậu: Bài toán heat equation có thể được sử dụng để dự đoán sự thay đổi của nhiệt độ trong khí quyển và xác định thời tiết trong tương lai.

Mô phỏng dẫn nhiệt: Bài toán heat equation được sử dụng để mô phỏng sự truyền nhiệt trong các vật liệu khác nhau như kim loại, nhựa, gỗ.

Mô phỏng động cơ đốt trong: Xác định được nhiệt lượng được tạo ra khi đốt nhiên liệu và 1 phần khác biểu diễn quá trình truyền nhiệt khác trong động cơ.

II. PHÁT BIỂU VÀ PHƯƠNG TRÌNH

1. Trong toán học

Nếu cho một tập con mở U của $\mathbf{R}^n$ và một khoảng con I của $\mathbf{R}$, người ta nói rằng:

Hàm u: $U \times I \to \mathbf{R}$ là nghiệm của **phương trình nhiệt** nếu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_n}$$

Trong đó:
$x_1, x_2, \dots, x_n, t$: biểu thị một điểm tổng quát của miền xác định.

- t: là thời gian
- $x_1, x_2, \dots, x_n$: các biến không gian

(Tập hợp các biến không gian thường được gọi đơn giản là x)

Với bất kỳ giá trị đã cho nào của t , vế phải của phương trình là parabol của hàm $u\ (\cdot, t\ ) : U \ \rightarrow \ R$. Như vậy, phương trình nhiệt thường được viết gọn hơn như sau:

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u}$$

2. Trong bối cảnh vật lý và kỹ thuật

Trong bối cảnh vật lý và kỹ thuật, đặc biệt là trong bối cảnh khuếch tán qua môi trường, người ta thường cố định hệ tọa độ Descartes và sau đó xem xét trường hợp cụ thể của hàm u(x, y, z, t) của ba biến không gian (x, y, z) và biến thời gian t . Khi đó người ta nói rằng u là nghiệm của phương trình nhiệt nếu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Trong đó:

α là hệ số dương hay độ khuếch tán của môi trường

"Hằng số khuếch tán" α thường không xuất hiện trong các nghiên cứu toán học về phương trình nhiệt, trong khi giá trị của nó có thể rất quan trọng trong kỹ thuật. Đây không phải là một sự khác biệt lớn, vì lý do sau. Hãy để u là 1 hàm với:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$$

Xác định một chức năng mới $v(t, x) = u(t/\alpha, x)$. Khi đó, theo quy tắc dây chuyền, ta có:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t/\alpha, x) = \alpha^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}(t/\alpha, x) = \Delta u(t/\alpha, x) = \Delta v(t, x)$$

3. Kết luận

- Từ $\alpha \ > 0$ có một lựa chọn khác để xác định một v thỏa mãn:
$$\frac{\partial}{\partial t} v = \Delta v$$
- Ngoài các hiện tượng vật lý khác, phương trình này mô tả dòng nhiệt trong môi trường đồng nhất và đẳng hướng, với $u(x, y, z, t)$ là nhiệt độ tại điểm (x, y, z) và thời gian t.
- Nếu môi trường không đồng nhất và đẳng hướng thì α sẽ không phải là hệ số cố định mà thay vào đó sẽ phụ thuộc vào (x, y, z); phương trình cũng sẽ có dạng khác.

III. BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT 2D

Phương trình nhiệt về cơ bản là một phương trình vi phân từng phần :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0$$

Nếu muốn giải phương trình trong không gian 2D, chúng ta có thể viết phương trình nhiệt như sau :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

Trong đó:

u là đại lượng cần tìm.

t là biến thời gian.

x và y là biến không gian.

α là hằng số khuếch tán.

Vì vậy, về cơ bản cần tìm nghiệm u ở mọi điểm (x, y) tại thời gian t.

Định nghĩa đạo hàm bậc nhất là:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2!} \qquad (1)$$

Từ (1) ta có:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f''(\xi)\frac{h}{2!} \qquad (2)$$

Coi số hạng $f''(\xi)\frac{h}{2!}$ là sai số rút gọn, từ (2) suy ra:

$$\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Là công thức tính gần đúng đạo hàm theo phương pháp sai phân thuận

Tương tự, ta có công thức tính gần đúng đạo hàm bậc 2:

$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

Áp dụng vào phương trình nhiệt , chúng ta có biểu diễn đạo hàm của nhiệt độ theo thời gian :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t))$$

Đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo x và y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}(u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t))$$

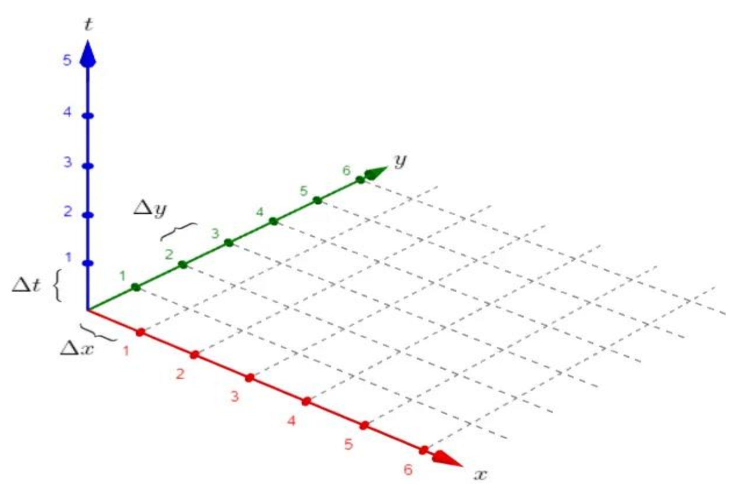
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2}(u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t))$$

Trong phương pháp sai phân hữu hạn, chúng ta sẽ "rời rạc hóa" miền không gian và x, y và khoảng thời gian t. Chúng ta có thể viết nó như thế này :

$$x_i = i\Delta x$$

$$y_j = j\Delta y$$

$$t_k = k\Delta t$$



Tọa độ Descartes, trong đó trục x và y dành cho các biến không gian và t cho biến thời gian

Như chúng ta có thể thấy, i, j và k lần lượt thay thế cho từng điểm x, y và t. Điều chúng ta muốn là tìm nghiệm của u, là :

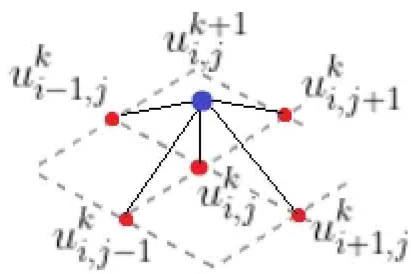
$$u(x, y, t) = u^{k}{}_{i,j}$$

Lưu ý: k là chỉ số trên để biểu thị bước thời gian của u

Thay thế phương trình nhiệt bởi các công thức xấp xỉ đạo hàm, chúng ta được :

$$\boldsymbol{\frac{u_{i,j}{}^{k+1} - u_{i,j}{}^{k}}{\Delta t} - \alpha\left(\frac{u^{k}{}_{i+,j} - 2u_{i,j}{}^{k} + u^{k}{}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u^{k}{}_{i,j+1} - 2u^{k}{}_{i,j} + u^{k}{}_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) = 0}$$

Chúng ta có thể sử dụng hình ảnh này để ghi nhớ phương trình trên (với i, j cho các bước không gian và chỉ số trên k cho bước thời gian)



IV. GIẢI THÍCH CHƯƠNG TRÌNH

```
a = 110;
length = 50; % mm
time = 1; % seconds
nodes = 40;
```

Xét một tấm đồng :

- Hệ số khuếch tán $a = 110mm^2/s$
- Chọn chiều dài $= 50mm$
- Thời gian $t = 4s$
- Chia tấm đồng thành các điểm lưới, mỗi chiều 40 điểm lưới

```
dx = length / nodes;
dy = length / nodes;
dt = min(dx^2/(4*a), dy^2/(4*a));
t_nodes = floor(time/dt);
u = zeros(nodes, nodes) + 20;
```

- dx, dy : Khoảng cách đại diện cho không gian giữa 2 điểm lưới
- dt: Thời gian của mỗi (điểm) mô phỏng
- t_nodes : ước chừng số bước để hoàn thành mô phỏng trong thời gian t

- Giá trị nhiệt độ ban đầu là 20°C cho toàn bộ lưới.

- Khi xác định Δx, Δy, dựa trên nguyên tắc chung: càng nhỏ thì độ chính xác càng lớn khi khoảng cách giữa các điểm lưới giảm đi
- Một cách xác định phổ biến cho Δt là sử dụng điều kiện Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), đặc biệt khi giải các phương trình dẫn truyền nhiệt hoặc phương trình sóng.

$$dt = \min\left(\frac{dx^2}{4a}, \frac{dy^2}{4a}\right)$$

- Công thức này đảm bảo rằng bước thời gian Δt nhỏ hơn hoặc bằng giới hạn cho phép để duy trì tính ổn định của phương pháp sai phân (đảm bảo sai số không tăng theo thời gian).

Điều kiện biên là một đường nhiệt độ tuyến tính từ 0 đến 100°C ở trung tâm tấm đồng

```
center = floor(nodes/2) + 1 ;
size = 12;
half = floor(size/2);
for i = center-half : center + half
  for j = center-half : center + half
    u(i, j) = 100;
  end
end
```

- center: trung tâm của tấm lười
- size: cung cấp độ rộng của miền trung tâm

=> Ta có thể xác định của nhiệt độ của miền trung tâm:

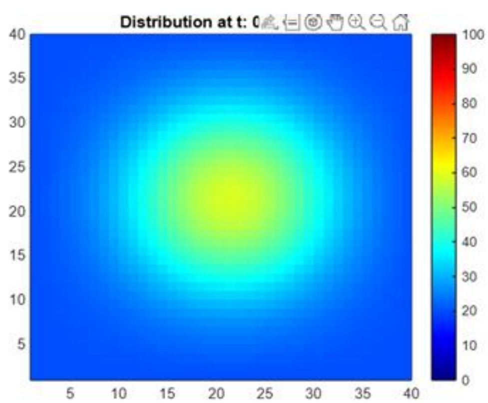
$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 20 \\ 20 & \vdots & 100 & 100 & 100 & \vdots & 20 \\ 20 & \vdots & 100 & 100 & 100 & \vdots & 20 \\ 20 & \vdots & 100 & 100 & 100 & \vdots & 20 \\ 20 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

Ma trận nhiệt độ

```
subplot(1, 2, 1);
h = pcolor(u);
set(h, 'EdgeColor', 'none');
colormap(jet);
colorbar;
caxis([0 100]);
```

Khởi tạo màu cho biểu đồ

Biểu diễn biểu đồ




```
counter = 0;
index = 1;
while counter < time
  w = u;
  for i = 2:nodes-1
    for j = 2:nodes-1
      dd_ux = (w(i-1,j)-2*w(i,j)+w(i+1,j))/dx^2;
      dd_uy = (w(i,j-1)-2*w(i,j) + w(i,j+1))/dy^2;
      u(i, j) = dt*a*(dd_ux + dd_uy) + w(i,j);
    end
  end
  counter = counter + dt;
```

- Khởi tạo vòng lặp <while> với counter = 0 tới time (4s)
- w là ma trận trung gian để lưu nhiệt độ hiện tại
- Khởi tạo các vòng for để duyệt qua các điểm lưới (bỏ qua biên)
- Sử dụng phương trình truyền nhiệt để cập nhật nhiệt độ tại các điểm
- update counter (+ dt)
- In ra thời gian hiện tại, nhiệt độ trung bình của toàn bộ lưới

```
set(h, 'CData', u);
title(sprintf("Distribution at t: %.3f [s].", counter));
pause(0.01);
```

Cập nhật màu của biểu đồ, tạo pause để cập nhật đồ thị

```
    %Lưu nhiệt độ tại điểm trung tâm
    center_temperatures(index) = u(center, center);
    time_temperatures(index) = counter;
    %Lưu nhiệt độ trung bình của cả tấm đồng
    avg_temperatures(index) = mean(u, 'all');
    %pause(0.01);
    index = index + 1;
end
```

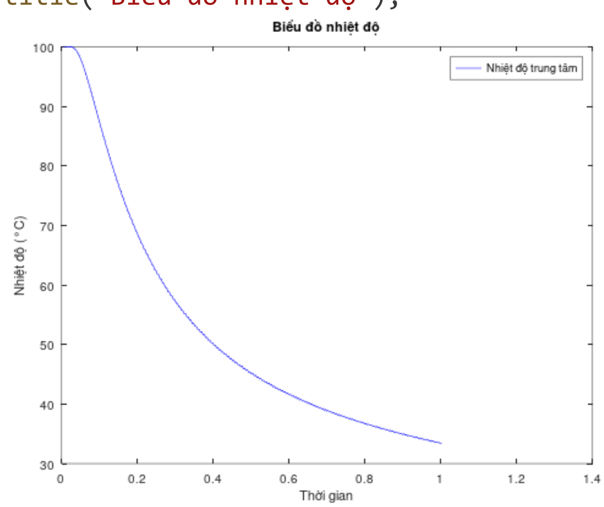
=> Tạo 1 mảng để chứa nhiệt độ trung tâm và 1 mảng chứa nhiệt độ trung bình
Với Index ban đầu là 0 => lưu nhiệt độ theo thời gian vào từng mảng

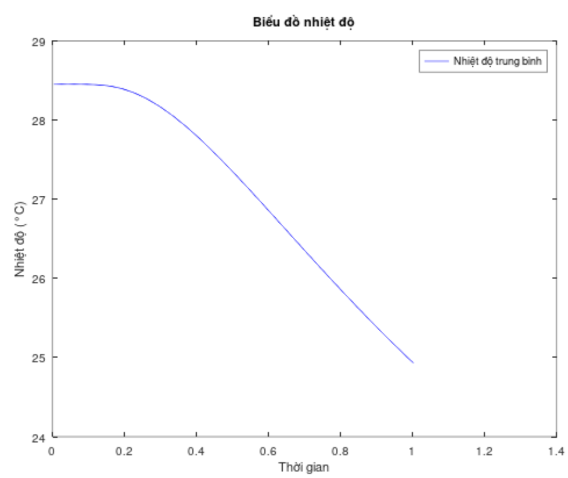
---

```
% Vẽ đồ thị
figure();
plot(time_temperatures,center_temperatures, 'b-');
legend('Nhiệt độ trung tâm');
xlabel('Thời gian');
ylabel('Nhiệt độ (°C)');
title('Biểu đồ nhiệt độ');

% Vẽ đồ thị
figure();
x_values = 0 : 1000;
plot(time_temperatures,avg_temperatures, 'b-');
legend('Nhiệt độ trung bình');
xlabel('Thời gian');
ylabel('Nhiệt độ (°C)');
title('Biểu đồ nhiệt độ');
```

Sau khi lưu các giá trị
Vẽ đồ thị biểu diễn sự thay đổi của nhiệt độ trung tâm và nhiệt độ trung bình





TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. “Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction” by K. W. Morton, University of Bath, D. F. Mayers, University of Oxford 2.11- p.33

2. Kolk, Johan A.C.; Duistermaat, J.J. (2010). 'Taylor Expansion in Several Variables'. Distributions: Theory and Applications. Birkhauser. pp. 59-63. ISBN 978-0-8176-4672-1.

3. Chap 13 Partial Differential Equations-V6. Original: May 7, 2015

PHÂN CÔNG CÔNG VIỆC

Thành viên nhóm	MSSV	Nhiệm vụ
Mai Văn Đăng	20225699	Thuyết trình, viết code, tìm nội dung
Vũ Ngọc Lâm	20225645	Thuyết trình, làm slide, làm báo cáo
Nguyễn Hà Bách	20225691	Viết code, tìm nội dung
Trần Doãn Huy	20225859	Tìm nội dung, làm báo cáo
Lại Thành Vinh	20225964	Làm báo cáo, viết code
Đỗ Hoàng Đông	20225807	Làm slide

PHỤ LỤC

Mã nguồn:

```
a= 110 %Độ khuếch tán của pt nhiệt
length = 50 % Kích thước tấm lưới
time = 1 %hiết lập thời gian
nodes = 40 %Thiết lập số điểm ảnh

dx = length / nodes; % dx=0.8
dy = length / nodes; % dy=0.8
dt = min(dx^2 / (4 * a), dy^2 / (4 * a)); % dt = 3.2*10^-3
t_nodes = floor(time/dt); %Xác định số lần lặp và kết quả là một số  và t_nodes=312 do floor là hàm lấy phần nguyên
u = zeros(nodes, nodes) + 20; % Khởi tạo nhiệt độ ban đầu của cả tấm là 20 và được lưu ở không gian 2 chiều có kích thước là node x node

% Do là mô tả nhiệt là từ trung tâm phân tán nhiệt ra các hướng xung quanh nên cần thiết lập lại nhiệt độ ban đầu cảu tấm ở giữa
center = floor(nodes/2) + 1; % Tìm vị trí trung tâm của tấm vật liệu
size = 12; % Khởi tạo nhiệt độ cho vùng bị đốt nóng bởi nhiệt là 1 vùng hình vuông có kích thước 12 x 12
half = floor(size/2); %Tính điểm giữa của vùng bị đốt nhiệt
% Sau khi xác định được các vị trí cần nhiết của vùng được đót bởi nhiệt thì ta tiến hành khởi tạo giá trị nhiệt = 100 tại vùng đó hay nói cách khác thì đây là vùng nóng nhất của tấm vật liệu
for i = center-half : center + half
    for j = center-half : center + half
        u(i, j) = 100;
    end
end

%Sau khi chuẩn bị xong thì đến với phần hiển thị mô phỏng bài toán
figure();

subplot(1, 2, 1); % Chia màn hình hiển thị làm 2 phần bên trái và bên phải mục đích để hiển thị 2 biểu đồ nhiệt theo 2 chiều
h = pcolor(u);  % Hiển thị màu ra đồ thị
set(h, 'EdgeColor', 'none'); % Xóa các đường kẻ trên đồ thị
colormap(jet); % Lựa chọn bảng màu phù hợp
colorbar; % Tạo thanh màu
caxis([0 100]); % Tạo giới hạn sau khi thêm câu lệnh này thì màu của đồ thị hiển thị tấm kim loại sẽ được lấy theo giá trị màu ở thanh màu

%Sau khi tạo hình cũng như tạo màu xong ta sẽ đến công đoạn tạo sự truyền nhiệt theo công thức đã được chứng minh
counter = 0; %Thiết lập thời gian ban đầu
```

```
index = 1;   %Thiết lập chỉ số lần lặp

while counter < time  % cho vòng lặp chạy đến khi đạt tới giới hạn đã được định
    w = u;
    %Tính giá trị nhiệt tại thời điểm
    for i = 2:nodes-1
        for j = 2:nodes-1
            dd_ux = (w(i-1, j) - 2*w(i, j) + w(i+1, j)) / dx^2;
            dd_uy = (w(i, j-1) - 2*w(i, j) + w(i, j+1)) / dy^2;
            u(i, j) = dt * a * (dd_ux + dd_uy) + w(i, j);
        end
    end
    counter = counter + dt;

    % Update pcolor plot
    subplot(1, 2, 1);
    h = pcolor(u);
    set(h, 'EdgeColor', 'none');
    colormap(jet);
    colorbar;
    caxis([0 100]);

    % Update surf plot
    subplot(1, 2, 2);
    w0 = w;
    for i = 2:nodes-1
        for j = 2:nodes-1
            w(i,j) = w0(i,j) + u(i,j);
        end
    end
    X = 2:nodes-1;
    Y = 2:nodes-1;
    Z = w(X,Y);
    surf(X, Y, Z);
    zlim([40, 200]);
    %h_2=pcolor(u)
    % Updating the plot
    set(h, 'CData', u);
    colormap(jet);
    colorbar;
    caxis([0 100]);

    title(sprintf("Distribution at t: %.3f [s].", counter));
    pause(0.01);
    %Lưu nhiệt độ tại điểm trung tâm
    center_temperatures(index) = u(center, center);
    time_temperatures(index) = counter;
```

```
    %Lưu nhiệt độ trung bình của cả tấm đồng
    avg_temperatures(index) = mean(u, 'all');
    %pause(0.01);
    index = index + 1;
end

% Show final plot
title(sprintf("Final temperature distribution at t: %.3f [s].", counter));

% Vẽ đồ thị
figure();
plot(time_temperatures,center_temperatures, 'b');
legend('Nhiệt độ trung tâm');
xlabel('Thời gian');
ylabel('Nhiệt độ (°C)');
title('Biểu đồ nhiệt độ');

% Show final plot
title('Final temperature distribution');

% Vẽ đồ thị
figure();
x_values = 0 : 1000;
plot(time_temperatures,avg_temperatures, 'b');
legend('Nhiệt độ trung bình');
xlabel('Thời gian');
ylabel('Nhiệt độ (°C)');
title('Biểu đồ nhiệt độ');
```