12.18 Valeurs remarquables du cercle trigonométrique dans le premier quadrant

x (rad)	x (°)	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\sqrt{3} \approx 1,73$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	non défini

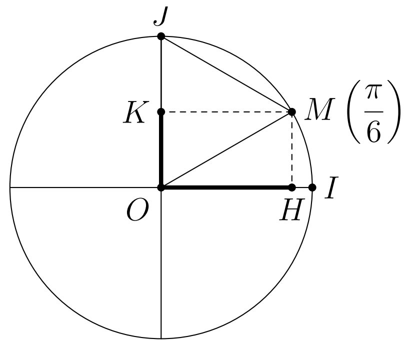
Démonstration. Évaluons les valeurs de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en $x = 0$.

- Si l'angle $\widehat{IOM}$ est tel que $\widehat{IOM} = 0$, alors le point M associé sur le cercle trigonométrique a pour abscisse 1.
  On en conclut, par définition du cosinus sur le cercle trigonométrique, que $\cos \frac{\pi}{2} = 1$.
- De même, si l'angle $\widehat{IOM}$ est tel que $\widehat{IOM} = 0$, alors le point M associé sur le cercle trigonométrique a pour ordonnées 0.
  On en conclut, par définition du sinus sur le cercle trigonométrique, que $\sin \frac{\pi}{2} = 0$.
- On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ par définition.
  On a montré que $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$.
  Donc $\tan 0 = \dfrac{0}{1} = 0$.

$\square$

Démonstration. Évaluons les valeurs de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Soit $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthonormal.



Soit M le point sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \dfrac{\pi}{6}$.
On a donc $M\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ dans $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Soient H le projeté orthogonal de M sur (OI) et K le projeté orthogonal de M sur (OJ).

- Sur le dessin, on a $\sin\dfrac{\pi}{6} = OK$.

  On se place dans le triangle OMJ.

  Les points M et J sont deux points appartenant au cercle trigonométrique, donc $OM = OJ = 1$ et le triangle OMJ est un triangle isocèle en M.
  Or, dans un triangle isocèle, les angles à la bases ont la même mesure.

  Donc $\widehat{OMJ} = \widehat{OJM}$ $(\star)$.

  Or, dans un triangle, on sait que la somme des angles vaut π radians.

  $$\begin{aligned}
  \text{Ainsi } \widehat{OMJ} + \widehat{OJM} + \widehat{MOJ} = \pi \quad &\iff \quad 2\widehat{OMJ} + \widehat{MOJ} = \pi \text{ d'après } (\star) \\
  &\iff \quad 2\widehat{OMJ} + \frac{\pi}{3} = \pi \text{ d'après la définition de } M \\
  &\iff \quad 2\widehat{OMJ} = \frac{2\pi}{3} \\
  &\iff \quad \widehat{OMJ} = \frac{\pi}{3}
  \end{aligned}$$

  Donc $\widehat{OMJ} = \dfrac{\pi}{3}$, et donc $\widehat{OMJ} = \widehat{OJM} = \widehat{MOJ} = \dfrac{\pi}{3}$.
  On en conclut que le triangle OMI est un triangle équilatéral.

  Or, dans un triangle équilatéral, la médiane et la hauteur issues d'un sommet sont confondues.
  Donc OK est une hauteur (par définition de K), mais aussi une médiane.
  On en conclut que K est le milieu de OJ, et donc que $OK = \dfrac{1}{2}OJ = \dfrac{1}{2}$.

  Donc $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

- On sait que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\text{Donc on a ici } \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=1 \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$
$$\iff \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}=1$$
$$\iff \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$$
$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}} \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$ car on s'est placé dans le premier quadrant.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On a $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ par définition.

  On a montré que $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  Donc $\tan\frac{\pi}{6}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

□

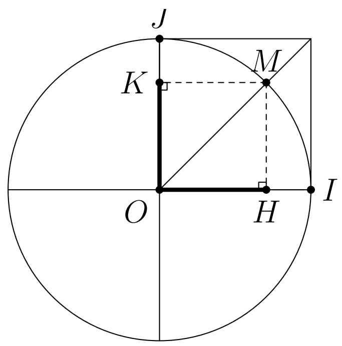
Démonstration. Évaluons les valeurs de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en $x=\frac{\pi}{4}$.

Soit $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthonormal.

Soit M le point sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM}=\frac{\pi}{4}$.

On a donc $M\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ dans $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

Soient H le projeté orthogonal de M sur (OI) et K le projeté orthogonal de M sur (OJ).



- Par définition de H, le triangle OHM est rectangle en H.

  Or, dans un triangle, la somme des angles vaut π.

  $$\text{Donc } \widehat{OMH}+\widehat{OHM}+\widehat{HOM}=\pi \iff \widehat{OMH}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi \text{ par définition de } M$$
  $$\iff \widehat{OMH}=\frac{\pi}{4}$$

  Ainsi, le triangle OHM, rectangle en H, a deux angles à la base de même mesure.

  Donc OHM est isocèle en H.

  On en déduit que $MH=HO$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM, on a :

$$\begin{aligned} OM^2 = OH^2 + MH2 &\iff OM^2 = 2OH^2 \text{ car } OH = MH \\ &\iff 2OH^2 = 1 \text{ car } OM \text{ est un rayon du cercle trigonométrique} \\ &\iff OH^2 = \frac{1}{2} \\ &\iff OH = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } OH = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ car on s'est placé dans le premier quadrant.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On sait que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc on a ici } \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 &\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\iff \frac{1}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\iff \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ car on s'est placé dans le premier quadrant.

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ par définition.

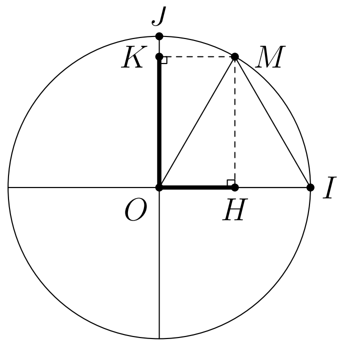
On a montré que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

$\square$

Démonstration. Évaluons les valeurs de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Soit $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthonormal.



Soit M le point sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \dfrac{\pi}{3}$.
On a donc $M\left(\cos\dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ dans $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Soient H le projeté orthogonal de M sur (OI) et K le projeté orthogonal de M sur (OJ).

- Sur le dessin, on a $\cos\dfrac{\pi}{3} = OH$.

  On se place dans le triangle OMI.

  Les points M et I sont deux points appartenant au cercle trigonométrique, donc $OM = OJ = 1$ et le triangle OMI est un triangle isocèle en M.
  Or, dans un triangle isocèle, les angles à la bases ont la même mesure.
  Donc $\widehat{OMI} = \widehat{OIM}$ $(\star)$.

  Or, dans un triangle, on sait que la somme des angles vaut π radians.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } \widehat{OMI} + \widehat{OIM} + \widehat{MOI} = \pi &\iff 2\widehat{OMI} + \widehat{MOI} = \pi \text{ d'après } (\star) \\
&\iff 2\widehat{OMI} + \frac{\pi}{3} = \pi \text{ d'après la définition de } M \\
&\iff 2\widehat{OMI} = \frac{2\pi}{3} \\
&\iff \widehat{OMI} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

  Donc $\widehat{OMI} = \dfrac{\pi}{3}$, et donc $\widehat{OMI} = \widehat{OIM} = \widehat{MOI} = \dfrac{\pi}{3}$.
  On en conclut que le triangle OMI est un triangle équilatéral.

  Or, dans un triangle équilatéral, la médiane et la hauteur issues d'un sommet sont confondues.
  Donc OH est une hauteur (par définition de H), mais aussi une médiane.
  On en conclut que H est le milieu de OI, et donc que $OH = \dfrac{1}{2}OI = \dfrac{1}{2}$.

  Donc $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

- On sait que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc on a ici } \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

  Or, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ car on s'est placé dans le premier quadrant.
  Donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ par définition.
  On a montré que $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
  Donc $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

□

Démonstration. Évaluons les valeurs de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

- Si l'angle $\widehat{IOM}$ est tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{2}$, alors le point M associé sur le cercle trigonométrique a pour abscisse 0.
  On en conclut, par définition du cosinus sur le cercle trigonométrique, que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
- De même, si l'angle $\widehat{IOM}$ est tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{2}$, alors le point M associé sur le cercle trigonométrique a pour ordonnées 1.
  On en conclut, par définition du sinus sur le cercle trigonométrique, que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
- On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ par définition.
  On a montré que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
  Or, diviser par 0 dans un résultat qui n'est pas défini.
  Ainsi, $\tan\frac{\pi}{2}$ n'est pas définie.

□