Notations pour les ensembles

Il est incontestable que les mathématiques ont une base expérimentale, et malgré l'abstraction que leur confère la pensée, leur valeur ne peut être complète que lorsqu'elles reviennent aux sources et aboutissent à des applications pratiques.

Des considérations générales montrent que la pensée logique se caractérise, fondamentalement, par la possibilité élémentaire d'identification qui gouverne le jugement et détermine les actions à entreprendre en fonction de connaissances acquises. L'identification peut revêtir deux aspects différents suivant les conditions qui la déterminent.

— C'est d'une part la synthèse, qui n'est en somme que l'identification globale d'un tout particulier,

— et d'autre part, l'analyse, qui consiste en une identification par décomposition d'un tout en ses éléments constitutifs déjà identifiés eux-mêmes.

L'analyse et la synthèse expriment, en fait, un même cheminement parcouru dans deux sens différents.

La pensée peut ainsi évoluer, s'élever, se perfectionner, puisqu'il lui est possible, à tout instant, de modifier sa progression et de revenir sur ses pas lorsque la voie empruntée s'avère sans issue. Analyse et synthèse donnent à la pensée une liberté essentielle qui l'autorise à une remise en cause permanente de l'acquis en fonction des éléments nouveaux retenus au cours de son évolution.

Exprimés sous forme mathématique, nous retrouvons, à la base de la théorie des ensembles, ces procédés élémentaires d'analyse et de synthèse qui traduisent les deux courants inverses et complémentaires suivant lesquels s'élabore le processus d'identification dans la pensée logique.

L'identification d'un ensemble ou d'une collection quelconque d'objets n'est rendue possible que par la définition qui en est donnée.

— Il est possible d'établir une liste nominative de tous les objets ou éléments identifiés qui le constituent. Dans ce cas, l'ensemble est défini en *extension*.

— Il est possible, également, de préciser une ou plusieurs propriétés nécessaires et suffisantes auxquelles satisfont tous les éléments de l'ensemble. L'ensemble est défini en *compréhension*.

L'ensemble « E_c » des chiffres 1, 3 , 5 , 7 , 9 par exemple, est défini en extension, alors que l'ensemble « E_i » des nombres impairs, se trouve par contre défini en compréhension, puisque tout élément qui appartient à « Ei » possède nécessairement la propriété d'être un nombre ayant la qualité d'être impair. Si « n_i » est un nombre impair, nous disons que « n_i » appartient à l'ensemble « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{n_i \in E_i}$$

Si « n_p » est un nombre pair, nous disons que « n_p » n'appartient pas à « E_i » , et nous écrivons :

$$\boxed{n_p \notin E_i}$$

L'ensemble « E_c » est constitué des chiffres impairs $1, 3, 5, 7, 9$, chacun de ces éléments appartient à « E_i » sans constituer la totalité des éléments de ce dernier. Nous disons alors que l'ensemble « E_c » est inclus dans l'ensemble « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{E_c \subseteq E_i}$$

L'inclusion de « E_c » dans « E_i » implique que tout élément « x » appartenant à « E_c » appartient également à « E_i » . L'implication s'écrit à l'aide d'un signe égal complété par une flèche ($\Longrightarrow$) dirigé dans le sens de l'implication. Dans le cas considéré, nous écrivons :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } E_c \subseteq E_i, \\ (x \in E_c) \Longrightarrow (x \in E_i) \end{array}}$$

et nous lisons : si « E_c » est inclus dans « E_i » , « x » appartenant à « E_c » implique que « x » appartient à « E_i » .

Si deux ensembles sont égaux ($E_i = E_j$), l'implication est valable dans les deux sens. Tout élément de « E_i » appartient à « E_j » et réciproquement. Nous écrivons alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } E_i = E_j, \\ (x \in E_i) \Longleftrightarrow (x \in E_j) \end{array}}$$

Définissons l'ensemble « E_9 » des neufs premiers nombres entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Cet ensemble contient les éléments $2, 4, 6, 8$, qui n'appartiennent pas à « E_i » . « E_9 » n'est donc pas inclus dans « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{E_9 \nsubseteq E_i}$$

Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. Pour vérifier que deux ensembles sont égaux il faut donc s'assurer que tout élément du premier appartient au second et que tout élément du second appartient au premier.

Il y a donc lieu de noter également l'utilisation courante des signes équivalents à des phrases telles que : « quel que soit... » ($\forall$) ou « il existe...» ($\exists$).

$\forall a$, *signifie : quel que soit « a ».*

$\exists x$, *signifie : il existe « x ».*

En utilisant tous les éléments communs à deux ensembles « A » et « B » , il est possible de constituer un ensemble « I » . Nous disons que « I » représente l'*intersection* des ensembles « A » et « B » et nous écrivons :

$$\boxed{I = A \cap B}$$

$$\boxed{(x \in A \text{ et } x \in B) \Longleftrightarrow (x \in I)}$$

Nous pouvons également rassembler ou réunir la totalité des éléments appartenant aux ensembles « A » et « B » . Nous définissons alors un nouvel ensemble « R » qui est la *réunion des ensembles* « A » et « B » et nous écrivons :

$$\boxed{R = A \cup B}$$

Nous en déduisons les implications :

$$(x \in A) \Longrightarrow (x \in R)$$

$$(x \in B) \Longrightarrow (x \in R)$$

Si à l'élément générique « a » d'un ensemble « A » nous faisons correspondre un élément « b » , et un seul, de l'ensemble « B » , « b » est appelé image de « a » . Si tout élément de « B » est l'image d'un ou de plusieurs éléments de « A » , nous disons que la correspondance est une *application de l'ensemble « A » sur l'ensemble « B »* . Si, seuls certains éléments de « B » sont des éléments de « A » , la correspondance est une application de « A » dans « B » . Si l'application est réciproque et biunivoque, elle prend le nom de *bijection.*

Nous pouvons établir, entre les éléments d'un ensemble, des relations de composition interne dont nous allons définir les propriétés élémentaires parmi lesquelles : *la réflexivité*, *la symétrie* et *la transitivité.*

Soit « $\mathcal{R}$ » une relation de composition interne :

— « $\mathcal{R}$ » est une relation réflexive si nous pouvons écrire $A \mathcal{R} A$,

— « $\mathcal{R}$ » possède la propriété de symétrie si $(A \mathcal{R} B) \Longleftrightarrow (B \mathcal{R} A)$,

— « $\mathcal{R}$ » est une relation transitive si $(A \mathcal{R} C \text{ et } C \mathcal{R} B) \Longrightarrow (A \mathcal{R} B)$.

Lorsqu'une relation « $\mathcal{R}$ » possède simultanément les trois propriétés, nous disons que c'est une relation d'*équivalence.*

Nous pouvons aussi définir dans l'ensemble « E » des *lois de composition internes* si à tout couple d'éléments $(a, b) \in E$ nous faisons correspondre un élément $d \in E$ tel que $d = a \circ b$).

— La loi est commutative si $a \circ b = b \circ a$,

— elle est associative si $a \circ b \circ c = (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

L'élément « $e \in E$ » est appelé *élément neutre* de la loi interne « $\circ$ » de « E » si $\forall x \in E$, nous pouvons écrire $e \circ x = x \circ e = x$.

L'élément « $a \in E$ » est appelé *élément absorbant* de la la loi interne « $\circ$ » de « E » , si $\forall x \in E$ » , nous pouvons écrire :

$$a \circ x = x \circ a = a$$

L'existence d'un certain nombre de lois dont les propriétés sont posées comme axiomes, définit dans un ensemble, une structure algébrique.