Plus petit commun multiple (PPCM)

Définitions. — On appelle multiple commun à deux ou plusieurs nombres entiers tout nombre multiple de chacun d'eux.

Ainsi 60 est un multiple commun à 6, 10 et 15.
Il y a toujours une infinité de multiples communs à plusieurs nombres (en particulier le produit de ces nombres et ses multiples).

Le plus petit des multiples communs à plusieurs nombres s'appelle leur plus petit commun multiple.
En abrégé PPCM.
Il est facile de vérifier que le PPCM de 6, 10 et 15 est égal à 30.

Multiples communs à deux nombres factorisés.

Il résulte immédiatement de la condition de divisibilité () que :

Pour qu'un nombre entier soit un multiple commun à deux nombres entiers A et B, il faut et il suffit qu'il contienne tous les facteurs premiers contenus dans A et dans B, chacun d'eux étant affecté d'un exposant au moins égal à son plus grand exposant dans A et B.

Ainsi les nombres : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $500 = 2^2 \times 5^3$ admettent pour multiples communs :

$2^3 \times 3^2 \times 5^3 = 27\,000, \quad 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 = 126\,000.$

Le plus petit des multiples communs s'obtient, donc en prenant seulement les facteurs contenus dans les deux nombres et en affectant chacun d'eux de l'exposant le plus petit possible. D'où :

Règle. — Le PPCM de deux nombres entiers décomposés en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs contenus dans les deux nombres, chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant.

Ainsi le PPCM des nombres 360 et 500 est égal à :

$$2^3 \times 3^2 \times 5^3 = 9\,000$$

Nous voyons d'autre part que les multiples communs aux deux nombres contiennent tous les facteurs premiers de leur PPCM avec de exposants au moins égaux à ceux de ce PPCM. D'où :

Théorème. — Les multiples communs d deux nombres entiers sont les multiples de leur PPCM.

Ainsi les multiples communs à 360 et à 500 sont les multiples de leur PPCM : 9 000. Leur liste commence donc par :

9 000, 18 000, 27 000, 36 000, etc.

PGCD et PPCM de plusieurs nombres. — Les conditions nécessaire et suffisantes des **??** et **??** s'étendent à plusieurs nombres. Il en est par suite de même des règles du PGCD et PPCM ainsi que des théorèmes **??** et **??**

EXEMPLE — *Calculer le* PGCD *et* PPCM *des nombres 300, 360 et 480. Établir la liste de leurs diviseurs communs et celle de leurs multiples communs.*

Décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2; \qquad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5; \qquad 480 = 2^5 \times 3$
LeurPGCD est égal à :

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60 \qquad .$$

Leur PPCM est égal à :

$$2^5 \times 3^2 \times 5^2 = 7\,200$$

.

La liste de leurs diviseurs communs est la liste des diviseurs de 60 :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

La liste de leurs multiples communs est la liste des multiples de 7 200 :

7 200, 14 400, 21 600, 28 800, etc.