Fonctions composées (associées)

Exemples rédigés

Méthode :
- On décompose la fonction en « blocs » simples,
- on applique les règles de composition <u>de droite à gauche</u>.

Exemple n°1 : Soit $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$, $\quad f$ définie sur $[2;+\infty[$.

Au brouillon : f, c'est $\sqrt{}$ $\boxed{\text{de}}$ $\quad x-2$.

On pose $g(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{X}}$ et $h(x) = x-2$

On a donc $f = g \circ h$

On sait que h est croissante sur $[2;+\infty[$.
On sait que composer par $\mathrm{X} \mapsto \sqrt{\mathrm{X}}$ ne change pas le sens de variation.

donc $g \circ h$ est croissante sur $[2;+\infty[$

à l'ordre quand on décompose en blocs !

Exemple n°2 :

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{2}{3x}$, $\quad f$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

On cherche toujours les variations sur un intervalle, donc un ensemble « sans trou »

<u>Sur $]0;+\infty[$</u> :

Au brouillon : f, c'est $-\dfrac{2}{3}\boxed{\times}\dfrac{2}{x}$.

On pose $g(x) = -\dfrac{2}{3}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

On a $f = g\boxed{\times}h$.
On sait que h est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Or, multiplier par une constante négative change le sens de variation.

Donc $g \times h$ est croissante.

On en conclut que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

<u>Remarque</u> : Le résultat est le même sur $]-\infty;0[$.

Exemple n°3 : un peu plus long. . .

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}+8}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux variations de f sur $[0,+\infty[$

au brouillon, on a f, c'est $-\sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+8}$,

donc $\sqrt{3} \times \left(\dfrac{1}{\dots} \text{ et } \sqrt{x^2+1}+8\right)$

donc $\sqrt{3} \times \left(\dfrac{1}{\dots} \text{ et } \left(\sqrt{x^2+1} \text{ et } 8\right)\right)$

donc $\sqrt{3} \times \left(\dfrac{1}{\dots} \text{ et } \left(\left(\sqrt{} \text{ et } x^2+1\right) \text{ et } 8\right)\right)$

On pose $\begin{cases} g : x \mapsto \sqrt{3} \\ h : x \mapsto \dfrac{1}{x} \\ i : x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} j : x \mapsto x^2+1 \\ k : x \mapsto 8 \end{cases}$

On a $f = g \times \left(h \circ \left((i \circ j) + k\right)\right)$

Quand il y a des parenthèses, elles sont prioritaires !
Mais on va toujours de droite à gauche.

On sait que $j : x \mapsto x^2+1$.

Or, la composition par $x \mapsto \sqrt{x}$ ne modifie pas le sens de variation. Donc $i \circ j$ est croissante.

Or, ajouter une constante à une fonction ne change pas son sens de variation, donc $(i \circ j) + k$ est croissante.

Or, la composition par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ inverse le sens de variation, donc $h \circ \left((i \circ j) + k\right)$ est décroissante.

Or, la multiplication par une constante négative change le sens de variation.

Donc, $g \times \left(h \circ \left((i \circ j) + k\right)\right)$ est croissante.

On en conclut que f est croissante.