Mathématiques
Seconde Générale

Monsieur Hilaire

Année 2012-2013

Lycée International de Saint-Germain-en-Laye

Ce document a été composé sous Unix[1] au moyen du logiciel LaTeX(domaine public), et de l'éditeur TeXMaker[2] (domain public). Les figures ont été réalisées avec Ti*k*Z[3] (domaine public) et intégrées directement dans le document final.

1. Unix est une marque déposée des Laboratoires Bell d'ATT
2. TeXmaker (créé par Pascal Brachet en 2003) est un éditeur libre de documents LaTeX, utilisable sur Linux, Mac et Windows.
3. TikZ est une extension permettant de générer des images PGF. Selon son auteur Till Tantau, TikZ est un acronyme récursif qui veut dire « TikZ ist kein Zeichenprogramm » : TikZ n'est pas un logiciel de dessin - au sens de « TikZ est un langage pour graphiques ».

Table des matières

1 Les ensembles de nombres. 8

1.1 Ensembles fondamentaux de nombres . . . 8

1.2 Intervalles . . . 9

1.2.1 Définition . . . 9

1.2.2 Extension de la notion d'intervalle : . . . 9

1.2.3 Intersection d'intervalles . . . 10

1.2.4 Réunion d'intervalles . . . 10

2 Activités Numériques 12

2.1 Fractions . . . 12

2.1.1 Rappels . . . 12

2.1.2 Un peu plus dur... . . . 13

2.2 Puissances . . . 14

2.2.1 Rappels . . . 14

2.2.2 Un peu plus dur... . . . 15

2.3 Racines carrées . . . 16

2.3.1 Écrire sous la forme $\mathbf{a\sqrt{b}}$ . . . 16

2.3.2 Racines carrées au dénominateur . . . 17

2.4 Exercices . . . 18

2.5 L'apothéose : . . . 19

2.5.1 Montrer que $\varphi^{\mathbf{2}} = \varphi + \mathbf{1}$ . . . 19

2.5.2 Calculez d'un seul coup . . . 19

3 Calcul littéral : Développement et factorisation 20

3.1 Rappels . . . 20

3.2 Exercices . . . 21

3.3 L'apothéose : . . . 23

3.4 Exercices . . . 25

4 Équations à une inconnue 26

4.1 Équations du premier degré . . . 26

4.2 Équations produit . . . 27

4.3 Exercices . . . 29

4.4 Équations comportant des racines carrées . . . 30

4.5 Équations avec l'inconnue au dénominateur . . . 31

4.6 Exemple de problèmes pratiques . . . 33

4.6.1 Exemple n° 1 . . . 33

4.6.2 Exemple n° 2 . . . 34

4.6.3 Exemple n° 3 . . . 35

4.6.4 Exemple n° 4 . . . 36

4.6.5 Exemple n° 5 . . . 37

4.6.6 Exemple n° 6 . . . 38

4.6.7 Exemple n° 7 . . . 39

4.6.8 Exemple n° 8 . . . 40

5 Inéquations à une inconnue **42**
5.1 Inéquations du premier degré . . . 42
5.2 Signe de **ax + b** (Tableau de signes) . . . 44
5.2.1 Exemple n° 1 . . . 44
5.2.2 Exemple n° 2 . . . 44
5.2.3 Tableau récapitulatif . . . 44
5.3 Inéquations produit . . . 45
5.4 Inéquation avec l'inconnue au dénominateur . . . 49
5.5 Systèmes d'inéquations . . . 51
5.5.1 Exemple n° 1 . . . 51
5.5.2 Exemple n° 2 . . . 52
5.5.3 Exercice n° 1 . . . 53
5.5.4 Exercice n° 2 . . . 54
5.5.5 Exercice n° 3 . . . 55
5.6 Exemples de problèmes pratiques . . . 56
5.6.1 Exemple n° 1 . . . 56
5.6.2 Exemple n° 2 . . . 57

6 Fonctions numérique de la variable réelle : Généralités et définitions **60**
6.1 Fonction . . . 60
6.2 Ensemble de définition d'une fonction . . . 60
6.2.1 Exercice n° 1 . . . 60
6.2.2 Exercice n° 2 . . . 60
6.2.3 Exercice n° 3 . . . 61
6.2.4 Exercice n° 4 . . . 61
6.2.5 Exercice n° 5 . . . 61
6.2.6 Exercice n° 6 . . . 61
6.3 Représentation graphique d'une fonction . . . 61

7 Vecteurs du plan **64**
7.1 Définition . . . 64
7.1.1 Direction d'une droite, et sens sur une direction de droite . . . 64
7.1.2 Définition fondamentale . . . 64
7.2 Égalité de 2 vecteurs . . . 64
7.3 Axiome fondamental . . . 66
7.4 Addition de vecteurs . . . 66
7.4.1 Méthode mathématique . . . 66
7.4.2 Méthode physique . . . 67
7.5 Conséquences de la relation de Chasles . . . 67
7.5.1 Le vecteur nul . . . 67
7.5.2 L'opposé d'un vecteur . . . 67
7.5.3 Soustraction de deux vecteurs . . . 68
7.6 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel . . . 68
7.6.1 Exemple n° 1 . . . 68
7.6.2 Exemple n° 2 . . . 69
7.7 Notions d'espace vectoriel . . . 69
7.7.1 Relations avec des vecteurs . . . 69
7.7.2 Relations avec des vecteurs et des nombres réels . . . 69
7.8 Vecteurs colinéaires . . . 70
7.8.1 Définition . . . 70

7.8.2 Syntaxe . . . 70
7.8.3 À retenir . . . 70
7.8.4 Points alignés . . . 70
7.8.5 Droites parallèles . . . 71
7.9 Milieu d'un segment . . . 71
7.9.1 Définition . . . 71
7.9.2 Démonstration . . . 71
7.10 Centre de gravité d'un triangle . . . 72
7.10.1 Démonstration . . . 72
7.10.2 Propriété fondamentale . . . 72
7.11 Exercices . . . 73
7.11.1 Exercice n° 0 . . . 73
7.11.2 Un superbe exercice . . . 74
7.11.3 Exercice n° 1 . . . 75
7.11.4 Exercice n° 2 . . . 76
7.11.5 Exercice n° 3 . . . 77
7.11.6 Exercice n° 4 . . . 78
7.11.7 Exercice n° 5 . . . 79
7.11.8 Exercice n° 6 . . . 81

8 Repères du plan **82**
8.1 Définition . . . 82
8.2 Coordonnées d'un point dans un repère . . . 82
8.3 Milieu d'un segment . . . 84
8.3.1 Exemple . . . 84
8.3.2 Démonstration . . . 84
8.4 Centre de gravité d'un triangle . . . 85
8.4.1 Exemple . . . 85
8.4.2 Démonstration . . . 86
8.5 Coordonnées d'un vecteur défini par un de ses représentants . . . 87
8.5.1 Exemple . . . 87
8.5.2 Démonstration . . . 87
8.6 Exemples de changements de repères . . . 88
8.6.1 Exemple n° 1 . . . 88
8.6.2 Exercice n° 2 . . . 89

9 Bases du plan **90**
9.1 Définition . . . 90
9.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base . . . 90
9.3 Coordonnées de la somme de deux vecteurs et coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel . . . 90
9.3.1 Exemple . . . 90
9.3.2 Démonstration . . . 91
9.4 Vecteurs colinéaires . . . 91
9.4.1 Notion de déterminant . . . 91
9.4.2 Exemple n° 1 . . . 91
9.4.3 Exemple n° 2 . . . 91
9.4.4 Condition de colinéarité de deux vecteurs . . . 91
9.4.5 Démonstration . . . 92
9.5 Exercices . . . 93

9.5.1 Exercice nº 1 93
9.5.2 Exercice nº 2 94
9.5.3 Exercice nº 3 97
9.5.4 Exercice nº 4 99
9.5.5 Exercice nº 5 101

10 Repères orthonormaux du plan **102**
10.1 Norme euclidienne d'un vecteur 102
10.1.1 Définition 102
10.1.2 Expression de la norme euclidienne d'un vecteur 103
10.1.3 Quelques propriétés de la norme euclidienne d'un vecteur 104
10.2 Distance de deux points 105
10.3 Exercices 106
10.3.1 Exercice nº 1 106
10.3.2 Exercice nº 2 107

11 Droites du plan **110**
11.1 Définitions 110
11.2 Équation cartésienne d'une droite 111
11.2.1 Exemple nº 1 111
11.2.2 Exemple nº 2 112
11.2.3 Conclusion 113
11.2.4 Exercice nº 1 113
11.2.5 Exercice nº 2 114
11.2.6 Exercice nº 3 114
11.2.7 Exercice nº 4 115
11.3 Droites parallèles et droites sécantes 116
11.3.1 Conditions de parallélisme de deux droites 116
11.3.2 Exemple 116
11.4 Intersection de 2 droites non parallèles 117
11.5 Droites remarquables 120
11.5.1 Droites parallèles à l'axe des abscisses 120
11.5.2 Droites parallèles à l'axe des ordonnées 120
11.5.3 Droites non parallèles à l'un des axes 121
11.6 Un soupçon d'algorithmique 122
11.6.1 Équation cartésienne d'une droite (AB) 122
11.6.2 Équation réduite d'une droite (AB) 123

12 Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues **128**
12.1 Introduction 128
12.1.1 Exemple nº 1 128
12.1.2 Exemple nº 2 129
12.1.3 Exercice nº 3 130
12.2 Systèmes se ramenant à des systèmes linéaires 131
12.2.1 Exercice nº 1 131
12.2.2 Exercice nº 2 132
12.3 Algorithmique 133
12.3.1 Colinéarité de deux vecteurs 133
12.4 Exemples de problèmes 134

13 Trigonométrie **142**
13.1 Cercle trigonométrique . . . 142
13.2 Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique . . . 142
13.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel . . . 144
13.4 Représentations graphiques . . . 149
13.4.1 Représentation graphique de la fonction sinus . . . 149
13.4.2 Représentation graphique de la fonction cosinus . . . 149
13.4.3 Comparaison des représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus . . . 150
13.4.4 Exercice . . . 151

14 Fonctions numériques de la variable réelle **152**
14.1 Introduction . . . 152
14.1.1 Exemples de représentations graphiques de fonctions polynômes. . . . 152
14.1.2 Exemples de représentations graphiques de fonctions rationnelles . . . 154
14.2 Fonctions affines . . . 163
14.3 Fonctions polynômes du second degré . . . 166
14.3.1 Fonction de référence . . . 166
14.3.2 Exemple fondamental . . . 167
14.3.3 Autre exemple fondamental . . . 171
14.4 Fonctions homographiques . . . 174
14.4.1 Fonction de référence . . . 174
14.4.2 Exemple fondamental . . . 175
14.4.3 Un autre exemple . . . 178
14.5 Intersections de courbes . . . 181
14.5.1 Exercice n° 1 . . . 181
14.5.2 Exercice n° 2 . . . 185
14.5.3 Exercices (Énoncés) . . . 190
14.5.4 Exercices (Correction) . . . 191
14.6 Exemples de problèmes . . . 199
14.6.1 Exercice n° 1 . . . 199
14.6.2 Exercice n° 2 . . . 201
14.6.3 Exercice n° 3 : Problème d'optimisation . . . 204
14.6.4 Exercice n° 4 : Problème d'optimisation . . . 206

15 Probabilités **210**
15.1 Ensembles finis . . . 210
15.1.1 Définitions . . . 210
15.1.2 Propriétés . . . 210
15.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble fini . . . 211
15.2 Vocabulaire des probabilités . . . 212
15.3 Lois de De Morgan . . . 213
15.4 Probabilité et espace probabilisé fini . . . 214
15.4.1 Définition . . . 214
15.4.2 Théorèmes fondamentaux . . . 214
15.4.3 Récapitulation . . . 214
15.5 Espace probabilisé fini dans lequel les événements sont équiprobables . . . 215
15.6 Exemples . . . 216
15.6.1 Exemple n° 1 . . . 216
15.6.2 Exercice n° 2 . . . 217
15.6.3 Amusette n° 1 . . . 218

15.6.4 Amusette n° 2 219
15.6.5 Exercice n° 3 220
15.6.6 Exercice n° 4 221
15.7 Événements indépendants 223
15.7.1 Exercice : Le Pachinko 223
15.8 Épreuves répétées 225
15.8.1 Épreuve de Bernoulli 225
15.8.2 Schéma de Bernoulli 225
15.8.3 Généralistation 226
15.8.4 Triangle de Pascal 227
15.8.5 Amusette 227
15.9 Lien entre les tableaux à doubles entrées et les arbres de probabilités 228
15.10 Exercices 230
15.10.1 Exercice n° 1 230
15.10.2 Exercice n° 2 230

1 Les ensembles de nombres.

1.1 Ensembles fondamentaux de nombres

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers : $3 \in \mathbb{N}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (vient de "zahlen" = les nombres en allemand) :
$3 \in \mathbb{Z}, -4 \in \mathbb{Z}$ mais $-4 \notin \mathbb{N}$

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels : $3 \in \mathbb{Q}, -4 \in \mathbb{Q}, \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ et $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q$

<u>Remarque :</u> $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux : $\frac{3}{4} = 0,75$ donc $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ mais $\frac{4}{3} = 1,333...$
d'où $\frac{4}{3} \notin \mathbb{D}$

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset Q$

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels : $3 \in \mathbb{R}, -4 \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \in \mathbb{R}, \frac{4}{3} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$
mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

<u>Remarque :</u>
$\pi \in \mathbb{R}$
$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à-dire qu'il est solution d'une équation algébrique à coefficients entiers) ; on peut avoir : $x^2 = 2$

π est un nombre irrationnel transcendant.
e est un nombre irrationnel transcendant.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes (aussi appelés nombres imaginaires ou nombres impossibles)
$\imath \in \mathbb{C}$
$\imath^2 = -1$

1.2 Intervalles

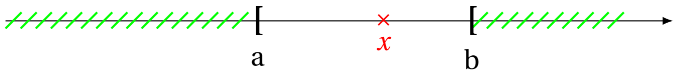
1.2.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

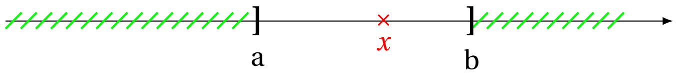
$[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$. C'est un intervalle fermé.

$]a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$. C'est un intervalle ouvert.

$[a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$. C'est un intervalle semi-ouvert à droite.

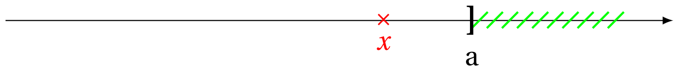


$]a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$. C'est un intervalle semi-ouvert à gauche.

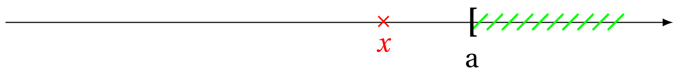


1.2.2 Extension de la notion d'intervalle :

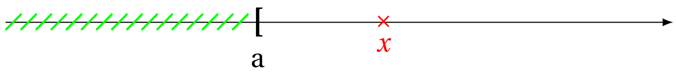
$]-\infty, a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.



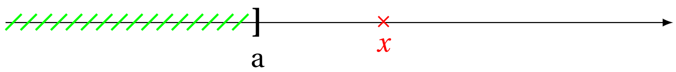
$]-\infty, a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.



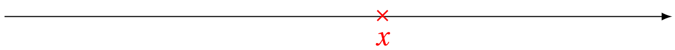
$[a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.



$]a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.

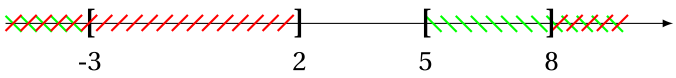


$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$



1.2.3 Intersection d'intervalles

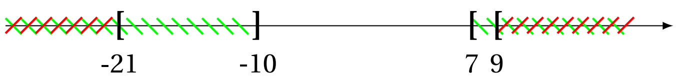
Exemple n° 1
$I = [-3, 5[$ et $J =]2, 8]$



$I \cap J$ est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I **et** J

$I \cap J =]2, 5[$

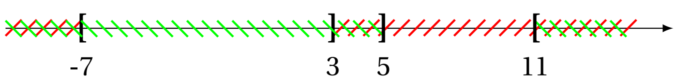
Exemple n° 2
$I =]-10, 7[$ et $J = [-21, 9[$



$I \cap J =]-10, 7[$

Remarque : $I \cap J = I$ car $I \subset J$

Exemple n° 3
$I = [-7, 3]$ et $J =]5, 11[$

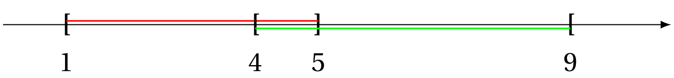


$I \cap J = \varnothing$ (l'ensemble vide)

1.2.4 Réunion d'intervalles

Exemple n° 1
$I = [1, 5]$ et $J = [4, 9[$

$I \cup J$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \in I$ **ou** $x \in J$



$I \cup J = [1, 9[$

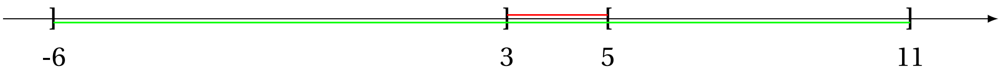
Exemple n° 2
$I =]-1, 3[$ et $J =]6, 10]$

$I \cup J =]-1, 3[\cup]6, 10]$

Remarque : Dans ce cas, la réunion des deux intervalles n'est pas un intervalle, mais une réunion d'intervalles. De plus, on a $I \cap J = \varnothing$

Exemple n° 3

I =]3,5[et J =]−6,11]



I ∪ J =]−6,11]

<u>Remarque :</u> I ∪ J = J car I ⊂ J

2 Activités Numériques

2.1 Fractions

2.1.1 Rappels

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$A = \frac{7}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{2}$

$A = \frac{7}{9} - \frac{3}{18}$

$A = \frac{14-3}{18}$

$A = \frac{11}{18}$

$B = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}$

$B = \frac{4}{9} - \frac{3}{2}$

$B = \frac{8}{18} - \frac{27}{18}$

$B = -\frac{19}{18}$

$C = \frac{A}{B} + \frac{11}{19}$

$C = \frac{\frac{11}{18}}{-\frac{19}{18}} + \frac{11}{19}$

$C = \frac{11}{18} \times \frac{18}{-19} + \frac{11}{19}$

$C = -\frac{11}{19} + \frac{11}{19}$

$C = 0$

2.1.2 Un peu plus dur...

$$A = \frac{9}{8} - \frac{\frac{7}{6}}{5} + \frac{4}{\frac{3}{2}}$$

$$A = \frac{9}{8} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{9}{8} - \frac{7}{30} + \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{135}{120} - \frac{28}{120} + \frac{320}{120}$$

$$A = \frac{107}{120} + \frac{320}{120}$$

$$A = \frac{427}{120}$$

$$B = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{5}}}}$$

$$B = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{\frac{19}{5}}}}$$

$$B = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \frac{5}{19}}}$$

$$B = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\frac{52}{19}}}$$

$$B = \cfrac{1}{2 - \frac{19}{52}}$$

$$B = \frac{1}{\frac{85}{52}}$$

$$B = \frac{52}{85}$$

$$C = \frac{1248}{7259} \times \frac{A}{B}$$

$$C = \frac{1248}{7259} \times \frac{\frac{427}{120}}{\frac{52}{85}}$$

$$C = \frac{1248}{7259} \times \frac{427}{120} \times \frac{85}{52}$$

$$C = \frac{24}{17} \times \frac{85}{120}$$

$$C = \frac{24}{17} \times \frac{17}{24}$$

$$C = 1$$

2.2 Puissances

Exemple n° 0
Écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{\left(10^{-3}\right)^5 \times 10^8}{5 \times 10^{-6}}$$

$$A = \frac{10^{-15} \times 10^8}{5 \times 10^{-6}}$$

$$A = \frac{10^{-7}}{10^{-6}} \times \frac{1}{5}$$

$$A = \frac{1}{5} \times 10^{-1}$$

$$A = \frac{1}{50}$$

2.2.1 Rappels

Soit a un nombre réel tel que $a \neq 0$.
Soient n et p des nombres entiers relatifs.

* $a^n \times a^p = a^{n+p}$
* $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
* $(a^n)^p = a^{np}$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$

* $(ab)^n = a^n b^n$
* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Et aussi...

* $a^0 = 1$ si et seulement si $a \neq 0$
* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si et seulement si $a \neq 0$

2.2.2 Un peu plus dur...

$$A = \frac{189}{2\,(-5)^{-2} - 5\,(-2)^{-5}}$$

...

A = 800

Soit $B(n) = \dfrac{9^{n+1} + 9^{n}}{3^{2n+1} - 3^{2n}}$

Calculer B(0), B(1), B(2) et B(3). Que remarque-t-on ? Justifiez.

Pour calculer B(1), B(2) ou B(3), on remplace n par 1, 2 ou 3
B(0) = 5
B(1) = 5
B(2) = 5
B(3) = 5
Pour justifier, on calculer $B(n)$:

$$B(n) = \frac{9^{n+1} + 9^{n}}{3^{2n+1} - 3^{2n}}$$

$$B(n) = \frac{\left(3^2\right)^{n+1} + \left(3^2\right)^{n}}{3^{2n+1} - 3^{2n}}$$

$$B(n) = \frac{3^{2n+2} + 3^{2n}}{3^{2n+1} - 3^{2n}}$$

$$B(n) = \frac{3^{2n} \times 3^2 + 3^{2n}}{3^{2n} \times 3 - 3^{2n}}$$

$$B(n) = \frac{3^{2n}\left(3^2 + 1\right)}{3^{2n}\,(3 - 1)}$$

$$B(n) = \frac{10}{2}$$

$B(n) = 5$

$$C = \frac{8 + 2\sqrt{28} - \sqrt{252}}{3ś2\sqrt{63} - \sqrt{343}}$$

...

$C = 5 + \sqrt{7}$

$$D = \frac{\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{11}}}{\sqrt{11}}}{\dfrac{1}{\sqrt{33}}}$$

...
D = 10

2.3 Racines carrées

2.3.1 Écrire sous la forme a$\sqrt{\mathbf{b}}$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ et b le plus petit possible.

$\mathrm{A} = 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$

$\mathrm{A} = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 14\sqrt{2}$

$\mathrm{A} = (4 - 12 + 14))\,\sqrt{2}$

$\mathrm{A} = 6\sqrt{2}$

$\mathrm{A}_{bis} = 3\sqrt{1183} - \sqrt{3703} - 2\sqrt{11767}$

$\mathrm{A}_{bis} = 39\sqrt{7} - 23\sqrt{7} - 82\sqrt{7}$

$\mathrm{A}_{bis} = (39 - 23 - 82)\,\sqrt{7}$

$\mathrm{A}_{bis} = -66\sqrt{7}$

$\mathrm{B} = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$

$\mathrm{B} = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3 \times 5}$

$\mathrm{B} = 3\sqrt{5}^2 \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$

$\mathrm{B} = 15 \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$

$\mathrm{B} = 150\sqrt{6}$

$\mathrm{B}_{bis} = 4\sqrt{7} \times 11\sqrt{14}5\sqrt{6}$

$\mathrm{B}_{bis} = 4\sqrt{7} \times 11\sqrt{2 \times 7} \times 5\sqrt{2 \times 3}$

$\mathrm{B}_{bis} = 4 \times 11 \times 2 \times 5 \times 7\sqrt{3}$

$\mathrm{B}_{bis} = 3080\sqrt{3}$

Rappels

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $a \geqslant 0$ et $b > 0$

$\sqrt{a+b} = \text{Rien!}$

2.3.2 Racines carrées au dénominateur

$\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\mathrm{A}_{bis} = \dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{15\sqrt{10}}{5} = 3\sqrt{10}$

$\mathrm{B} = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

1re idée :

$$\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} \Longrightarrow \textbf{NON !}$$

2^{e} idée :

$$\frac{4\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} = \frac{12-4\sqrt{5}}{14-6\sqrt{5}} \Longrightarrow \textbf{NON !}$$

Idée géniale :

$$\frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{12+4\sqrt{5}}{9-5} = \frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = 3+\sqrt{5}$$

$3+\sqrt{5}$ est le **conjugué** de $3-\sqrt{5}$.

$\mathrm{B}_{bis} = \dfrac{44}{3\sqrt{5}+1}$

$\mathrm{B}_{bis} = \dfrac{44\left(3\sqrt{5}-1\right)}{\left(3\sqrt{5}+1\right)\left(3\sqrt{5}-1\right)}$

$\mathrm{B}_{bis} = \dfrac{44\left(3\sqrt{5}-1\right)}{45-1}$

$\mathrm{B}_{bis} = \dfrac{44\left(3\sqrt{5}-1\right)}{44}$

$\mathrm{B}_{bis} = 3\sqrt{5}-1$

2.4 Exercices

Simplifier

$A = \left(\dfrac{\sqrt{17-2\sqrt{7}}}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{5}\right)^2$

...

$A = 1$

$B = \left(\sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{11-4\sqrt{7}}\right)^2$

...

$B = 16$

D'où $\sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{11-4\sqrt{7}} = 4$

$C = \left(\sqrt{37-12\sqrt{7}} - \sqrt{37+12\sqrt{7}}\right)^2$

...

$C = 36$

Ainsi $\sqrt{37-12\sqrt{7}} - \sqrt{37+12\sqrt{7}} = -6$ car $\sqrt{37-12\sqrt{7}} - \sqrt{37} + \sqrt{12\sqrt{7}} < 0$

<u>Amusette :</u>

$\sqrt{37-12\sqrt{7}} = \sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2} = -3+2\sqrt{7}$ car $3^2 < \left(2\sqrt{7}\right)^2$

$\sqrt{37+12\sqrt{7}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{7}\right)^2} = 3+2\sqrt{7}$

Ainsi $\sqrt{37-12\sqrt{7}} - \sqrt{37+12\sqrt{7}} = \left(-3+2\sqrt{7}\right) - \left(3+2\sqrt{7}\right) = -3 = 2\sqrt{7} - 3 - 2\sqrt{7} = -6$

2.5 L'apothéose :

On donne $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre s'appelle le nombre d'or et a des propriétés bien particulières.

2.5.1 Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$

$A = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$A = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$

$A = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\times 2}$

$A = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$B = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$

$B = \dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2}$

$B = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2.5.2 Calculez d'un seul coup

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}}$

$C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3 Calcul littéral : Développement et factorisation

3.1 Rappels

Exemple n° 0
$A(x) = (7x+5)^2 - (4x-9)^2$

Développement :
$A(x) = \left(49x^2 + 70x + 25\right) - \left(16x^2 - 72x + 81\right)$
$A(x) = 33x^2 + 142x - 56$

Factorisation :
$A(x) = (7x+5+4x-9)(7x+5-4x+9)$
$A(x) = (11x-4)(3x+14)$

Vérification :
$A(x) = (11x-4)(3x+14)$
$A(x) = 33x^2 + 154x - 12x - 56$
$A(x) = 33x^2 + 142x - 56$

Calculer A(10) de trois manières différentes :

— Avec la forme donnée :
$A(10) = (10 \times 7 + 5)^2 - (4 \times 10 - 9)^2$
$A(10) = (70+5)^2 - (40-9)^2$
$A(10) = 75^2 - 31^2$
$A(10) = 5625 - 961$
$A(10) = 4664$

— Avec la forme développée :
$A(10) = 33 \times 10^2 + 142 \times 10 - 56$
$A(10) = 3300 + 1420 - 56$
$A(10) = 4720 - 56$
$A(10) = 4664$

— Avec la forme factorisée :
$A(10) = (11 \times 10 - 4)(3 \times 10 + 14)$
$A(10) = (110-4)(30+14)$
$A(10) = 106 \times 44$
$A(10) = 4664$

3.2 Exercices

$A(x) = (2x-1)(4x+7) - (2x-1)(3x+1)$
...
Développer : $A(x) = 2x^2 + 11x - 6$
Factoriser : $A(x) = (2x-1)(x+6)$

$B(x) = (28x-12)(2x-1) - (35x-15)(x+8)$
...
Développer : $B(x) = 21x^2 - 317x + 132$
Factoriser : le facteur commun est caché :
$B(x) = 4(7x-3)(2x-1) - 5(7x-3)(x+3)$
...
$B(x) = (7x-3)(3x-44)$

$C(x) = 9x^2 - 30x + 25 - (3x-5)(x+2)$
...
Développer : $C(x) = 6x^2 - 31x + 35$
Factoriser : Attention à l'identité remarquable :
$C(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(x+2)$
...
$C(x) = (3x-5)(2x-7)$

$D(x) = 9x^2 - 25 - (3x-5)(2x-1)$
...
Développer : $D(x) = 3x^2 + 13x - 30$
Factoriser : Attention à l'identité remarquable :
$D(x) = (3x-5)(3x+5) - (3x-5)(2x-1)$
...
$D(x) = (3x-5)(x+6)$

$E(x) = 63x^2 - 168x + 112 - (15x-20)(x+3)$
...
Développer : $E(x) = 48x^2 - 193x + 172$
Factoriser : Il y a plusieurs étapes pour faire apparaître le facteur commun :
$E(x) = 7\left(9x^2 - 24x + 16\right) - 5(3x-4)(x+3)$
$E(x) = 7(3x-4)^2 - 5(3x-4)(x+3)$
...
$E(x) = (3x-4)(16x-43)$

$F(x) = 80x^2 - 45 - (28x+21)(x+3)$
...
Développer : $F(x) = 52x^2 - 105x - 108$
Factoriser : Il y a plusieurs étapes pour faire apparaître le facteur commun :
$F(x) = 5\left(16x^2 - 9\right) - 7(4x+3)(x+3)$
$F(x) = 5(4x-3)(4x+3) - 7(4x+3)(x+3)$
...
$F(x) = 5(4x+3)(13x+36)$

$G(x) = 1127x^2 + 3542x + 2783 - (63x + 99)(4x - 13)$
...
Développer : $G(x) = 875x^2 + 3965x + 4070$
Factoriser : Il y a plusieurs étapes pour faire apparaître le facteur commun :
$G(x) = 23\left(49x^2 + 154x + 121\right) - 9(7x + 11)(4x - 13)$
$G(x) = 23(7x + 11)^2 - 9(7x + 11)(4x - 13)$
...
$G(x) = (7x + 11)(125x + 370)$

$H(x) = 1088x^2 - 2873 - (56x - 91)(2x + 19)$
...
Développer : $H(x) = 976x^2 - 882x - 1144$
Factoriser : Il y a plusieurs étapes pour faire apparaître le facteur commun :
$H(x) = 17\left(64x^2 - 169\right) - 7(8x - 13)(2x + 19)$
$H(x) = 17(8x + 13)(8x - 13) - 7(8x - 13)(2x + 19)$
...
$H(x) = (8x - 13)(122x + 88)$

3.3 L'apothéose :

Factoriser :

$A(x) = x^2 + 6x - 7$

$A(x) = \left(x^2 + 6x + 9\right) - 16$

$A(x) = (x+3)^2 - 4^2$

$A(x) = (x+3-4)\,(x+3+4)$

$A(x) = (x-1)\,(x+7)$

$B(x) = x^2 - 8x - 9$

$B(x) = \left(x^2 - 8x + 16\right) - 25$

$B(x) = (x-4)^2 - 5^2$

$B(x) = (x-4+5)\,(x-4-5)$

$B(x) = (x+1)\,(x-9)$

Plus musclé :

$C(x) = x^2 + 3x - 28$

$$C(x) = \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{121}{4}$$

$$C(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$C(x) = \left(x + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}\right)$$

$C(x) = (x+7)\,(x-4)$

$D(x) = x^2 - 31x + 58$

$$D(x) = \left(x^2 + 31x + \frac{961}{4}\right) - \frac{729}{4}$$

$$D(x) = \left(x + \frac{31}{2}\right)^2 - \left(\frac{27}{2}\right)^2$$

$$D(x) = \left(x - \frac{31}{2} + \frac{27}{2}\right)\left(x - \frac{31}{2} - \frac{27}{2}\right)$$

$D(x) = (x-2)\,(x-29)$

$E(x) = 49x^2 + 70x - 56$

$E(x) = \left(49x^2 + 70x + 25\right) - 81$

$E(x) = (7x+5)^2 - 9^2$

$E(x) = (7x+5+9)\,(7x+5-9)$

$E(x) = (7x+14)\,(7x-4)$

$F(x) = 121x^2 - 286x - 27$

$F(x) = \left(121x^2 - 286 + 169\right) - 196$

$F(x) = (11x-13)^2 - 14^2$

$F(x) = (11x-13+14)\,(11x-13-14)$

$F(x) = (11x+1)\,(11x-27)$

Attention !
$G(x) = x^2 - 20x + 116$
$G(x) = \left(x^2 - 20x + 100\right) + 16$
$G(x) = (x - 10)^2 + 4^2$

Donc $G(x)$ ne se factorise pas.

$H(x) = 169x^2 + 130x + 146$
$H(x) = \left(169x^2 + 130x + 25\right) + 121$
$H(x) = (13x + 5)^2 + 11^2$

Donc $H(x)$ ne se factorise pas.

3.4 Exercices

$A(x) = (7x+2)^2 - (4x-15)^2$
...
Développée : $A(x) = 33x^2 + 148x - 221$
Factorisée : $A(x) = (11x-13)(3x+17)$

Calculez A(10) de trois manières différentes :
Forme donnée : $A(10) = 4559$
Forme développée : $A(10) = 4559$
Forme factorisée : $A(10) = 4559$

$B(x) = 36x^2 - 84x - 95$
...
$B(x) = (6x+5)(6x-19)$

$C(x) = 99x^2 - 330x + 275 - (12x-20)(x-7)$
...
$C(x) = (3x-5)(29x-27)$

$D(x) = 117x^2 - 208 - (6x+8)(x+7)$
...
$D(x) = (3x+4)(37x-66)$

4 Équations à une inconnue

4.1 Équations du premier degré

Exemple n° 0
$2x-3=0$

Résoudre l'équation $2x-3=0$
c'est trouver l'**ensemble** des nombres réels x tels que $2x-3=0$

$2x-3=0$
$2x-3+3=0+3$
$2x=3$

$2x\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$

$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Remarque
Un ensemble ne contenant qu'un élément s'appelle un **singleton**

Exemple n° 1
$3x-5=9x+1$
$3x-9x=1+5$
$-6x=6$
$6x=-6$
$x=-1$

$S=\{-1\}$

Exemple n° 2
$6-4(1-x)=4x+5$
$6-4+4x=4x+5$
$4x-4x=5-6+4$
$0x=3$

L'équation n'admet aucune solution, donc :
$S=\varnothing$

Exemple n° 3
$3-[5-(2x-7)]=2(x-4)-1$
$3-(5-2x+7)=2x-8-1$
$3-5+2x-7=2x-8-1$
$2x-2x=-8-1-3+5+7$
$0x=0$
L'équation admet une infinité de solutions, donc :
$S=\mathbb{R}$

4.2 Équations produit

Exemple n° 0

$(2x+5)(x-3)=0$
Trouver l'ensemble des nombres réels x tels que $(2x+5)(x-3)=0$

$2x+5=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0$

$2x=-5 \quad \text{ou} \quad x=3$

$x=-\dfrac{5}{2}$

$S=\left\{-\dfrac{5}{2} \quad ; \quad 3\right\}$

Remarque :
Un ensemble qui contient 2 éléments s'appelle une **paire**.

Exemple n° 1

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0$

$x=-3 \quad \text{ou} \quad x=3$

$S=\{-3;3\}$

Exemple n° 2

$64x^2+25=0$

$64x^2=-25$
Or un carré est toujours positif, donc l'équation n'admet aucune solution
$S=\varnothing$

Exemple n° 3

$x^2+12x-13=0$

$\left(x^2-12x+36\right)-49=0$

$(x+6)^2-7^2=0$

$(x+6+7)(x+6-7)=0$

$(x+13)(x-1)=0$

$x+13=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0$

$x=-13 \quad \text{ou} \quad x=1$

$S=\{-13;1\}$

Exemple n° 4

$81x^2 - 36x - 21 = 0$

$\left(81x^2 - 36x + 4\right) - 25 = 0$

$(9x-2)^2 - 5^2 = 0$

$(9x-2+5)\,(9x-2-5) = 0$

$(9x+3)\,(9x-7) = 0$

$9x+3=0 \quad \text{ou} \quad 9x-7=0$

$9x=-3 \quad \text{ou} \quad 9x=7$

$x=-\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x=\frac{7}{9}$

$\mathrm{S} = \left\{-\frac{1}{3};\frac{7}{9}\right\}$

Exemple n° 5

$225x^2 - 60x + 533 = 0$

$\left(225x^2 - 60x + 4\right) + 529 = 0$

$(15x-2)^2 + 529 = 0$

$(15x-2)^2 = -529$

Or, un carré est toujours positif, donc l'équation n'admet aucune solution :

$\mathrm{S} = \varnothing$

Exemple n° 6

$169x^2 - 286x + 121 = 0$

$(13x-11)^2 = 0$

$13x - 11 = 0$

$13x = 11$

$x = \frac{11}{13}$

$\mathrm{S} = \left\{\frac{11}{13}\right\}$

Remarque

Le singleton obtenu dans cette équation du second dégré est en fait une double solution.

4.3 Exercices

$5x^2 - 15 = 0$

...

$S = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$

$(21x - 23)^2 = (17x - 19)^2$

...

$S = \left\{1; \dfrac{21}{19}\right\}$

$847^2 - 462x + 63 = (55x - 15)(x + 13)$

...

$S = \left\{\dfrac{3}{11}; \dfrac{43}{36}\right\}$

$845x^2 - 45 = (91x - 21)(x - 11)$

...

$S = \left\{-\dfrac{46}{29}; \dfrac{3}{13}\right\}$

4.4 Équations comportant des racines carrées

Exemple n° 1

$x\sqrt{6}+7=x\sqrt{7}+\sqrt{42}$

$x\sqrt{6}-x\sqrt{7}=\sqrt{42}-7$

$x\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{42}-7$

$x=\dfrac{\sqrt{42}-7}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$

$x=\dfrac{\left(\sqrt{42}-7\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)}$

$x=\dfrac{6\sqrt{7}+7\sqrt{6}-7\sqrt{6}-7\sqrt{7}}{-1}$

$x=\sqrt{7}$

$\mathrm{S}=\left\{\sqrt{7}\right\}$

Exemple n° 2

$3x+5-2\sqrt{10}=x\sqrt{10}-2$

$3x-x\sqrt{10}=-5+2\sqrt{10}-2$

$x\left(3-\sqrt{10}\right)=-7+2\sqrt{10}$

$x=\dfrac{-7+2\sqrt{10}}{3-\sqrt{10}}$

$x=\dfrac{-\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)}{\left(3-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)}$

$x=\dfrac{-21-7\sqrt{10}+6\sqrt{10}+20}{-1}$

$x=1+\sqrt{10}$

$\mathrm{S}=\left\{1+\sqrt{10}\right\}$

Exemple n° 3

$5x^2-49=0$

$\left(x\sqrt{5}+7\right)\left(x\sqrt{5}-7\right)=0$

$x\sqrt{5}+7=0$ ou $x\sqrt{5}-7=0$

$x\sqrt{5}=-7$ ou $x\sqrt{5}=7$

$x=-\dfrac{7}{\sqrt{5}}$ ou $x=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

$x=-\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ ou $x=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

$\mathrm{S}=\left\{-\dfrac{7\sqrt{5}}{5};\dfrac{7\sqrt{5}}{5}\right\}$

Exemple n° 4

$x^2-14x+44=0$

$\left(x^2-14x+49\right)-5=0$

$(x-7)^2-\sqrt{5}^2=0$

$\left(x-7+\sqrt{5}\right)\left(x-7-\sqrt{5}\right)=0$

$x-7+\sqrt{5}=0$ ou $x-7-\sqrt{5}=0$

$x=7-\sqrt{5}$ ou $x=7+\sqrt{5}$

$\mathrm{S}=\left\{7-\sqrt{5};7+\sqrt{5}\right\}$

4.5 Équations avec l'inconnue au dénominateur

Exemple n° 1

$\dfrac{x+7}{x-5} = -3$

Il ne faut pas que x – 5 = 0, donc que x = 5. x = 5 est donc une valeur interdite

$x+7 = -3\,(x-5)$
$x+7 = -3x+15$
$x+3x = 15-7$
$4x = 8$
$x = 2$

La solution convient, donc on a :

$S = \left\{2\right\}$

Exemple n° 2

$$\frac{x^2-8}{(x-3)\,(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Valeurs interdites : $x = 3$ **ou** $x = 2$

$$\frac{x^2-8}{(x-3)\,(x-2)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)\,(x-2)}$$

$x^2-8 = x-2-x+3$

$x^2-8-x+2+x-3 = 0$

$x^2-9 = 0$

$(x+3)\,(x-3) = 0$

$x+3 = 0$ ou $x-3 = 0$

$x = -3$ ou $x = 3.$

3 ne convient pas, mais −3 convient. Donc :

$S = \left\{-3\right\}$

Exemple n° 3

$$\frac{x-1}{x+3}+\frac{x-6}{x-1}=\frac{x^2-x+4}{(x+3)(x-1)}$$

Valeurs interdites : x = −3 et x = 1

$$\frac{(x-1)^2+(x+6)(x+3)}{(x+3)(x-1)}=\frac{x^2-x+4}{(x+3)(x-1)}$$

$(x-1)^2+(x+6)(x+3)=x^2-x+4$
$x^2-2x+1+x^2+3x+6x+18-x^2+x-4=0$
$x^2-4x-21=0$
$\left(x^2-4x+4\right)-25=0$
$(x-2)^2-5^2=0$
$(x-2+5)(x-2-5)=0$
$(x+3)(x-7)=0$
$x=-3$ ou $x=7$

−3 ne convient pas, mais 7 convient :

$S=\left\{7\right\}$

Exercice n° 4

$$\frac{x^2+x}{\frac{x^3-1}{x-1}-1}=1$$

Valeur interdites : x = 1, x = 0 et x = −1

$$x^2+x=\frac{x^3-1}{x-1}-1$$

$$x^2+x=\frac{x^3-1-(x-1)}{x-1}$$

$\left(x^2+x\right)(x-1)=x^3-1-(x-1)$
$x^3-x^2+x^2-x=x^3-1-x+1$
$x^3-x^2+x^2-x-x^3+1+x-1=0$
$0x=0$

Sans oublier les valeurs interdites, on a :

$S=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,0,1\right\}$

Remarque

S peut aussi s'écrire :

$S=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

4.6 Exemple de problèmes pratiques

4.6.1 Exemple n° 1

Un père a 27 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, l'âge du père sera le double de l'âge du fils. Quels sont les âges actuels du père et du fils ?

1) Choix de l'inconnue

Soit x l'âge actuel du fils

2) Mise en équation du problème

	fils	père
âge	x	$x+27$
âge dans 6 ans	$x+6$	$(x+27)+6$

$x+33=2(x+6)$

3) Résolution de l'équation

$x+33=2(x+6)$
$x+33=2x+12$
$x-2x=12-33$
$-x=-21$
$x=21$

4) Réponse au problème
Le père a actuellement 48 ans, et son fils a actuellement 21 ans.

4.6.2 Exemple n° 2

Un troupeau est constitué de chameaux et de dromadaires. On compte 180 têtes, et 304 bosses. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

1) Choix de l'inconnue

Soit x le nombre de dromadaires.

2) Mise en équation du problème

	Dromadaires	Chameaux
Têtes	x	$180 - x$
Bosses	x	$2(180 - x)$

$304 - x = 360 - 2x$
car $x + 2(180 - x) = 304$

3) Résolution de l'équation

$304 - x = 360 - 2x$
$-x + 2x = 360 - 304$
$x = 56$

4) Réponse au problème

Donc il y a 56 dromadaires et 124 chameaux dans le troupeau.

4.6.3 Exemple n° 3

On augmente de 3 cm la longueur de chacun des côtés d'un carré. L'aire augmente alors de 45 cm^2, quelle était l'aire initiale du carré ?

1) Choix de l'inconnue

Soit x la longueur initiale du côté du carré. L'unité est le centimètre.

2) Mise en équation du problème

	Longueur	aire
avant	x	x^2
après	$x+3$	$(x+3)^2$

$x^2+45=(x+3)^2$

3) Résolution de l'équation

$x^2+45=(x+3)^2$
$x^2+45=x^2+6x+9$
$-6x=-36$
$-x=-6$
$x=6$

4) Réponse au problème

Donc l'aire initiale du carré était de 36cm^2.

4.6.4 Exemple n° 4

Monsieur X place à intérêts composés 10 000 € le 1er janvier 2010 à t%, puis 5 000 € le 1er janvier 2011 toujours à t%. Le montant de son capital le 1er janvier 2012 est de 16 275 euro. Quel est le taux de placement ?

Préliminaires :

— « Ajouter 15 % à p » se traduit par : $p+\dfrac{15}{100}p = p+0,15p = p\,(1+0,15) = 1,15p$

— « Retrancher 15 % de p » se traduit par : $p-\dfrac{15}{100}p = p-0,15p = p\,(1-0,15) = 0,85p$

1) Choix de l'inconnue

Soit t le taux de placement.

2) Mise en équation du problème

$$10000\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+5000\left(1+\frac{t}{100}\right)=16275$$

3) Résolution de l'équation

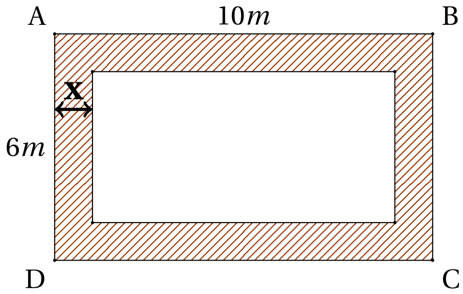
$$10000\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+5000\left(1+\frac{t}{100}\right)=16275$$
$$10000\left(1+\frac{2t}{100}+\frac{t^2}{10000}\right)+5000+\frac{5000t}{100}=16275$$
$$10000+200t+t^2+5000+50t=16275$$
$$t^2+250t-275=0$$
$$\left(t^2+250t+15625\right)-16000+0$$
$$(t+125)^2-130^2=0$$
$$(t+125+130)\,(t+125-130)=0$$
$$(t+235)\,(t-5)=0$$
Donc $t=-235$ ou $t=5$

-235 ne convient pas, mais 5 convient.

4) Réponse au problème

Le taux de placement est de 5%.

4.6.5 Exemple n° 5



Déterminer la longueur de la bande hachurée pour que l'aire du rectangle EFGH soit égale aux trois quarts de l'aire du rectangle ABCD.

1) Choix de l'inconnue

Soit x la longueur de la bande hachurée. L'unité est le mètre.

2) Mise en équation du problème

Aire du rectagle ABCD : 60m^2
Aire du rectangle EFGH : $(10-2x)(6-2x)$m^2

$$(10-2x)(6-2x) = \frac{3}{4} \times 60$$

3) Résolution de l'équation

$(10-2x)(6-2x) = 45$
$60-20x-12x+4x^2 = 45$
$4x^2-32x+60 = 45$
$4x^2-32x+15 = 0$
$\left(4x^2-32x+64\right)-49 = 0$
$(2x-8)^2-7^2 = 0$
$(2x-8+7)(2x-8-7) = 0$
$(2x-1)(2x-15) = 0$

$$\begin{array}{rcr} 2x-1=0 & \text{ou} & 2x-15=0 \\ 2x=1 & \text{ou} & 2x=15 \\ x=\dfrac{1}{2} & \text{ou} & x=\dfrac{15}{2} \\ \\ x=0,5 & \text{ou} & x=7,5 \end{array}$$

$7,5$ ne convient pas, mais $0,5$ convient.

4) Réponse au problème

La longueur de la bande hachurée est de 0,5m.

4.6.6 Exemple n° 6

À 10 heures, Sylvain part à bibyclette de A et se dirige vers B. Il route à 15 km/h.
À 10h30, Sylvette part de B et se dirige vers A. Elle roule à 10 km/h.
Sylvain et Sylvette se rencontrent en C pour pique-niquer.
Quelle heure est-il alors ?

On donne :
1) Choix de l'inconnue
Soit h l'heure de la rencontre.

2) Mise en équation du problème
Distance parcourue par Sylvain : $15\,(h-10)$

Distance parcourue par Sylvette : $10\,(h-10,5)$

$15\,(h-10) = 2\,[10\,(h-10,5)]$

3) Résolution de l'équation

$15\,(h-10) = 2\,[10\,(h-10,5)]$
$15h - 150 = 2\,(10h - 105)$
$15h - 150 = 20h - 210$
$15h - 20h = -210 + 150$
$-5h = -60$
$5h = 60$
$h = 12$

4) Réponse au problème
Sylvain et Sylvette se sont rencontrés à midi pour pique-niquer.

4.6.7 Exemple n° 7

Sylvain part à bicyclette de A et se dirige vers B. Il roule à 20 km/h.
Après avoir parcouru 8 km, il revient en A, s'arrête 12 minutes, puis repart vers B.
Sylvette va directement de A vers B. Elle roule à 16 km/h.
Sylvain et Sylvette sont partis en même temps de A et sont arrivés ensemble à B.
Quelle est la distance entre A et B ?

1. **Choix de l'inconnue**

   Soit d la distance entre A et B. (l'unité est le kilomètre)

2. **Mise en équation du problème**

   Temps mis par Sylvain : $\dfrac{d+16}{20}+0,2$

   Temps mis par Sylvette : $\dfrac{d}{16}$

   $\dfrac{d+16}{20}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{d}{16}$

3. **Résolution de l'équation**

   $\dfrac{d+16}{20}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{d}{16}$

   $\dfrac{d+16}{20}+\dfrac{4}{20}=\dfrac{d}{16}$

   $\dfrac{d+20}{20}=\dfrac{d}{16}$

   $\dfrac{4\,(d+20)}{80}=\dfrac{5d}{80}$

   $4\,(d+20)=5d$

   $4d+80=5d$

   $-d=-80$

   $d=80$

4. **Réponse au problème**

   La distance entre A et B est de 80 km.

4.6.8 Exemple n° 8

Sylvain et Sylvette partent simultanément pour effectuer un trajet de 54 km.
La vitesse de Sylvain est supérieure de 6 km/h à celle de Sylvette.
Sylvain arrive 45 min avant Sylvette.
Quelles sont les vitesses respectives de Sylvain et Sylvette ?

1. **Choix de l'inconnue**

   Soit V la vitesse de Sylvette en km/h.

2. **Mise en équation du problème**

   Temps mis par Sylvain : $\frac{54}{V+6}$

   Temps mis par Sylvette : $\frac{54}{V}$

   $\frac{54}{V+6}+\frac{3}{4}=\frac{54}{V}$

3. **Résolution de l'équation**

   $\frac{54}{V+6}+\frac{3}{4}=\frac{54}{V}$

   $\frac{216}{4V+24}+\frac{3V+18}{4V+24}=\frac{54}{V}$

   $V\,(216+3V+18)=54\,(4V+24)$

   $216V+3V^2+18V=216V+1296$

   $3V^2+18V-1296=0$

   $3\left(V^2+6V-432\right)=0$

   $3\left[\left(V^2+6V+9\right)-441\right]=0$

   $3\,(V+3)^2-21^2=0$

   $3\,(V+3+21)\,(V+3-21)=0$

   $3\,(V+24)\,(V-18)=0$

   $$\begin{array}{lll} V+24=0 & \text{ou} & V-18=0 \\ V=-24 & \text{ou} & V=18 \end{array}$$

   Une vitesse ne peut être négative, donc V = 18.

   On sait que la vitesse de Sylvain est V + 6. Donc la vitesse de Sylvette est de 18 hm/h et celle de Sylvain 24 km/h.

5 Inéquations à une inconnue

5.1 Inéquations du premier degré

$2x - 5 \leqslant 0$

$2x \leqslant 5$

$x \leqslant \frac{5}{2}$

Résoudre l'inéquation $2x - 5 \leqslant 0$, c'est trouver l'ensemble des nombres réels x tels que :

$2x - 5 \leqslant 0$.

$S = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$

Néanmoins, il faut faire attention, car parfois, le sens se modifie :

$-3x + 7 < 0$

$-3x < -7$

$3x > 7$

$x > \frac{7}{3}$

$$S = \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$$

Attention à certaines inéquations
$2x + 3 \leqslant x + 1 + x + 7$

$2x - 2x \leqslant 1 + 7 - 3$

$0x \leqslant 5$

Toujours vrai, donc : $S = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Remarque
Pour les 3 autres équations de la même famille, on aurait :
$0x < 5$ donne $S = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$0x > 5$ donne $S = \varnothing$

$0x \geqslant 5$ donne $S = \varnothing$

Pour $3 + 5x > 2 + 3x + 1 + 2x$, on a :

$-3x - 2x + 5x > 1 + 2 - 3$

$0x > 0$
Impossible, donc $S = \varnothing$

5.2 Signe de ax + b (Tableau de signes)

Soit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

Remarque
La fonction f est une fonction affine, car $f(x) = ax + b$

5.2.1 Exemple nº 1

Si $f(x) = 2x - 5$ avec $a = 2$ et $b = -5$, on a :

$f(x) = 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$2x - 5 = 0$	$2x - 5 < 0$	$2x - 5 > 0$
$2x = 5$	$2x < 5$	$2x > 5$
$x = \frac{5}{2}$	$x < \frac{5}{2}$	$x > \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	$-$	0	$+$

5.2.2 Exemple nº 2

$f(x) = -3x + 7$

$f(x) = 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$-3x + 7 = 0$	$-3x + 7 < 0$	$-3x + 7 > 0$
$-3x = -7$	$-3x < -7$	$-3x > -7$
$x = \frac{7}{3}$	$x > \frac{7}{3}$	$x < \frac{7}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$-3x + 7$	$+$	0	$-$

5.2.3 Tableau récapitulatif

$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$
$ax + b = 0$
$ax = -b$
$x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

5.3 Inéquations produit

Comment faire ?

Exemple n° 0

$(2x+5)(-3x+7) \leqslant 0$

Il faut faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+5)(-3x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$2x-5=0 \quad \text{et} \quad -3x+7=0$

$2x=-5 \quad \text{et} \quad -3x=7$

$x=-\dfrac{5}{2} \quad \text{et} \quad x=\dfrac{7}{3}$

$S = \left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right[$

Exemple n° 1

$x^2-9 \leqslant 0$

$(x+3)(x-3) \leqslant 0$

$x+3 \quad \text{ou} \quad x-3=0$
$x=-3 \quad \text{ou} \quad x=3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple n° 2
$-x^2+5x<0$

$x\,(-x+5)=0$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$x\,(-x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$

Exercice n° 1

$x^2+24x-52 \geqslant 0$
...
$(x+26)\,(x-2) \geqslant 0$

$x+26$ ou $x-2=0$
$x=-26$ ou $x=2$

x	$-\infty$		-26		2		$+\infty$
$x+26$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+26)\,(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty, -26] \cup [2, +\infty[$

Exercice n° 2

$-9x^2 + 21x + 8 > 0$

...

$(3x+1)(3x-8) < 0$

$3x+1=0 \quad \text{ou} \quad 3x-8=0$

$x = -\dfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{8}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+1)(3x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left] -\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3} \right[$

Attentions à certaines inéquations
Exemple n° 1

$49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$

$(7x-1)^2 \leqslant 0$

$7x - 1 = 0$

$7x = 1$

$x = \dfrac{1}{7}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$7x-1$		$-$	0	$+$	
$7x-1$		$-$	0	$+$	
$(7x-1)^2$		$+$	0	$+$	

$S = \left\{ \dfrac{1}{7} \right\}$

Remarque :
Pour les 3 autres inéquations de la même famille, on aura :

$49x^2 - 14x + 1 < 0 \qquad S = \varnothing$

$49x^2 - 14x + 1 \geqslant 0 \qquad S = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$49x^2 - 14x + 1 > 0 \qquad S = \left] -\infty; \dfrac{1}{7} \right[\cup \left] \dfrac{1}{7}; +\infty \right[$

Exemple n° 2

$25x^2 + 20x + 13 \leqslant 0$

$25x^2 + 20x + 4 + 9 \leqslant 0$

$(5x + 2)^2 + 9 \leqslant 0$

$(5x + 2)^2 \leqslant -9$

Or, le carré d'un nombre est toujours positif.
Donc $\mathrm{S} = \varnothing$.

Remarque :
Pour les 3 autres inéquations de la même famille, on aura :

$25x^2 + 20x + 13 < 0$	$\mathrm{S} = \varnothing$
$25x^2 + 20x + 13 < 0$	$\mathrm{S} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
$25x^2 + 20x + 13 < 0$	$\mathrm{S} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

5.4 Inéquation avec l'inconnue au dénominateur

$\dfrac{6}{x-2} \leqslant x-3$

Il ne faut pas que $x-2=0$ **donc que** $x=2$

Valeur interdite : $x=2$

Attention, dans le cas des inéquations, le produit en croix est interdit

$\dfrac{6}{x-2} - (x-3) \leqslant 0$

$\dfrac{6-(x-2)(x-3)}{x-2} \leqslant 0$

$\dfrac{6-\left(x^2-5x+6\right)}{x-2} \leqslant 0$

$\dfrac{-x^2+5x}{x-2} \leqslant 0$

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x(-x+5)}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S = [0, 2[\cup [5, +\infty[$

Exercice n° 2

$$\frac{x^2-15}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}$$

Valeurs interdites : $x = 4$ **et** $x = 3$

$$\frac{x^2-15}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant \frac{(x-3)-(x-4)}{(x-4)\,(x+3)}$$

$$\frac{x^2-15}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant \frac{1}{(x-4)\,(x+3)}$$

$$\frac{x^2-15-1}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2-16}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant 0$$

$$\frac{(x+4)\,(x-4)}{(x-4)\,(x-3)} \geqslant 0$$

Remarque
Simplifier est alors dangereux... Il est plus prudent d'écrire le tableau de signes ainsi :

x	$-\infty$		-4		3		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x\,(x+4)\,(x-4)}{(x-4)\,(x-3)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

$S = \,]-\infty, -4] \cup \,]3, 4[\, \cup \,]4, +\infty[$

5.5 Systèmes d'inéquations

5.5.1 Exemple n° 1

$$\begin{cases} 2x+3 > 3x-2 \\ 3(x-2) \geqslant 2-5x \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver l'ensemble des nombres réels x
tels que $2x+3 > 3x-2$ **et** $3(x-2) \geqslant 2-5x$

1re inéquation :

$2x+3 > 3x-2$

$-x > -5$

$x < 5$

$S_1 =]-\infty, 5[$

2^{me} inéquation :

$3(x-2) \geqslant 2-5x$

$3x-5 \geqslant 2-5x$

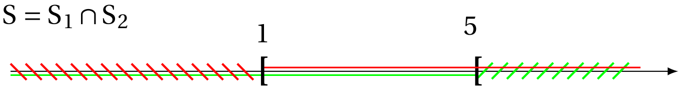
$8x \geqslant 8$

$x \geqslant 1$

$S_2 = [1, +\infty[$

3 : Système

$S = S_1 \cap S_2$



$S = [1, 5[$

5.5.2 Exemple n° 2

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x > \frac{1}{5} + x \\ 6(2-x) \leqslant -2x \end{cases}$$

1re inéquation :

$\frac{3}{5}x - x > \frac{1}{5}$

$x\left(\frac{3}{5} - 1\right) > \frac{1}{5}$

$-\frac{2}{5}x > \frac{1}{5}$

$x < \frac{1}{5} \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

$x < -\frac{1}{2}$

$S_1 = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

2^{me} inéquation :

$12 - 6x \leqslant -2x$

$-4x \leqslant -12$

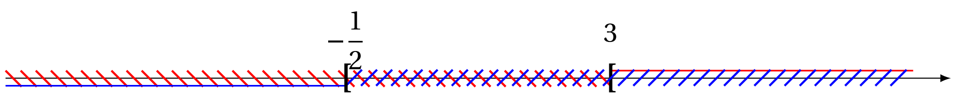
$4x \geqslant 12$

$x \geqslant 3$

$S_2 = [3, +\infty[$

3 : Système

$S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$



Remarque

Les 2 inéquations sont incompatibles.

5.5.3 Exercice n° 1

$$\begin{cases} 4x^2+3x+1 \geqslant x^2-3x+1 \\ (x+1)^2 > 5x+5 \end{cases}$$

1^{re} inéquation

$3x^2+6x \geqslant 0$
$3x(x+2) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

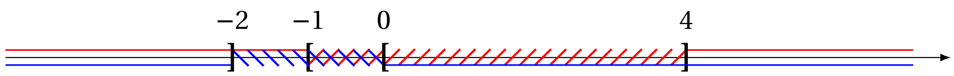
2^{me} inéquation

$(x+1)^2 > 5(x+1)$
$(x+1)^2 - 5(x+1) > 0$
$(x+1)(x+1-5) > 0$
$(x+1)(x-4) > 0$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_2 =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

3 : Système
$S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -2] \cup]4, +\infty[$



5.5.4 Exercice n° 2

$0 \leqslant (3x-8)^2 - (x-4)^2 \leqslant 48$
C'est une **double inéquation**, cela veut dire que :

$(3x-8)^2 - (x-4)^2 \geqslant 0$
$(3x-8)^2 - (x-4)^2 \leqslant 48$

1^{re} inéquation
$(3x-8+x+4)\,[(3x-8)-(x+4)] \geqslant 0$
$(3x-8+x+4)\,(3x-8-x-4) \geqslant 0$
$(4x-4)\,(2x-12) \geqslant 0$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$(4x-4)\,(2x-12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 =]-\infty, 1] \cup [6, +\infty[$

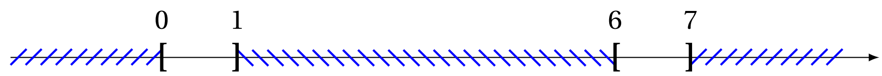
2^{me} inéquation
$(3x-8)^2 - (x+4)^2 \leqslant 48$
$\left(9x^2 - 48x + 64\right) - \left(x^2 + 8x + 16\right) \leqslant 48$
$9x^2 - 48x + 64 - x^2 - 8x - 16 \leqslant 48$
$8x^2 - 56x + 48 \leqslant 48$
$8x^2 - 56x \leqslant 0$
$8x\,(x-7) \leqslant 0$

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$8x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$8x\,(x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_2 = [0, 7]$

3 : Système

$S = S_1 \cap S_2 = [0, 1] \cup [6, 7]$



5.5.5 Exercice n° 3

$2 \leqslant \dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 3$

Valeur interdite : x = −2

Pour la première inéquation, on a :

$\dfrac{-x+1}{x+2} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+1)(x+2)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S_1 =]-2, 1]$

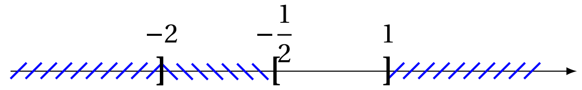
Pour la deuxième inéquation, on a :

$\dfrac{-2x-1}{x+2} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x-1)(x+2)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S_2 =]-\infty, -2[\cup \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

$S = S_1 \cap S_2 = \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$



5.6 Exemples de problèmes pratiques

5.6.1 Exemple n° 1

Un motard poursuit une voiture sur l'autoroute. La voiture est à 150 km de la sortie. Elle roule à 120 km/h.

Le motard est à x km derrière la voiture. Il roule à 130 km/h.

Pour quelles valeurs de x Sylvain rattrape-t-il Sylvette, avant la sortie de l'autoroute ?

1) Choix de l'inconnue.
Soit x la distance, en km, qui sépare le motard de la voiture.

2) Mise en équation du problème

Temps mis par le motard : $\frac{x+150}{130}$

Temps mis par la voiture : $\frac{150}{120}$

Donc $\frac{x+150}{130} \leqslant \frac{150}{120}$

3) Résolution de l'équation

$\frac{x+150}{130} \leqslant \frac{150}{120}$

$\frac{x+150}{130} \leqslant \frac{5}{4}$

$\frac{2(x+150)}{260} \leqslant \frac{325}{260}$

$2x+300 \leqslant 325$

$2x \leqslant 25$

$x \leqslant 12{,}5$

4) Réponse au problème
Donc le motard rattrapera la voiture si la distance qui le sépare est inférieur à $12{,}5$ km.

5.6.2 Exemple n° 2

Voici les tarifs pratiqués par 3 agences de location de voiture pour des véhicules identiques :

- Agence A : $52,74$€par jour et $0,41$ €par km ;
- Agence B : $43,14$€par jour et $0,49$ €par km ;
- Agence C : $47,40$€par jour et $0,44$ €par km.

Sylvain et Sylvette désirent parcourir x km par jour. Quelle agence choisissent-ils ?

1. **Choix de l'inconnue.**
   Soit x le nombre de km parcourus.

2. **Mise en équation du problème**

   $P_A(x) = 52,74\text{€}+0,41x$
   $P_B(x) = 43,14\text{€}+0,49x$
   $P_C(x) = 57,40\text{€}+0,44x$

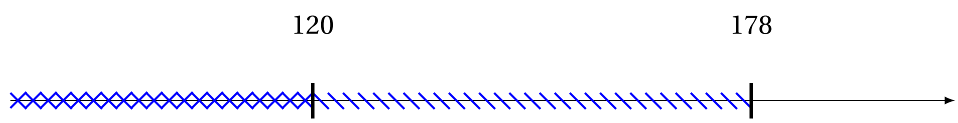
   Sylvain et Sylvette choisissent l'agence A si $P_A(x) \leqslant P_B(x)$ et $P_A(x) \leqslant P_C(x)$.
   Sylvain et Sylvette choisissent l'agence B si $P_B(x) \leqslant P_A(x)$ et $P_B(x) \leqslant P_C(x)$.
   Sylvain et Sylvette choisissent l'agence C si $P_C(x) \leqslant P_A(x)$ et $P_C(x) \leqslant P_B(x)$.

3. **Résolution de l'équation**

   (a) $\begin{cases} 52,74+0,41x & \leqslant 43,14+0,49x \\ 52,74+0,41x & \leqslant 57,40+0,44x \end{cases}$

   i. $52,74+0,41x \leqslant 43,14+0,49x$
      $-0,08x \leqslant -9,6$
      $0,08 \geqslant 9,6$
      $x \geqslant 120$

   ii. $52,74+0,41x \leqslant 57,40+0,44x$
       $-0,03x \leqslant -5,34$
       $0,03x \geqslant 5,34$
       $x \geqslant 178$



Sylvain et Sylvette choisissent l'agence A s'ils parcourent une distance supérieure à 178 km.

(b) $\begin{cases} 43,14+0,49x & \leqslant 52,74+0,41x \\ 43,14+0,49x & \leqslant 57,40+0,44x \end{cases}$

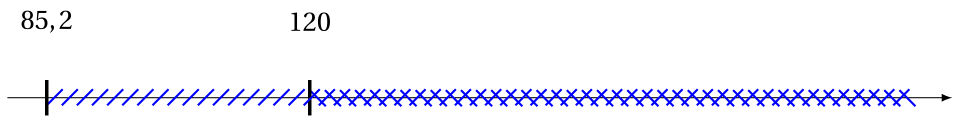
i. $43,14+0,49x \leqslant 52,74+0,41x$

D'après (a)i. , on a : $x \leqslant 120$

ii. $43,14+0,49x \leqslant 57,40+0,44x$

$0,05x \leqslant 4,26$

$x \leqslant 85,2$

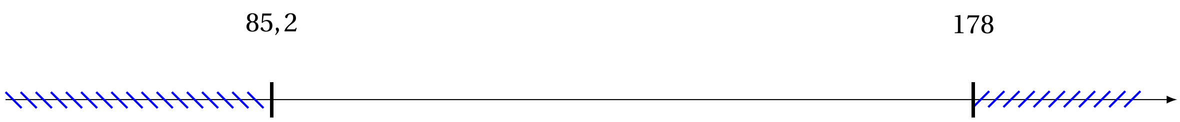


Sylvain et Sylvette choisissent l'agence B s'ils parcourent une distance inférieure à $85,2$ km.

(c) $\begin{cases} 57,40+0,44x & \leqslant 52,74+0,41x \\ 57,40+0,44x & \leqslant 43,14+0,49x \end{cases}$

i. D'après (a)ii, on a : $x178$

ii. D'après (b)ii, on a : $x \geq 85,2$



Sylvain et Sylvette choisissent l'agence C s'ils parcourent une distance comprise entre $85,2$ km et 178 km.

6 Fonctions numérique de la variable réelle : Généralités et définitions

6.1 Fonction

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{f(x)}_{\text{image de} x} \end{array}$

f est une fonction numérique de la variable réelle si et seulement si :
Tout élément de $\mathbb{R}$ a au plus une image dans $\mathbb{R}$.

Remarques

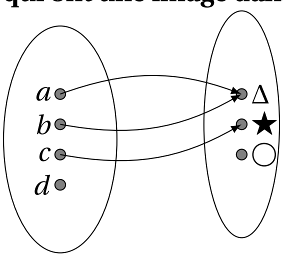
* Vocabulaire : "Au plus une" veut dire, soit une, soit aucune.

* f est une fonction et $f(x)$ un nombre réel.

6.2 Ensemble de définition d'une fonction

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

L'ensemble de définition de f, noté $\mathbf{D_f}$, est l'ensemble de élément de $\mathbb{R}$ qui ont une image dans $\mathbb{R}$



$f(a) = \Delta$
$f(b) = \Delta$
$f(c) = \bigstar$

$D_f = \left\{a, b, c\right\}$

$D_f = E \setminus \left\{d\right\}$

6.2.1 Exercice n° 1

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \quad = \dfrac{x-4}{x-2} \end{array}$

Il ne faut pas que $x - 2 = 0$, donc que $x = 2$.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

6.2.2 Exercice n° 2

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \quad = \sqrt{x-2} \end{array}$

Il faut que $x - 2 \geqslant 0$, donc que $x \geqslant 2$
$D_f = [2, +\infty[$

6.2.3 Exercice n° 3

Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \quad = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

Il ne faut pas que $x^2-4=0$, donc que $(x+2)(x-2)=0$

$x+2=0$ ou $x-2=0$

$x=-2$ ou $x=2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, 2\right\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

6.2.4 Exercice n° 4

Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \quad = \sqrt{x^2-4}$$

Il faut que $x^2-4 \geqslant 0$, donc que $(x+2)(x-2) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty, -2[\cup [2, +\infty[$

6.2.5 Exercice n° 5

Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \quad = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

Il ne faut pas que $x^2+4=0$, donc $x^2=-4$.

Ceci est impossible, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Remarque

Il s'agit du problème de la continuité.

6.2.6 Exercice n° 6

Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \quad = \sqrt{x^2+4}$$

Il faut que $x^2+4 \geqslant 0$, donc $x^2 \geqslant -4$

Ceci est toujours vrai, donc $D_f = \mathbb{R}$.

6.3 Représentation graphique d'une fonction

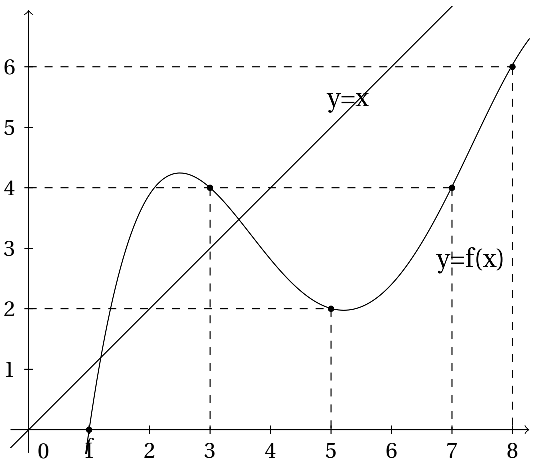
Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Soit $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.

La représentation graphique de f, notée C_f, est l'ensemble des points $M\left(x, y\right)$ avec $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

I



On a représenté ci-contre :

* La droite d'équation $y = x$;
* La courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1;8]$.

Les question posées seront résolues par **lecture graphique**.

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

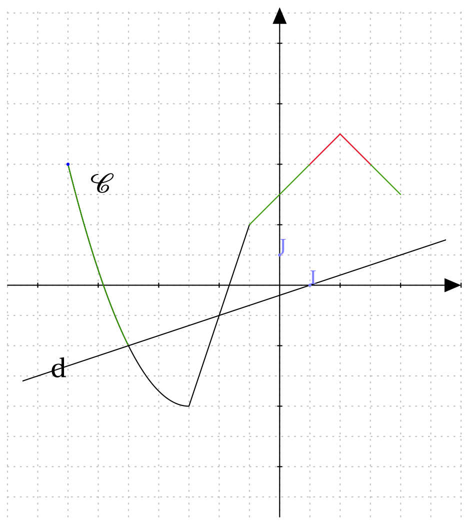
	vrai ou faux	
1 a pour image 0 par la fonction f	*V*	
0 a pour image 1 par la fonction f	*F*	
5 est un antécédent de 2 par la fonction f	*V*	
4 a deux antécédents par la fonction f : 3 et 7	*F*	
Combien 3 a-t-il d'antécédents ?	*3*	
$f(3) \leqslant f(5)$	*F*	
f est croissante sur l'intervalle $[1;8]$	*V*	pas strictement
L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1;8]$	*V*	
Si x appartient à l'intervalle $[3;5]$ alors $f(x) \leqslant x$	*F*	

II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-7;4]$ par sa représentation graphique $\mathscr{C}$ et la fonction g dont la représentation graphique est la droite d.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique

1. (a) Quelles sont les images par f des réels -3 et 0 ?
   (b) Quels sont les antécédents éventuels de 4 par f ?
2. Résoudre graphiquement les équations et les inéquations suivantes en justifiant les réponses ;
   (a) $f(x) = 5$
   (b) $f(x) = g(x)$
   (c) $f(x) \geqslant 4$
   (d) $f(x) > g(x)$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.



1. (a) $f(-3) = -4$
   $f(0) = 3$

   (b) Les antécédents de 4 par f sont -7, 1 et 3.

2. (a) $f(x) = 5$
   $S = \{2\}$

   (b) $f(x) = g(x)$
   $S = \{-5, -2\}$

   (c) $f(x) \geqslant 4$
   $S = \{-7\} \cup [1, 3]$

3. $S = [-7, -5[\cup]-2, 4]$

x	-7		-3		2		4
$f(x)$	4	↘	-4	↗	5	↘	3

7 Vecteurs du plan

7.1 Définition

7.1.1 Direction d'une droite, et sens sur une direction de droite

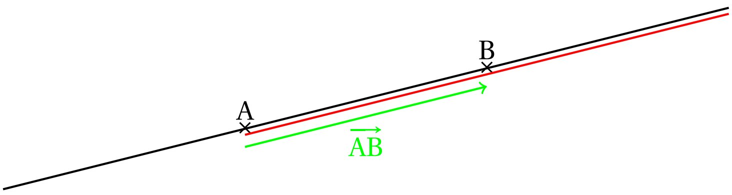
— Soit D une droite
  On appelle **direction de D** l'ensemble des droites parallèles à D.
— Soit D une droite
  On dit qu'on a choisi un **sens sur la direction de D** dès que l'on a orienté toutes les droites parralèles à **D** de la même façon.

7.1.2 Définition fondamentale

On appelle **vecteur** la donnée de :

* Une direction de droite ;
* Un sens sur cette direction ;
* Un nombre réel positif.

Plus précisément : Soient A et B deux points distincts.
La donnée **dans cet ordre** des points A et B définit un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$:

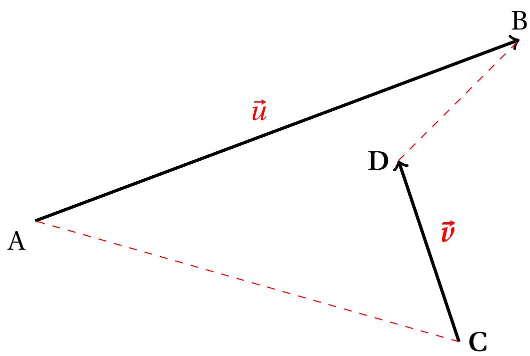


* La direction de droite est la direction de la droite (AB)
* Le sens sur cete direction est le sens de A vers B, c'est-à-dire le sens de la demi-droite [AB)
* Le nombre réel positif est la longueur du segment [AB], c'est-à-dire la distance AB.

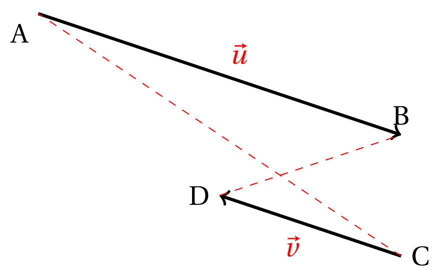
7.2 Égalité de 2 vecteurs

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs.

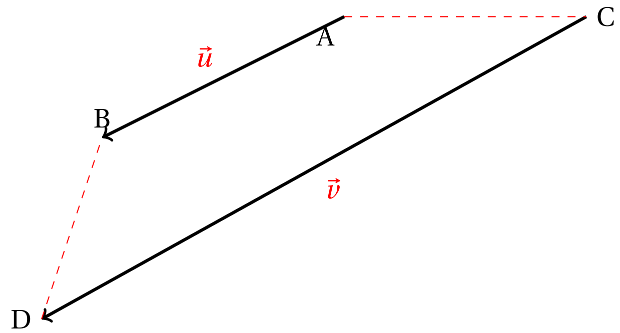
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si :
* La direction (AB) = la direction de (CD), c'est-à-dire (AB)//(CD).
* Le sens de [AB) = le sens de [CD)
* La longueur de [AB] = la longueur de [CD]



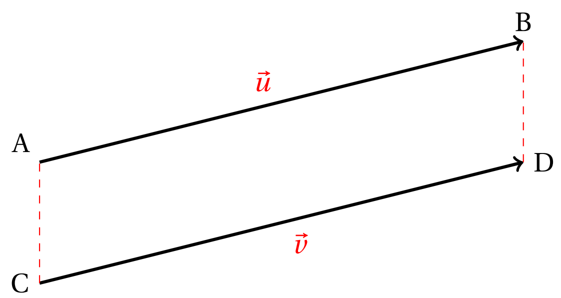
$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ car (AB) et (CD) ne sont pas parralèles



$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ car (AB)//(CD) mais le sens de [AB] $\neq$ le sens de [CD].



$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ car (AB)//(CD), le sens de [AB] = le sens de [CD], mais AB $\neq$ CD.

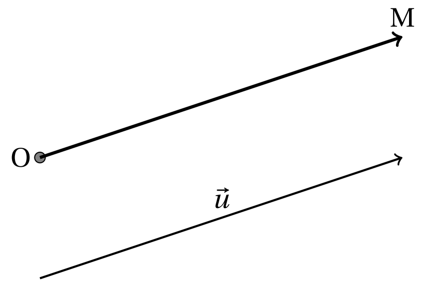


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car (AB)//(CD), le sens de [AB] = le sens de [CD] et AB = CD.
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
En rouge, le quadrilatère ABDC.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.
Remarques :

* $\Longleftrightarrow$ se lit : « équivalent à », ou « si et seulement si »
* Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, et ABDC est un parallélogramme, on a aussi :
  * $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
  * $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
  * $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

7.3 Axiome fondamental

Soit O un point.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

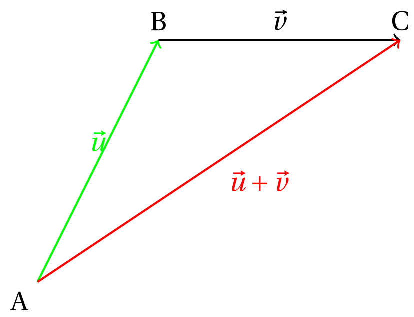


Il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$

7.4 Addition de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

7.4.1 Méthode mathématique

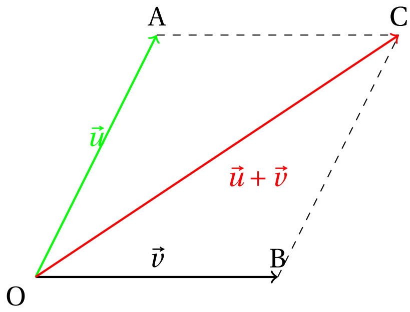


$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ceci s'appelle la **Relation de Chasles** (Michel Chasles est un mathématicien français (1793-1880)).

7.4.2 Méthode physique



$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

Ceci est **la règle du parallélogramme**. Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ s'appelle **la résultante des forces**.

7.5 Conséquences de la relation de Chasles

7.5.1 Le vecteur nul

Soit A un point.

Combien vaut le vecteur $\overrightarrow{AA}$?

$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$
$x+a=a$
$x=0$.
Donc $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (<– vecteur nul)

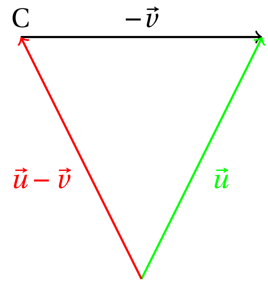
7.5.2 L'opposé d'un vecteur

Soient A et B deux points.
Combien vaut le vecteur $\overrightarrow{BA}$?

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$
$a+x=0$
$x=-a$
Donc $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ (<– opposé de $\overrightarrow{AB}$

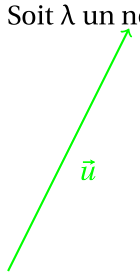
7.5.3 Soustraction de deux vecteurs

$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{v}\right)$



7.6 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Soit λ un nombre réel.

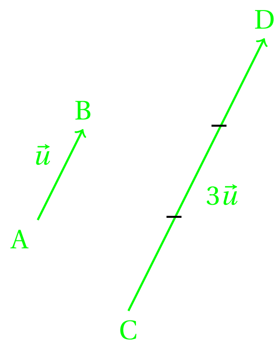


Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le nombre réel λ est le vecteur noté $\lambda\overrightarrow{u}$ défini par :
– La direction de (CD) = la direction de (AB), c'est-à-dire (AB) // (CD)

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
* Le sens de [CD)	* le sens de [AB)
$CD = \lambda AB$	$CD = -\lambda AB$

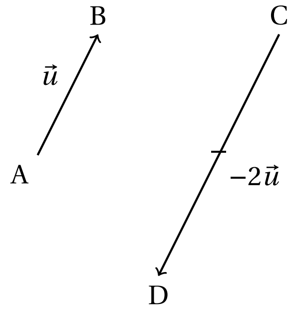
7.6.1 Exemple n° 1

$\lambda = 3$



7.6.2 Exemple n° 2

$\lambda = -2$



Et si $\lambda = 0$?

Alors $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

7.7 Notions d'espace vectoriel

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.
Soient λ et μ deux nombres réels.

7.7.1 Relations avec des vecteurs

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$

7.7.2 Relations avec des vecteurs et des nombres réels

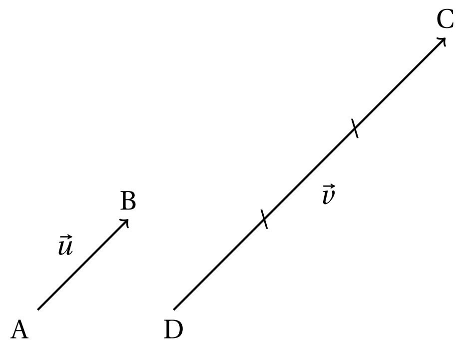
- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- $\lambda\left(\mu\overrightarrow{u}\right) = \left(\lambda\mu\right)\overrightarrow{u}$
- $\lambda \times \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
- $\left(\lambda + \mu\right)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$

7.8 Vecteurs colinéaires

7.8.1 Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
$\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ si et seulement si : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$

Exemple :



$\overrightarrow{v}$ est coliénaire à $\overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$.

Remarque
$\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan. En effet, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$

Soient $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ tels que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ avec $\lambda \neq 0$.
On a donc $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$ et non $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{\lambda}$

7.8.2 Syntaxe

On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, ou que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

7.8.3 À retenir

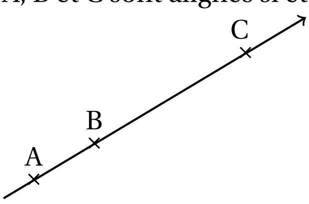
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ avec $\lambda \neq 0$

Si $\lambda > 0$	Si $\lambda < 0$
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens	$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

7.8.4 Points alignés

Soient A, B et C trois points alignés.

A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

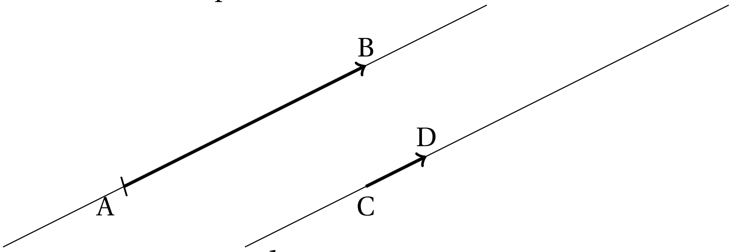


A, B et C sont alignés car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

7.8.5 Droites parallèles

Soient (AB) et (CD) deux droites :

(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

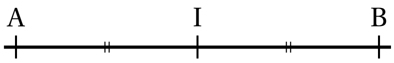


(AB) / / (CD) car $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

7.9 Milieu d'un segment

7.9.1 Définition

Soient A et B deux points distincts.
Il existe un point I et un seul tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
I est le milieu de [AB]



7.9.2 Démonstration

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{IA} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}$

$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

$2\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

7.10 Centre de gravité d'un triangle

Soient A, B et C trois points non-alignés.
Il existe un point G et un seul tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7.10.1 Démonstration

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

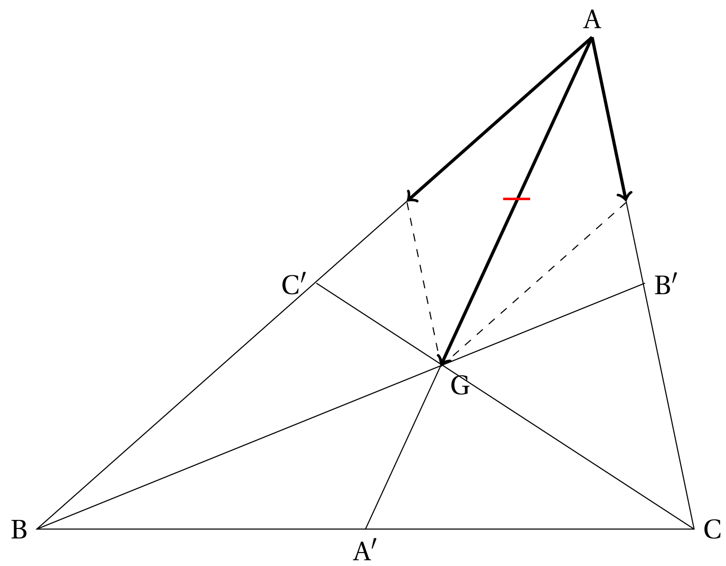
$\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}$

$3\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7.10.2 Propriété fondamentale



Soit A' le milieu de [BC]
$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\underbrace{\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}\right)}_{=\overrightarrow{0}\text{ car A' est le milieu de [BC]}}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

On aussi, avec B' le milieu de [AC], on a $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, et avec C' le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$
Les trois médianes du triangle sont concourantes en un point, ici G.

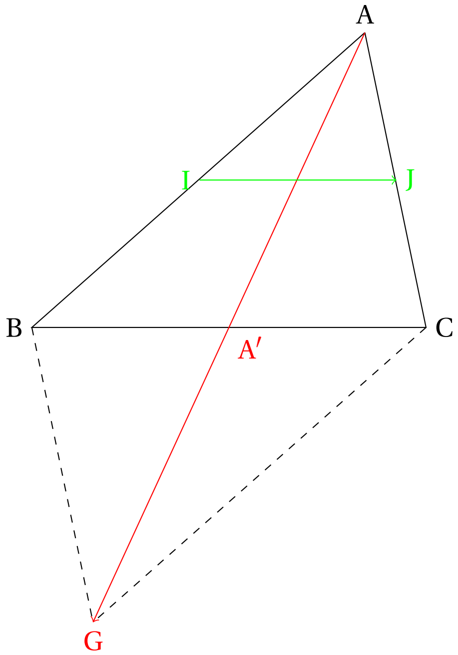
7.11 Exercices

7.11.1 Exercice nº 0

Soit ABC un triangle.

1. Soit A' le milieu de [BC]. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

2. Soient I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}\right) + \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'} + \underbrace{\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}}_{=\vec{0} \text{ car A}' \text{ est le milieu de [BC]}}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$

Donc les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu.

2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

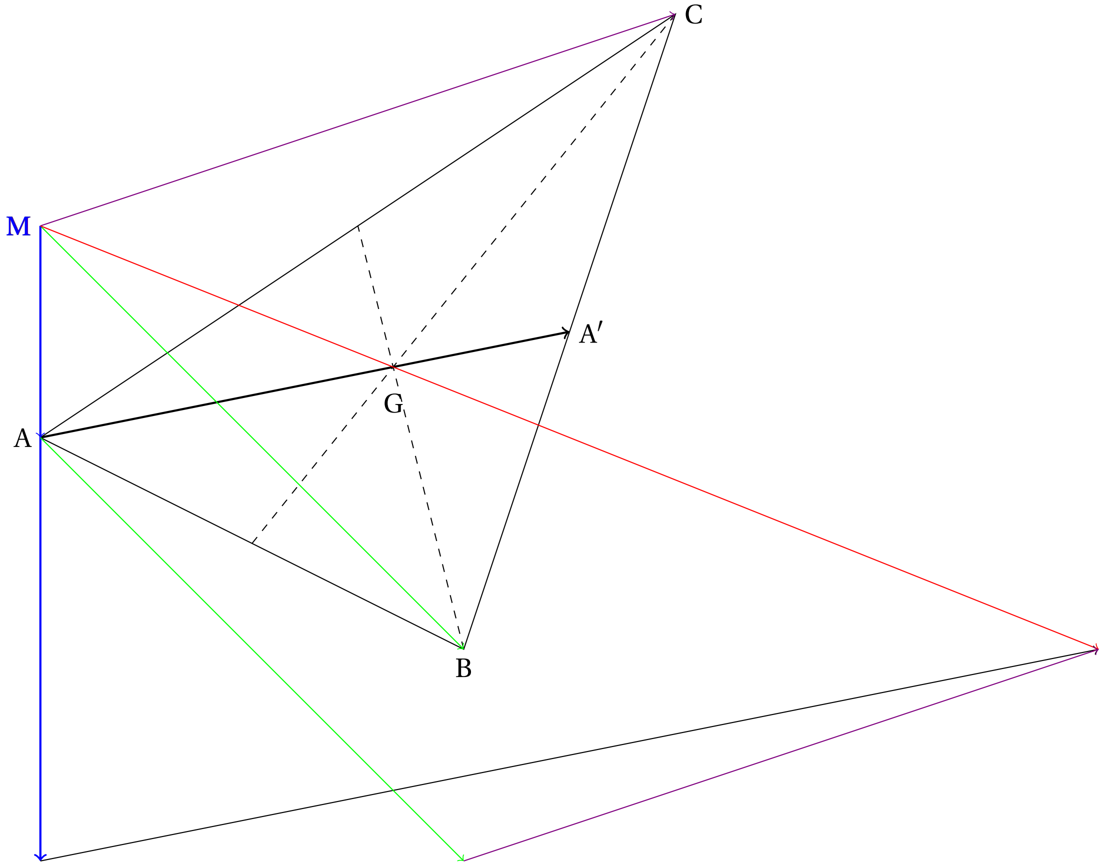
$\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7.11.2 Un superbe exercice

Soit ABC un triangle.
Soit A' le milieu de [BC].
Soit G le centre de gravité de ABC.
Soit M un point quelconque.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AA'}$
2. Montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$



1. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)$

   $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AA'}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}}_{=\overrightarrow{0}\text{ car A}'\text{ est le milieu de [BC]}}$

2. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

   $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}\text{ car G est le centre de gravité du triangle ABC}}$

7.11.3 Exercice n° 1

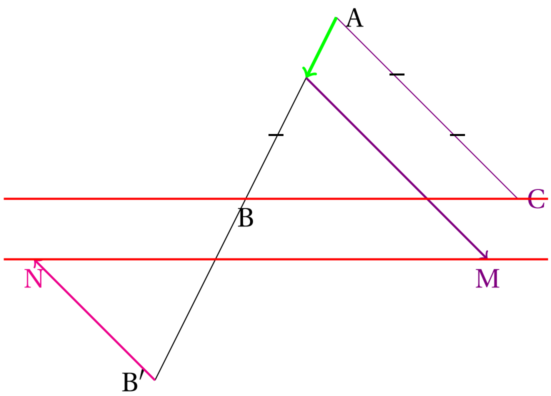
Soit ABC un triangle.
1. Construire les points M et N définis par :

* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
* $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

3. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1.



2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

3. $\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \frac{5}{3}\left(\overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{5}{3}\left(\overrightarrow{BC}\right)$

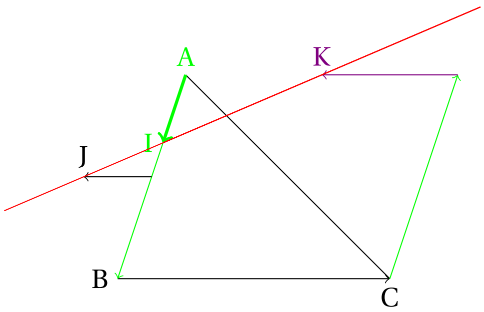
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc (MN) // (BC)

7.11.4 Exercice n° 2

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points I, J et K définis par :
   * $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   * $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
   * $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
   Puis, exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

1.



2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Et : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

3. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On constate que $\overrightarrow{IK} = -2\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IJ}$

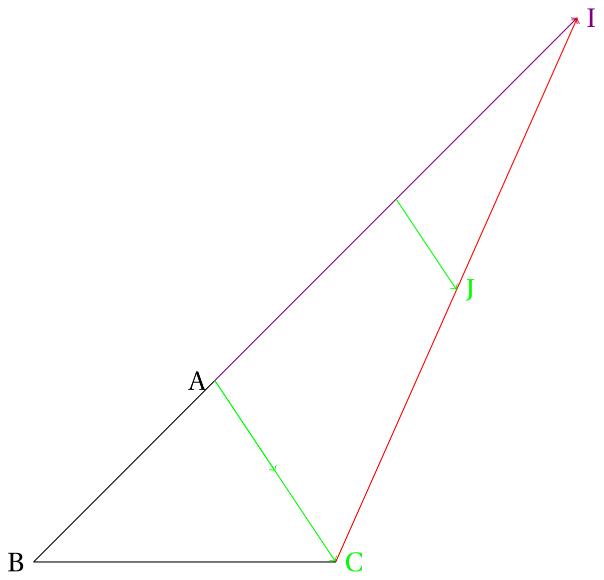
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, donc les points I, J et K sont alignés.

7.11.5 Exercice n° 3

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points I et J tels que :
   * $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$
   * $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que J et le milieu de [IC]

1.



2. $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JC} = \left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}\right)$

   $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$

   $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$

   $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{AB} + (-2)\,\overrightarrow{AB}$

   $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$

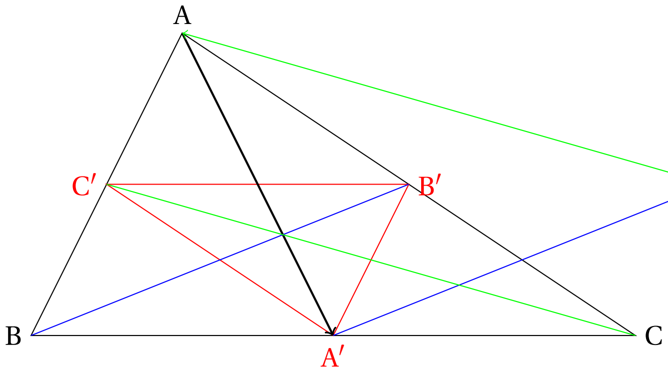
   Donc J est le milieu de [IC].

7.11.6 Exercice n° 4

Soit ABC un triangle.
Soient A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC], et C' le milieu de [AB]
Soit G le centre de gravité de ABC.

1. Exprimer :
   * $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$
   * $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{BB'}$
   * $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ en fontion de $\overrightarrow{CC'}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$
3. Montrer que G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

1.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)+\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}}_{=\overrightarrow{0}\text{ car A' est le milieu de [BC]}}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$$

Donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CC'}$

2. $$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB}$$

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$$

3. $$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}\right)$$

$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}\text{ car G est le centre de gravité de ABC}}+\underbrace{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}}_{=\overrightarrow{0}\text{ d'après 2.}}$$

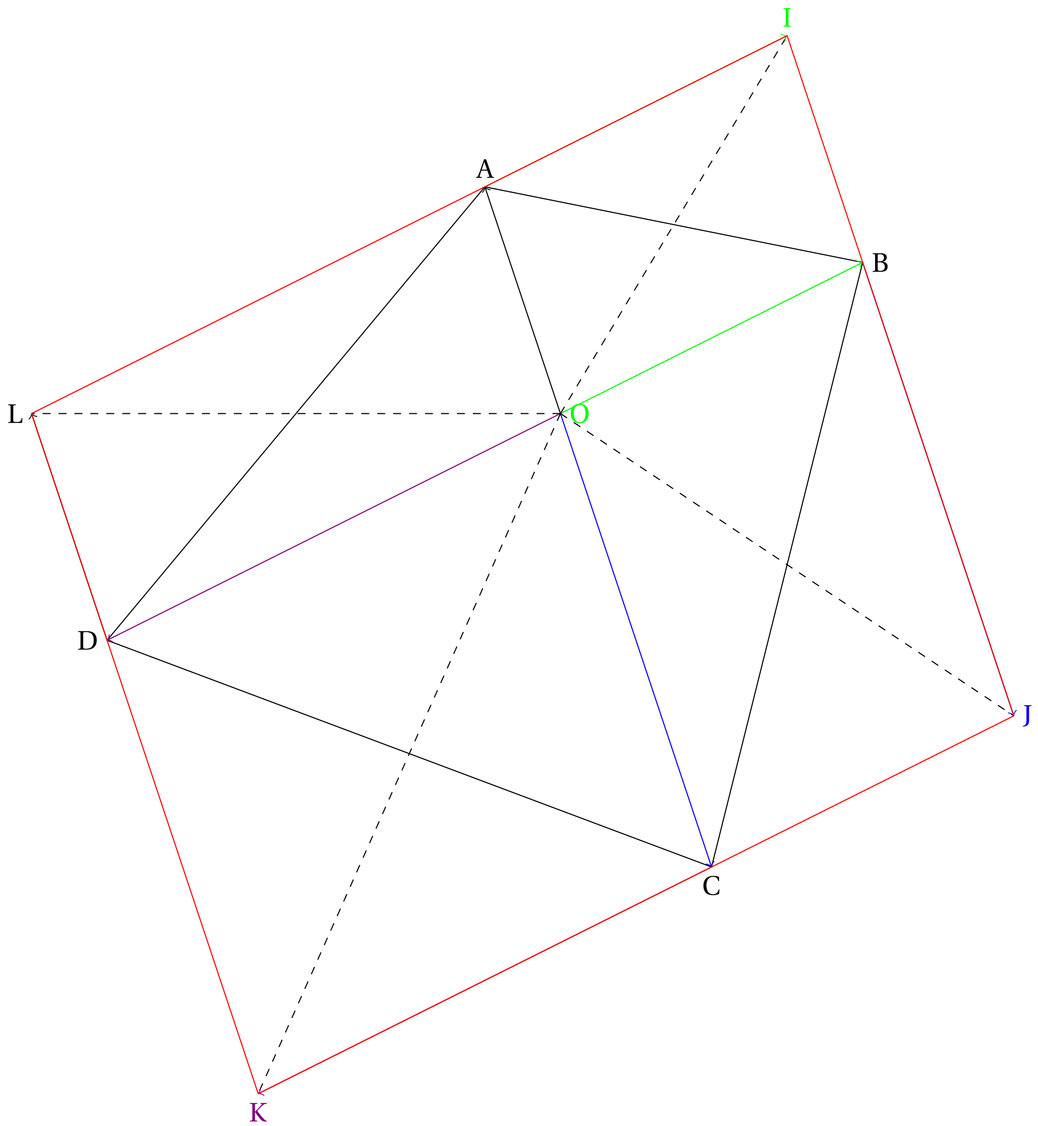
Donc G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

7.11.7 Exercice n° 5

Soit ABCD un quadrilatère quelconque.
Soit O le point d'intersection de [AC] et de [BD]

1. Construire les points I, J, K et L tels que
   * $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   * $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
   * $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
   * $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$.
   De même, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$
3. Montrer qie IJKL est un parallélogramme.

1.



2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$

De même :

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{LK} = -\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

$\overrightarrow{LK} = -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$

Donc IJKL est un parallélogramme.

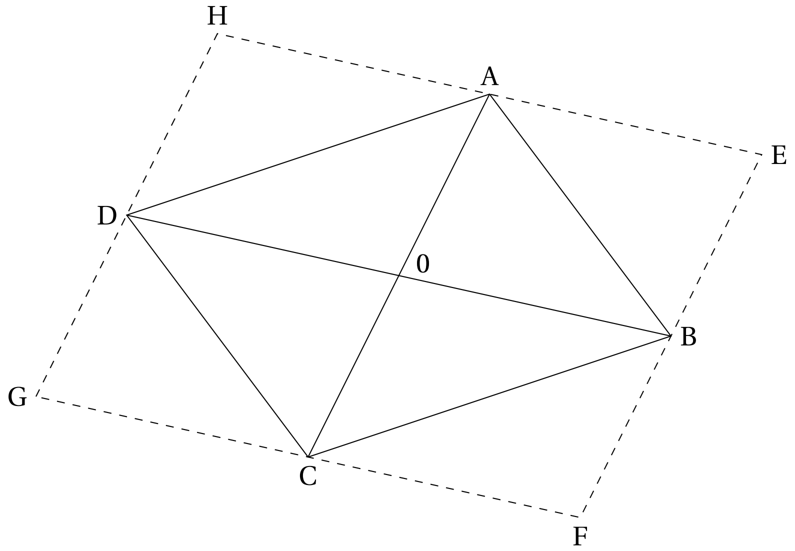
7.11.8 Exercice n° 6

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$
2. Soient les points E, F, G et H définis par :
   * $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
   * $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
   * $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$
   * $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$

   Montrer que EFGH est un parallélogramme.

1.



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)}_{=\overrightarrow{0}\text{ car O est le milieu de [AC]}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)}_{\overrightarrow{0}\text{ car O est le milieu de[BD]}}$$

2. $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$
   $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{0}$
   Donc O est le milieu de [EG].

   De même, $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

   $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{0}$

   Donc O est le milieu de [HF].

   O est le milieu de [EG] et de [HF], donc EFGH est un parallélogramme de centre O.

8 Repères du plan

8.1 Définition

Soit O un point.
Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires.

$\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est un repère du plan.

8.2 Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

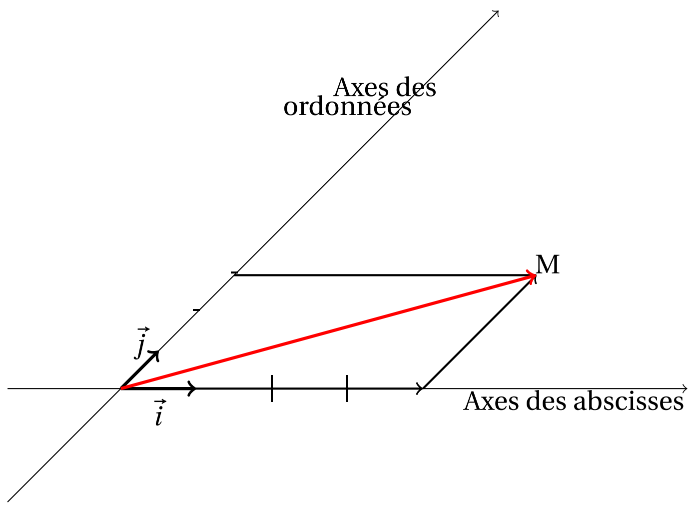
Soit M un point.

Il existe un nombre réel x unique et un nombre réel y unique tels que :

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

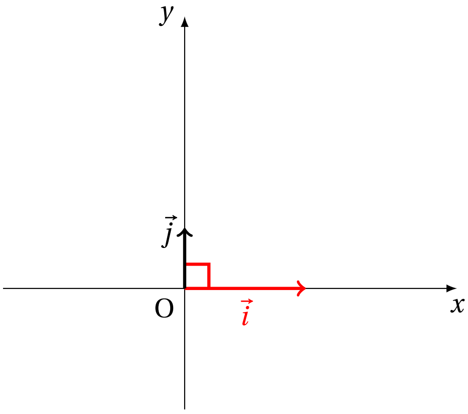
On écrit :
- x est l'abscisse de M dans $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$
- y est l'ordonnée de M dans $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

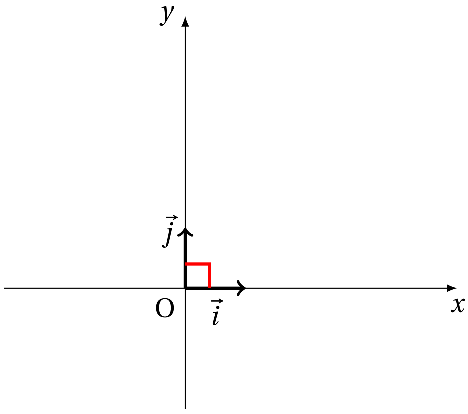
Remarque
On dit que x et y sont les coordonnées de M dans $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$



$\mathrm{M}(x, y,)$ dans $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

Dans la pratique, on utilise un repère orthogonal, ou mieux, un repère orthonormal. Avant, on appelait cela un repère "orthonormé".





8.3 Milieu d'un segment

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.
Soient $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$.
Soit I le milieu de [AB]

$$\text{On a } I\left(\underbrace{\frac{x_A + x_B}{2}}_{\text{Moyenne des abscisses}}, \underbrace{\frac{y_A + y_B}{2}}_{\text{Moyenne des ordonnées}}\right)$$

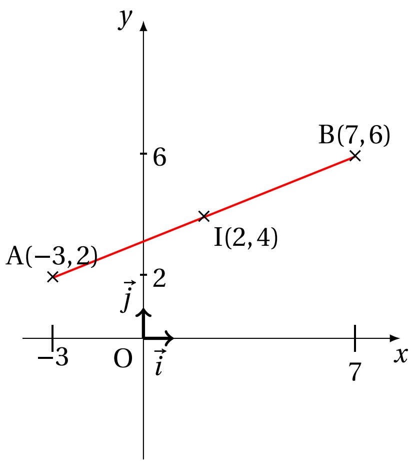
8.3.1 Exemple

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_I = \frac{-3+7}{2} \qquad y_I = \frac{2+6}{2}$$

$$x_I = 2 \qquad y_I = 4$$

Donc $I(2,4)$



8.3.2 Démonstration

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{IO} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{IO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(x_A\vec{i} + x_B\vec{j}\right) + \frac{1}{2}\left(y_A\vec{i} + y_B\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j}$$

8.4 Centre de gravité d'un triangle

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.
Soient les points :

— $A\left(x_A, y_A\right)$

— $B\left(x_B, y_B\right)$

— $C\left(x_C, y_C\right)$

Soit G le centre de gravité de ABC.

On a $G\left(\underbrace{\frac{x_A + x_B + x_C}{3}}_{\text{Moyenne des abscisses}}, \underbrace{\frac{y_A + y_B + y_C}{3}}_{\text{Moyenne des ordonnées}}\right)$

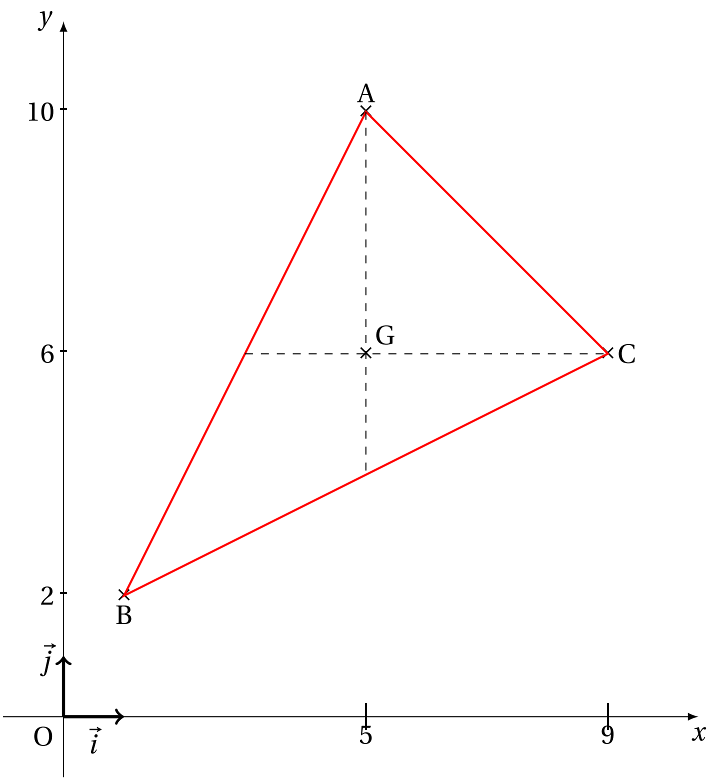
8.4.1 Exemple

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ $\quad$ $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

$x_G = \frac{5 + 1 + 9}{3}$ $\quad$ $y_G = \frac{10 + 2 + 6}{3}$

$x_G = 5$ $\quad$ $y_G = 6$

Donc $G(5, 6)$



8.4.2 Démonstration

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

$\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{0}$

$3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$

$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}\right) + \frac{1}{3}\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right) + \frac{1}{3}\left(x_C\vec{i} / y_C\vec{j}\right)$

$\overrightarrow{OG} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\vec{i} + \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\vec{j}$

8.5 Coordonnées d'un vecteur défini par un de ses représentants

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Soient $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$.

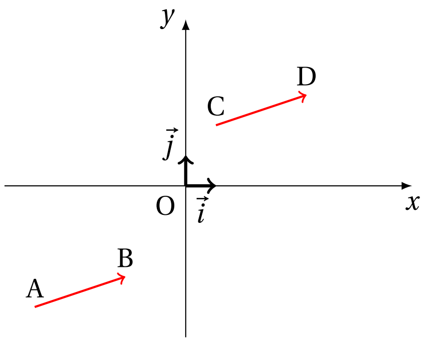
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

8.5.1 Exemple

Soient les points :

- $A(-5, -4)$ $\qquad x_B - x_A = -2 + 5 = 3$
- $B(-2, -3)$ $\qquad y_B - y_A = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1$
- $C(1, 2)$ $\qquad x_D - x_C = 4 - 1 = 3$
- $D(4, 3)$ $\qquad y_D - y_C = 3 - 2 = 1$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$

On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

8.5.2 Démonstration

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = \left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right) - \left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}\right)$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + \left(y_B - y_A\right)\vec{j}$

8.6 Exemples de changements de repères

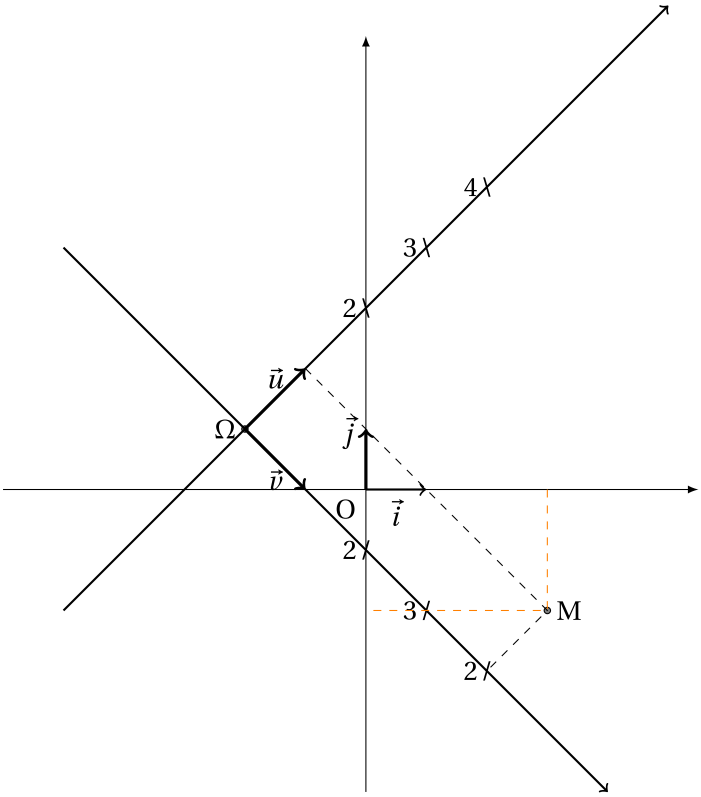
8.6.1 Exemple n° 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.
Soit $\Omega\,(-2, 1)$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $M\,(1, 4)$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

Déterminer les coordonnées de M dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



On conjecture $M\,(3, 2)$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$

$\overrightarrow{OM} = \left(-2\vec{i} + \vec{j}\right) + \left(\vec{u} + 4\vec{v}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \left(-2\vec{i} + \vec{j}\right) + \left(\vec{i} + \vec{j}\right) + 4\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$

$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

8.6.2 Exercice n° 2

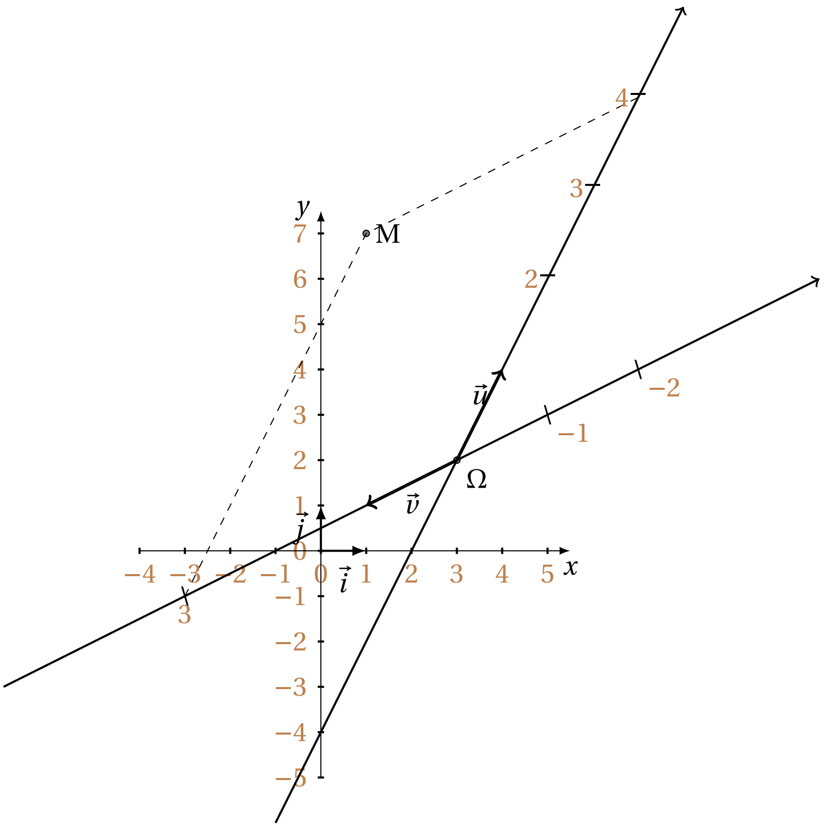
Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.

Soit $\Omega\,(3,2)$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $M\,(4,3)$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer les coordonnées de M dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



On conjecture $M\,(1,7)$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$

$\overrightarrow{OM} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) + \left(4\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) + 4\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) + 3\left(-2\vec{i} - \vec{j}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 7\vec{j}$

Donc $M\,(1,7)$

9 Bases du plan

9.1 Définition

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.
$\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base du plan.

9.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur.

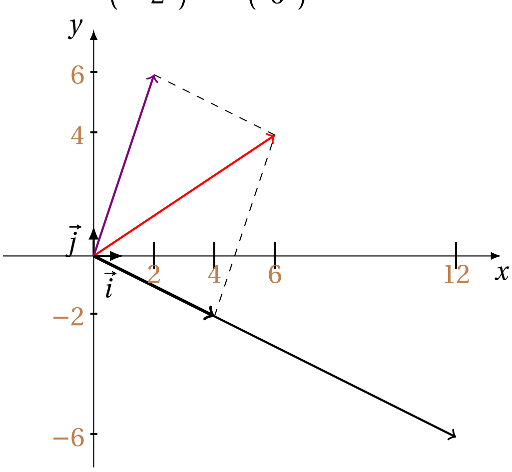
Il existe un nombre réel x unique et un nombre réel y unique tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On écrit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
x est la première coodonnée (ou composante) de $\vec{u}$.
y est la deuxième coodonnée (ou composante) de $\vec{v}$
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \Longleftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i}$

9.3 Coordonnées de la somme de deux vecteurs et coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\vec{u} + \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

9.3.1 Exemple

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$



On a $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $3\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

9.3.2 Démonstration

1. $\vec{u}+\overrightarrow{u'}=\left(x\vec{i}+y\vec{i}\right)+\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$

$\vec{u}+\overrightarrow{u'}=\left(x+x'\right)\vec{i}+\left(y+y'\right)\vec{j}$

$\lambda\vec{u}=\lambda\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$

$\lambda\vec{u}=\lambda x\vec{i}+\lambda y\vec{j}$

9.4 Vecteurs colinéaires

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

9.4.1 Notion de déterminant

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Par définition, on appelle le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$: $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$

9.4.2 Exemple n° 1

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=10-4=6$

9.4.3 Exemple n° 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=24-24=0$

$\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{u}$

9.4.4 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\vec{v}\neq\overrightarrow{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow det(\vec{u},\vec{v})=0$

9.4.5 Démonstration

Sens gauche-droite
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.
$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$
$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{vmatrix} = a(\lambda b) - b(\lambda a) = 0$
Sens droite-gauche
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires tels que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

L'un au moins des 2 nombres réels a et b n'est pas nul car $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$
Supposons par exemple $a \neq 0$ et posons $\lambda = \dfrac{c}{a}$ et $c = \lambda a$.
$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$
$ad - bc = 0$
$ad - b(\lambda a) = 0$
$a(d - \lambda b) = 0$

$\underbrace{a = 0}_{\text{Impossible}}$ ou $d - \lambda b = 0$

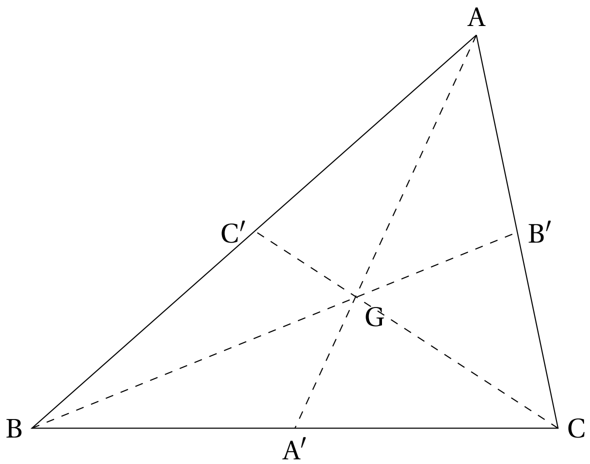
$d = \lambda b$
Conclusion :
- $c = \lambda a$
- $d = \lambda b$

Donc $\vec{v}\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$, et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

9.5 Exercices

9.5.1 Exercice n° 1

Soit ABC un triangle.
Soit A' le milieu de [BC]
Soit G le centre de gravité de ABC.
On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
Déterminer les coordonnées de A' dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, puis les coordonnées de G dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.



$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc $A'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Remarque

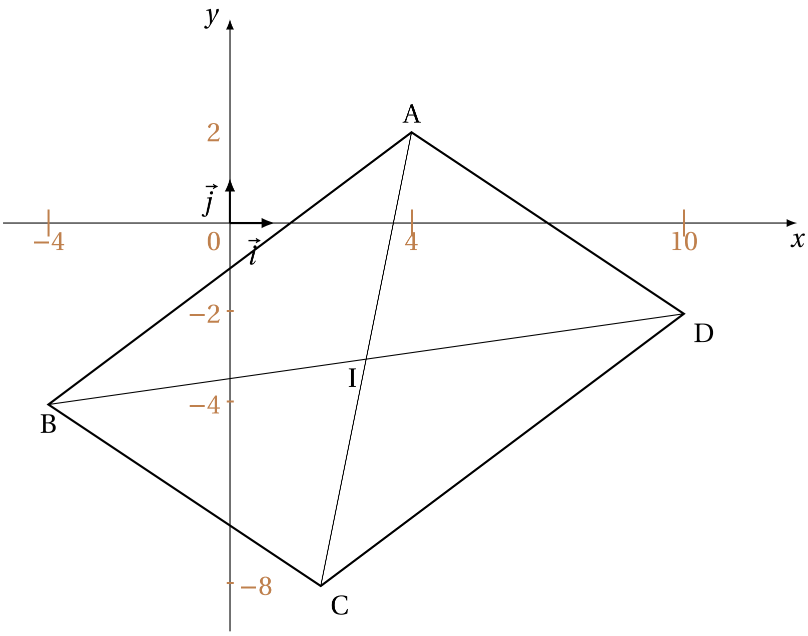
$A\,(0,0)$ car $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

$B\,(1,0)$ car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

$C\,(0,1)$ car $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$

9.5.2 Exercice n° 2

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.
Soient les points $A(4,2)$, $B(-4,-4)$, $C(2,-8)$, $D(10,-2)$.
1. Montrer par 2 méthodes que ABCD est un parallélogramme.



Première méthode

$x_B - x_A = -4 - 4 = -8$
$y_B - y_A = -4 - 2 = -6$
Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$x_C - x_D = 2 - 10 = -8$
$y_C - y_D = -8 - (-2) = -6$
Donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Deuxième méthode

Soit I le milieu de (AC) :

* $x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$
* $y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2-8}{2} = -3$

Donc $I(3, -3)$

Soit J le milieu de (BD) :

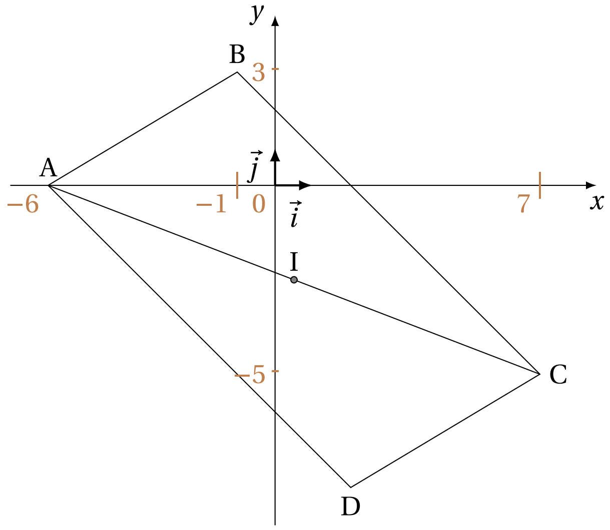
— $x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-4+10}{2} = 3$

— $y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-4-2}{2} = -3$

Donc J $(3, -3)$

I = J, donc ABCD est un parallélogramme.

2. Soient A $(-6, 0)$, B $(-1, 3)$, C $(7, -5)$, et D $\left(x, y\right)$
Déterminer x et y pour que ABCD soit un parallélogramme. (2 méthodes)



D $(2, -8)$ On conjecture que D $(2, -8)$.

Première méthode

$x_B - x_A = -1 - (-6) = 5$
$y_B - y_A = 3 - 0 = 3$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
$x_C - x_D = 7 - x$
$y_C - y_D = -5 - y$

Donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 7-x \\ -5-y \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\text{ABCD est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\
&\iff \begin{cases} 7 - x = 5 \\ -5 - y = 3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -x = -2 \\ -y = 8 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc $D\,(2, -8)$

Deuxième méthode

Soient I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD].

$x_I = \dfrac{-6+7}{2} = \dfrac{1}{2}$

$y_I = \dfrac{0-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$x_J = \dfrac{-1+x}{2}$

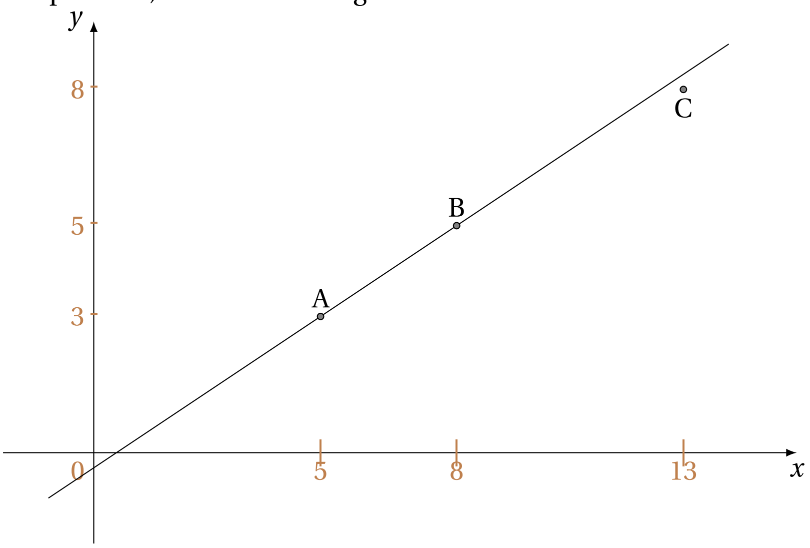
$y_J = \dfrac{3+y}{2}$

$$
\begin{aligned}
\text{ABCD est un parallélogramme} &\iff I = J\\
&\iff \begin{cases} \dfrac{-1+x}{2} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{3+y}{2} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -1 + x = 1 \\ 3 + y = -5 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

9.5.3 Exercice nº 3

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.

1. Soient A $(5,3)$, B $(8,5)$, C $(13,9)$.
Les points A, B et C sont-il alignés ?



$x_B - x_A = 8 - 5 = 3$
$y_B - y_A = 5 - 3 = 2$
Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_C - x_A = 13 - 5 = 8$
$y_C - x_A = 8 - 3 = 5$
Donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1$

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

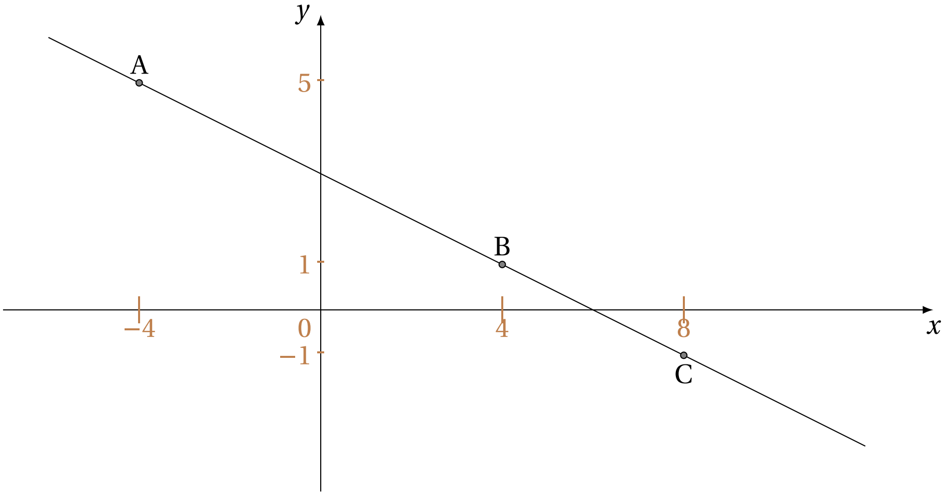
2. Soient $A(-4,5)$, $B(4,1)$, $C(x,-1)$.

Déterminer x pour que les points A, B et C soient alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x+4 \\ -6 \end{pmatrix}$

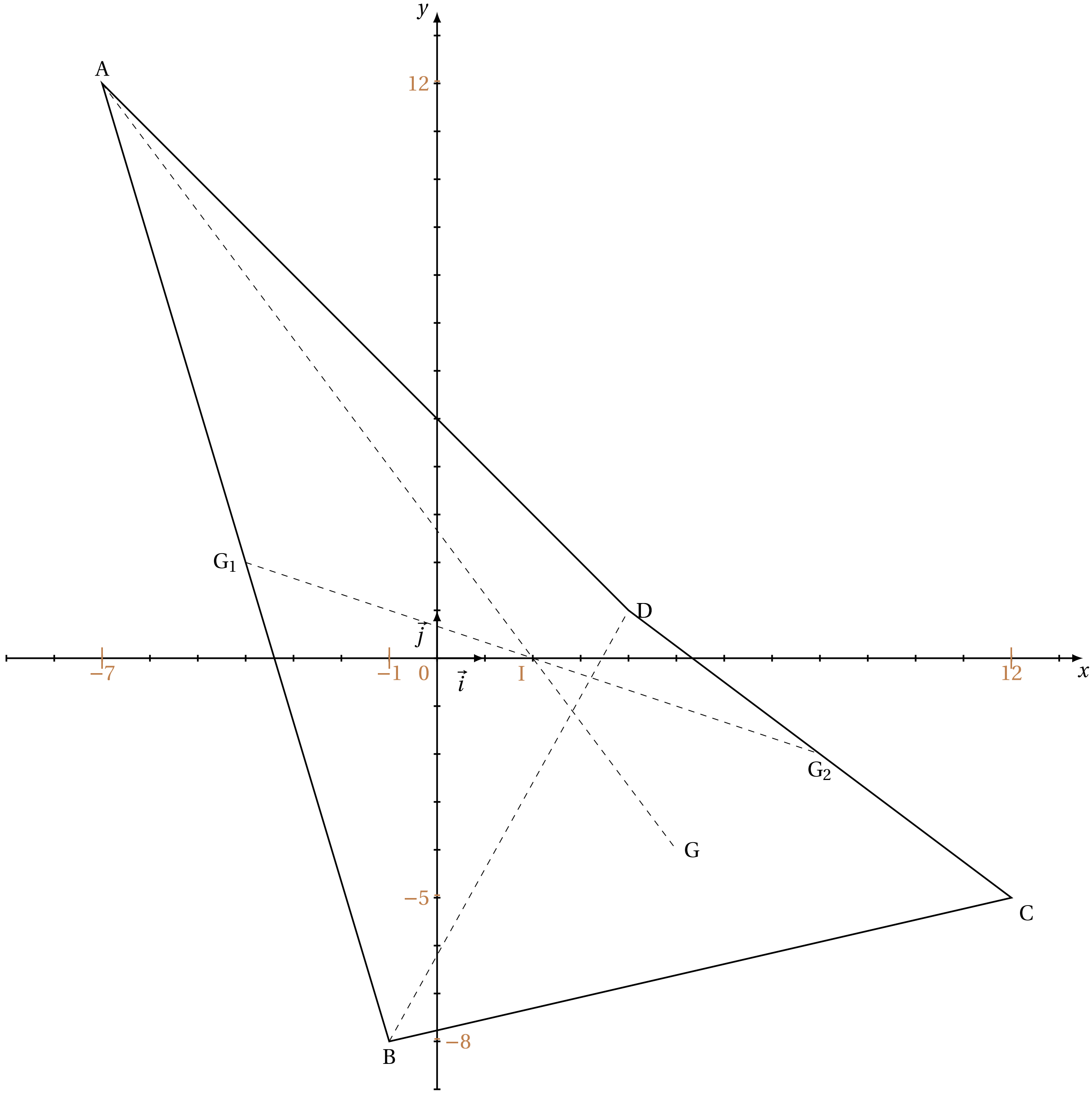
$$\begin{aligned}
\text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}\\
&\iff \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\iff -48+4(x+4)=0\\
&\iff 4(x+4)=48\\
&\iff 4x+16=48\\
&\iff 4x=32\\
&\iff x=8
\end{aligned}$$

Donc $C(8,-1)$



9.5.4 Exercice n° 4

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère.
Soient A $(-7, 12)$, B $(-1, -8)$, C $(12, -5)$ et D $(4, 1)$.
1. Déterminer les coordonnées de I défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$
2. Déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle BCD. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
3. Déterminer les coordonnées du point G_1, milieu de [AB], puis ceux de G_2, milieu de [CD]. Montrer que I est le milieu de $[G_1G_2]$.



On a $\mathrm{I}\left(x, y\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{IA}}\begin{pmatrix} -7-x \\ 12-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{IB}}\begin{pmatrix} -1-x \\ -8-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix} 12-x \\ -5-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{ID}}\begin{pmatrix} 4-x \\ 1-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}}\begin{pmatrix} 8-4x \\ -4y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \overrightarrow{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 8-4x=0 \\ -4y=0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -4x=-8 \\ y+0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{I}\,(2,0)$.

2. $\mathrm{G}\left(\dfrac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}+x_\mathrm{D}}{3}; \dfrac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}+y_\mathrm{D}}{3}\right)$

$\mathrm{G}\left(\dfrac{-1+12+4}{3}; \dfrac{-8-5+1}{3}\right)$

$\mathrm{G}\,(5,-4)$

On a $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AI}}, \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right) = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ -12 & -16 \end{vmatrix} = -144-(-140) = 0$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont colinéaires.
Donc les points A, I et G sont alignés.

3. $\mathrm{G}_1\left(\dfrac{-7-1}{2}, \dfrac{12-4}{2}\right)$

$\mathrm{G}_1\,(-4,2)$

$\mathrm{G}_2\left(\dfrac{12+4}{2}, \dfrac{-5+1}{2}\right)$

$\mathrm{G}_2\,(8,-2)$

Soit J le milieu de $[\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2]$

On a $\mathrm{J}\left(\dfrac{-4+8}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right)$

$\mathrm{J}\,(2,0)$
$\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
Donc I est l milieu de $[\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2]$.

9.5.5 Exercice n° 5

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base.
Soit $m\in\mathbb{R}$
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} m+7 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} m-47 \\ 50 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} m+3 \\ m-6 \end{pmatrix}$
1. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Exprimer alors $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$.

2. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. Exprimer alors $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \det(\vec{u},\vec{v})=0\\
&\iff 50\,(m+7)+10\,(m-47)=0\\
&\iff 50m+350+10m-470=0\\
&\iff 60m-120=0\\
&\iff 60=120\\
&\iff m=2
\end{aligned}$$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 9 & -45 \\ -10 & 50 \end{vmatrix}=450-450=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -45 \\ 50 \end{pmatrix}$.
Donc $\vec{v}=-5\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} &\iff \det\left(\vec{u},\vec{w}\right)=0\\
&\iff (m+7)\,(m-6)+10\,(m+3)=0\\
&\iff m^2-6m+7m-42+10m+30=0\\
&\iff m^2+11m-12=0\\
&\iff \left(m^2+11m+\frac{121}{4}\right)-\frac{169}{4}=0\\
&\iff \left(m+\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2=0\\
&\iff \left(m+\frac{11}{2}-\frac{13}{2}\right)\left(m+\frac{11}{2}+\frac{13}{2}\right)=0\\
&\iff (m-1)\,(m+12)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
m-1=0 & \text{ou} & m+12=0\\
m=1 & \text{ou} & m=-12
\end{array}$$

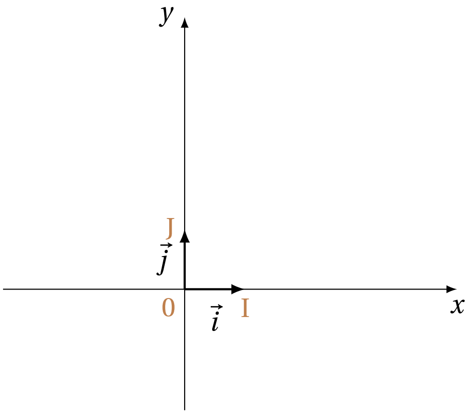
Premier cas
On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, donc $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}$.

Deuxième cas
On a $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \end{pmatrix}$, donc $\vec{w}=\frac{9}{5}\vec{u}$.

10 Repères orthonormaux du plan

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soit I le point tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$

Soit J le point tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$



(OI) ⊥ (OJ)

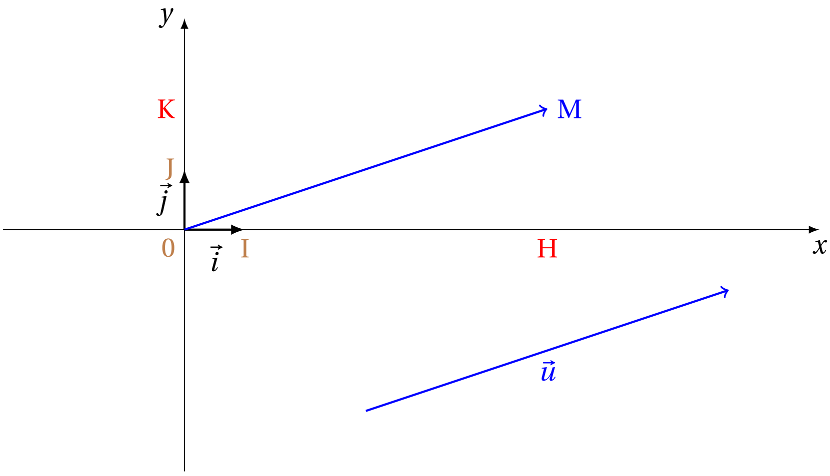
OI = OJ = 1

10.1 Norme euclidienne d'un vecteur

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.

10.1.1 Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Soit le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



On note $\|\vec{u}\|$ la norme euclidienne de $\vec{u}$, et on dit que : $\|\vec{u}\| = OM$

10.1.2 Expression de la norme euclidienne d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M\left(x, y\right)$

Soit H le projecté orthogonal de M sur (OI)

Soit K le projecté orthogonal de M sur (OJ)

On peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H.

$OM^2 = OH^2 + HM^2$

$OM^2 = OH^2 + OK^2$

$OM^2 = x^2 + y^2$

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Donc, on a pour $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{25}$

$\|\vec{u}\| = 5$

10.1.3 Quelques propriétés de la norme euclidienne d'un vecteur

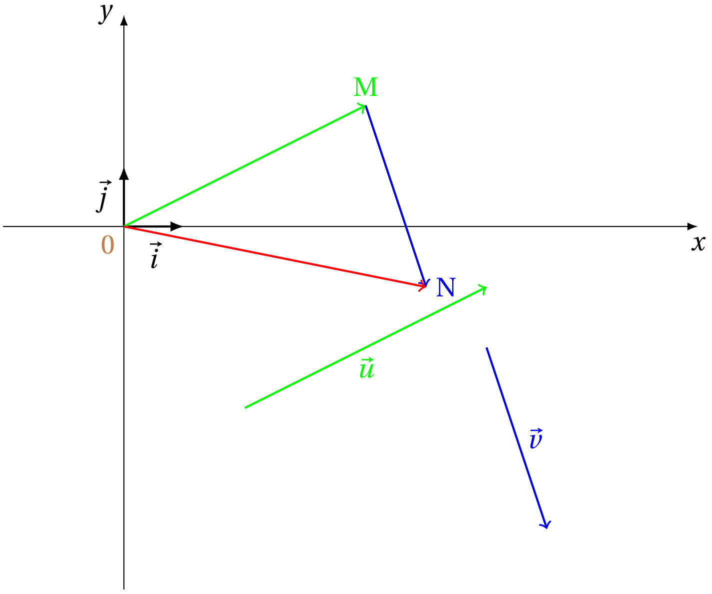
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

* $\|\vec{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$

* $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$

* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Remarque
Il s'agit de l'inégalité triangulaire.



$\mathrm{ON} \leqslant \mathrm{OM} + \mathrm{MN}$

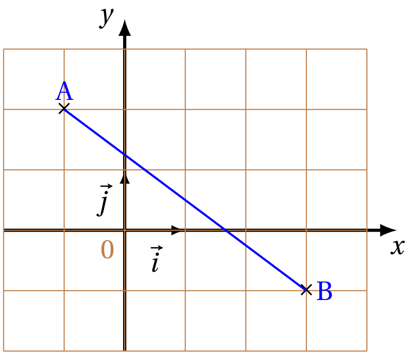
10.2 Distance de deux points

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soient A$\left(x_A, y_A\right)$ et B$\left(x_B, y_B\right)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Exemple
A$(-1,2)$ et B$(3,-1)$



$x_B - x_A = 3 + 1 = 4$

$y_B - y_A = -1 - 2 = -3$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

$AB = \sqrt{16 + 9}$

$AB = \sqrt{25}$

$AB = 5$

Remarque

* Si l'unité est un grand carreau, soit 0,8 cm, alors, la longueur du segment [AB] = 5,8 = 4 cm.
* Si l'unité est deux petits carreaux, soit 1 cm, alors, la longueur du segment [AB] = 5 = 5 cm.

10.3 Exercices

10.3.1 Exercice n° 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soient A $(-1, 2)$ et B $(x, -1)$

Déterminer x pour que $AB = 5$

$x_B - x_A = x - (-1) = x + 1$

$y_B - y_A = -1 - 2 = -3.$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x+1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$AB = 5$

$\sqrt{(x+1)^2 + (-3)^2} = 5$

$\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 5$

$x^2 + 2x + 10 = 25$

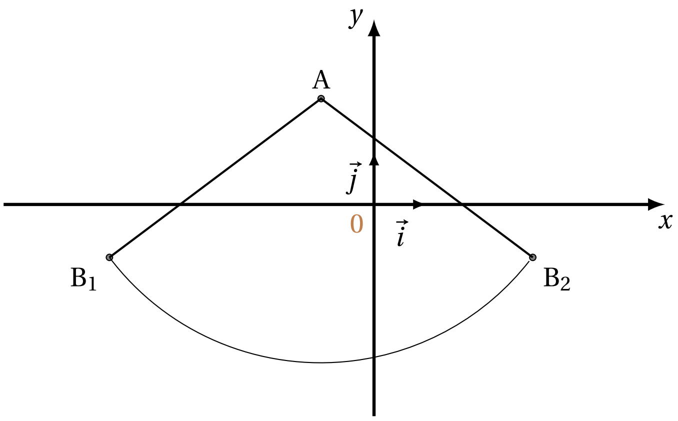
$x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x+1)^2 - 16 = 0$

$(x+1+4)(x+1-4) = 0$

$(x+5)(x-3) = 0$

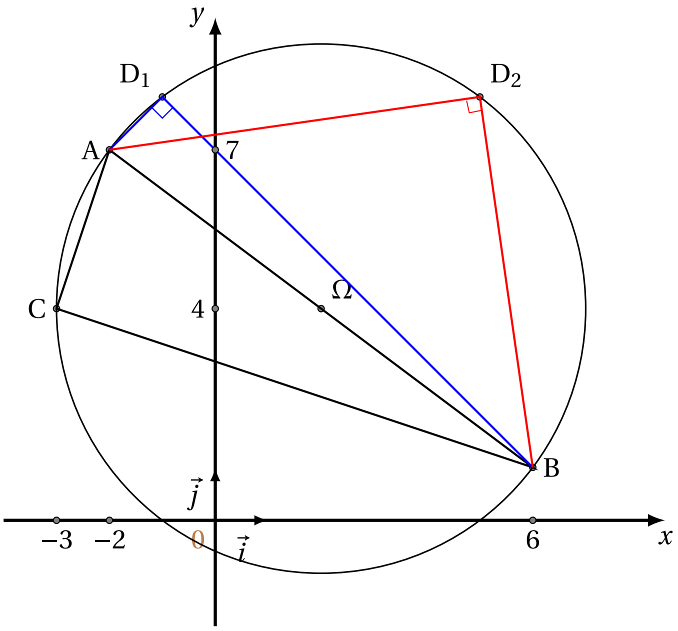
On trouve 2 valeurs à x, donc 2 points B : $B_1(-5, 1)$ et $B_2(3, -1)$



10.3.2 Exercice n° 2

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soient les points A $(-2,7)$, B $(6,1)$, C $(-3,4)$ et D $(x,8)$

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle dirconscrit au triangle ABC. Déterminer **astucieusement** les coordonnées du centre Ω de $\mathscr{C}$. Puis, déterminer le rayon r de $\mathscr{C}$



1. Montrons que ABC est un triangle rectangle en C.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$AB^2 = 8^2 + (-6)^2$

$AB^2 = 64 + 36$

$AB^2 = 100$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

$CA^2 + CB^2 = 1^2 + 3^2 + 9^2 + (-3)^2$

$CA^2 + CB^2 = 1 + 9 + 81 + 9$

$CA^2 + CB^2 = 100$

On a $AB^2 = CA^2 + CB^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en C.
Le centre Ω de $\mathscr{C}$ est le milieu de [AB] car ABC est rectangle en C.

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

On a donc $\Omega\,(2, 4)$

On a $r = \Omega A$

$$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$$

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{16 + 9}$$

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{25}$$

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\| = 5$$

Donc $r = 5$

2. Déterminer x pour que le triangle ABD soit rectangle en D.
On trouvera deux valeurs de x et donc deux points D : D_1 et D_2

Déterminer AD_1 et BD_1, puis AD_2 et BD_2

Que remarque-t-on ?

On a : $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -2-x \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 6-x \\ -7 \end{pmatrix}$

ABD est un triangle rectangle en D.
$DA^2 + DB^2 = AB^2$

$(-x-2)^2 + (-1)^2 + (-x+6)^2 + (-7)^2 = 100$

$x^2 + 4x + 4 + 1 + x^2 - 12x + 36 + 49 = 100$

$2x^2 - 8x + 90 = 100$

$2x^2 - 8x - 10 = 0$

$2\left(x^2 - 4x - 5\right) = 0$

$2\left[(x-2)^2 - 9\right] = 0$

$2\left[(x-2-3)(x-2+3)\right] = 0$

$2(x-5)(x+1) = 0$

$$\begin{array}{lll} x-5=0 & \text{ou} & x+1=0 \\ x=5 & \text{ou} & x=-1 \end{array}$$

$D_1(-1,8)$ et $D_2(5,8)$

On a : $\overrightarrow{AD_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD_1}\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD_2}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

On a alors :

* $AD_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
* $BD_1 = \sqrt{(-7)^2 + 7^2}$
* $AD_2 = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
* $BD_2 = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

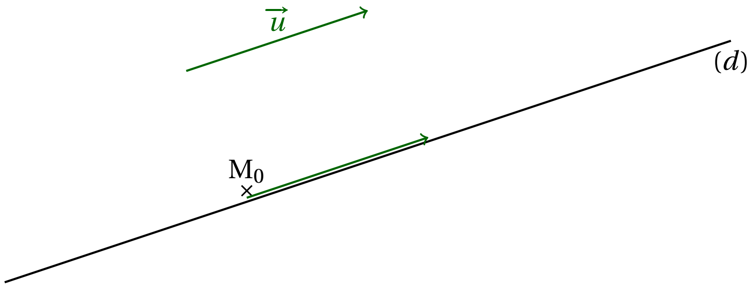
Donc ABD_2 est un triangle isocèle rectangle.

11 Droites du plan

11.1 Définitions

Une droite (d) est définie :

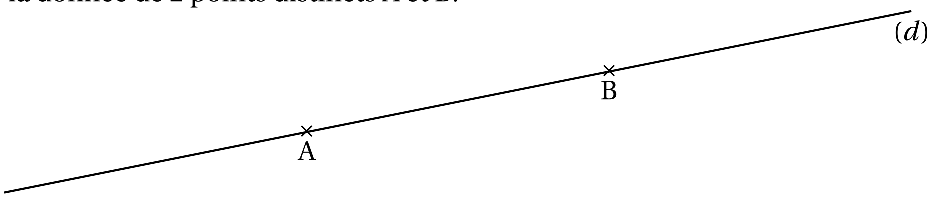
- Soit par la donnée d'un point M_0 et d'un vecteur non nul $\vec{u}$



$\overrightarrow{u}$ est le vecteur directeur de la droite (d).

$$\boxed{M \in (d) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}}$$

- Soit par la donnée de 2 points distincts A et B.



$$\boxed{M \in (d) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.}}$$

11.2 Équation cartésienne d'une droite

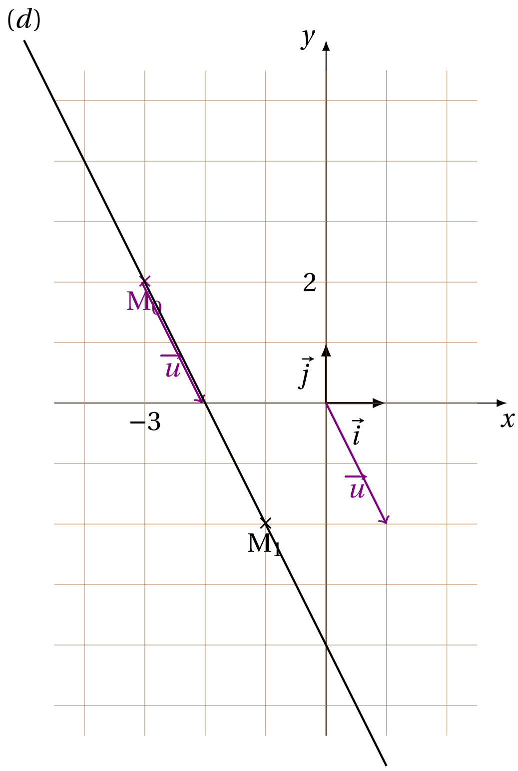
∟ de René Descartes

11.2.1 Exemple n° 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

Soient $M_0(-3, 2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Soit (d) la droite définie par M_0 et $\vec{u}$.



$$
\begin{aligned}
M(x, y) \in (d) &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \operatorname{Det}(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff -2(x+3) - (y-2) = 0 \\
&\iff -2x - 6 - y + 2 = 0 \\
&\iff -2x - y - 4 = 0 \\
&\iff 2x + y + 4 = 0
\end{aligned}
$$

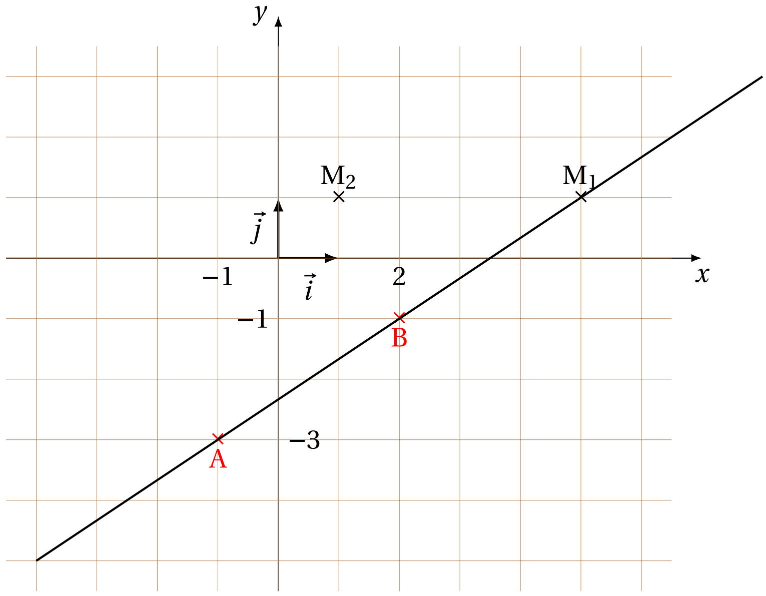
Équation cartésienne de (d) : $2x + y + 4 = 0$

Remarque : $2x + y + 4 = 0$

$y = -2x - 4$ Cette équation est l'équation réduite de la droite (d)

11.2.2 Exemple n° 2

Soient $A(-1,-3)$ et$B(2,-1)$
Soit (d) la droite définie par A et B



$$\begin{aligned}
M(x,y)\in(d) &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0\\
&\iff \begin{vmatrix} x+1 & 3\\ y+3 & 2\end{vmatrix}=0\\
&\iff 2(x+1)-3(y+3)=0\\
&\iff 2x+2-3y-9=0\\
&\iff 2x-3y-7=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Équation cartésienne de (d) :}\quad 2x-3y-7 &= 0\\
\text{Équation réduite de (d) :}\quad -3y &= -2x+7\\
y &= \frac{2}{3}x-\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Par exemple :

Pour $M_1(5,1)$: $10-3-7=0$ donc, $M_1\in(d)$.

Pour $M_2(1,1)$: $2-3-7\neq 0$ donc, $M_1\notin(d)$

11.2.3 Conclusion

En résumé Soit (**d**) une droite,

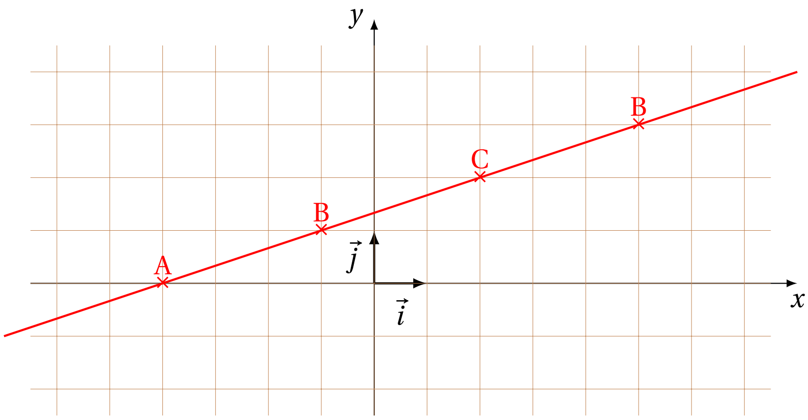
les équations cartésiennes de (d) sont de la forme :
$ax+by+c=0$
avec a et b non simultanément nuls.

Réciproquement :

Tout équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a et b simultanément non nuls est l'équation cartésienne d'une droite.

11.2.4 Exercice n° 1

Soit la droite (d) d'équation cartésienne $x-3y+4=0$



On cherche graphiquement des points de (d).
A$(-4,0)$
B$(-1,1)$
C$(2,2)$
D$(5,3)$

On remarque que :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$

Ainsi, l'incrément de x est : $+3$
et l'incrément de y est : $+1$.

$\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur directeur de (d).

De manière générale, $(d): ax+by+c=0$ est caractérisée par le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

11.2.5 Exercice nº 2

Soit D : $10x - 7y + 8 = 0$

L'équation réduite de (D) est :

$$\begin{aligned} -7y &= -10x - 8 \\ y &= \frac{10}{7}x + \frac{8}{7} \end{aligned}$$

On cherche 2 points appartenant à (D) :
$A(-5, -6)$ et $B(2, 4)$

11.2.6 Exercice nº 3

Soit (D) : $13x + 12y + 57 = 0$.

L'équation réduite de (D) est :

$$\begin{aligned} 12y &= -13x - 57 \\ y &= -\frac{13}{12}x - \frac{57}{12} \end{aligned}$$

On cherche 2 points appartenant à (D) :
$A(-9, 5)$ et $B(3, -8)$

11.2.7 Exercice n° 4

Soit $D_1 : 10x - 7y - 2 = 0$.
L'équation réduite de (D_1) est :

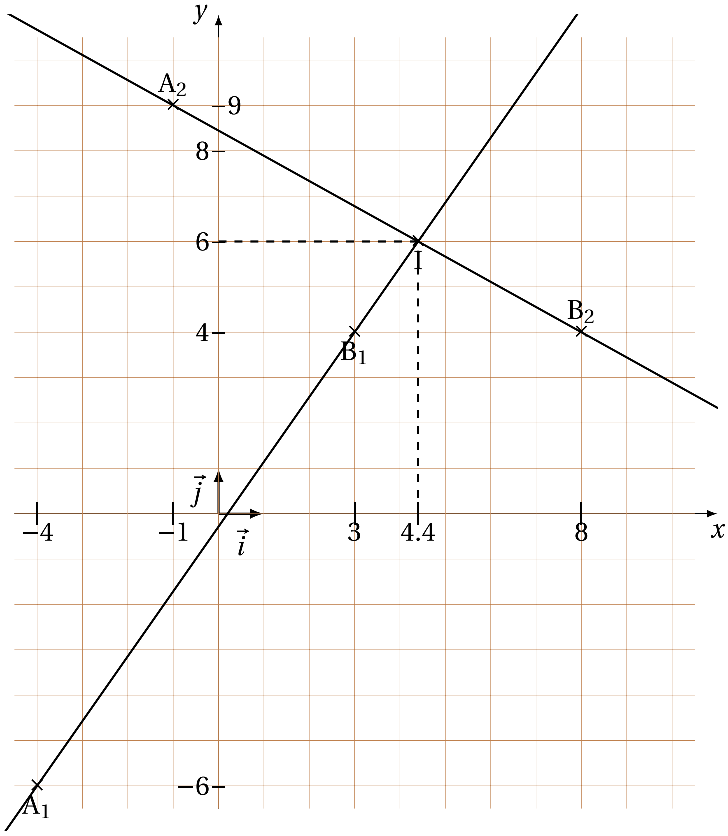
$$-7y = -10x + 2$$
$$y = \frac{10}{7}x - \frac{2}{7}$$

On trouve les points $A_1(-4, -6)$ et $B_1(3, 4)$ qui appartiennent à (D_1).

Soit $D_2 : 5x + 9y - 76 = 0$
L'équation réduite de (D_2) est :

$$9y = -5x + 76$$
$$y = -\frac{5}{9}x + \frac{76}{9}$$

On trouve les points $A_2(-1, 9)$ et $B_2(8, 4)$ qui appartiennent à (D_2).



Soit I le point d'intersection de D_1 et D_2.
On cherche le point qui associe à x la même ordonnée y :

x	y_1	y_2	
4	5,4286	6,2222	
4,2	5,7143	6,1111	
4,4	6	6	⟵ OUI

Ainsi, le point d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) est le point $I\left(\frac{22}{5}, 6\right)$

11.3 Droites parallèles et droites sécantes

11.3.1 Conditions de parallélisme de deux droites

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

Soit D : $ax + by + c = 0$ avec comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Soit D′ : $a'x + b'y + c' = 0$ avec comme vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
D \mathbin{/\!/} D' &\iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u'} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff -ba' - a \times (-b') = 0 \\
&\iff -a'b + ab' = 0 \\
&\iff ab' - a'b = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrl} D : & ax + by + c = & 0 \\ D' : & a'x + b'y + c' = & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{D \mathbin{/\!/} D' \iff \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0} \end{array}}$$

11.3.2 Exemple

$$\begin{array}{lcl} D & : & x - 3y + 4 = 0 \\ D' & : & 3x - 9y - 14 = 0 \end{array}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$

Ainsi $D \mathbin{/\!/} D'$.

Remarque

Si les droites sont parallèles, alors, dans le déterminant, les coefficients a ,a' et b, b' sont proportionnels deux à deux.

Si même c et c' sont dans la même proportion, alors les droites sont confondues :

$$\begin{array}{lcl} D & : & x - 3y + 4 = 0 \\ D' & : & 3x - 9y + 12 = 0 \end{array}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$

Mais on peut aussi simplifier D′ : $3x - 9y + 12 = 0$ en D′ : $x - 3y + 4 = 0$

Ainsi $D = D'$.

11.4 Intersection de 2 droites non parallèles

Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

Soit $\mathrm{D}_1 : 10x - 7y - 2 = 0$
Soit $\mathrm{D}_2 : 5x + 9y - 76 = 0$

$$\begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 90 + 35 = 125 \neq 0$$

Donc D_1 et D_2 sont sécantes en un point I.

$$\left\{\begin{array}{ll} 10x - 7y & = 2 \\ 5x + 9y & = 76 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 9 \\ 7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 10x - 7y & = 2 \\ 5x + 9y & = 76 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 90x - 63y & = 18 \\ 35x + 63y & = 532 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 10x - 7y & = 2 \\ -10x - 18y & = -152 \end{array}\right.$$

$125x = 550$
$x = 4,4$
$x = \frac{22}{5}$

$-25y = -150$
$25y = 150$
$y = 6$

$\mathrm{I}\left(\frac{22}{5}; 6\right)$

Remarque :
Après avoir procédé à la méthode de combinaison linéaire, on trouve une équation à une inconnue. Le coefficient de l'inconnue est alors toujours un diviseur du déterminant.

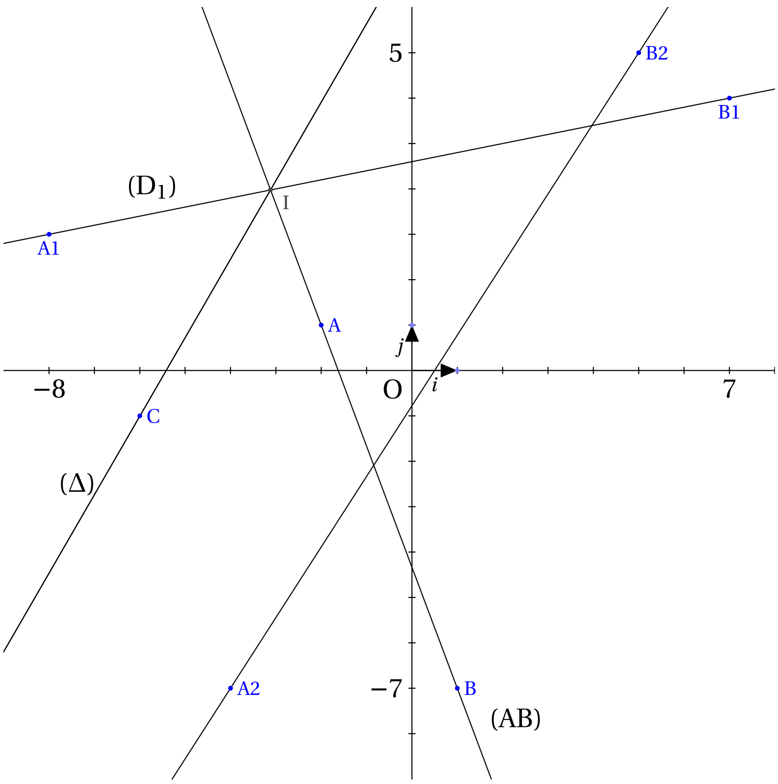
Un superbe exercice : ⋆ ⋆ ⋆

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

1. Soient $A(-2,1)$ et $B(1,-7)$
   Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB)
2. Construire avec précision :
   $$\begin{array}{lcll} D_1 & : & 2x-15y+61 & =0 \\ D_2 & : & 14x-9y-21 & =0 \end{array}$$
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ qui passe par $C(-6,-1)$ et qui est parallèle à D_2
4. Montrer que (AB), D_1 et Δ sont concourantes en un point I dont on déterminera les coordonnées.

1.
$$\begin{aligned} M(x,y) \in (d) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\Longleftrightarrow \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ y-1 & -8 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow -8(x+2) - 3(y-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -8x - 16 - 3y - 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -8x - 3y - 13 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 8x + 3y + 13 = 0 \end{aligned}$$

2.



$$D_1 : -15y = -2x - 61 \qquad A_1(-8,3) \qquad B_1(7,5)$$
$$y = \frac{2}{15}x + \frac{61}{15}$$

$$D_2 : -9y = -14x + 211 \qquad A_2(-4,-7) \qquad B_2(5,7)$$
$$y = \frac{14}{9}x + \frac{7}{9}$$

3. Si les deux droites sont parallèles, alors les vecteurs directeurs sont colinéaires.

D_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$

Donc Δ est définie par $C(-6,-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \Delta &\iff \overrightarrow{CM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \text{Det } (\overrightarrow{CM}, \vec{u}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x+6 & 9 \\ y+1 & 14 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff 14(x+6) - 9(y+1) = 0 \\
&\iff 14x + 84 - 9y - 9 = 0 \\
&\iff 14x - 9y + 75 = 0
\end{aligned}$$

Donc $\Delta : 14x - 9y + 75 = 0$

4. $\begin{cases} 8x + 3y = -13 & |\, 1 \\ 2x - 15y = -61 & |\, -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 3y = -13 & |\, 5 \\ 2x - 15y = -61 & |\, 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x + 3y = -13 \\ -8x + 60y = 244 \end{cases} \qquad \begin{cases} 40x + 15y = -65 \\ 2x - 15y = -61 \end{cases}$$

$$63y = 231 \qquad 42x = -126$$

$$y = \frac{231}{63} \qquad x = \frac{-126}{42}$$

$$y = \frac{11}{3} \qquad x = -3$$

Vérifions que $I \in \Delta$

$14 \times (-3) - 9 \times \frac{11}{3} + 75 = 42 - 33 + 75 = 0$

Donc $I(-3, \frac{11}{3})$

11.5 Droites remarquables

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

11.5.1 Droites parallèles à l'axe des abscisses

Soit D une droite parallèle à l'axe des abscisses et $M_0(x_0, y_0)$

Un vecteur directeur de D est $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Delta &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \vec{i} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \text{Det } (\overrightarrow{M_0M}, \vec{i}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - y_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 0(x - x_0) - 1(y - y_0) = 0 \\ &\iff -y + y_0 = 0 \\ &\iff y = y_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad y = y_0 \text{ et } y - y_0 = 0 \\ \qquad \text{Forme : } ax + by + c = 0 \\ \text{avec} \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ c &= -y_0 \end{aligned} \end{array}}$$

11.5.2 Droites parallèles à l'axe des ordonnées

Soit D une droite parallèle à l'axe des ordonnées et $M_0(x_0, y_0)$.

Un vecteur directeur de D est $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Delta &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \vec{j} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \text{Det } (\overrightarrow{M_0M}, \vec{j}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 0 \\ y - y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 1(x - x_0) - 0(y - y_0) = 0 \\ &\iff x - x_0 = 0 \\ &\iff x = x_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad x = x_0 \text{ et } x - x_0 = 0 \\ \qquad \text{Forme : } ax + by + c = 0 \\ \text{avec} \quad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= -x_0 \end{aligned} \end{array}}$$

11.5.3 Droites <u>non</u> parallèles à l'un des axes

Soit D une droite <u>non</u> parallèles à l'un des axes.

$$\begin{aligned} \text{D} :\quad ax+by+c&=0\\ by&=-ax-c\\ y&=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\end{aligned}$$

$y=mx+p$ est l'équation réduite de la droite D avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ m = le coefficient directeur de D p = l'ordonnée à l'origine de D

<u>Réciproquement :</u>
Toute équation de la forme $y=mx+p$, avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$ est celle d'une droite D non parallèle à l'un des axes.

$$\begin{aligned} y&=mx+p\\ mx-y+p&=0\end{aligned}$$

Forme : $ax+by+c=0$ avec $a=m$ $b=-1$ $c=p$

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$

Det $(\vec{u},\vec{j})\begin{vmatrix}1 & 0\\ m & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ $\quad\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires,
donc D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

<u>Remarque</u> Soit D:$y=mx+p$ $\quad\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$

D$'$:$y=m'x+p'$ $\quad\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\ m'\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{D} \mathbin{//} \text{D}' &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff \text{Det }(\vec{u},\vec{u'})=0\\ &\iff \begin{vmatrix}1 & 1\\ m & m'\end{vmatrix}=0\\ &\iff m'-m=0\\ &\iff m=m'\end{aligned}$$

D // D$'$ Donc D : $mx+p$ D$'=m'x+p'$ D // D$'\iff m=m'$

11.6 Un soupçon d'algorithmique

11.6.1 Équation cartésienne d'une droite (AB)

Soit $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ un repère. Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A})$ et$\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ avec $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}(x,y)\in(\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \mathrm{Det}\,(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AM}})=0\\
&\iff \begin{vmatrix} x-x_\mathrm{A} & x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\\ y-y_\mathrm{A} & y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{vmatrix}=0\\
&\iff (x-x_\mathrm{A})(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})-(y-y_\mathrm{A})(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})=0\\
&\iff xy_\mathrm{B}-xy_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}+x_\mathrm{A}y_\mathrm{A}-(yx_\mathrm{B}-yx_\mathrm{A}-x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}+x_\mathrm{A}y_\mathrm{A})=0\\
&\iff xy_\mathrm{B}-xy_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}+x_\mathrm{A}y_\mathrm{A}-yx_\mathrm{B}+yx_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{A}=0\\
&\iff xy_\mathrm{B}-xy_\mathrm{A}-yx_\mathrm{B}+yx_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}+x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}+\cancel{x_\mathrm{A}y_\mathrm{A}}-\cancel{x_\mathrm{A}y_\mathrm{A}}=0\\
&\iff xy_\mathrm{B}-xy_\mathrm{A}-yx_\mathrm{B}+yx_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}+x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}\\
&\iff x\underbrace{(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})}_{a}+y\underbrace{(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B})}_{b}\underbrace{-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}+x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}}_{c}
\end{aligned}
$$

Forme carthésienne	$ax+by+c=0$
avec	$a=y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}$
	$b=x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B}$
	$c=x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}$

Algorithme	Programme calculatrice

☞ entrées
$x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}$
	`PROGRAM:EQLINE`
	`:Input "XA : ",X`
	`:Input "YA : ",Y`
	`:Input "XB : ",Z`
	`:Input "YB : ",T`

☞ Traitement
$y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}$ donne la valeur a
$x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B}$ donne la valeur b
$x_\mathrm{B}y_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}y_\mathrm{B}$ donne la valeur c
	`PROGRAM:EQLINE`
	`:T-Y→A`
	`:X-Z→B`
	`:Z*Y-X*T→C`

☞ Sorties
Afficher "`ax + by + c = 0`"
Afficher "`a, b, c`"
	`:Disp`
	`"AX+BY+C=0"`
	`:Disp A,B,C`

Exemple n°1 : $\mathrm{A}(-1,-3)$ et $\mathrm{B}(2,-1)$
Éq. cart. $2x-3y-7=0$

Exemple n°2 : $\mathrm{A}(-3,5)$ et $\mathrm{B}(3,-8)$
Équ. cart. $-13x-12y-57=0$
$13x+12y+57=0$ ☜

Exemple n°3 : $\mathrm{A}(-3,-10)$ et $\mathrm{B}(5,-4)$
Équ. cart. $6x-8y-62=0$
$3x-4y-31=0$ ☜

11.6.2 Équation réduite d'une droite (AB)

$A(x_A, y_A) \qquad A \neq B$
$B(x_B, y_B) \qquad \text{et } x_A \neq x_B$

Remarque :
Si $x_A = x_B$, alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.
Soit la droite D définie par l'équation réduite $y = mx + p$

$$\text{on a :} \begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$$

$$y_B - y_A = mx_B - mx\mathrm{A}$$

$$y_B - y_A = m(x_B - x\mathrm{A})$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{différences des ordonnées} \\ \longrightarrow \text{différences des abscisses} \end{array}$$

$$p = y_A - mx_A$$

$$p = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$$

Algorithme	Programme calculatrice

☞ <u>entrées</u>
x_A, y_A, x_B, y_B
	`PROGRAM:EQLINE`
	`:Input "XA : ",X`
	`:Input "YA : ",Y`
	`:Input "XB : ",Z`
	`:Input "YB : ",T`

☞ <u>Traitement</u>
$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ donne la valeur de m
$y\mathrm{A} - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$ donne la valeur de p
	`PROGRAM:EQLINE`
	`:(T-Y)/(Z-X)→M`
	`:Y-(M)*X→P`

☞ <u>Sorties</u> Afficher "`y = mx + p`" Afficher "`m` et `p` "	`:Disp "Y=MX+P"` `:Disp M,P`

Exemple n°1 : $A(-1,2)$ et $B(3,2)$

(AB) est parallèle à l'axe des abscisses. Donc :

$a = 0$ $b = -4$ $c = 8$
Ainsi :
$0x - 4y + 8 = 0$
$-4y + 8 = 0$
$-4y = -8$
$y = 2$

Equation réduite : $m = 0$
$p = 2$

$y = 0x + 2$
$y = 2$

Exemple n°2 : $A(3,1)$ et $B(3,4)$

(AB) est parallèle à l'axe des ordonnées. Donc :

$a = 3$ $b = 0$ $c = -9$
Ainsi :
$3x + 0y - 9 = 0$
$-x - 9 = 0$
$3x = 9$
$x = 3$

Pas d'équation réduite sous la forme habituelle.
$y = mx + p$ $\longleftarrow$ ne convient pas. On écrit : $x = 3$

Équation réduite donnée
Exercice n°1

$y = 2x + 3$

$A(1,5)$
$B(2,7)$
$m = 2$
$p = 3$

Exercice n°2 : $y = \dfrac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

$A(-1,-3)$ et $B(2,1)$

$m = 0,66666667$ $\quad m = \dfrac{2}{3}$
$p = -2,3333334$ $\quad p = -\dfrac{7}{3}$

Exercice n° 2 Un superbe exercice : Étude d'une famille de droites

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit $n \in \Re$

Soit D_n la droite d'équation cartésienne : $(m-5)x + (m-3)y + m + 1 = 0$

m est un paramètre et de forme $ax + by + c = 0$

$$\begin{aligned} a &= m-5 \\ b &= m-3 \\ c &= m+1 \end{aligned}$$

1. Déterminer les équations de D_2 et de D_4 ;
2. Déterminer l'équation réduite de D_m qui est parallèle à l'axe des abscisses ;
3. Déterminer l'équation réduite de D_m qui est parallèle à l'axe des ordonnées ;
4. Montrer que toutes les droites D_M passent par un point fixe I dont in déterminera les coordonnées.

1. D_2 : $$\begin{array}{rrr} (2-5)x & +(2-3)y & +2+1 = 0 \\ -3x & -y & +3 = 0 \\ 3x & +y & +3 = 0 \end{array}$$
   D_4 : $$\begin{array}{rrr} (4-5)x & +(4-3)y & +4+1 = 0 \\ -x & +y & +5 = 0 \\ x & -y & -5 = 0 \end{array}$$

2. Si D_m est paralèle à l'axe des abscisses, alors on a $ax + by + c = 0$ avec $a = 0$

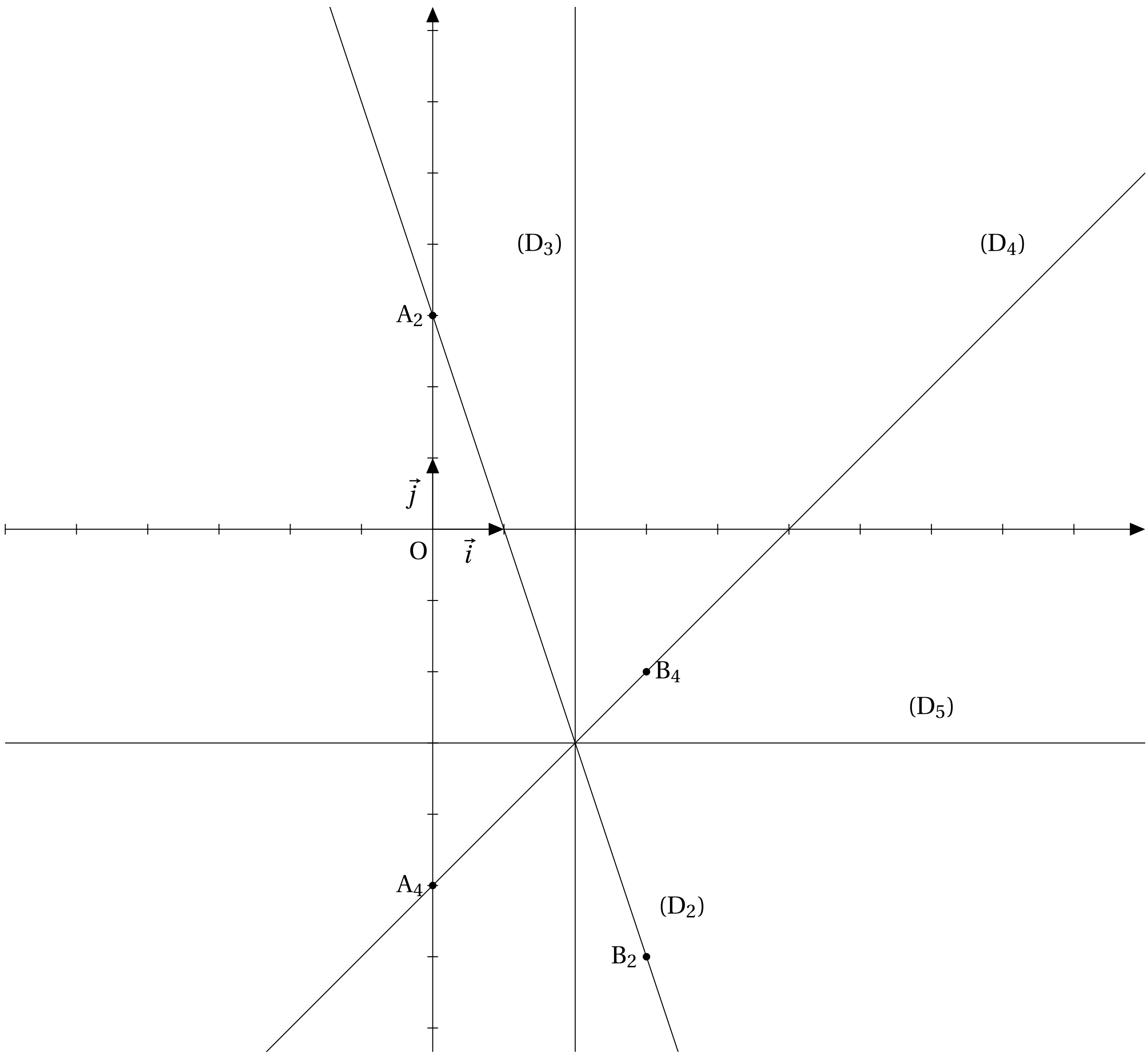
   pour que $a = 0$ on a $m = 5$

   D_5 : $$\begin{array}{rrr} (5-5)x & +(5-3)y & +5+1 = 0 \\ & +2y & +6 = 0 \\ & & \boxed{y = 3} \end{array}$$

   Si D_m est paralèle à l'axe des ordonnées, alors on a $ax + by + c = 0$ avec $b = 0$

   pour que $b = 0$ on a $m = 3$

   D_3 : $$\begin{array}{rrr} (3-5)x & +(3-3)y & +3+1 = 0 \\ -2x & & +4 = 0 \\ -2x & & = -4 \\ & & \boxed{x = 2} \end{array}$$


(D$_3$)
(D$_4$)
A$_2$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
B$_4$
(D$_5$)
A$_4$
(D$_2$)
B$_2$

3. $I(x,y) \in D_n \iff ax+by+c=0$
$\iff (m-5)x+(m-3)y+m+1=0$

1) D_2 : $(2-5)x+(2-3)y+2+1=0$
$-3x \quad -y \quad +3=0$
$3x \quad +y \quad -3=0$

D_4 : $(4-5)x+(4-3)y+4+1=0$
$-x \quad +y \quad +5=0$
$x \quad -y \quad -5=0$

Eq red : $y=-3x+3$ pour D_2 $\quad A_2(0,3)$ et $B_2(2,-6)$

$y=x-3$ pour D_4 $\quad A_4(0,-5)$ et $B_2(3,-2)$

2) Si D_m est parallèle à l'axe des abscisses, alors on a $ax+by+c=0$ avec $a=0$
Pour que $a=0$ il faut $m=5$

D_5 :
$(5-5)x+(5-3)y+5+1=0$
$2y \quad +6=0$
$2y \quad =-6$
$\boxed{y=-3}$

Si D_m est parallèle à l'axe des ordonnées, alors on a $ax+by+c=0$ avec $b=0$
Pour que $b=0$ il faut $m=3$

D_3 : $(3-5)x+(3-3)y+3+1=0$
$-2x \quad +4=0$
$-2x \quad =-4$
$x \quad =2$
$\boxed{x=2}$

4. D_3 et D_5 sont sécantes au point $I(2,-3)$
Montrons que $I \in$ à toutes les droites D_m

$(m-5)\times 2+(m-3)\times -3+m+1$
$=2m-10-3m+9+m+1$
$=0$

12 Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

12.1 Introduction

12.1.1 Exemple n° 1

$$\begin{cases} 2x-3y=-13 \\ 5x+9y=17 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

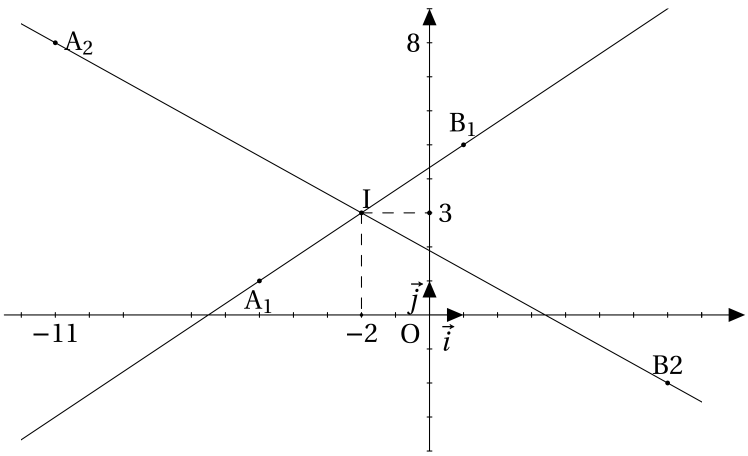
$\mathrm{D}_1 : 2x-3y+13=0$

$\mathrm{D}_2 : 5x+3y-17=0$

$\mathrm{A}_1(-5,1)$ et $\mathrm{B}_1(1,5)$

$\mathrm{A}_2(-11,8)$ et $\mathrm{B}_2(7,-2)$

$\mathrm{D}_1 : \begin{cases} 3y=-2x+13 \\ y=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{13}{3} \end{cases}$ $\quad$ $\mathrm{D}_2 : \begin{cases} 9y=-5x+17 \\ y=\dfrac{-5}{9}x+\dfrac{17}{9} \end{cases}$



$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 18+15=33 \neq 0$$

D_1 et D_2 sont sécantes en I.

Résolution du système

$$\left.\begin{cases} 2x-3y=-13 \\ 5x+3y=17 \end{cases}\right| \; 3 \qquad\qquad \left.\begin{cases} 2x-3y=-13 \\ 5x+9y=17 \end{cases}\right| \; \begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 26x-9y=-39 \\ 5x+3y\;=17 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 10x-15y\;=-65 \\ -10x-18y=-34 \end{cases}$$

$$11x=-22 \qquad\qquad -33y=-99$$

$x=-2$ $\qquad\qquad$ $y=3$

Le système admet un couple unique de solutions :

$S=\{(-2,3)\}$

12.1.2 Exemple n° 2

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=5 \end{cases}$$

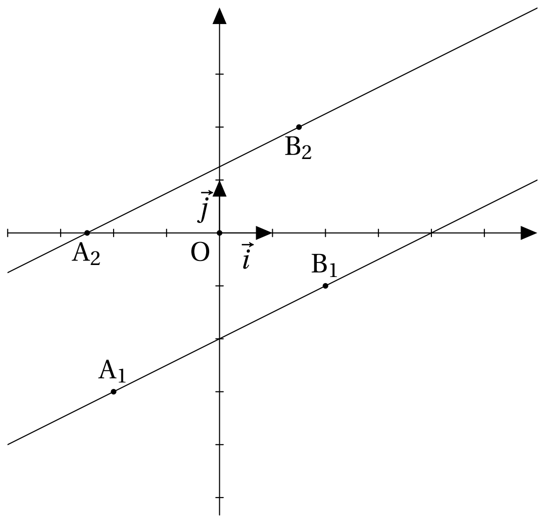
<u>Interprétation géométrique</u>

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

$D_1 : x-2y-4=0 \qquad A_1(-2,-3)$ et $B_1(2,-1)$

$D_2 : \begin{array}{c} -2x+4y-5=0 \\ 2x-4y+5=0 \end{array} \qquad A_2(-\frac{5}{2},-3)$ et $B_2(\frac{3}{2},2)$

<u>Eq red</u> : $D_1 : \begin{cases} -2y=-x+4 \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} -4y=-2x-5 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} \end{cases}$



$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4+4=0$$

D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

<u>Résolution du système</u>

La méthode des combinaisons linéaires est interdite.

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=5 \end{cases} \quad \Bigg| \quad -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ x-2y=-\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \text{Impossible}$$

Le système n'admet pas de solutions :

$S = \{\emptyset\}$

12.1.3 Exercice n° 3

$$\begin{cases} 10x+6y &= 16 \\ -5x-3y &= -8 \end{cases}$$

<u>Interprétation géométrique</u>

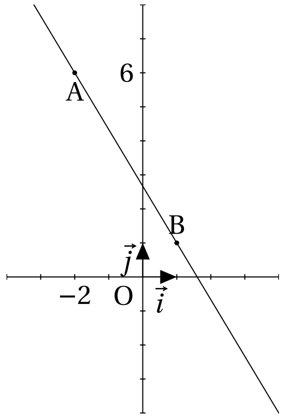
Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

D_1 : $\begin{cases} 10x+6y-16 = 0 \\ \quad 5x+3y-8 = 0 \end{cases}$

D_2 : $\begin{cases} -5x-3y+8 = 0 \\ \quad 5x+3y-8 = 0 \end{cases}$

$D_1 = D_2$

$A(-2,6)B(1,1)$



<u>Résolution du système</u>

La méthode des combinaisons linéaires est interdite.

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -30+30 = 0$$

$$\begin{cases} 10x+6y &= 16 \\ -5x-3y &= -8 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -1 \end{array} \right. \quad \begin{cases} 5x+3y = 8 \\ 5x+3y = 8 \end{cases}$$

<u>Une seule équation</u> à deux inconnues

Le système admet une infinité de solutions :

$5x+3y = 8$

On pose $x = \lambda$

Il vient : $\begin{cases} 3y = -5\lambda+8 \\ \ \ y = -\dfrac{5\lambda+8}{3} \end{cases}$

$S = \{\lambda, -\dfrac{5\lambda+8}{3}\}$

12.2 Systèmes se ramenant à des systèmes linéaires

12.2.1 Exercice nº 1

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{y+5} = 17 \\ \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{3}{y+5} = 1 \end{cases}$$

Valeurs interdites $x = 2$
$y = -5$

On pose : $X = \dfrac{1}{x-2}$
$Y = \dfrac{1}{y+5}$

Le système devient $\begin{cases} X + 8Y = 17 \\ 7X - 3Y = 1 \end{cases}$

Système linéaire.

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 56 = -59 \neq 0$$

$$\begin{cases} X + 8Y = 17 \\ 7X - 3Y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 8 \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{cases} X + 8Y = 17 \\ 7X - 3Y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -7 \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3X + 24Y = 51 \\ 56X - 24Y = 8 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -7X - 56Y = -119 \\ 7X - 3Y = 1 \end{cases}$$

$$59X = 59 \qquad\qquad -59Y = -118$$

$$X = 1 \qquad\qquad Y = 2$$

Il vient : $\dfrac{1}{x-2} = 1$ $\qquad \dfrac{1}{y+5} = 2$

$$x - 2 = 1 \qquad 2(y+5) = 1$$

$$x = 3 \qquad 2y + 10 = 1$$

Convient

$$2y = -9$$

$$y = -\frac{9}{2}$$

Convient

$$S = \left\{(3, -\frac{9}{2})\right\}$$

12.2.2 Exercice n° 2

$$\begin{cases} 4(x-3)^2 - 3(y+2)^2 &= -83 \\ 6(x-3)^2 + 11(y+2)^2 &= 635 \end{cases}$$

On pose : $X = (x-3)^2$
$Y = (y+2)^2$

Le système devient $\begin{cases} 4X - 3Y = -83 \\ 6X + 11Y = 635 \end{cases}$

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 44 + 18 = 62 \neq 0$$

$$\begin{cases} 4X - 3Y = -83 \\ 6X + 11Y = 635 \end{cases} \left| \begin{matrix} 11 \\ 3 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} 4X - 3Y = -83 \\ 6X + 11Y = 635 \end{cases} \left| \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} 44X - 33Y = -913 \\ 18X + 33Y = 1905 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12X + 9Y = 249 \\ 12X + 22Y = 1270 \end{cases}$$

$$62X = 992 \qquad 31Y = 1519$$

$$X = 16 \qquad Y = 49$$

Il vient : $(x-3)^2 = 16$ et $(y+2)^2 = 49$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 - 16 &= 0 & (y+2)^2 - 49 &= 0 \\ (x-3+4)(x-3-4) &= 0 & (y+2+7)(y+2-7) &= 0 \\ (x+1)(x-7) &= 0 & (y+9)(y-5) &= 0 \\ x+1 = 0 \text{ ou } x-7 &= 0 & y+9 = 0 \text{ ou } y-5 &= 0 \\ x = -1 \text{ ou } x &= 7 & y = -9 \text{ ou } y &= 5 \end{aligned}$$

$S = \{(-1,-9),(-1,5),(7,-9),(7,5)\}$
Le système admet 4 couples de solutions.

12.3 Algorithmique

12.3.1 Colinéarité de deux vecteurs

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère. Soit $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$ $D(x_D, y_D)$

☞ Saisir $x_A, y_A,$
$x_B, y_B,$
$x_C, y_C,$
x_D, y_D

```
PROGRAM:COLINE
:Input "XA : ",X
:Input "YA : ",Y
:Input "XB : ",Z
:Input "YB : ",T
:Input "XC : ",S
:Input "YC : ",U
:Input "XD : ",V
:Input "YD : ",W
```

☞ Traitement $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$

$x_B - x_A$ donne la valeur a
$y_B - y_A$ donne la valeur b
$x_D - x_C$ donne la valeur c
$y_D - y_C$ donne la valeur d

```
:Z-X→A
:T-Y→B
:V-S→C
:W-U→D
```

$(x_B - x_A)(y_D - y_c) - (y_B - y_A)(x_D - x_C)$ prend la valeur e

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_D - x_C \\ y_B - y_A & y_D - y_C \end{vmatrix} = e$$

```
:A*D-B*C→E
```

☞ Sorties $e = 0 \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

Si $e = 0$
Afficher "OUI"
Sinon
Afficher "NON"
fin de Si

```
:IF E=0
:Disp "OUI"
:ELSE
:Disp "NON"
:End
```

12.4 Exemples de problèmes

Ex n° 1

1. Énoncé :

   Chez un confiseur, Sylvette achète des chocolats noirs et des chocolats blancs au détail.

   Chaque chocolat noir est vendu 0,45€et pèse 35g.
   Chaque chocolat blanc est vendu 0,30€et pèse 20g.

   Sylvette paie 13,80€pour 980g de chocolat.

   Déterminer le nombre de chocolats de chaque sorte achetés par Sylvette.

Choix des inconnues

   Soit x le nombre de chocolats noirs.
   Soit y le nombre de chocolats blancs.

2. Mise en équation du problème :

$$\begin{cases} 0,45x+0,30y = 13,80 \\ 35x+20y = 980 \end{cases}$$

3. Résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 0,45x+0,30y = 13,80 \\ 35x+20y = 980 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 200 \\ -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 30x+60y = 2760 \\ -105x-60y = -2940 \end{array}\right.$$

$$-15x = -180$$
$$x = 12$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y = 92 \\ 7x+4y = 196 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} -2 \\ \end{array}\right.$$

$$x = 12$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,45x+0,30y = 13,80 \\ 35x+20y = 980 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} -35 \\ 0,45 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -15,75x-10,5y = -483 \\ 15,75x+3Y = 441 \end{array}\right.$$

$$-1,5y = -42$$
$$y = 28$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y = 92 \\ 7x+4y = 196 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 7 \\ -3 \end{array}\right.$$

$$2y = 56$$
$$y = 28$$

4. Réponse : Sylvette a acheté 12 chocolats noirs et 28 chocolats blancs.

Ex n° 2

1. Énoncé :

   * Si l'on augmente de $2m$ la longueur L d'un rectangle et de $3m$ sa largeur l, alors l'aire du rectangle augmente de $36m^2$.
   * Si l'on diminue L de $5m$ et l de $4m$, alors l'aire diminue de $135m^2$.

   Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

Choix des inconnues

Soit L la longueur initiale du rectangle et l la largeur initiale du rectangle ; unité : le mètre.

2. Mise en équarion du problème :

$$\begin{cases}(L+2)(l+3) = L\times l + 96\\(L-5)(l-4) = L\times l - 135\end{cases}$$

3. Résolution du système :

$$\begin{cases}(L+2)(l+3) = L\times l + 96\\(L-5)(l-4) = L\times l - 135\end{cases}$$

$$\begin{cases}Ll + 3L + 2l + 6 = Ll + 96\\Ll - 4L - 5l + 20 = Ll - 135\end{cases}$$

$$\begin{cases}3L + 2l = 90\\-4L - 5l = -155\end{cases} \quad \begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{cases}3L + 2l = 90\\-4L - 5l = -155\end{cases} \quad \begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}15L + 10l = 450\\-8L - 10l = -310\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}12L + 8l = 360\\-12L - 15l = -465\end{cases}$$

$$7L = 140 \qquad\qquad -7L = -105$$

$$L = 20 \qquad\qquad l = 15$$

4. Réponse au problème :

La longueur initiale était de $20m$ et la largeur initiale de $15m$

Ex n° 3

1. Énoncé :

Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.
Soient A(6, 3) B(−2, −7) C(16, −1)
Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Déterminer les coordonnées du point Ω.

On a $\Omega A = \Omega B = \Omega C$

$$\iff \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Omega A^2 = \Omega B^2 \\ \Omega A^2 = \Omega C^2 \end{cases}$$

Choix des inconnues

Soit x l'abscisse de Ω
Soit y l'ordonnée de Ω

2. Mise en équation du problème :

$$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 6-x \\ 9-y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} -2-x \\ -7-y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix} 16-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

$$\Omega A^2 = (6-x)^2 + (9-y)^2$$
$$\Omega B^2 = (-2-x)^2 + (-7-y)^2$$
$$\Omega C^2 = (16-x)^2 + (-1-y)^2$$

$$\begin{cases} (6-x)^2 + (9-y)^2 = (-2-x)^2 + (-7-y)^2 \\ (6-x)^2 + (9-y)^2 = (16-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases}$$

3. Résolution du système :

$$\begin{cases} 36 - 12x \cancel{+x^2} + 81 - 18y \cancel{+y^2} = 4 + 4x \cancel{+x^2} + 49 + 14y \cancel{+y^2} \\ 36 - 12x \cancel{+x^2} + 81 - 18y \cancel{+y^2} = 256 - 32x \cancel{+x^2} + 1 + 2y \cancel{+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x - 18y + 117 = 4x + 14y + 53 \\ -12x - 18y + 117 = -32x + 2y + 257 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x - 32y = -64 \\ 20x - 20y = 140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \Big| \quad 2 \qquad\qquad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \Big| \quad -1$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + y = -7 \end{cases}$$

$$2x = 18 \qquad\qquad 3y = -3$$
$$x = 6 \qquad\qquad y = -1$$

4. Réponse au problème :

$\Omega(6, -1)$

Ex n° 4

1. Énoncé :

   Deux motocyclistes (Sylvain et Sylvette) quittent simultanément une ville A et se dirigent vers une ville B

   Sylvain arrive en B à 12h. Il a roulé à 80km/h.
   Sylvette arrive en B à 13h. Elle a roulé à 60km.h^{-1}.

Choix des inconnues

   Déterminer la distance entre A et B et l'heure de départ des deux motocyclistes.
   Soit d la distance entre A et B. Unité : km
   Soit h l'heure de départ des deux motocyclistes

2. Mise en équation du problème :

   $v = \dfrac{d}{t}$ en km× heure^{-1} $\quad d = vt \quad t = \dfrac{d}{v}$

3. Résolution du système :

$$\begin{cases} d = 80 \times (12 - h) \\ d = 60 \times (13 - h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -960 = -d - 80h \\ -780 = -d - 60h \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} d + 80h = 360 \\ d + 60h = 780 \end{cases}\right| \begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix} \qquad\qquad \left.\begin{cases} d + 80h = 360 \\ d + 60h = 780 \end{cases}\right| \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3d + 240h = 2880 \\ -4d - 240h = -3120 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} d + 80h = 360 \\ -d - 60h = -780 \end{cases}$$

$$-d = -240 \qquad\qquad 20h = 180$$

$$d = 240 \qquad\qquad h = 9h$$

4. Réponse au problème :

   La distance parcourue est de 240 km et l'heure de départ est 9h.

Ex n° 5

1. Énoncé :

   Sylvain et Sylvette vont en voiture de A à B. Le trajet comporte une partie de route et une partie d'autoroute.

	Route	Autoroute
Vitesse (en km.h^{-1})	90	130
Consommation d'essence (litres/100km)	6,5	9

   Sylvain et Sylvette ont mis 1h50 et ont consommé 13,5l d'essence.
   Déterminez la longueur totale du trajet.

Choix des inconnues

   Soit x la longueur de partie route du trajet.
   Soit y la longueur de partie autoroute du trajet.
   Unité : le kilomètre.

2. Mise en équation du problème :

$$\begin{array}{r} \text{Temps :} \\ \text{Consommation :} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{30} + \dfrac{y}{130} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{6,5}{100}x + \dfrac{9}{100}y = 13,5 \end{array} \right.$$

3. Résolution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{90} + \dfrac{y}{130} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{6,5}{100}x + \dfrac{9}{100}y = 13,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{13x}{117} + \dfrac{9y}{117} = \dfrac{11}{6} \\ 6,5x + 9y = 1950 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 78x + 54y = 12870 \\ 6,5x + 9y = 1950 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 39x + 27y = 6435 \\ 6,5x + 9y = 1950 \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad -3$$

$$19,5x = 585$$
$$x = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 39x + 27y = 6435 \\ 6,5x + 9y = 1950 \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad -6$$

$$-27y = -5265$$
$$y = 195$$

4. Réponse au problème :

   Sylvain et Sylvette ont parcouru : $30 + 195 = 225$Km au total.

Ex n° 6

1. Énoncé :

   Deux villes A et B sont distantes de 130km.
   Sylvain part à 8h de A et se dirige vers B.
   Sylvette① part à 9h de B et se dirige vers A.
   Sylvette② part à 9h30 de B et se dirige vers A.
   Les deux Sylvettes à la même vitesse.
   Sylvain rencontre Sylvette① après avoir parcouru 88km
   Sylvain rencontre Sylvette② après avoir parcouru 106km
   Déterminer la vitesse de Sylvain et la vitesse des Sylvettes.

2. Choix des inconnues

   Soit V_1 la vitesse de Sylvain.
   Soit V_2 la vitesse des Sylvettes. $\Big\}$ V_1 et V_2 en km/h.

3. Mise en équation du problème :

✷ Temps mis par Sylvain jusqu'à la première rencontre : $\dfrac{88}{V_1}$

Et alors Temps mis par Sylvette① jusqu'à la première rencontre : $\dfrac{42}{V_2}$

✷ Temps mis par Sylvain jusqu'à la deuxième rencontre : $\dfrac{106}{V_1}$

Et alors Temps mis par Sylvette② jusqu'à la deuxième rencontre : $\dfrac{24}{V_2}$

On a : $\begin{cases} 8+\dfrac{88}{V_1} = 9+\dfrac{42}{V_2} & \longleftarrow \text{Heure de la première rencontre} \\ 8+\dfrac{106}{V_1} = 9{,}5+\dfrac{24}{V_2} & \longleftarrow \text{Heure de la deuxième rencontre} \end{cases}$

4. <u>Résolution du système :</u>

$$\begin{cases} \dfrac{88}{V_1} - \dfrac{42}{V_2} = 1 \\ \\ \dfrac{106}{V_1}x - \dfrac{24}{V_2}y \ = 1,5 \end{cases}$$

Le système est linéaire si l'on pose : $X = \dfrac{1}{V_1}$ et $Y = \dfrac{1}{V_2}$

$$\begin{cases} 88X - 42Y = 1 \\ 106X - 24Y = 1,5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 24 \\ -42 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2112X - 1008Y = 24 \\ -4452X - 1008Y \ = -63 \end{cases}$$

$$-2340X = -39$$

$$X = \frac{1}{60}$$

$$\begin{cases} 88X - 42Y = 1 \\ 106X - 24Y = 1,5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 106 \\ -88 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 9328X - 4452Y = 106 \\ -9328X + 2112Y \ = -132 \end{cases}$$

$$-2340Y = -26$$

$$Y = \frac{1}{90}$$

Il vient : $\dfrac{1}{V_1} = \dfrac{1}{60}$ et $\dfrac{1}{V_2} = \dfrac{1}{90}$

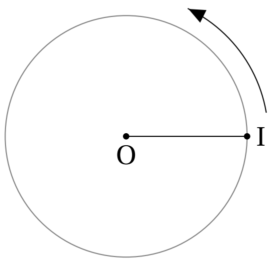
5. <u>Réponse au problème</u> :

Sylvain roule à 60km/h et les 2 Sylvettes à 90km/h.

13 Trigonométrie

13.1 Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon R = 1 sur lequel on a choisi une origine I et un sens de parcours appelé « sens trigonométrique ».



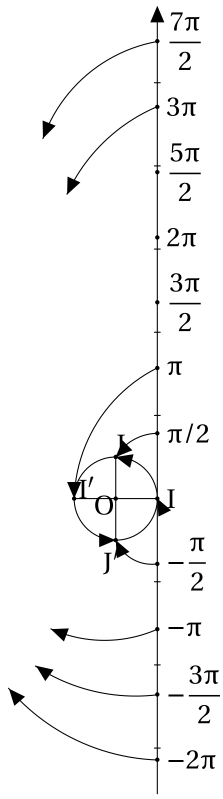
R = OI = 1

13.2 Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

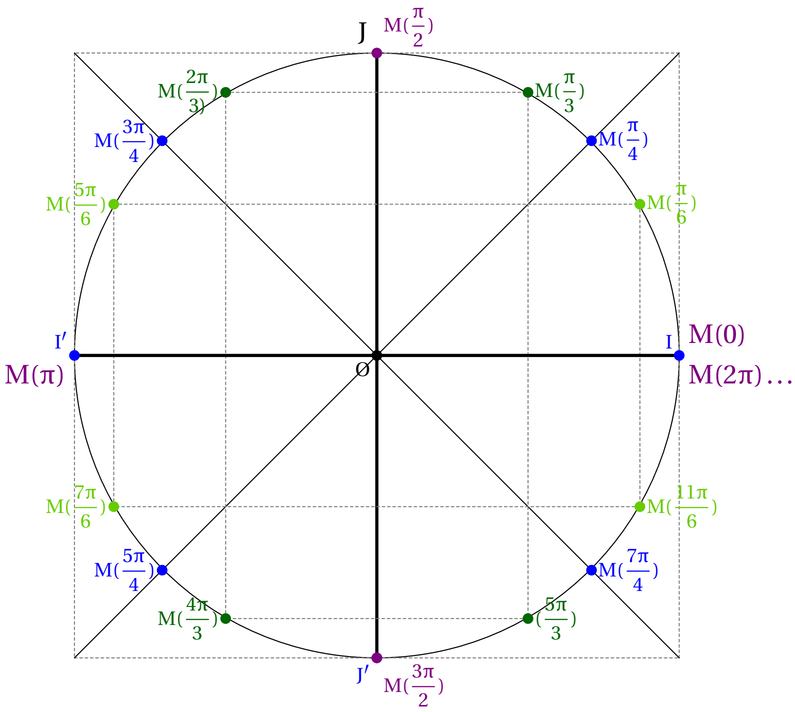
Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique.
$\mathscr{P} = 2\pi R = 2\pi$ puisque R = 1

- ✷ À tout nombre réel x correspond un point et un seul de $\mathscr{C}$ appelé « image de x sur $\mathscr{C}$ noté $M(x)$.

  $M(\pi) = I'$
- ✷ Tout point M de $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de nombres réels.



Si M est	l'image de x sur $\mathscr{C}$
M est aussi	l'image de $x+2\pi$
M est aussi	l'image de $x+4\pi$
M est aussi	l'image de $x+6\pi\ldots$
M est aussi	l'image de $x+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$



Notion de congruence

$\frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \longleftarrow$ Un tour de cercle.

$\frac{9\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $\frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi \longleftarrow$ Deux tours de cercle.

$\frac{15\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 7\pi \longleftarrow \frac{7}{2}$ tours de cercle.

Exercice : Placer sur un cercle trigonométrique les images de :
$\frac{223\pi}{6}$, $\frac{252\pi}{4}$, $\frac{431\pi}{3}$, $\frac{1035\pi}{4}$, $\frac{1702\pi}{3}$, $\frac{2015\pi}{6}$

☞ $\frac{223\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$ car $\frac{223\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = 36\pi \longleftarrow$ 18 tours de cercle.

☞ $\frac{291\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ car $\frac{291\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = 72\pi \longleftarrow$ 36 tours de cercle.

☞ $\frac{431\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}\ [2\pi]$ car $\frac{231\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = 142\pi \longleftarrow$ 71 tours de cercle.

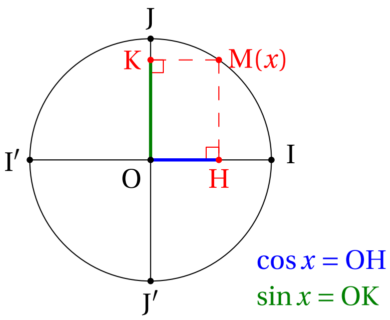
☞ $\frac{1035\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ car $\frac{1035\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = 258\pi \longleftarrow$ 129 tours de cercle.

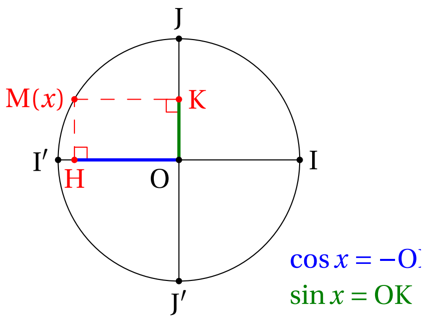
☞ $\frac{1702\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ car $\frac{1702\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = 566\pi \longleftarrow$ 283 tours de cercle.

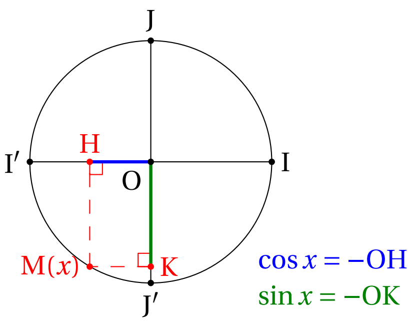
☞ $\frac{2015\pi}{6} \equiv \frac{11\pi}{6}\ [2\pi]$ car $\frac{2015\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = 334\pi \longleftarrow$ 167 tours de cercle.

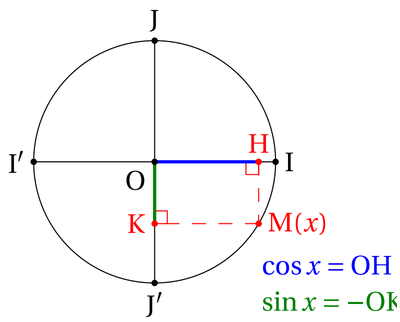
13.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique.
Soit $\mathrm{M}(x)$ l'image de x sur $\mathscr{C}$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).
Soit K le projeté orthogonal de M sur (OJ).

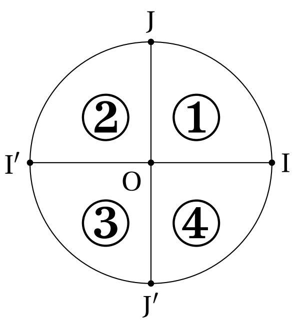








Quatre quadrants.



① $\longrightarrow$ $\cos(x) > 0$, $\sin(x) > 0$ ② $\longrightarrow$ $\cos(x) < 0$, $\sin(x) > 0$

③ $\longrightarrow$ $\cos(x) < 0$, $\sin(x) < 0$ ④ $\longrightarrow$ $\cos(x) > 0$, $\sin(x) < 0$

En particulier :

- $\cos 0 = 1$

  $\sin 0 = 0$

- $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$

  $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$

- $\cos \pi = -1$

  $\sin \pi = 0$

- $\cos \dfrac{3\pi}{2} = 0$

  $\sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$

Propriétés fondamentales pour $k \in \mathbb{Z}$

✱Pour tout $x \in \Re$ $\quad \bullet -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$\bullet -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

✱Pour tout $x \in \Re$ $\quad \bullet \cos(x+2k\pi) = \cos x$

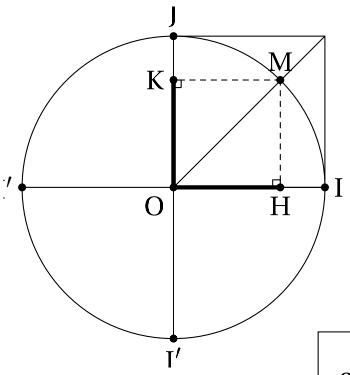
$\bullet \sin x(x+2k\pi) = \sin x$

✱Pour tout $x \in \Re$ $\quad \bullet \cos^2(x+2k\pi) + \sin^2(x+2k\pi) = 1$

$(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}})$ un repère orthonormal.

$\mathrm{M}(\cos x, \sin x)$ dans $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}})$.

$$\begin{aligned}
\cos^2(x+2k\pi) + \sin^2 x &= \mathrm{OH}^2 + \mathrm{OK}^2 \\
&= \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2 \\
&= \mathrm{OM}^2 \\
&= 1 \qquad \text{car } \mathrm{OM} = 1
\end{aligned}$$



✱ Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

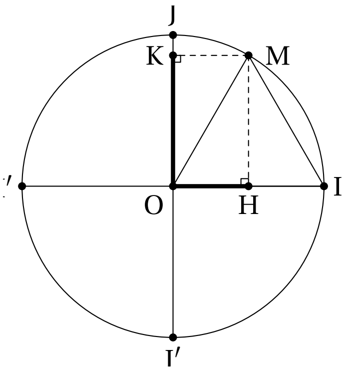
$$\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$2sin^2\frac{\pi}{4} = 1$$

$$cos^2\frac{\pi}{4} = sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{donc } = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

✱ Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$$

$$0H = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$$

$$\sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{4}$$

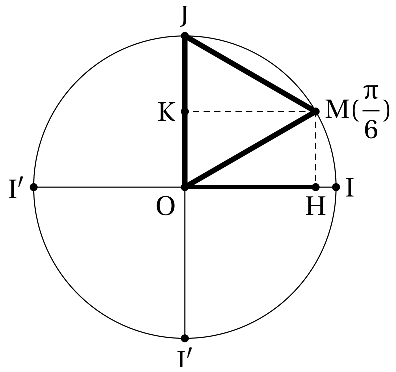
$$\sin^2(\frac{\pi}{3}) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\sin(\frac{\pi}{3} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(\sin(\frac{\pi}{3}) + \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

✱ Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{6}$



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{6}) = 1$$

$$OK = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{6}) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\cos^2(\frac{\pi}{6}) - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(\cos^2(\frac{\pi}{6})) + \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

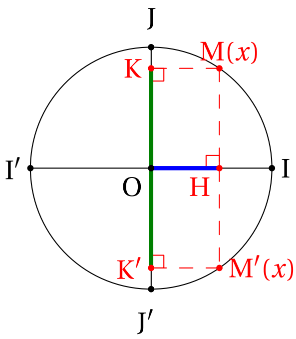
$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

Récapitulation :

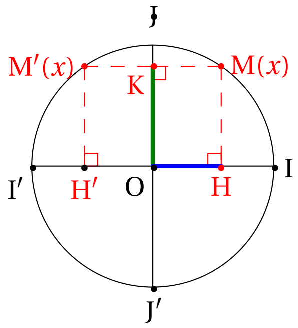
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

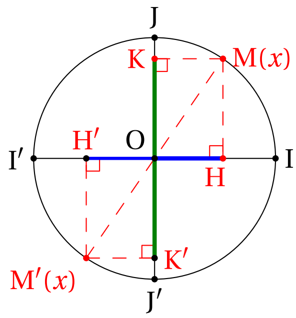
Formules de transposition



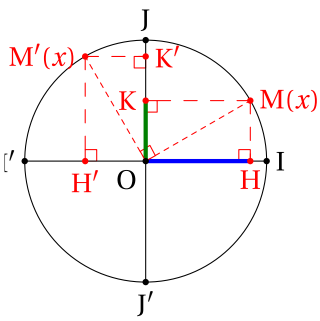
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$



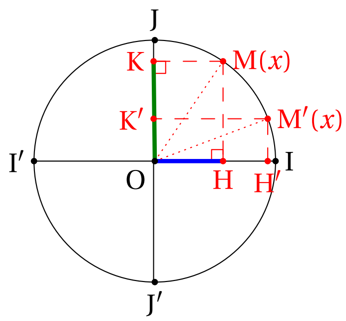
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = \sin(x)$



$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Un superbe exercice :
Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier :

1. $$\begin{aligned} \text{A} &= \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) \\ &= \cos x + \sin x - \sin x - \cos x \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \text{A}' &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \text{B} &= \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2(\pi - x) \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

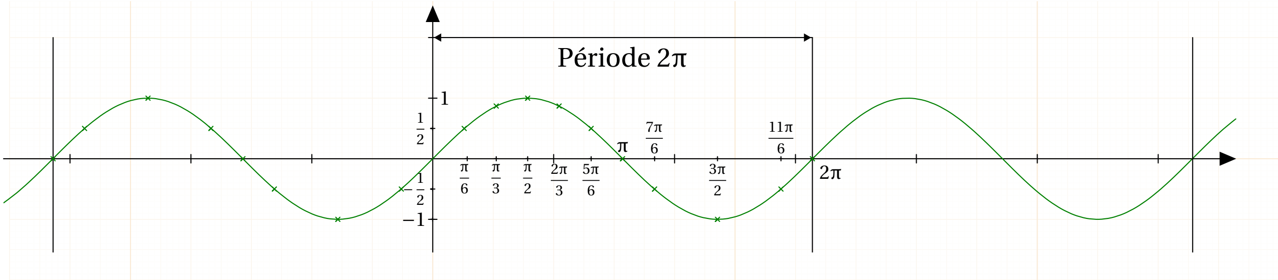
4. $$\begin{aligned} \text{B}' &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)) + \sin^2(\pi - \frac{\pi}{8}) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

13.4 Représentations graphiques

13.4.1 Représentation graphique de la fonction sinus

$$\begin{array}{rcl} \sin & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \sin x \end{array}$$

$$\mathscr{D}_{\sin} = \mathbb{R}$$



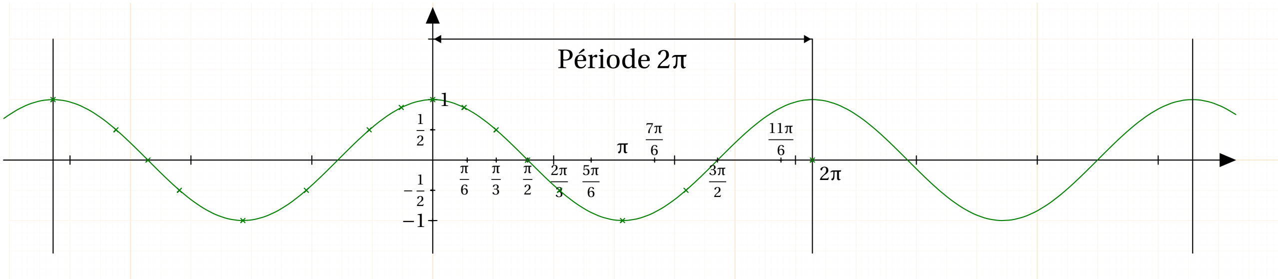
La fonction sinus est périodique de période 2π.

La fonction est dite <u>sinusoïde</u>.

13.4.2 Représentation graphique de la fonction cosinus

$$\begin{array}{rcl} \cos & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \cos x \end{array}$$

$$\mathscr{D}_{\cos} = \mathbb{R}$$



La fonction cosinus est périodique de période 2π.

La fonction est dite <u>sinusoïde</u>.

13.4.3 Comparaison des représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus

Cosinus tracé en vert

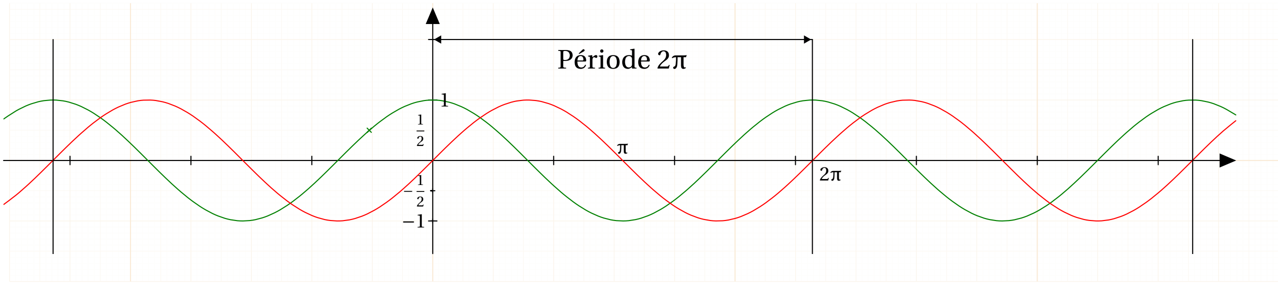
$$\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{array}$$

$$\mathscr{D}_{\cos} = \mathbb{R}$$

Sinus tracé en rouge

$$\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$$

$$\mathscr{D}_{\cos} = \mathbb{R}$$



La représentation graphique de la fonction cosinus est obtenue par translation de la fonction sinus avec un décalage de $\dfrac{\pi}{2}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

13.4.4 Exercice

f tracé en vert

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

f est périodique de période 2π

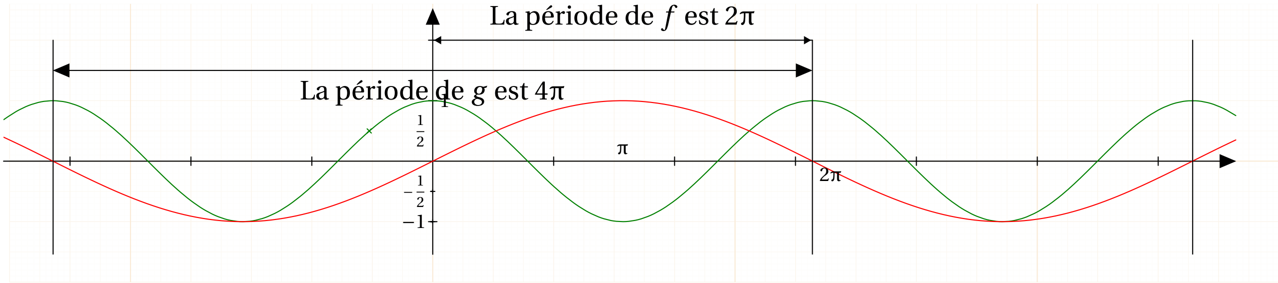
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

g tracé en rouge

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

g est périodique de période π

$\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$



$$\begin{array}{ccccc} 2\pi & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & 0 \\ \pi & \longrightarrow & \frac{\pi}{2} & \longrightarrow & 1 \\ \frac{\pi}{2} & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} & \longrightarrow & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{3} & \longrightarrow & \frac{\pi}{6} & \longrightarrow & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \sin 0 & = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6} & = \frac{1}{2} \\ x = \pi & \sin\frac{\pi}{2} & = 1 \\ x = \frac{5\pi}{3} & \sin\frac{5\pi}{6} & = \frac{1}{2} \\ x = 2\pi & \sin \pi & = 0 \end{array}$$

14 Fonctions numériques de la variable réelle

14.1 Introduction

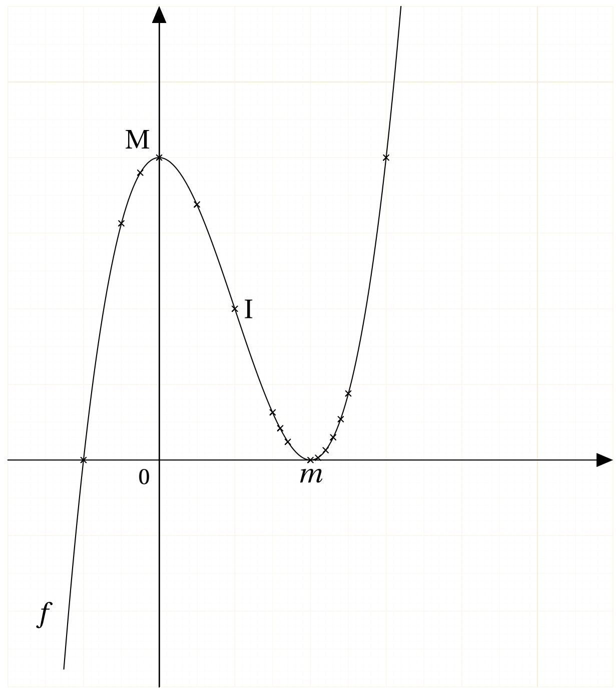
14.1.1 Exemples de représentations graphiques de fonctions polynômes.

Exercice n° 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$x_{min} = -3$
$x_{max} = 5$
$y_{min} = -3$
$y_{max} = 5$



Commentaires :
Sens de variation
f est croissante sur $]-\infty, 0]$
f est décroissante sur $[0, 2]$
f est croissante sur $[2, \infty[$

$\mathrm{M}(0,4) \longrightarrow$ un maximum (des maxima) local (sinon absolu)
$\mathrm{M}(2,0) \longrightarrow$ un minimum (des minima) local (sinon absolu)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

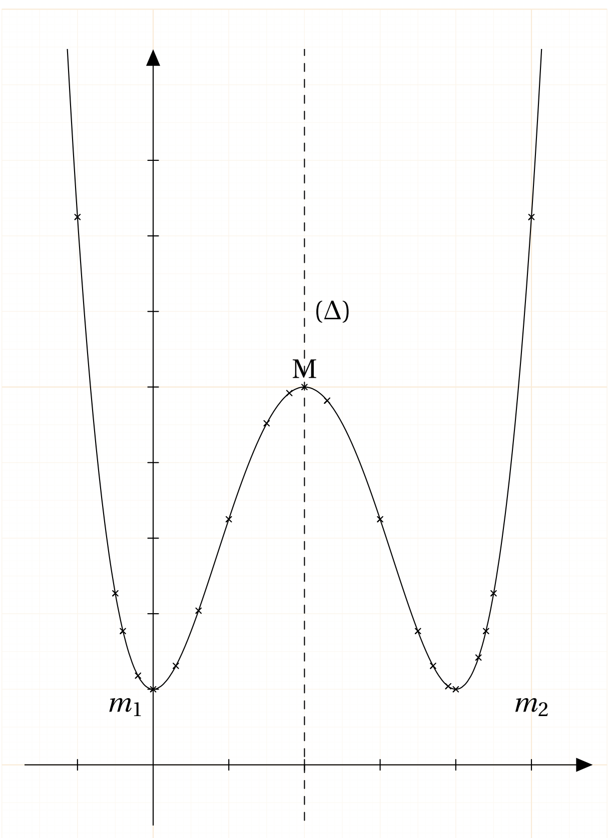
$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à $\mathrm{I}(1,2)$. (Symétrie centrale).

Exercice n° 2

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

[4]



f est décroissante	sur $]-\infty, 0]$
f est croissante	sur $[0, 2]$
f est décroissante	sur $[2, 4]$
f est croissante	sur $[4, +\infty[$

$M(2,5) \longrightarrow$ maximum local
$m_1(0,1)$ et $m_2(4,1) \longrightarrow$ minima absolus.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite Δ d'équation $x = 2$. (Symétrie axiale).

4. Où on peut voir un chameau ou un Ω (oméga dodu)

14.1.2 Exemples de représentations graphiques de fonctions rationnelles

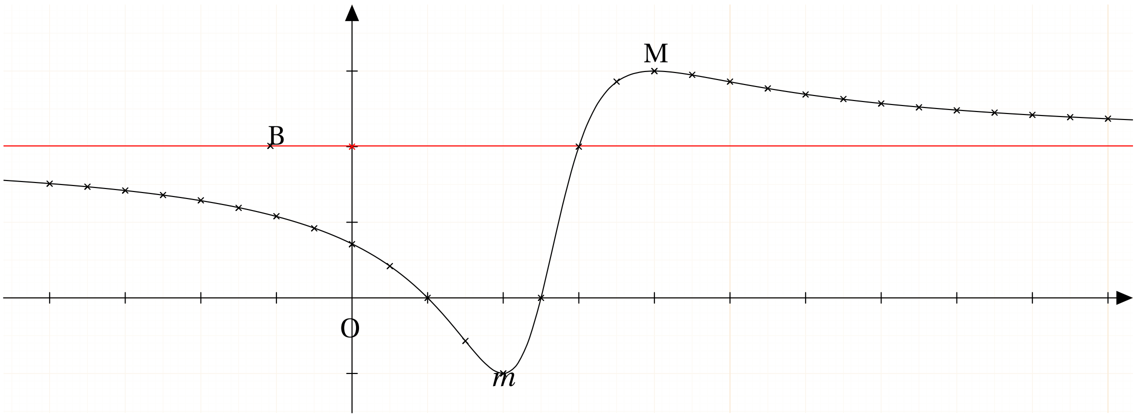
Exercice nº 1

$$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$$

Il ne faut pas que $x^2 - 5x + 7 = 0$

$$(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + \frac{3}{4} = 0$$
$$(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ puisque l'équation $(x^2 - \frac{5}{2})^2 = -\frac{3}{4}$ n'a pas de solution.



f est décroissantesur $]-\infty, 2]$
f est croissante sur $[2, 4]$
f est décroissantesur $[4, +\infty[$

M$(4, 3) \longrightarrow$ un maximum (des maxima) local (sinon absolu)
M$(2, -1) \longrightarrow$ un minimum (des minima) local (sinon absolu)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Exercice n° 2

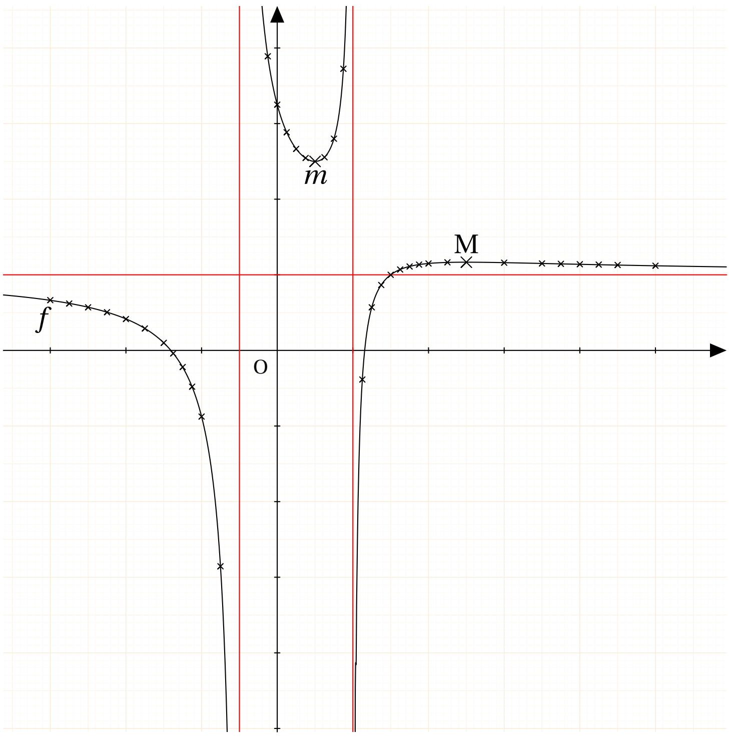
$$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - x - 2}$$

Il ne faut pas que

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{9}{4} &= 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 &= 0 \\ (x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x = -1 \text{ ou } x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_f &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[. \end{aligned}$$

Asymptotes verticales $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ Asymptote horizontale $y = 2$



f est décroissante sur $]-\infty, -1[$
f est décroissante sur $]-1, 1]$
f est croissante sur $[1, 2[$
f est croissante sur $]2, 4]$
f est décroissante sur $[4, +\infty[$

$m(5, \frac{7}{3}) \longrightarrow$ un minimum local

$\mathrm{M}(1, 5) \longrightarrow$ un maximum local

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	2

Exercice n° 3

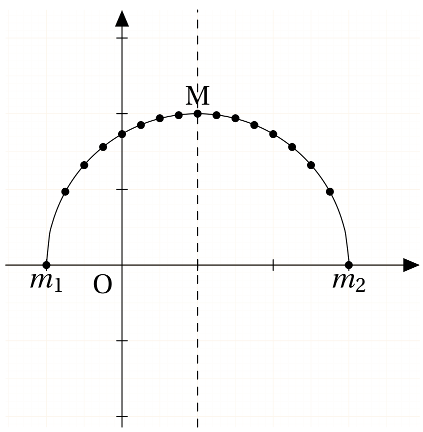
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{Il faut que} \quad -x^2+2x+3 &\geqslant 0 \\ x^2-2x-3 &\leqslant 0 \\ \ldots \\ (x+1)(x-3) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{D}_f = [-1,3]$

Qu'est-ce qu'il y a avant -1 ?
Rien, le néant, le vide total !



f est croissante sur $]-1,1[$

f est décroissante sur $]1,3[$

$m_1(-1,0)$ et $m_2(3,0)$ sont des minima absolus

$\mathrm{M}(1,2)$ est un maximum absolu

x	-1		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

La fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=1$.

Montrons que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon $R = 2$

Dans un repère orthonormal :

Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ y = \sqrt{-x^2+2x+3} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Omega M^2 &= (x-1)^2 + (\sqrt{-x^2+2x+3})^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\Omega M = 2$

D'autre part, pour tout $x \in [-1, 3]$ $\quad f(x) \geqslant 0$.

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses.

Exercice n° 4

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{x^2-2x-3} \end{aligned}$$

Il faut que

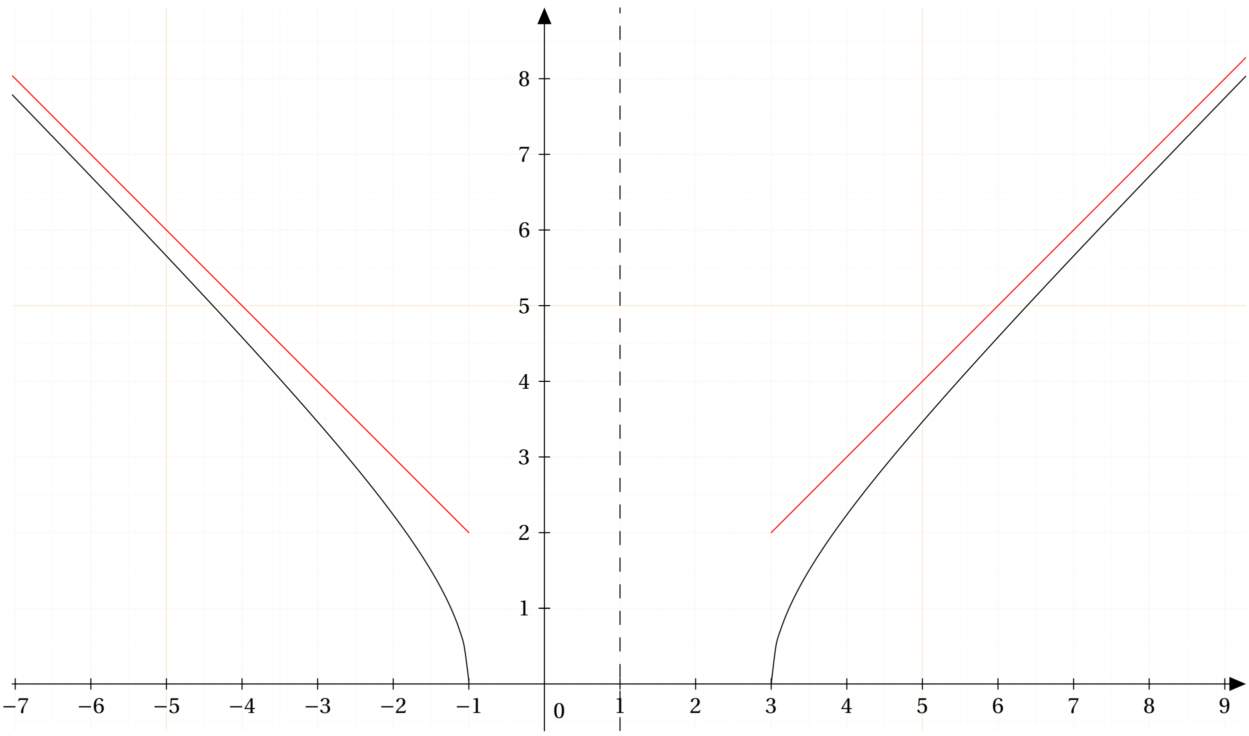
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\geqslant 0 \\ (x^2 - 2x + 1) - 4 &\geqslant 0 \\ (x^2 - 1)^2 - 4 &\geqslant 0 \\ (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) &\geqslant 0 \\ (x+1)(x-3) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{D}_f =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

Sur $]-\infty, -1]$
Soit Δ_1 la demi-droite d'équation : $y = -x + 1$

Sur $[3, +\infty[$
Soit Δ_2 la demi-droite d'équation : $y = x - 1$



f est décroissante sur $]-\infty, -1]$
f est croissante sur $[3, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	0	$\nearrow +\infty$

$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
Δ_1 sur $]-\infty, -1]$ $\quad y = -x + 1$
Δ_2 sur $[3, +\infty[$ $\quad y = x - 1$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$g(x) = -x + 1$

$$\begin{cases} f(-10) \approx 10{,}815 \\ g(-10) = 11 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(-100) \approx 100{,}980 \\ g(-100) = 101 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(-1000) \approx 1000{,}998 \\ g(-1000) = 1001 \end{cases}$$

$g(x) = x - 1$

$f(+10) \approx 8{,}774$
$g(10) = 9$

$f(+100) \approx 98{,}975$
$g(100) = 99$

$f(+1000) \approx 998{,}997$
$g(1000) = 999$

Exercice n° 1 (suite)

— Déterminer le nombre et le signe des solutions $f(x) = 2$

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

3 points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ d'équation $y = 2$

L'équation admet 3 solutions $\underbrace{x_1, x_2 \text{ et } x_3}_{\text{Les abscisses de 3 points d'intersection}}$

$x_1 < 0 \quad (\approx 0,7)$
$x_2 = 1$
$x_3 > 0 \quad (\approx 2,7)$

— Soit $m \in \mathbb{R}$

Discuter graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 4 \\ y = m \end{cases}$$

m	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f(x) = m$	Une solution x_1 avec $x < 0$	‖	3 solutions x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < 0$ $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$	‖	Une solution x_1 avec $x > 0$
		$x_1 = -1, x_2 = 2$ double car minimum		$x_1 = -1, x_2 = 2$ double car minimum	

Exercice n° 2 (suite)

— Déterminer le nombre et le signe des solutions $f(x) = 4$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

4 points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ d'équation $y = 3$

L'équation admet 4 solutions $\underbrace{x_1, x_2, x_3 \text{ et } x_4}_{\text{Les abscisses de 3 points d'intersection}}$

$x_1 < 0$
$x_2 > 0$
$x_3 > 0$
$x_4 > 0$

— Soit $m \in \mathbb{R}$

Discuter graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1 \\ y = m \end{cases}$$

m	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f(x) = m$	Aucune solution pas de solution	‖	4 solutions $x_1, x_2, x_3 x_3$ et x_4 avec $x_1 < 0$ $x_2 > 0, x_3 > 0$ et $x_4 > 0$	‖	2 solutions$x_1 et x_2$ avec $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$
		$x_1 = 0, x_2 = 4$ double car minimum		$x_1 < 0, x_2 = 2,$ et $x_3 > 0$ x_2 est une solution double	

Exercice n° 3 (suite)

— Déterminer le nombre et le signe des solutions $f(x) = 1$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \\ y = 1 \end{cases}$$

2 points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ d'équation $y = 1$

L'équation admet 2 solutions x_1 et x_2

$x_1 < 0$
$x_2 > 0$

— Soit $m \in \mathbb{R}$

Discuter graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \\ y = m \end{cases}$$

m	$-\infty$		-1		$\frac{5}{7}$		2		3		$+\infty$
$f(x) = m$		pas de solution		2 solutions $x_1 > 0, x_2 > 0$		2 solutions $x_1 < 0, x_2 > 0$		2 solutions $x_1 > 0, x_2 > 0$		pas de solution	
			$x = 2$ double		$x = 0$ $x_2 > 0$		$x = 3$ Simple		$x = 0$ Double		

— $f(x) = 2$

$$\frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} = 2$$

$2x^2 - 7x + 5 = 2(x^2 - 5x + 7)$

$2x^2 - 7x + 5 = 2x^2 - 10x + 14)$

$3x = 9 \longleftarrow 1^{\text{er}}$ degré.

$x = 3$

Exercice n° 4 (suite)

— Déterminer le nombre et le signe des solutions $f(x) = -2$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2+x+3}{x^2-x-2} \\ y = -2 \end{cases}$$

2 points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ d'équation $y = 1$

L'équation admet 2 solutions x_1 et x_2

$x_1 < 0$
$x_2 > 0$

— Soit $m \in \mathbb{R}$

Discuter graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2+x+3}{x^2-x-2} \\ y = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{3}$		5		$\frac{13}{2}$		$+\infty$
$f(x) = m$		2 solutions $x_1 < 0, x_2 > 0$		2 solutions $x_1 > 0, x_2 > 0$		Pas de solution		2 solutions $x_1 > 0, x_2 > 0$		2 solutions $x_1 < 0, x_2 > 0$	
			$x = 3$ Simple		$x = 5$ Double		$x = 1$ Double		$x = 0$ $x_2 > 0$		

14.2 Fonctions affines

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \neq 0 \text{ (sinon la fonction est constante)}$$
$$x \longmapsto f(x) = ax + b$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ un repère. $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff y = ax + b \\ &\iff ax - y + b = 0 \end{aligned}$$

Équation cartésienne de la droite

$$\begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{j} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \quad 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.
Donc la représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

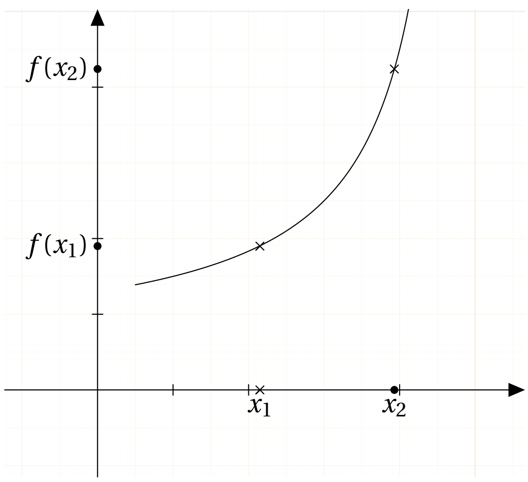
$y = x - 2$	A(0, −2)	B(2, 0)
$y = 4x - 24$	A(6, 0)	B(7, 4)

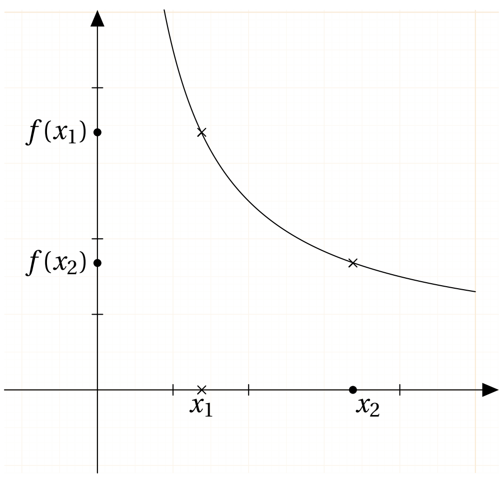
Sens de variation d'une fonction

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = ax + b$$

Soit I un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$

Soit $x_1 \in \mathrm{I}$ et $x_2 \in \mathrm{I}$ avec $x_1 < x_2$





$x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$
$f(x_2) - f(x_1) > 0$
f est croissante sur I

$x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$
$f(x_2) - f(x_1) < 0$
f est décroissante sur I

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f, on étudie le signe de $f(x_2) - f(x_1)$

Pour tout couple x_1, x_2 vérifiant $x_1 \in \mathrm{I}$ et $x_2 \in \mathrm{I}$ et $x_1 < x_2$

* Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
* Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

<u>Cas d'une fonction affine</u>

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & a \neq 0 \\ & x \longmapsto f(x) = ax + b & & \end{array}$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \text{Soit} & x_1 \in \mathbb{R} \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ \text{avec} & x_1 < x_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ f(x_2) - f(x_1) &= a \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{strictement positif}} \end{aligned}$$

1. Cas $a > 0$

   $$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{a}_{\text{strictement positif}} \quad \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{strictement positif aussi}}$$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Cas $a < 0$

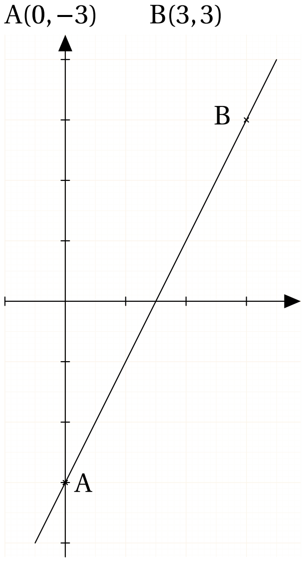
   $$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{a}_{\text{strictement négatif}} \quad \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{strictement positif}}$$

   Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Ex n° 1</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

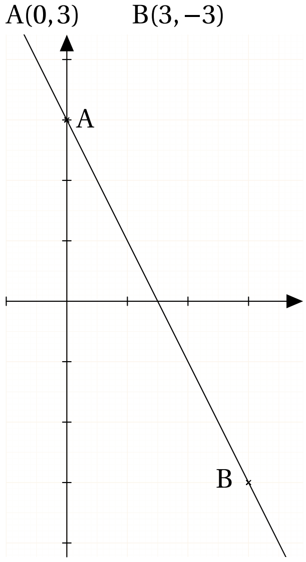
A$(0, -3)$ B$(3, 3)$



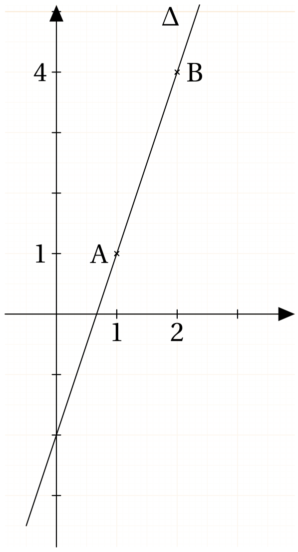
<u>Ex n° 2</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x + 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

A$(0, 3)$ B$(3, -3)$



Problème inverse



Déterminer la fonction assocée à Δ,

A(1,1)
B(2,4)

$y = ax + b$

on a : $\begin{cases} 1 = a \times 1 + b \\ 4 = a \times 2 + b \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{array} \right| -1$ $\quad\quad$ $\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{array} \right| -2$

$\begin{cases} -a - b = -1 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} -2a - 2b = -2 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

$a = 3$ $\quad\quad$ $-b = 2$

$b = -2$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x - 2 \end{aligned}$$

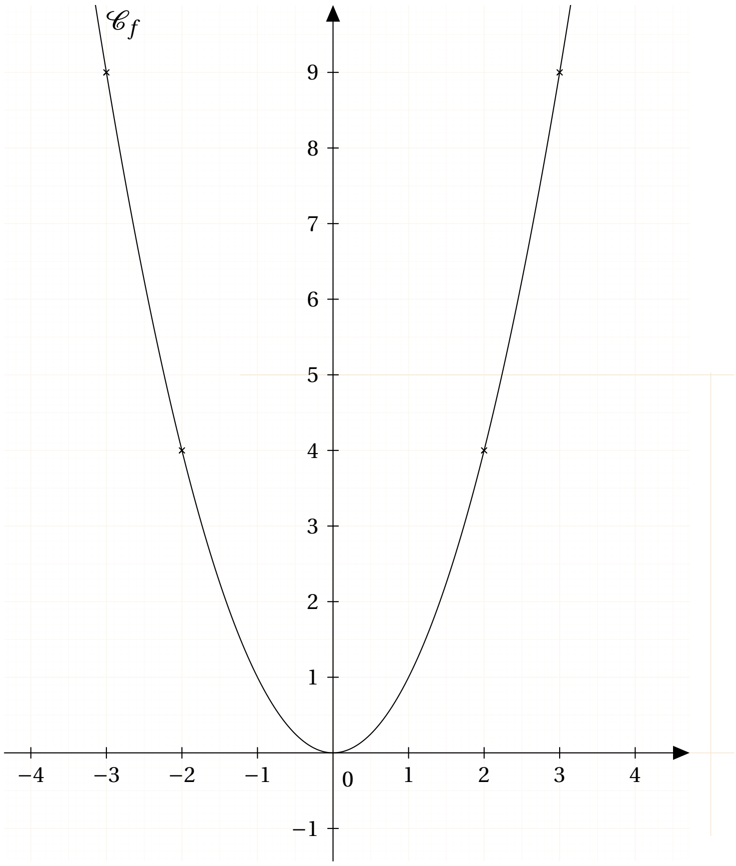
14.3 Fonctions polynômes du second degré

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \qquad\qquad a \neq 0 \end{aligned}$$

14.3.1 Fonction de référence

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$



$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie axiale).

$\mathscr{C}_f$ est une parabole

* Montrons que f est décroissante sur $]-\infty, 0[$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leqslant 0 \\ x_2 \leqslant 0 \end{array}\right\} x_1 + x_2 < 0 \qquad \text{Soit} \quad \begin{array}{l} x_1 \in]-\infty, 0[\\ x_2 \in]-\infty, 0[\end{array} \qquad \text{avec } x_1 < x_2$$

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{strictement positif}} \overbrace{(x_2 + x_1)}^{\text{négatif}}$$

* Montrons que f est croissante sur $]0,+\infty[$.

Soit $\begin{array}{l} x_1 \in]0,+\infty[\\ x_2 \in]0,+\infty[\end{array}$ avec $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{strictement positif}} \overbrace{(x_2 + x_1)}^{\text{positif}}$$

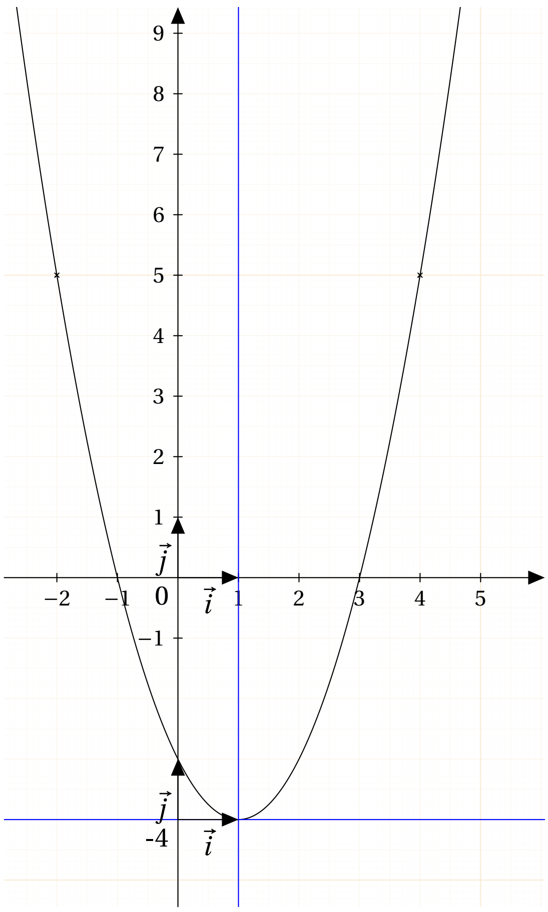
$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} x_1 + x_2 \geqslant 0$$

Minimum $\overbrace{\text{O}}^{[\omega]}(0,0)$.
pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$

14.3.2 Exemple fondamental

$$\begin{array}{rl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$



a). Changement de repère

Nouveau repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ $\quad S(1,-4)\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Dans la même base $\left\{ \begin{array}{l} M(x,y) \text{ dans } (0,\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ M(X,Y) \text{ dans } (S,\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \right.$

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -4 + Y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow & \quad y = f(x) \\ \Longleftrightarrow & \quad y = x^2 - 2x - 3 \leftarrow \text{Équation de la parabole dans l'ancien repère} \\ \Longleftrightarrow & -4 + Y = (1+X)^2 - 2(1+X) - 3 \\ \Longleftrightarrow & -4 + Y = 1 + 2X + X^2 - 2 - 2X - 3 \\ \Longleftrightarrow & -4 + Y = -4 + X^2 \\ \Longleftrightarrow & \quad Y = X^2 \leftarrow \text{Équation de la parabole dans le nouveau repère} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto F(X) = X^2 \end{aligned}$$

$\mathscr{D}_F = \mathbb{R}$

b). Sens de variation

* Montrons que f est décroissante sur $]-\infty, 1]$.

Soit $x_1 < x_2$ et $x_1, x_2 \in]-\infty, 1[$

$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^2 - 2x_2 - 3) - (x_1^2 - 2x_1 - 3) \\
&= x_2^2 - 2x_2 - 3 - x_1^2 + 2x_1 + 3 \\
&= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1) \\
&= \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\text{strictement positif}} \quad \underbrace{(x_2 + x_1 - 2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\leqslant 1 \\
x_2 &\leqslant 1 \\
x_2 + x_1 &\leqslant 2 \\
x_2 + x_1 - 2 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

$\uparrow$ Négatif

* Montrons que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

Soit $x_1 < x_2$ et $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^2 - 2x_2 - 3) - (x_1^2 - 2x_1 - 3) \\
&= x_2^2 - 2x_2 - 3 - x_1^2 + 2x_1 + 3 \\
&= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1) \\
&= \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\text{strictement positif}} \quad \underbrace{(x_2 + x_1 - 2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\geqslant 1 \\
x_2 &\geqslant 1 \\
x_2 + x_1 &\geqslant 2 \\
x_2 + x_1 - 2 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

$\uparrow$ Positif

Extremum : $S(1, -4) \leftarrow$ Minimum absolu.

c). Forme canonique

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2x - 3 & a &= 1 \\
&= (x^2 - 2x) - 3 \\
&= [(x^2 - 1)^2 - 1] - 3 \\
&= (x^2 - 1)^2 - 4 & \alpha &= 1 \quad \beta = -4
\end{aligned}$$

$S(1, -4)$

$$\begin{cases}
\text{Pour tout } x \in \Re (x-1)^2 \geqslant 0 \\
\qquad\qquad (x-1)^2 - 4 \geqslant -4 \\
f(x) \geqslant -4
\end{cases}$$

Donc $f(x)$ a pour minimum absolu -4

Encore des formes canoniques ? Oh oui !

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 12x + 7 \qquad a = 3 \\ &= 3(x^2 - 4x) + 7 \\ &= 3[(x-2)^2 - 4] + 7 \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 7 \qquad \alpha = 2 \quad \beta = -5 \\ &= 3(x-2)^2 - 5 \end{aligned}$$

S$(2, -5)$

Pour tout $x \in \Re (x-2)^2 \geqslant 0$

$$3(x-2)^2 \geqslant 0$$

$$3(x-2)^2 - 5 \geqslant -5$$

$f(x) \geqslant -5$

Minimum absolu

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 5x - 8 \\ &= 3(x^2 + \frac{5}{3}x) - 8 \\ &= 3[(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{36}] - 8 \\ &= 3(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{75}{36} - 8 \\ &= 3(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{121}{12} \end{aligned}$$

S$(-\frac{5}{6}, -\frac{121}{12})$

Pour tout $x \in \Re, (x + \frac{5}{6})^2 \geqslant 0$

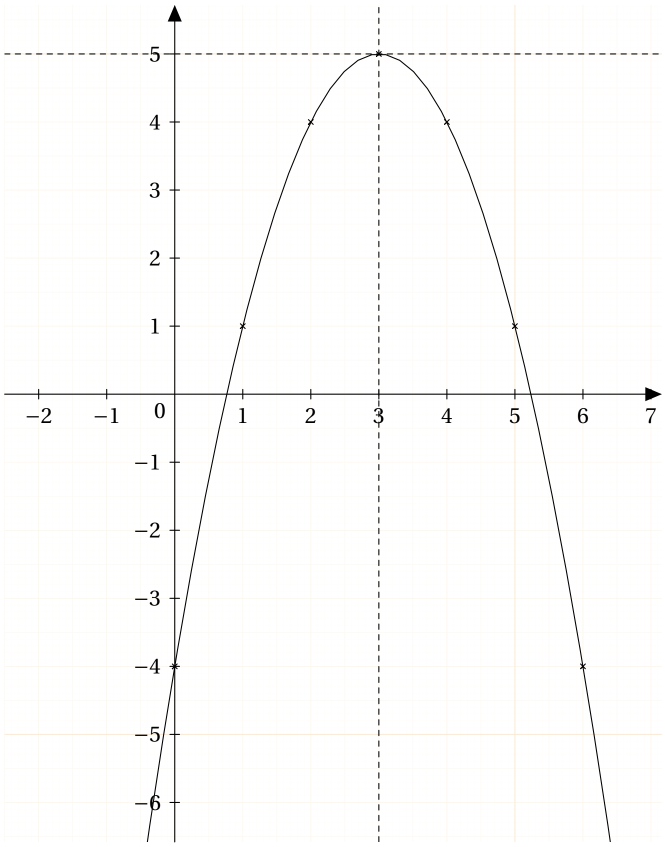
$$3(x + \frac{5}{6})^2 \geqslant 0$$

$$3(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{121}{12} \geqslant -\frac{121}{12}$$

$f(x) \geqslant -\frac{121}{12}$

14.3.3 Autre exemple fondamental

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = -x^2 + 6x - 4$$
$\mathscr{D}_f =]-\infty, +\infty[$



a). <u>Nouveau repère</u> $(S, \vec{i}, \vec{J})$ $\quad S(3,5)$ $\quad \overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$M(x, y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$M(X, Y)$ dans $(S, \vec{i}, \vec{J}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$

$$\begin{cases} x = 3 + X \\ y = 5 + Y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow &\quad y = f(x) \\
\Longleftrightarrow &\quad y = -x^2 + 6x - 4 \\
\Longleftrightarrow &\quad 5 + Y = -(3 + X)^2 + 6(3 + X) - 4 \\
\Longleftrightarrow &\quad 5 + Y = -(9 + X^2 + 6X) + 18 + 6X - 4 \\
\Longleftrightarrow &\quad 5 + Y = -9 - X^2 - 6X + 18 + 6X - 4 \\
\Longleftrightarrow &\quad 5 + Y = -X^2 + 5 \\
\Longleftrightarrow &\quad Y = -X^2
\end{aligned}$$

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longmapsto F(X) = -X^2$$
$\mathscr{D}_F = \mathbb{R}$

b). Sens de variation

* Montrons que f est croissante sur $]-\infty, 3]$

Soient $x_1 < x_2$ et $x_2 \in]-\infty, 3]$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (-x_2^2 + 6x_2 - 4) - (-x_1^2 + 6x_1 - 4) \\ &= -x_2^2 + 6x_2 + x_1^2 - 6x_1 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 6(x_1 - x_2) \\ &= \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\text{strictement négatif}} \quad \underbrace{(x_2 + x_1 - 6)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 3 \\ x_2 &\leqslant 3 \\ x_2 + x_1 &\leqslant 6 \\ x_2 + x_1 - 6 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

↑ Négatif

* Montrons que f est décroissante sur $[3, +\infty$

Soient $3 \leqslant x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 6(x_1 - x_2) \\ &= \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\text{strictement négatif}} \quad \underbrace{(x_2 + x_1 - 6)} \end{aligned}$$

↑ Positif car

$$\begin{aligned} x_1 &\geqslant 3 \\ x_2 &\geqslant 3 \\ x_2 + x_1 &\geqslant 6 \\ x_2 + x_1 - 6 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$S(3,5)$ maximum absolu.

c). Écriture canonique

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 6x - 4 \\ &= -(x^2 - 6x) - 4 \\ &= -[(x-3)^2 - 9] - 4 \\ &= -(x-3)^2 + 9 - 4 \\ &= -(x-3)^2 + 5 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} (x-3)^2 &\geqslant 0 \\ -(x-3)^2 &\leqslant 0 \\ -(x-3)^2 + 5 &\leqslant 5 \end{aligned}$$

$S(3,5)$

$f(x) \leqslant 5$

Encore des formes canoniques ? Oh Oui !

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2+4x+1 \\ &= -2(x^2-2x)+1 \\ &= -2[(x-1)^2-1]+1 \\ &= -2(x-1)^2+2+1 \\ &= -2(x-1)^2+3 \end{aligned}$$

S(1,3) car $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)^2 &\geqslant 0 \\ -2(x-1)^2 &\leqslant 0 \\ -2(x-1)^2+3 &\leqslant 3 \\ f(x) &\leqslant 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -5x^2-30x+19 \\ &= -5(x^2+6x)+19 \\ &= -5[(x+3)^2-9]+19 \\ &= -5(x+3)^2+45+19 \\ &= -2(x-1)^2+64 \end{aligned}$$

S(−3,64) car $\alpha = -3$ et $\beta = 64$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (x+3)^2 &\geqslant 0 \\ -5(x+3)^2 &\leqslant 0 \\ -5(x+3)^2+64 &\leqslant 64 \\ f(x) &\leqslant 64 \end{aligned}$$

Supplément gratuit : Algorithmique.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\ &= a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]+c \\ &= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\boxed{b^2-4ac}}{4a} \end{aligned}$$

S(α,β) ; $\alpha = -\frac{-b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\boxed{b^2-4ac}}{4a}$.

14.4 Fonctions homographiques

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix} \neq 0$$

14.4.1 Fonction de référence

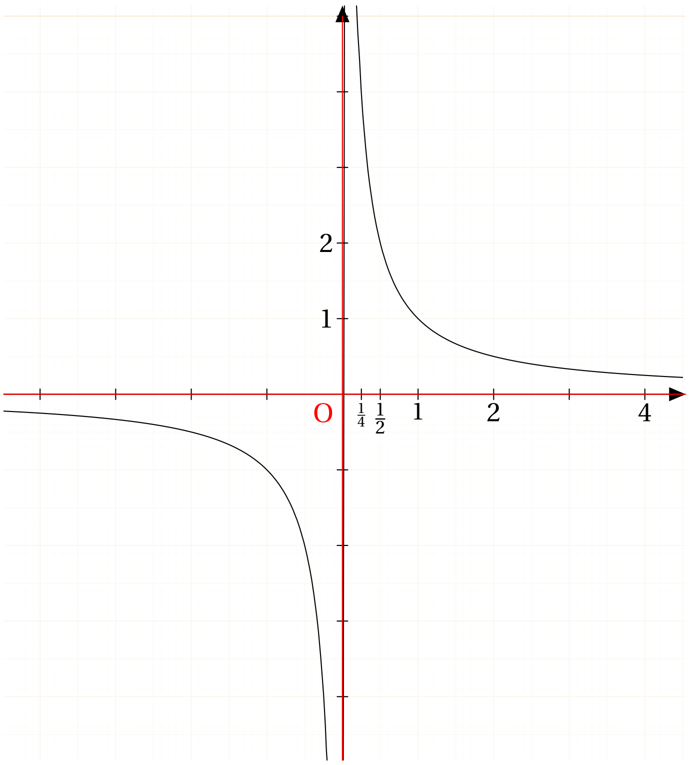
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

* Il ne faut pas que $x = 0$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

  Asymptote verticale : $x = 0$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

  Asymptote horizontale : $y = 0$.



$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point O (symétrie centrale).

* Montrons que f est décroissante sur $]-\infty, 0[$

  Soient $x_1 < x_2$ et $x_1, x_2 \in]-\infty, 0[$

  $$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_2 \longleftarrow \text{Strictement négatif}}{x_1 x_2 \longleftarrow \text{Strictement positif}} \end{aligned}$$

  Donc $f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0$

* Montrons que f est décroissante sur $]0, +\infty[$

  Soient $x_1 < x_2$ et $x_1, x_2 \in]0, \infty[$

  $$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_2 \longleftarrow \text{Strictement négatif}}{x_1 x_2 \longleftarrow \text{Strictement positif}} \end{aligned}$$

  Donc $f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0$

14.4.2 Exemple fondamental

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

a). Changement de repère

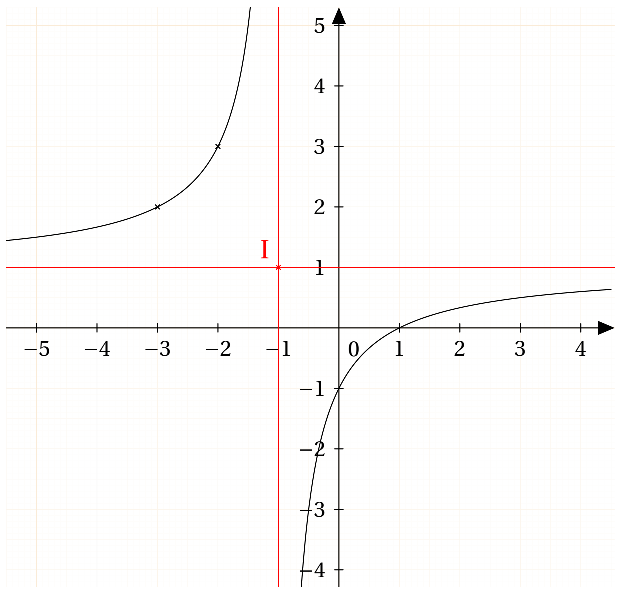
* Il ne faut pas que $x + 1 = 0$ $\quad$ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

  $x = -1$

  Asymptote verticale : $x = -1 \longleftarrow$ barrière infranchissable.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

  Asymptote horizontale : $y = 1$.



$\mathrm{I}(-1,1)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\mathrm{M}(x,y)$ dans $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ dans $(\mathrm{I},\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}$

Grâce à la relation magique de Michel Chasles ;
$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IM}}$

$$\begin{cases} x = -1 + \mathrm{X} \\ y = \quad 1 + \mathrm{Y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1+\mathrm{Y} &= \frac{-1+\cancel{\mathrm{X}}-1}{\cancel{-1}+\cancel{\mathrm{X}}+\cancel{1}} \\ 1+\mathrm{Y} &= \frac{-2+\mathrm{X}}{\mathrm{X}} \\ \mathrm{Y} &= \frac{-2+\mathrm{X}}{\mathrm{X}} - 1 \\ \mathrm{Y} &= \frac{-2+\mathrm{X}-\mathrm{X}}{\mathrm{X}} \\ \mathrm{Y} &= \frac{-2}{\mathrm{X}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow \begin{matrix} x \neq -1 \\ y = f(x) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \neq 0 \\ 1+\mathrm{Y} = \dfrac{-1+\mathrm{X}-1}{-1+\mathrm{X}+1} \end{cases}$$

La fonction de référence est multipliée par -2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{X} &\longmapsto \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{-2}{\mathrm{X}} \end{aligned}$$

$\mathscr{D}_\mathrm{F} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b). Sens de variations

* Montrons que f est croissante sur $]-\infty,-1[$

Soient $x_1 < x_2$ et $x_2 \in]-\infty,-1[$

$$\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1) &= \frac{x_2-1}{x_2+1}-\frac{x_1-1}{x_1+1}\\
&= \frac{(x_2-1)(x_1+1)-(x_1-1)(x_2+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}\\
&= \frac{(x_2x_1+x_2-x_1-1)-(x_1x_2+x_1-x_2-1)}{(x_2+1)(x_1+1)}\\
&= \frac{\cancel{x_2x_1}+x_2-x_1\cancel{-1}\cancel{-x_1x_2}-x_1+x_2\cancel{+1}}{(x_2+1)(x_1+1)}\\
&= \frac{2x_2-2x_1}{(x_2+1)(x_1+1)}\\
&= \frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)} \begin{array}{l}\longleftarrow \text{Strictement positif}\\ \longleftarrow \text{Strictement positif}\end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &< -1\\
x_1+1 &< 0\\
x_2 &< -1\\
x_2+1 &< 0\\
(x_1+1)(x_2+1) &> 0
\end{aligned}$$

* Montrons que f est croissante sur $]-1,+\infty[$

Soient $x_1 < x_2$ et $x_2 \in]-1,+\infty[$

Donc $x_2 - x_1 > 0$

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)} \begin{array}{l}\longleftarrow \text{Strictement positif}\\ \longleftarrow \text{Strictement positif}\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &> -1\\
x_1+1 &> 0\\
x_2 &> -1\\
x_2+1 &> 0\\
(x_1+1)(x_2+1) &> 0
\end{aligned}$$

Donc $f(x_2)-f(x_1) > 0$.

c). <u>Écriture canonique</u>

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1} \qquad \text{Pour tout } x \neq -1$$

$$= \frac{\alpha(x+1)+\beta}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{\alpha x+\alpha+\beta}{x+1} \qquad = \frac{x-1}{x+1}$$

Il vient que $\begin{cases} \alpha = 1\\ \alpha+\beta = -1\end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 1\\ \beta = -2\end{cases}$

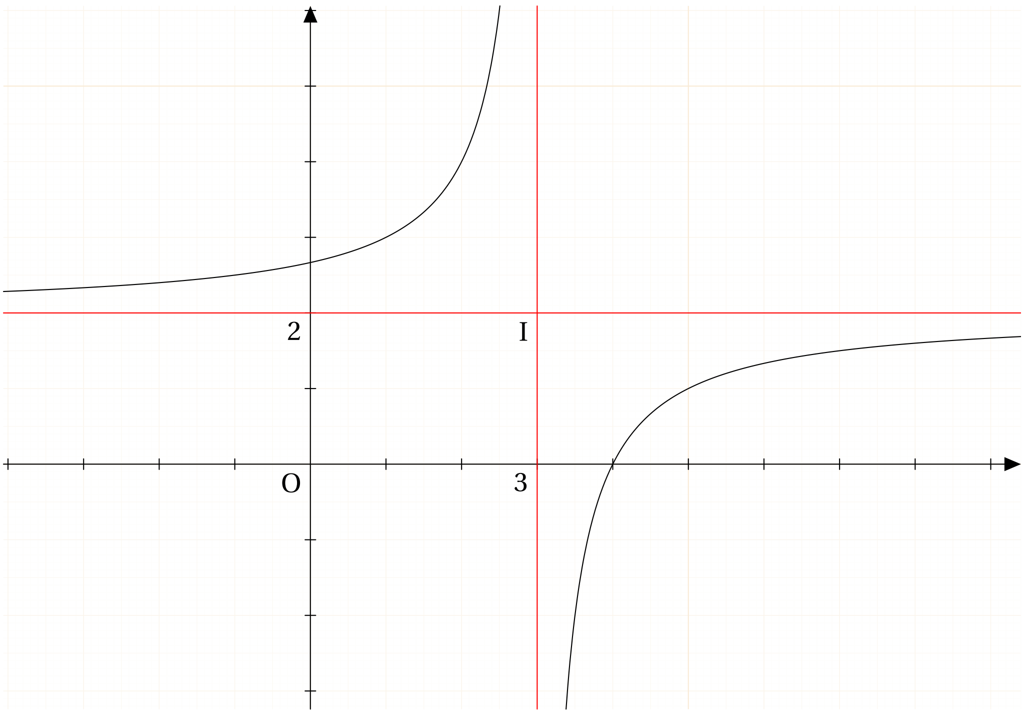
$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

14.4.3 Un autre exemple

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x-8}{x-3}$$

* Il ne faut pas que $x - 3 = 0$ $\qquad \mathscr{D}_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$
$x = 3$

Asymptote verticale : $x = 3 \longleftarrow$.



* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Asymptote horizontale : $y = 2$.

a). <u>Changement de repère</u>

I(3,2) donc $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(x,y)$ dans $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ dans $(\mathrm{I},\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IM}}$

$$\begin{cases} x = 3 + \mathrm{X} \\ y = 1 + \mathrm{Y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_f &\Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ y = f(x) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \neq 0 \\ 2 + \mathrm{Y} = \dfrac{2(3+\mathrm{X})-8}{(3+\mathrm{X})-3} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \neq 0 \\ 2 + \mathrm{Y} = \dfrac{6+2\mathrm{X}-8}{\mathrm{X}} - 2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \neq 0 \\ 2 + \mathrm{Y} = \dfrac{-2\cancel{+2\mathrm{X}}\cancel{-2\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \neq 0 \\ 2 + \mathrm{Y} = \dfrac{-2}{\mathrm{X}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F} :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{-2}{\mathrm{X}} \end{aligned} \qquad \text{avec } \mathrm{X} \neq 0, \text{ donc}$$

$\mathscr{D}_\mathrm{F} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b). Sens de variations

* Montrons que f est croissante sur $]-\infty,3[$

Soient $x_1 < x_2$ et $x_1 \in]-\infty,3[$ et $x_2 \in]-\infty,3[$

$$\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1) &= \frac{2x_2-8}{x_2-3}-\frac{2x_1-8}{x_1-3}\\
&= \frac{(2x_2-8)(x_1-3)-(2x_1-8)(x_2-3)}{(x_2-3)(x_1-3)}\\
&= \frac{(2x_2x_1-6x_2-8x_1+24)-(2x_1x_2-6x_1-8x_2+24)}{(x_2-3)(x_1-3)}\\
&= \frac{\cancel{2x_2x_1}-6x_2-8x_1\cancel{+24}\cancel{-2x_1x_2}+6x_1+8x_2\cancel{-24}}{(x_2-3)(x_1-3)}\\
&= \frac{-6x_2-8x_1+6x_1+8x_2}{(x_2-3)(x_1-3)}\\
&= \frac{2x_2-2x_1}{(x_2-3)(x_1-3)}\\
&= \frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)} \begin{array}{l}\longleftarrow \text{Strictement positif}\\ \longleftarrow \text{Strictement positif}\end{array}
\end{aligned}$$

$x_1 < 3$
$x_1 - 3 < 0$
$x_2 < 3$
$x_2 - 3 < 0$
$(x_1+1)(x_2+1) > 0$

$f(x_2)-f(x_1) > 0$

* Montrons que f est croissante sur $]3,+\infty[$

Soient $x_1 < x_2$ et $x_2 \in]3,+\infty[$ et $x_2 \in]3,+\infty[$

Donc $x_2 - x_1 > 0$

$x_1 > 3$
$x_1 - 3 > 0$
$x_2 > 3$
$x_2 - 3 > 0$
$(x_1+1)(x_2+1) > 0$

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)} \begin{array}{l}\longleftarrow \text{Strictement positif}\\ \longleftarrow \text{Strictement positif}\end{array}$$

Donc $f(x_2)-f(x_1) > 0$.

c). Forme « canonique »

$f(x) = \dfrac{2x-8}{x-3}$ $\qquad$ $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-3}$

$f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-3}$ $\qquad$ Pour tout $x \neq 3$

$= \dfrac{\alpha(x-3)+\beta}{x-3}$

$f(x) = \dfrac{\alpha x - 3\alpha + \beta}{x-3}$ $\qquad$ $\dfrac{2x-8}{x-3}$

Il vient que $\begin{cases} \alpha = 2 \\ -3\alpha+\beta = -8 \end{cases}$

$\beta = -8 + 3 \times 2$
$\beta = -8 + 6$
$\beta = -2$

$f(x) = 2 - \dfrac{2}{x-3}$

Deux asymptotes : $\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}$

14.5 Intersections de courbes

14.5.1 Exercice n° 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad \mathscr{C}_f$

$D_f = \mathbb{R}$

Soit Δ d'équation $y = 5$

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

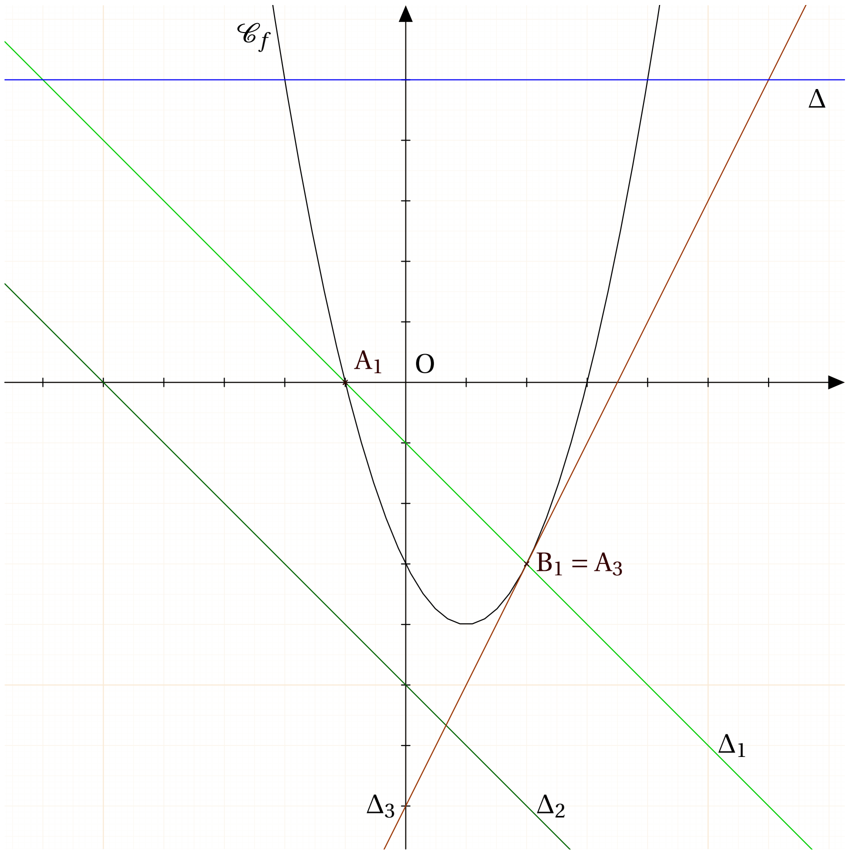
$x \longmapsto f_1(x) = -x - 1 \qquad \mathscr{C}_{f_1} = \Delta_1$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_2(x) = -x - 5 \qquad \mathscr{C}_{f_2} = \Delta_2$

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_3(x) = 2x - 7 \qquad \mathscr{C}_{f_3} = \Delta_3$



1. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
   * Graphiquement, on lit 2 points d'intersection : $A(-2,5)$ et $B(4,5)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = 5$

     $x^2 - 2x - 3 = 5$
     $(x^2 - 2x + 1) - 9 = 0$
     $(x-1)^2 - 9 = 0$
     $(x-1-3)(x-1+3) = 0$
     $(x-4)(x+2) = 0$

     $x = 4$ ou $x = -2$

     $S = \{-2, 4\}$ Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

   * Résoudre l'inéquation :

     $f(x) \leqslant 5$
     $x^2 - 2x - 3 \leqslant 5$
     $(x^2 - 2x + 1) - 9 \leqslant 0$
     $(x-1)^2 - 9 \leqslant 0$
     $(x-1-3)(x-1+3) \leqslant 0$
     $(x-4)(x+2) \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

     $S = [-2, 4]$

     Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ.

2. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_1.
   * Graphiquement, on lit 2 points d'intersection : $A(-1,0)$ et $B(2,-3)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_1(x)$

     $x^2 - 2x - 3 = -x - 1$
     $x^2 - x - 2 = 0$
     $(x+1)(x-2) = 0$
     $x = -1$ ou $x = 2$

     $S = \{-1, 2\}$ Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_1.

* Résoudre l'inéquation :

$f(x) \leqslant f_1(x)$
$x^2 - 2x - 3 \leqslant -x - 1$
$x^2 - 2x - 2 \leqslant 0$
$(x+1)(x-2) \leqslant 0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-2, 2]$

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ.

3. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_2.
   * Graphiquement, on ne lit aucun point d'intersection.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_2(x)$

$x^2 - 2x - 3 = -x - 5$
$x^2 - x + 2 = 0$

$(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = 0$

$(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{7}{4}$ Or, un carré est toujours positif.

Donc $S = \emptyset$ Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_1. Mais il n'y en a pas !

* Résoudre l'inéquation :

$f(x) \leqslant f_2(x)$

$(x + \frac{1}{2})^2 \leqslant -\frac{7}{4}$ Impossible !

4. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_3.
   * Graphiquement, on lit 1 point d'intersection : $A_3(-2,-3)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_3(x)$

     $x^2 - 2x - 3 = 2x - 7$
     $x^2 - 4x + 4 = 0$
     $(x-2)^2 = 0$
     $x = 2$

     $S = \{2\}$ La solution est double.

     La droite Δ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A_3(2,-3)$.
   * Résoudre l'inéquation :

     $f(x) \leqslant f_3(x)$
     $x^2 - 2x - 3 \leqslant 2x - 7$
     $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$
     $(x+1)^2 \leqslant 0$
     $x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	

     $S = \{2\}$

14.5.2 Exercice n° 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$D_f = \mathbb{R}$

Soit Δ d'équation $y = 3$

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

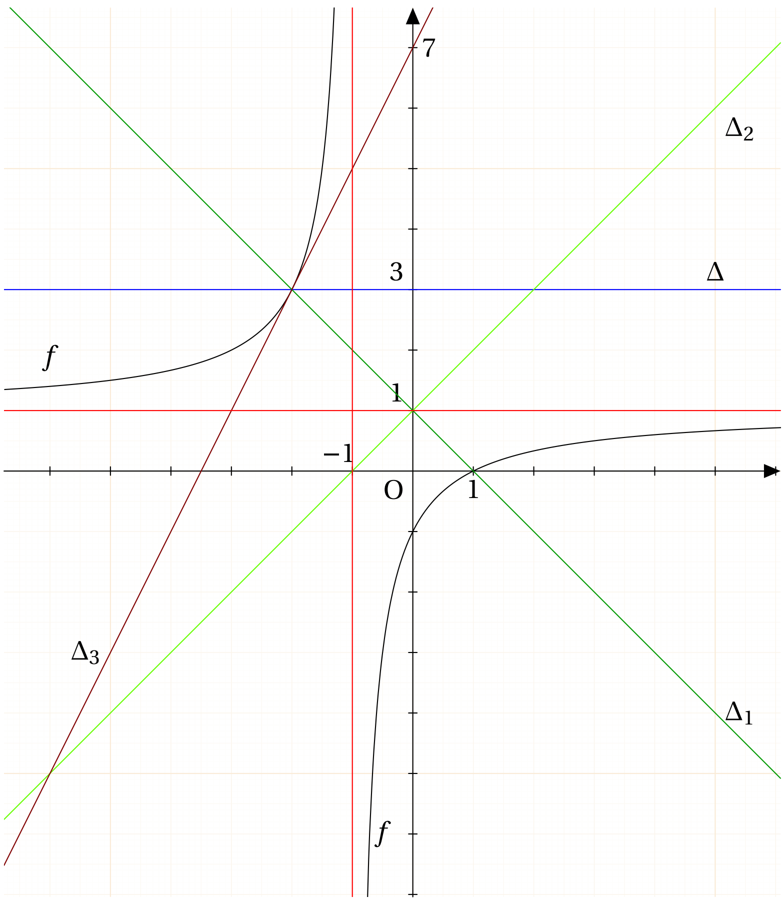
$x \longmapsto f_1(x) = -x+1 \qquad \mathscr{C}_{f_1} = \Delta_1$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_2(x) = x+1 \qquad \mathscr{C}_{f_2} = \Delta_2$

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_3(x) = 2x+7 \qquad \mathscr{C}_{f_3} = \Delta_3$



1. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
   * Graphiquement, on lit 1 point d'intersection : $A(-2,3)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = 3$

$$\frac{x-1}{x+1} = 3$$

$$3(x+1) = x-1$$
$$3x+3 = x-1$$
$$2x = -4$$

$$x = -2$$

S = $\{-2\}$ La solution est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

   * Résoudre l'inéquation :

$$f(x) \leqslant 3$$

$$\frac{x-1}{x+1} \leqslant 3$$
$$\frac{x-1}{x+1} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{x-1-3(x+1)}{x+1} \leqslant 0$$
$$\frac{x-1-3x-3}{x+1} \leqslant 0$$
$$\frac{-2x-4}{x+1} \leqslant 0$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-2x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-2x-4)(x+1)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
S =		$]-\infty,-2]$		$\cup$		$]-1$	$+\infty[$

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ.

2. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_1.
   * Graphiquement, on lit 2 points d'intersection : $A(-2,3)$ et $B_1(1,0)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_1(x)$

   $\dfrac{x-1}{x+1} = -x+1$
   $(-x+1)(x+1) = x-1$
   $-x^2+1 = x-1$
   $-x^2-x+2 = 0$
   $x^2+x-2 = 0$
   $(x+2)(x-1) = 0$
   $x = -2$ ou $x = 1$

   $S = \{-2, 1\}$ Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_1.

   * Résoudre l'inéquation :

   $f(x) \leqslant f_1(x)$

   $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant -x+1$

   $\dfrac{x-1}{x+1} + x - 1 \leqslant 0$

   $\dfrac{x-1+(x-1)(x+1)}{x+1} \leqslant 0$

   $\dfrac{x-1+x^2-1}{x+1} \leqslant 0$

   $\dfrac{(x^2+x-2)}{x+1} \leqslant 0$

   $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
S =		$]-\infty, -2]$		$\cup$		$]-1$	$+1]$		

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ_1.

3. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_2.
   * Graphiquement, on ne lit aucun point d'intersection.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_2(x)$

$$\frac{x-1}{x+1} = x+1$$

$$(x+1)^2 = x-1$$
$$x^2+2x+1 = x-1$$
$$x^2+x+2 = 0$$

$$(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4} = 0$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 = -\frac{7}{4} \qquad \text{Impossible}$$

   * Résoudre l'inéquation :

$$f(x) \leqslant f_2(x)$$

$$\frac{x-1}{x+1} \leqslant x+1$$

$$\frac{x-1}{x+1} - (x+1) \leqslant 0$$

$$\frac{x-1-(x+1)(x+1)}{x+1} \leqslant 0$$

$$\frac{x-1-x^2-2x-1}{x+1} \leqslant 0$$

$$\frac{-x^2-x-2}{x+1} \leqslant 0$$

$$\frac{x^2+x+2}{x+1} \geqslant 0$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}{x+1} \geqslant 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}{x+1}$	$-$	$\|$	$+$

S $=]-1, +\infty[$
Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ_2.

4. Intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ_3.
   * Graphiquement, on lit 1 point d'intersection : $A(-2,3)$.
   * Résoudre l'équation $f(x) = f_3(x)$

     $\frac{x-1}{x+1} = 2x+7$

     $(2x+7)(x+1) = x-1$
     $2x^2+2x+7x+7 = x-1$
     $2x^2+8x+8 = 0$
     $2(x^2+4x+4) = 0$
     $2(x+2)^2 = 0$
     $x = -2$

     $S = \{-2\}$ La solution est double.

     Δ_1 est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A_3(-2,3)$.
   * Résoudre l'inéquation :

     $f(x) \leqslant f_3(x)$

     $\frac{x-1}{x+1} \leqslant 2x+7$

     $\frac{x-1}{x+1} - (2x+7) \leqslant 0$

     $\frac{x-1+(2x+7)(x+1)}{x+1} \leqslant 0$

     $\frac{x-1-(2x^2+9x+7)}{x+1} \leqslant 0$

     $\frac{-2x^2-8x-8}{x+1} \leqslant 0$

     $\frac{2x^2+8x+8}{x+1} \leqslant 0$

     $\frac{2(x+2)^2}{x+1} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2(x+2)^2}{x+1}$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$S =$						$\{-2\}\cup]-1 \quad +\infty[$	

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessous de Δ_3.

14.5.3 Exercices (Énoncés)

Excercice n° 3

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_1(x) = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_2(x) = -2x^2 + 16x - 26 \end{aligned}$$

a). Formes canoniques de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.

b). Représentations graphiques de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.

c). $\Delta : y = 4x - 8$

d). Intersection de $\begin{array}{lll} \text{a) } \mathscr{C}_{f_1} & \text{et} & \Delta \\ \text{b) } \mathscr{C}_{f_2} & \text{et} & \Delta \\ \text{c) } \mathscr{C}_{f_1} & \text{et} & \mathscr{C}_{f_2} \end{array}$

Excercice n° 4

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_1(x) = \frac{2x-10}{x-4} \qquad \mathscr{D}_{f_1} = \mathbb{R}\backslash\{4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_2(x) = \frac{2x+2}{x-1} \qquad \mathscr{D}_{f_1} = \mathbb{R}\backslash\{1\} \end{aligned}$$

1. Formes canoniques de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.
2. Représentations graphiques de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.
3. Intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$

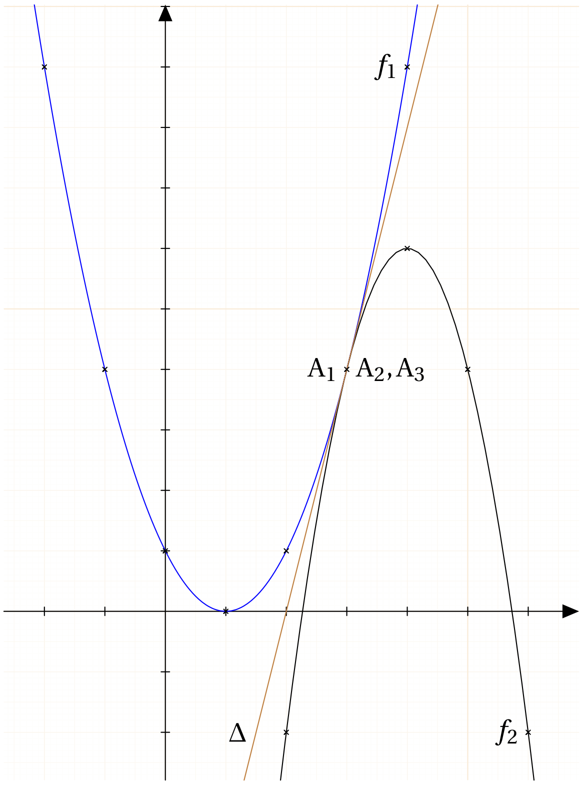
14.5.4 Exercices (Correction)

Excercice n° 3

1. $$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2-2x+1 \\ &= (x-1)^2 & \alpha=1 \quad \beta=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -2x^2+16x-26 \\ &= -2(x^2-8x)-26 \\ &= -2[(x-4)^2-16]-26 \\ &= -2(x-4)^2+32-26 \\ &= -2(x-4)^2+32-26 \\ &= -2(x-4)^2+6 & \alpha=4 \quad \beta=6 \end{aligned}$$

2. et 3)



4) Intersections

(a) Intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et Δ

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A(3,4) pour $\mathscr{C}_{f_1}$ et Δ
* Résoudre l'équation $f_1(x) = 4x-8$

$x^2-2x+1 = 4x-8$
$x^2-6x+9 = 0$
$(x-3)^2 = 0$
$x = 3$

S = {3} La solution est double.
Δ est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$ au point $A_3(3,4)$.
* Résoudre l'inéquation : $f_1(x) \leqslant 4x-8$

$x^2-2x+1 \leqslant 4x-8$
$x^2-6x+9 \leqslant 0$
$(x-3)^2 \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	

S = {3}
Une seule solution, puisque Δ_1 est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$.

(b) Intersection de $\mathscr{C}_{f_2}$ et Δ

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A(3, 4) pour $\mathscr{C}_{f_2}$ et Δ

* Résoudre l'équation $f_2(x) = 4x-8$

$-2x^2+16x-26 = 4x-8$
$-2x^2+12x-18 = 0$
$-2(x^2-6x+9) = 0$
$(x-3)^2 = 0$
$x = 3$

S = {3} La solution est double.

Δ est tangente à $\mathscr{C}_{f_2}$ au point $A_2(3,4)$.
* Résoudre l'inéquation : $f_2(x) \leqslant 4x-8$

$-2x^2+16x-26 \leqslant 4x-8$
$-2x^2+12x-18 \leqslant 0$
$-2(x^2-6x+9) \leqslant 0$
$(x-3)^2 \geqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$-2(x-3)^2$		$-$	0	$-$	

S $=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
Une seule solution, puisque Δ_1 est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$ par le dessus.

(c) Intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A(3,4) pour $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$.

* Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$

  $x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 16x - 26$
  $3x^2 - 18x + 27 = 0$
  $3(x^2 - 6x + 9) = 0$
  $3(x-3)^2 = 0$
  $x = 3$

  S = {3} La solution est double.

  Les paraboles $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$ sont tangentes.
* Résoudre l'inéquation : $f_1(x) \leqslant f_2(x)$

  $x^2 - 2x + 1 \leqslant -2x^2 + 16x - 26$
  $3x^2 - 18x + 27 \leqslant 0$
  $3(x^2 - 6x + 9) \leqslant 0$
  $3(x-3)^2 \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$3(x-3)^2$		$+$	0	$+$	

  S = {3}
  Une seule solution, puisque les paraboles $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$ sont tangentes.

Excercice n° 4

1). $f_1(x) = \dfrac{2x-10}{x-4}$ $\qquad$ $f_1(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-4}$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{2x-10}{x-4} \\ &= \frac{\alpha(x-4)+\beta}{x-4} \\ &= \frac{\alpha x - 4\alpha + \beta}{x-4} \end{aligned}$$

Il vient $\begin{cases} \alpha = 2 \\ -4\alpha + \beta = -10 \end{cases}$

Donc $\alpha = 2$
$\beta = -2$

Ainsi $f_1(x) = 2 - \dfrac{2}{x-4}$

$f_2(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$ $\qquad$ $f_2(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-1}$

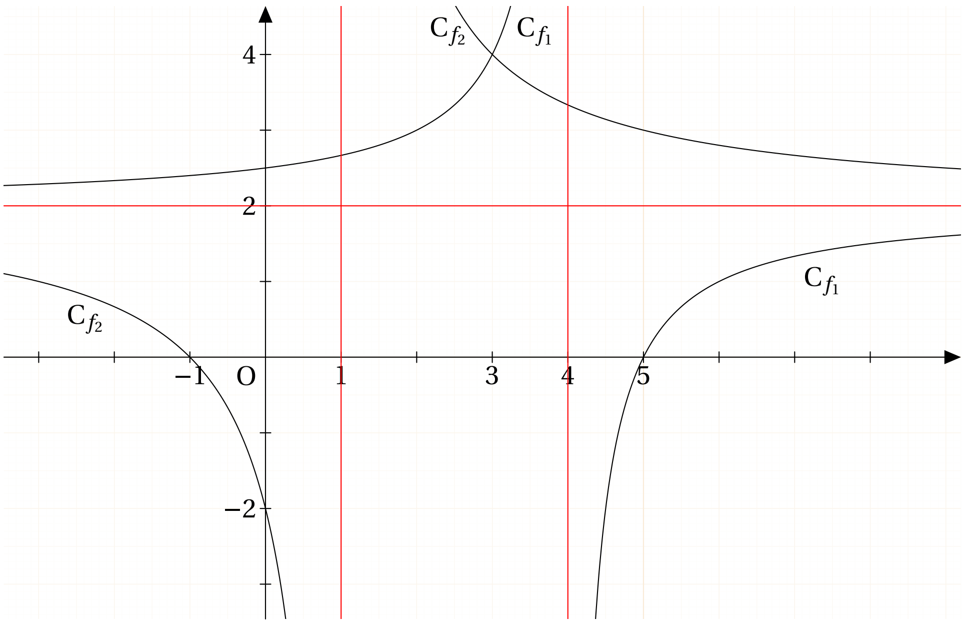
$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{2x+2}{x-1} \\ &= \frac{\alpha x - \alpha + \beta}{x-1} \end{aligned}$$

Il vient $\begin{cases} \alpha = 2 \\ -\alpha + \beta = 2 \end{cases}$

Donc $\alpha = 2$
$\beta = 4$

Ainsi $f_2(x) = 2 + \dfrac{4}{x-1}$

2).



3). Intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et Δ

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A(3,4) pour $\mathscr{C}_{f_1}$ et Δ

* Résoudre l'équation $f_1(x) = 4x - 8$

  $x^2 - 2x + 1 = 4x - 8$
  $x^2 - 6x + 9 = 0$
  $(x-3)^2 = 0$
  $x = 3$

  S = {3} La solution est double.

  Δ est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$ au point $A_3(3,4)$.
* Résoudre l'inéquation : $f_1(x) \leqslant 4x - 8$

  $x^2 - 2x + 1 \leqslant 4x - 8$
  $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$
  $(x-3)^2 \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	

  S = {3}
  Une seule solution, puisque Δ_1 est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$.

4). Intersection de $\mathscr{C}_{f_2}$ et Δ

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A(3,4) pour $\mathscr{C}_{f_2}$ et Δ

* Résoudre l'équation $f_2(x) = 4x - 8$

  $-2x^2 + 16x - 26 = 4x - 8$
  $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
  $-2(x^2 - 6x + 9) = 0$
  $(x-3)^2 = 0$
  $x = 3$

  S = {3} La solution est double.

  Δ est tangente à $\mathscr{C}_{f_2}$ au point $A_2(3,4)$.

* Résoudre l'inéquation : $f_2(x) \leqslant 4x - 8$

$-2x^2 + 16x - 26 \leqslant 4x - 8$
$-2x^2 + 12x - 18 \leqslant 0$
$-2(x^2 - 6x + 9) \leqslant 0$
$(x-3)^2 \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$-2(x-3)^2$		$-$	0	$-$	

$S =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
Une seule solution, puisque Δ_1 est tangente à $\mathscr{C}_{f_1}$ par le dessus.

5). Intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$

* Graphiquement, on lit 1 point d'intersection A$(3,4)$ pour $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$.

* Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$

$$\frac{2x-10}{x-4} = \frac{2x+2}{x-1}$$

$(2x-10)(x-1) = (2x+2)(x-4)$
$\cancel{2x^2} - 2x - 10x + 10 = \cancel{2x^2} - 8x + 2x - 8$
$-12x + 10 = -6x - 8$
$-6x = -18$
$x = 3$

S = $\{3\}$

La solution est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_1}$

* Résoudre l'inéquation : $f_1(x) \leqslant f_2(x)$

$$\frac{2x-10}{x-4} \leqslant \frac{2x+2}{x-1}$$

$$\frac{2x-10}{x-4} - \frac{2x+2}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{(2x-10)(x-1)-(2x+2)(x-4)}{(x-4)(x-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{2x^2-2x-10x+10-(2x^2-8x+2x-8)}{(x-4)(x-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{\cancel{2x^2}-12x+10\cancel{-2x^2}+8x-2x+8}{(x-4)(x-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{-6x+18}{(x-4)(x-1)} \leqslant 0$$

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$-6x+18$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{-6x+18}{(x-4)(x-1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

S $=]1, 3] \cup]4, +\infty[$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersections et des points de $\mathscr{C}_{f_1}$ qui sont situés sous $\mathscr{C}_{f_2}$.

14.6 Exemples de problèmes

14.6.1 Exercice nº 1

Dans le système métrique l'unité de température est le degré Celcius (^{o}C).
Dans certains pays anglo-saxons, l'unité de température est le degré Farenheit (^{o}F).

* La glace fond à 0^oC ou 32^oF.
* l'eau bout à 100^oC ou 212^oF.

Le modèle mathématique de correspondance entre les deux échelles de température est une *fonction affine*.

Soit f la fonction qui, à la mesure$x$ en ^{o}C d'une température, associe sa mesure $f(x)$ en ^{o}F.

Soit g la fonction qui, à la mesure x en ^{o}F d'une température, associe sa mesure $g(x)$ en degré ^{o}C.

1. Déterminer f et g.
2. Compléter le tableau suivant :

^{o}C	20	
^{o}F		86

3. Existe-t-il une température qui a la même mesure ^{o}C et en ^{o}F ?
   Si oui laquelle ?

1. $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} f(0) &= \ \ 32 \quad \text{donc} \quad & a \times 0 + b &= \ \ 32 \\ f(100) &= 212 \quad \text{donc} \quad & a \times 100 + b &= 212 \end{aligned}$$

$b = 32$

$$\text{Il vient que} \qquad \begin{aligned} 212 &= 100a + 32 \\ 180 &= 100a \\ a &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi} \qquad f(x) = \frac{9x}{5} + 32$$

$g(x) = ax + b$

$$\begin{array}{rlrl} f(32) = & 0 & \text{donc} & a \times 32 + b = 0 \\ f(212) = & 100 & \text{donc} & a \times 212 + b = 100 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 &= 32a + b \\ 100 &= 212a + b \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} 0 &= 32a + b \\ 100 &= 212a + b \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} -\frac{53}{8} \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 &= 32a + b \\ -100 &= -212a - b \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} 0 &= -212a - \frac{53}{8}b \\ 100 &= 212a + b \end{array}\right.$$

$$-100 = -180a \qquad 100 = -\frac{45}{8}b$$

$$100 = 180a$$

$$a = \frac{100}{180} \qquad b = -\frac{800}{45}$$

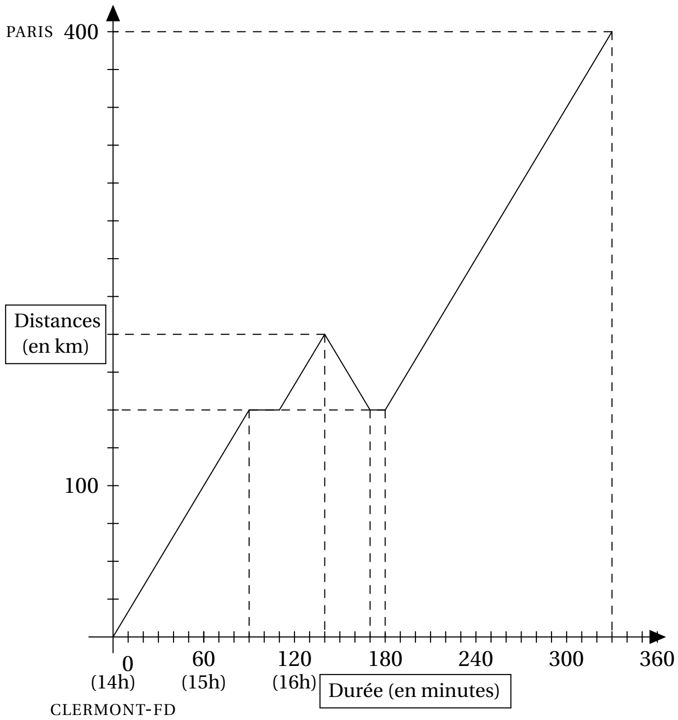
$$a = \frac{5}{9} \qquad b = -\frac{160}{9}$$

Ainsi $g(x) = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$

14.6.2 Exercice n° 2

Sylvain se rend de Clermont-Ferrand à Paris en utilisant l'autoroute A71. La distance de Clermont-Ferrand à Paris est 400 km.

Le trajet de l'autoroute est représenté par le graphique ci-dessous :



En *abscisse*, sont portées les durées calculées en minutes, à partir de 14h, heure de départ de Clermont-Ferrand de Sylvain.
En *ordonnée*, sont portées les distances calculées en kilomètres, entre Sylvain et Clermont-Ferrand.

1. En lisant sur le graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la durée totale du voyage de Clermont-Ferrand à Paris ?
   À quelle heure Sylvain arrive-t-il à Paris ?
   (b) À quelle distance de Clermont-Ferrand Sylvain se trouve-t-il une heure et demie après sont départ ?
   (c) Combien d'arrêts a-t-il faits ?
   (d) Quelle est la durée totale des arrêts ?
   (e) Qu'a fait Sylvain entre 16h20min et 16h50min ?
2. Un deuxième automobiliste (part de Paris à 15h pour se rendre à Clermont-Ferrand en empruntant lui aussi l'autoroute A71. Il roule à 100km/h. Au bout de 2 heures et demie, il s'arrête pendant 30 minutes. Puis il repart à la même vitesse jusqu'à Clermont-Ferrand sans s'arrêter.
   (a) Représenter le trajet Paris-Clermont-Ferrand de ce deuxième automobiliste sur le graphique.
   En *abscisse*, sont toujours portées les durées calculées en minutes, à partir de 14h.
   En *ordonnée*, sont portées les distances calculées en kilomètres, entre ce deuxième automobiliste et Clermont-Ferrand.
   (b) Trouver, à partir de ce graphique, une valeur approchée de l'heure de croisement des deux automobilistes, ainsi qu'une valeur approchée de la distance du lieu de croisement à Clermont-Ferrand.
3. Placer sur le graphique, les points A, B, C et D définis par :
   $A(130, 150)$; $B(330, 400)$; $C(60, 400)$; $D(210, 150)$;

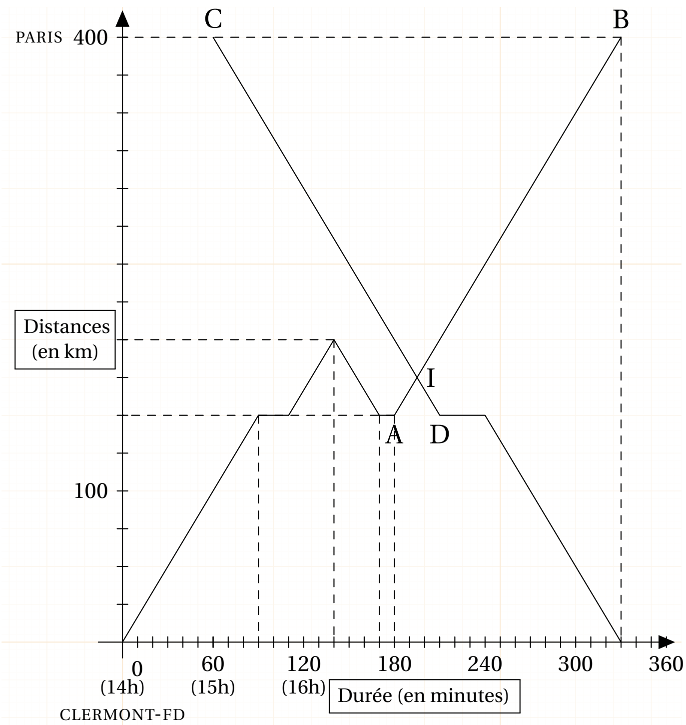
   (a) Déterminer une équation dela droite (AB).
   (b) On admet qu'une équation de la droite (CD) est :
   $$y = -\frac{5}{3} + 500$$
   calculer les coordonnées du point commun des droites (AB) et (CD).
   (c) Que représente l'abscisse obtenue ? l'ordonnée obtenue ?

2. (a) 1^{er} morceau $A_1(0, 0)$ et $B_1(90, 150)$

   $f(x) = ax + b$

   $$\begin{cases} 0 = 0 \times a + b \\ 150 = a \times 90 + b \end{cases}$$
   $$\begin{cases} 0a + b = 0 \\ 90a + b = 150 \end{cases}$$
   $$\begin{cases} a = \dfrac{5}{3} \\ b = 0 \end{cases}$$

   3^{me} morceau $A_3(110, 150)$ et $B_3(140, 200)$
   4^{me} morceau $A_3(140, 200)$ et $B_3(170, 150)$
   6^{me} morceau $A_3(180, 150)$ et $B_3(330, 400)$



Fonction affine par morceaux.

(b) Intersection de (AB) et (CD)

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{3}x - 150 \\ y = -\dfrac{5}{3}x + 500 \end{cases}$$

$$\frac{5}{3}x - 150 = -\frac{5}{3}x + 500$$

$$\frac{10}{3}x = 650$$

$$x = 195$$

Les deux automobilistes se sont croisés à 17h15 à 175 km de Clermont-Ferrand.

3. La fonction affine devient le trajet du deuxième automobiliste.

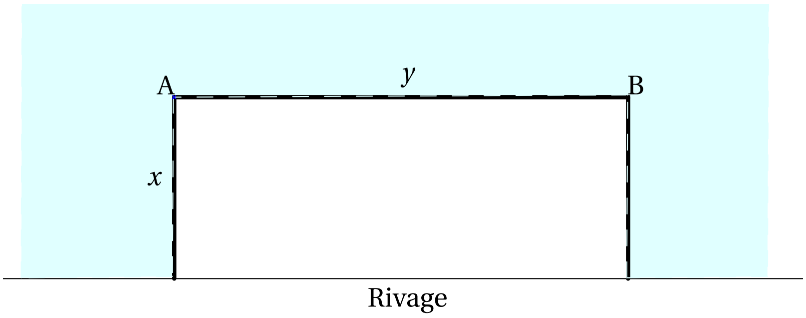
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) &= -\frac{5}{3}x + 500 && \text{si } x \in [60, 210] \\ &= 150 && \text{si } x \in [210, 240] \\ &= -\frac{5}{3}x + 550 && \text{si } x \in [240, 330] \end{aligned}$$

$$\mathrm{D}_g = [60, 330]$$

14.6.3 Exercice n° 3 : Problème d'optimisation

Un maître nageur dispose d'une corde de 160m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.

À quelle distance du rivage doit-il placer les 2 bouées A et B pour que le rectangle de baignade surveillée ait une aire maximale ?



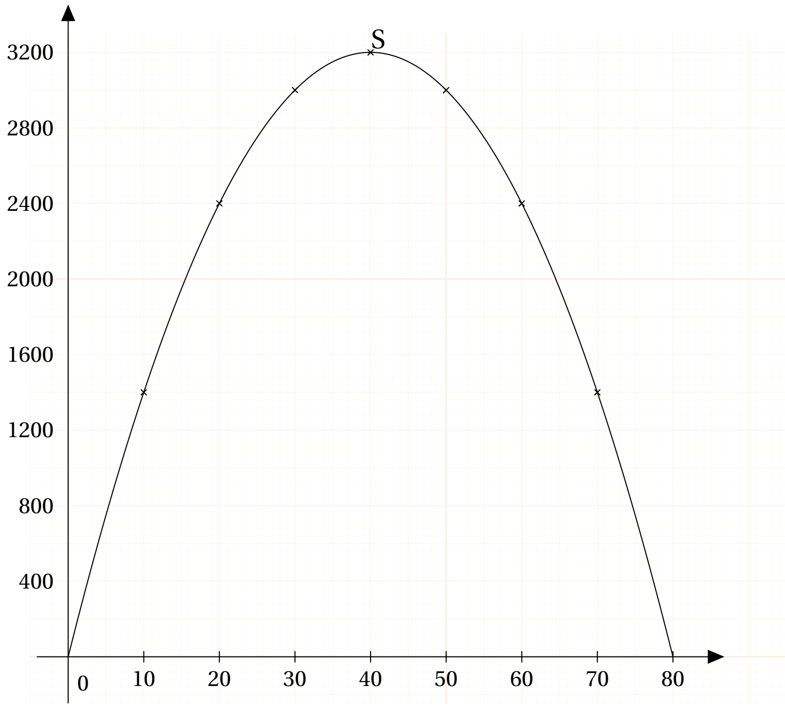
Soit x la distance cherchée ; Unité : m.

On a $2x + y = 160$

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= xy \\ &= x(-2x+160) \\ &= -2x^2 + 160x \end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = -2x^2 + 160x \qquad D_f = [0, 80]$

RG de f :	en abscisses :	1 cm pour 10
	en ordonnées :	1 cm pour 400



$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 160x \\ &= -2(x^2 - 80x) \\ &= -2[(x-40)^2 - 1600] \\ &= 2(x-40)^2 + 3200 \qquad \alpha = 40 \quad \beta = 3200 \end{aligned}$$

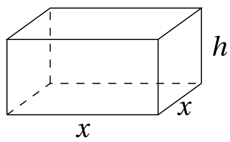
La solution de f est donc le point $S(40, 3200)$.

$$\text{Pour tout } x \in [0, 50] \qquad \begin{aligned} (x-40)^2 &\geqslant 0 \\ -2(x-40)^2 &\leqslant 0 \\ -2(x-40)^2 + 3200 &\leqslant 3200 \\ f(x) &\leqslant 3200 \end{aligned}$$

Le maître nageur doit placer ses bouées à $40m$ du rivage,
et l'aire du rectangle de baignade sera alors de $3200m^2$

14.6.4 Exercice n° 4 : Problème d'optimisation

On considère une boîte sans couvercle.



Volume : $\frac{1}{2}$ L
x et h en cm

Déterminer x pour que l'aire extérieure de la boîte soit minimale (parce que on veut peindre la boîte à moindre frais).

On a
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{V} &= x^2 h \\ \mathcal{V} &= 500cm^3 \end{aligned}\right\} x^2 h = 500$$

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= x^2 + 4xh \\ &= x^2 + 4x\frac{500}{x^2} \\ &= x^2 + \frac{2000}{x} \end{aligned}$$

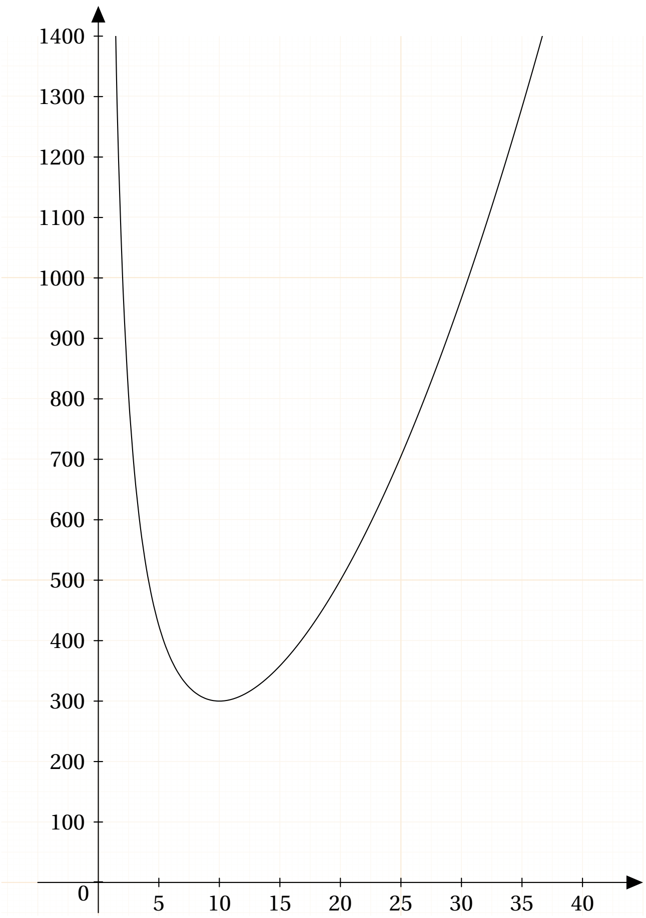
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) : x^2 + \frac{2000}{x}$ $\qquad$ $D_f =]0, +\infty[$

Asymptote verticale $x = 0$

RG de f en abscisse : 1 cm pour 5

en ordonnées : 1 cm pour 100.



Montrons que f est décroissante sur $]0,10]$

Soit x_1 et $x_2 \in]0,10]$ avec $\boxed{x_1 < x_2}$

$$\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1) &= \left(x_2{}^2+\frac{2000}{x_2}\right)-\left(x_1{}^2+\frac{2000}{x_1}\right)\\
&= x_2{}^2+\frac{2000}{x_2}-x_1{}^2-\frac{2000}{x_1}\\
&= (x_2-x_1)(x_2+x_1)+2000\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)\\
&= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)\,x_1x_2-2000\,(x_2-x_1)}{x_1x_2}\\
&= \frac{\underbrace{(x_2-x_1)}_{\text{Strictement positif}}\ \overbrace{\left[(x_2+x_1)\,x_1x_2-2000\right]}^{\text{Négatif}}}{\underbrace{x_1x_2}_{\text{Strictement positif}}}
\end{aligned}$$

* $\left.\begin{matrix} x_1>0\\ x_2>0\end{matrix}\right\} x_2x_1>0$

*

$$\begin{aligned}
x_1 &\leqslant 10\\
x_2 &\leqslant 10\\
\\
(x_2+x_1) &\leqslant 20\\
x_1x_2 &\leqslant 100\\
(x_2+x_1)x_1x_2 &\leqslant 2000\\
(x_2+x_1)x_1x_2-2000 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0$

Montrons que f est croissante sur $]10,+\infty[$

Soit x_1 et $x_2 \in [10,+\infty$ avec $\boxed{x_1 < x_2}$

Positif

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{(x_2-x_1)\quad\left[(x_2+x_1)\,x_1x_2-2000\right]}{x_1x_2}$$

Strictement positif

Strictement positif

$*\quad \left.\begin{matrix} x_1>0 \\ x_2>0 \end{matrix}\right\} x_2x_1>0$

$*$

$$x_1 \geqslant 10$$
$$x_2 \geqslant 10$$

$$(x_2+x_1) \geqslant 20$$
$$x_1x_2 \geqslant 100$$
$$(x_2+x_1)x_1x_2 \geqslant 2000$$
$$(x_2+x_1)x_1x_2-2000 \geqslant 0$$

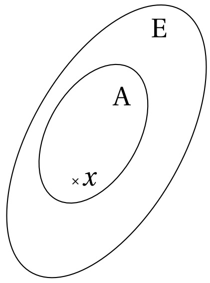
Conclusion : $f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0$

Le minimum a donc pour coordonnées $(10,300)$.
L'aire maximale est donc obtenue pour $x = 10cm$. Elle est alors de $300cm^2$.

15 Statistique

15.1 Vocabulaire

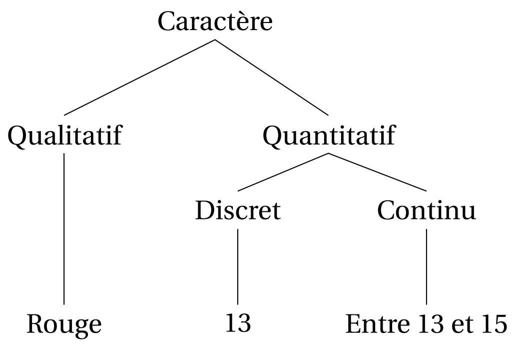
Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire statistique	Vocabulaire probabiliste
Ensemble	Population	Univers
Sous-ensemble	Échantillon	Événement
Élément	Individu	Éventualité (cas possible)
Propriété	Caractère	×



A ⊂ E, car A est un sous-ensemble de E.

$x \in$ A et $x \in$ E car x est un élément de A, et par conséquent un élément de E.

Il existe différents types de caractères :



15.2 Étude d'un caractère quantitatif discret

Population : Lycée International .
Echantillon : Les élèves d'une classe de Seconde.
Caractère : nombre de frères et sœurs

15.2.1 Enquête

Nombre de frères et sœurs	Nombre d'élèves
0	2
1	11
2	11
3	3
4	1
5	2

15.2.2 Tableau

Seront notés x_i les valeurs du caractère et n_i les effectifs correspondants.

On notera Σ_{n_i} la somme de tous nombres n jusqu'à n_i, telle que : $\Sigma_{n_i} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ... + n_i$.

La colonne p_i est la colonne des pourcentages. N'oublions pas que $p_i = \frac{n_i}{\Sigma_{n_i}}$.

x_i	n_i	p_i
0	2	6,7
1	11	36,7
2	11	36,7
3	3	10,0
4	1	3,3
5	2	6,7
Σ	30	100,1

N.B. : $\Sigma_{\mathbf{p_i}} = 100$. Ici, $\Sigma_{\mathbf{n_i}} = 100,1$ à cause d'un problème d'arrondi.

15.2.3 Diagramme en bâtons des effectifs

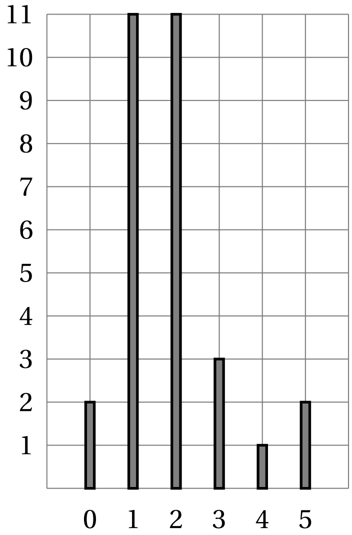


Diagramme en bâtons des effectifs

15.3 Caractéristiques d'une série statistique correspondant à un caractère quantitatif continu

15.3.1 Le mode

Le mode est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

Exemple
Les modes de la série statistique de la série précédente sont 1 et 2.

15.3.2 L'étendue

C'est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

Exemple
Dans la série statistique de la série précédente, l'étendue est $5 - 0 = 5$.

15.3.3 La médiane

Si elle existe, la médiane est la valeur du caractère qui partage l'effectif total en deux parties de même effectif.

Exemple n°1
Notes classées par ordre croissant.

$$\underbrace{7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ;}\ 11\ \underbrace{; 12 ; 13 ; 14 ; 14 ; 15 ; 17.}$$

$\mathrm{N} = \Sigma_{n_i} = 13$

N est impair. La médiale est donc le terme de rang $\dfrac{\mathrm{N}+1}{2}$.
Donc $med = 11$

Exemple n°2

$\underbrace{7\,;7\,;9\,;9\,;10\,;11\,;}12\,;13\underbrace{;13\,;13\,;14\,;14\,;15\,;15.}$

$\mathrm{N} = 14$.

N est pair. La médiane est donc la moyenne entre le terme de rang $\frac{\mathrm{N}}{2}$ et celui de rang $\frac{\mathrm{N}}{2} + 1$.
Donc $med = \frac{12+13}{2} = 12,5$.

Exemple n°3

D'après la série statistique de la partie II., on a :

$$\underbrace{0\,;0\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;2\,;}2\,;2\underbrace{;2\,;2\,;2\,;2\,;2\,;2\,;2\,;2\,;3\,;3\,;3\,;4\,;5\,;5}.$$

$med = \dfrac{2+2}{2} = 2.$

Il est aussi possible de construire un tableau, ce qui donne :

Exemple n°1

	x_i	n_i	effectifs cumulés croissants
	7	1	1
	8	1	2
	9	2	4
	10	2	6
med	11	1	7 ←
	12	1	8
	13	1	9
	14	2	11
	15	1	12
	17	1	13
	Σ	13	$\times$

$\dfrac{\mathrm{N}+1}{2} = 7$

Exemple n°2

	x_i	n_i	effectifs cumulés croissants
	7	2	2
	9	2	4
	10	1	5
	11	1	6
med	12	1	7 ←
med	13	3	10 ←
	14	2	12
	15	2	14
	Σ	14	$\times$

$\dfrac{\mathrm{N}}{2} = 7$ et $\dfrac{\mathrm{N}}{2} + 1 = 8$

Exemple n°3

	x_i	n_i	effectifs cumulés croissants
	0	2	2
	1	11	13
med	2	11	24$\Leftarrow$
	3	3	27
	4	1	28
	5	2	30
	Σ	30	$\times$

$\dfrac{N}{2} = 15$ et $\dfrac{N}{2} + 1 = 16$.

15.3.4 Les quartiles

- * Le premier quatile Q_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25% des valeurs du caractère soient inférieures ou égales à ce nombre.
- * Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 75% des valeurs du caractère soient inférieures ou égales à ce nombre.

N.B. : Le deuxième quartile n'est autre que la médiane.

Exemple n°1

$7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18.$

$\Sigma_{n_i} = N = 12$

N est divisible par 4. Donc Q_1 est le terme de rang $\dfrac{N}{4}$, et Q_3 est le terme de rang $\dfrac{3N}{4}$.

Ainsi,

- * $\dfrac{N}{4} = 3$, donc $Q_1 = 8$.
- * $\dfrac{3N}{4} = 9$, donc $Q_3 = 15$.

Exemple n°2

$7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19.$

$\Sigma_{n_i} = N = 13$

N n'est pas divisible par 4. Donc Q_1 est le terme de rang le premier nombre entier qui suit $\dfrac{N}{4}$, et Q_3 est le terme de rang le premier nombre entier qui suit $\dfrac{3N}{4}$.

Ainsi,

* $\dfrac{N}{4} = 3,25$, donc Q_1 est le terme de rang 4, et $Q_1 = 9$.
* $\dfrac{3N}{4} = 9,75$, donc Q_3 est le terùe de rang 10, et $Q_3 = 16$.

7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18.

$\Sigma_{n_i} = N = 12$

N est divisible par 4. Donc Q_1 est le terme de rang $\dfrac{N}{4}$, et Q_3 est le terme de rang $\dfrac{3N}{4}$.

Ainsi,

* $\dfrac{N}{4} = 3$, donc $Q_1 = 8$.
* $\dfrac{3N}{4} = 9$, donc $Q_3 = 15$.

On peut aussi faire des tableaux :
En orange l'« affichage machine », en rouge les quartiles et en vert la médiane.

Sur l'exemple n°1 :

On a $\dfrac{N}{4} = 3$, et $\dfrac{3N}{4} = 9$. De plus, $\dfrac{N}{2} = 6$ et $\dfrac{N}{2} + 1 = 7$.

		x_i	n_i	Effectifs cumulés croissants
$\min_x$		7	2	2
$Q_1 = 8.5$	Q_1	8	1	3 ←
		9	1	4
		10	1	5
	$\boxed{\text{med=12.5}}$	12	1	6 ←
		13	2	8 ←
$Q_3 = 15.5$	Q_3	15	1	9 ←
		16	1	10
		17	1	11
$\max_x$		18	1	12
		Σ	12	×
			n	

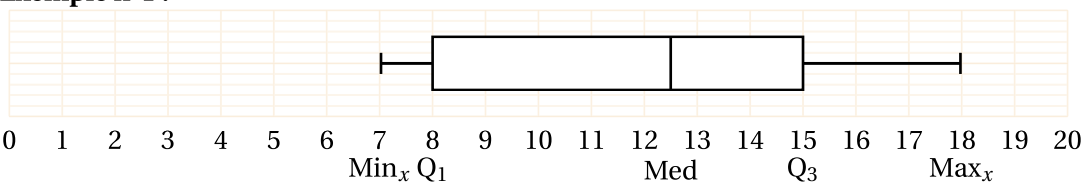
Sur l'exemple n°2 :

On a $\dfrac{N}{4} = 3,25$, et $\dfrac{3N}{4} = 9,75$. De plus, $\dfrac{N+1}{2} = 7$.

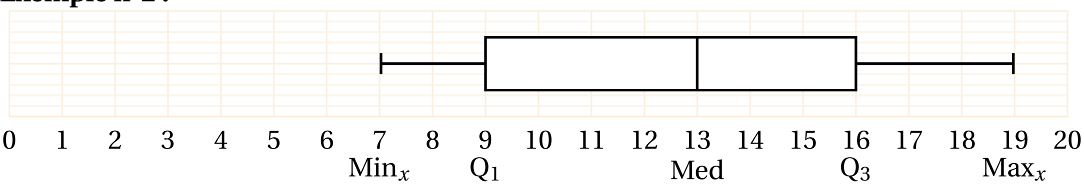
		x_i	n_i	Effectifs cumulés croissants
$\min_x$		7	2	2
		8	1	3
$Q_1 = 8.5$	Q_1	9	1	4 ←
		10	1	5
		12	1	6
	med	$\boxed{13}$	2	8 ←
		15	1	9
$Q_3 = 15.5$	Q_3	16	1	10 ←
		17	1	11
		18	1	12
$\max_x$		19	1	13
		Σ	13	×
			n	

15.3.5 Diagramme en boîte (ou boîte à moustaches)

Exemple n°1 :



Exemple n°2 :



15.3.6 La moyenne

Exemple n°1 : Notes.

x_i	n_i	$n_i x_i$
2	2	4
6	7	42
10	9	90
14	9	126
18	1	18
Σ	28	280
	n	Σx

$$\overline{x} = \frac{\Sigma_{n_i x_i}}{\Sigma_{n_i}}$$

$$\overline{x} = \frac{280}{28} = 10$$

15.3.7 L'écart type

a) Introduction

On observe les résultats en mathématique de 2 élèves, Sylvain et Sylvette, au cours d'un trimestre. On appelle « Élève A » Sylvain, et « Élève B », Sylvette.

* Élève A : 11/9/13
* Élève B : 12/3/18

On constate que $\overline{x_A} = \overline{x_B} = 11$.

	Notes	Moyenne	Écarts par rapport à la moyenne	Moyenne des écarts par rapport à la moyenne	Valeurs absolues des écarts par rapport à la moyenne	Moyenne des valeurs absolues des écarts par rapport à la moyenne	Carrés des écarts par rapport à la moyenne	Moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne	Racine carrée de la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne
Élève A	11 / 9 / 13	11	0 / −2 / +2	0	0 / 2 / 2	$\frac{4}{3} \approx 1{,}33$	0 / 4 / 4	$\frac{8}{3} \approx 2{,}67$	$\sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}63$
Élève B	12 / 3 / 18	11	+1 / −8 / +7	0	1 / 8 / 7	$\frac{16}{3} \approx 5{,}33$	1 / 64 / 49	38	$\sqrt{38} \approx 6{,}16$
							ÉCART-MOYEN	VARIANCE	ÉCART-TYPE

b) Définition :

On note l'écart type σ_x, et on a : $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma_{n_i}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\Sigma_{n_i}}}$.

c) Exemple :

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
2	2	4	128
6	7	42	112
10	9	90	0
14	9	126	144
18	1	18	64
Σ	28	280	448

$$\overline{x} = \frac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma_{n_i}} = \frac{280}{28} = 10$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{448}{28}} = 4$$

d) Autre formule

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma_{n_i \times (x_i - \overline{x})^2}}{\Sigma_{n_i}}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma_{n_i \times x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2}}{\Sigma_{n_i}}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma_{n_i x_i^2} - 2\overline{x}\Sigma_{n_i x_i} + \overline{x}^2 \Sigma n_i}{\Sigma_{n_i}}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma_{n_i x_i^2}}{\Sigma_{n_i}} - 2\overline{x}\frac{\Sigma_{n_i x_i}}{\Sigma_{n_i}} + \overline{x}^2 \frac{\Sigma_{n_i}}{\Sigma_{n_i}}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - 2\overline{x} \times \overline{x} + \overline{x}^2 \times 1$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Et donc $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$

e) Exemple :

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
2	2	4	8
6	7	42	252
10	9	90	900
14	9	126	1764
18	1	18	324
Σ	28	280	3248

On rapelle que $\overline{x} = 10$.

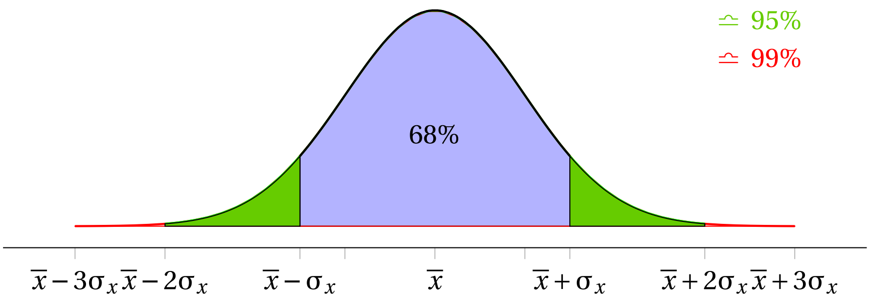
On a : $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{3248}{28} - \left(\frac{280}{28}\right)^2} = 4$

15.3.8 Répartition « normale »

Soit (x_i, n_i) une série statistique.
Soient $\overline{x}$ la moyenne et σ_x l'écart-type.

On considère que la répartition est « normale » :

* si les valeurs du caractère comprises entre $\overline{x} - \sigma_x$ et $\overline{x} + \sigma_x$ représentent 68% de l'effectif total.
* **ou** si les valeurs du caractère comprises entre $2\overline{x} - 2\sigma_x$ et $2\overline{x} + 2\sigma_x$ représentent 95% de l'effectif total.
* **ou** si les valeurs du caractère comprises entre $3\overline{x} - 3\sigma_x$ et $3\overline{x} + 3\sigma_x$ représentent 99% de l'effectif total.



Ceci est appelé « Courbe en cloche de Gauss ».

Exemple

Si $\overline{x} = 10$ et $\sigma_x = 4$, alors :

* $\overline{x} - \sigma_x = 6$ et $\overline{x} + \sigma_x = 14$. On a donc $7 + 9 + 9 = 25$ élèves, soit 89,3%.
* $2\overline{x} - 2\sigma_x = 2$ et $2\overline{x} + 2\sigma_x = 18$. On a donc 28 élèves, soit 100%.

15.4 Exercice : Étude d'un caractère quantitatif discret

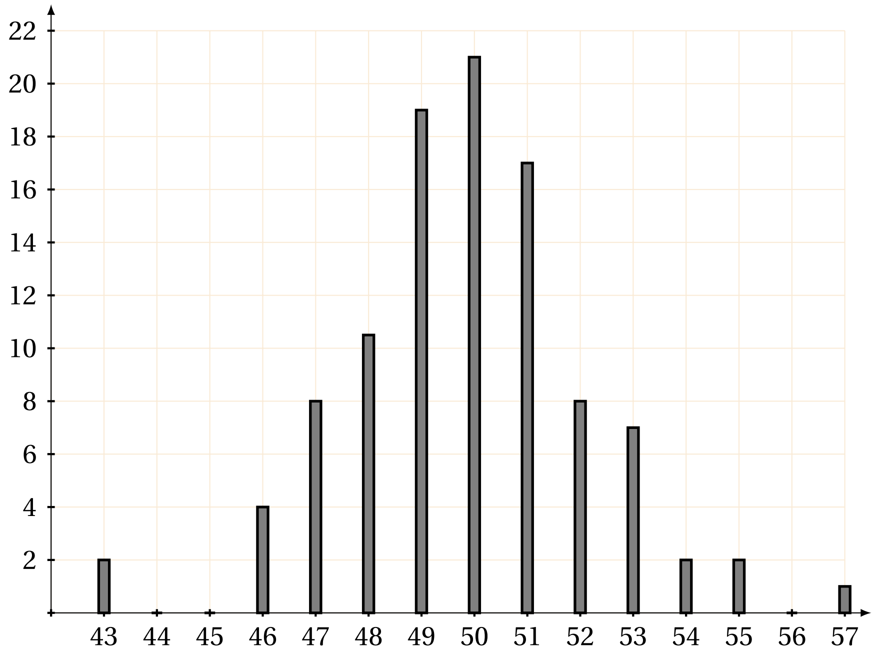
Dans une maternité, on étudie la taille des bébés en cm pour 200 bébés.

	L1 x_i	L2 n_i	p_i	Effectifs cumulés croissants	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$\min_x$	43	4	2	4	172	7 396
	44	0	0	4	0	0
	45	0	0	4	0	0
	46	8	4	12	368	16 928
	47	16	8	28	752	35 344
	48	22	11	50	1056	50 688
	49	38	19	88	1862	91 238
	50	42	21	130	2100	105 000
	51	30	15	160	1530	78 030
	52	16	8	176	832	43 264
	53	14	7	190	742	39 326
	54	4	2	194	216	11 664
	55	4	2	198	220	12 100
	56	0	0	198	0	0
$\max_x$	57	2	1	200	114	6 498
	Σ	200	100	×	9 964	497 476
		n			Σx	Σx^2

15.4.1 Mode et étendue

* Mode : 50
* Etendue : $57 - 43 = 14$.

Diagramme en bâtons des pourcentages



15.4.2 Médiane, 1^er^ quartile et 3^e^ quartile

Médiane

N = 200. N est un nombre pair.

$\frac{N}{2} = 100$ et $\frac{N}{2} + 1 = 101$.

* Le terme de rang 100 est 50.
* Le terme de rang 101 est 50.

$\text{med} = \frac{50+50}{2} = \boxed{50}$ med = 50.

Q_1 et Q_3

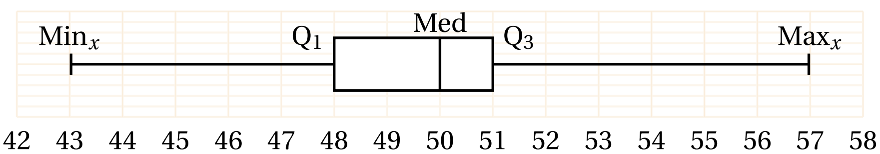
N = 200. N est divisible par 4.

$\frac{N}{4} = 50$ et $\frac{3N}{4} = 150$.

* Le terme de rang 50 est 48.
* Le terme de rang 150 est 51.

Donc $Q_1 = 48$ et $Q_3 = 51$.

Boîte à moustaches



Interprétation de la médiane :

Environ 50% des bébés mesurent moins de 50 cm.
Environ 50% des bébés mesurent plus de 50 cm.

Interprétation de l'écart interquartile :

Environ 50% des bébés mesurent entre 48 et 51 cm.

15.4.3 Moyenne et écart-type

$\overline{x} = \frac{\Sigma_{n_i x_i}}{\Sigma_{n_i}} = \frac{9964}{200} = 49,82.$

Donc $\overline{x} = 49,82$cm.

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{497476}{200} - \left(\frac{9964}{200}\right)^2} \approx 2,31.$

Donc $\sigma_x = 2,31$cm.

15.4.4 Répartition « normale »

- $\overline{x} - \sigma_x = 47,51.$
  $\overline{x} + \sigma_x = 52,13.$
  On a donc $22 + 38 + 42 + 30 + 16 = 148$ bébés, soit 74%.

- $2\overline{x} - 2\sigma_x = 45,20$
  $2\overline{x} + 2\sigma_x = 54,44.$
  On a donc $200 - 4 - 4 - 2 = 190$ bébés, soit 95%.

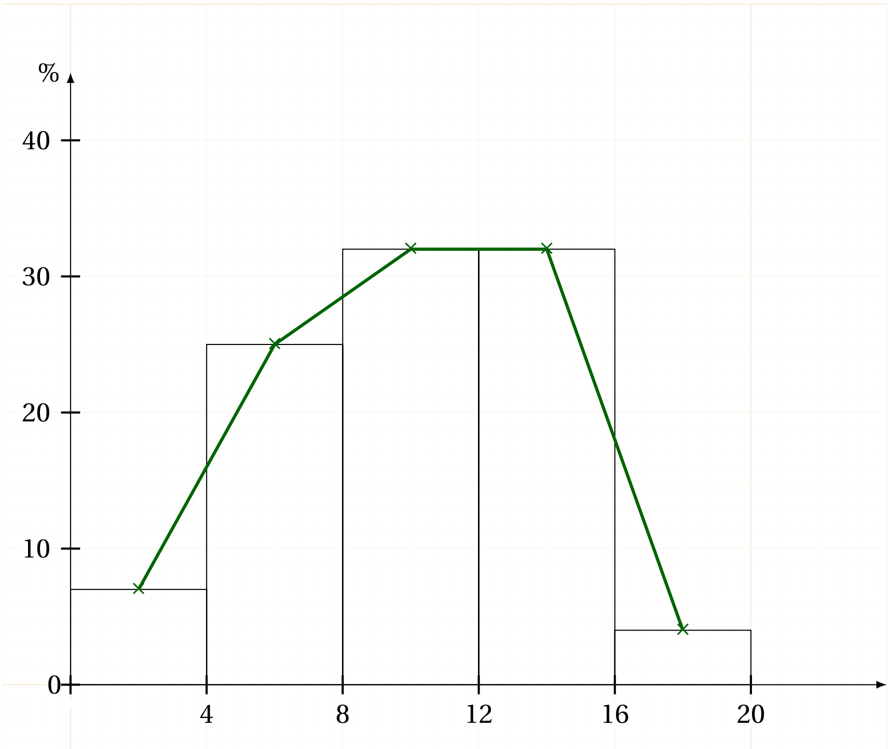
15.5 Étude d'un caractère quantitatif continu

Échantillon : Les élèves d'une classe de Seconde.
Caractère : Notes en mathématique.

On regroupe les valeurs du caractère par classes d'amplitude 4 :

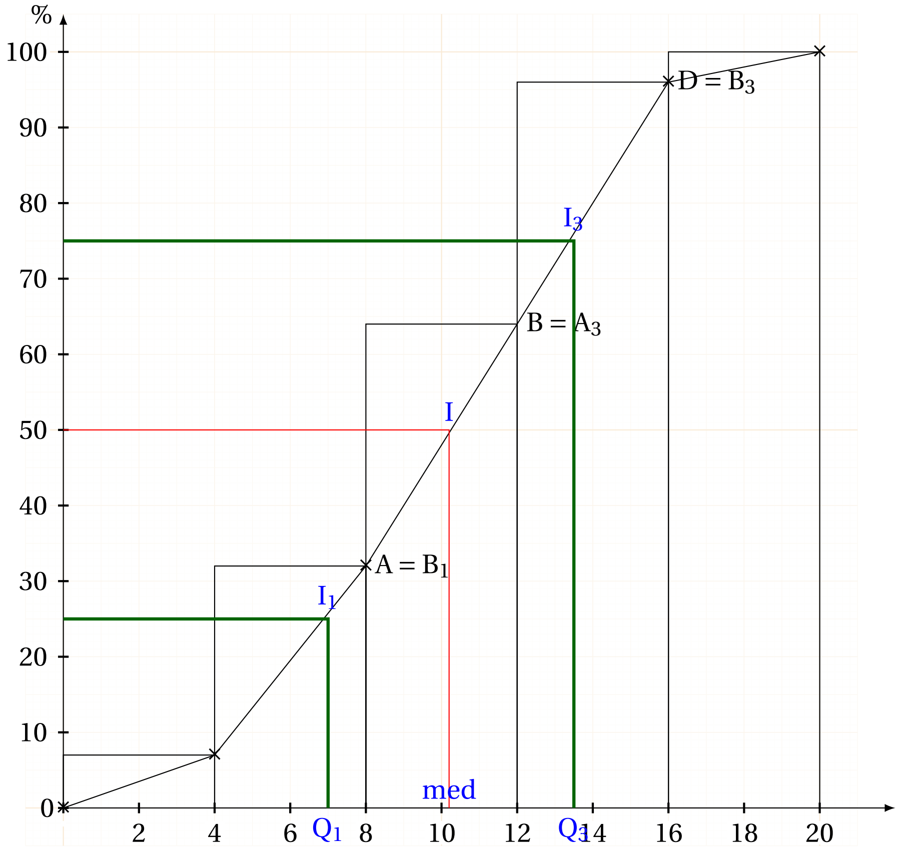
Classes	n_i	p_i à l'unité	Pourcentages cumulés croissants
$[0,4[$	2	7	7
$[4,8[$	7	25	32
$[8,12[$	9	32	64
$[12,16[$	9	32	96
$[16,20]$	1	4	100
Σ	28	100	×

15.5.1 Histogramme des pourcentages



En vert, le polygone des pourcentages.

15.5.2 Histograme des pourcentages cumulés croissants



Grâce au polygone des pourcentages cumulés croissants, on peut lire graphiquement :

- med $\approx 10,2$.
- $Q_1 \approx 6,8$.
- $Q_3 \approx 13,4$.

Par le calcul, on a :

Médiane

Avec les points $A(8,32) et B(12,64)$.

Équation de la droite (AB) : $y = 8x - 32$.

Intersection de (AB) et la droite $y = 50$.

$8x - 32 = 50$

$8x = 82$

$x = 10,25$

Donc med $= 10,25$. 50% des élèves ont eu moins de $10,25/20$ et 50% des élèves ont eu plus de $10,25/20$.

Q_1

Avec les points $A(8, 32)$ et $C(4, 7)$.

Équation de la droite (AB) : $y = \frac{25}{4}x - 18 = 6,25x - 18$.

Intersection de (AC) et la droite $y = 25$.

$6,25x - 18 = 25$

$6,25x = 43$

$x = \frac{43}{6,25} = \frac{172}{25}$

$x \approx 6,88$

Donc $Q_1 = 6,88$.

Q_3

Avec les points $A_3(12, 64)$ et $B_3(16, 96)$.

Équation de la droite (AB) : $y = 8x - 32$.
Intersection de (A_3B_3) et la droite $y = 75$.

$8x - 32 = 75$

$8x = 107$

$x = \frac{107}{8} = 13,375$

$x \approx 13,38$

Donc $Q_1 = 13,38$.

50% des élèves ont eu entre 6,88/20 et 13,38/20.

15.5.3 Moyenne et écart-type

$\min_x$ L_1 L_2

Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	
$[0,4[$	2	2	4	8	
$[4,8[$	6	7	42	252	
$[8,12[$	10	9	90	900	
$[12,16[$	14	9	126	1764	
$[16,20]$	18	1	18	324	
Σ	$\times$	28	280	3248	$\Sigma_{x_i}^2$

Max_x n Σ_x

$$\overline{x} = \frac{\Sigma_{n_i x_i}}{\Sigma_{n_i}} = \frac{280}{28} = 10$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{3248}{28} - \left(\frac{280}{28}\right)^2} = \boxed{4} \quad \sigma_x = 4$$

15.5.4 Répartition « normale »

$\overline{x} - \sigma_x = 6$
$\overline{x} + \sigma_x = 14$

Interpolation linéaire : $0 + \dfrac{7 \times 2}{4} + 9 + \dfrac{9 \times 2}{4} + 0 = 17$ élèves, soit 60,71%.

$2\overline{x} - 2\sigma_x = 2$
$2\overline{x} + 2\sigma_x = 18$

Interpolation linéaire : $\dfrac{2 \times 2}{4} + 7 + 9 + 9 + \dfrac{1 \times 2}{4} \approx 26,5$ élèves, soit 94,64%.

15.6 Exercice : Étude d'un caractère quantitatif continu

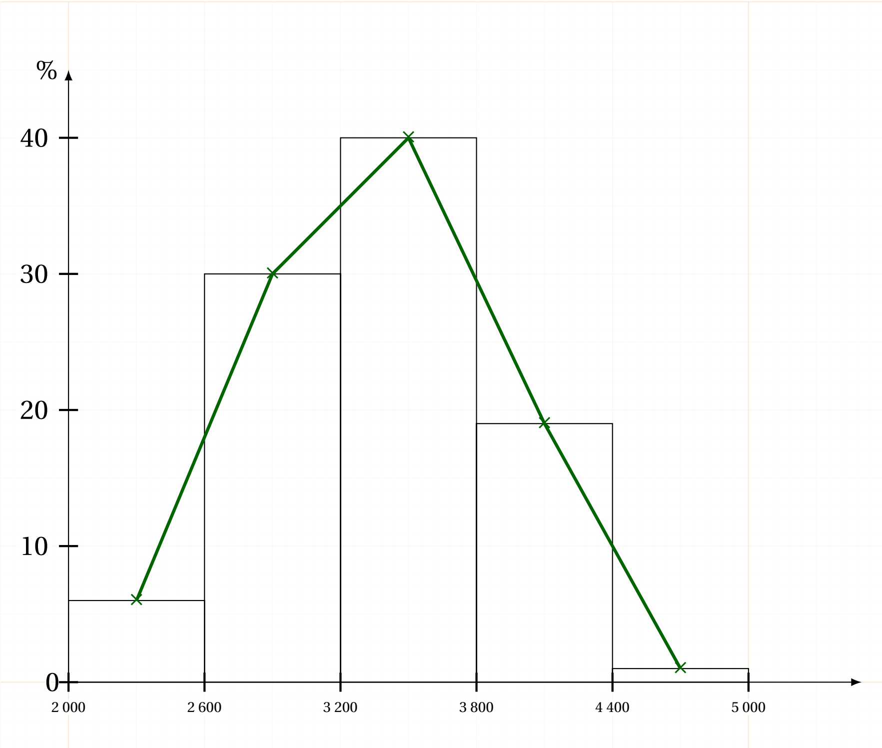
Dans une maternité, on étudie la le poids des bébés en grammes pour 200 bébés.

On regroupe les bébés par classes d'amplitude 600.

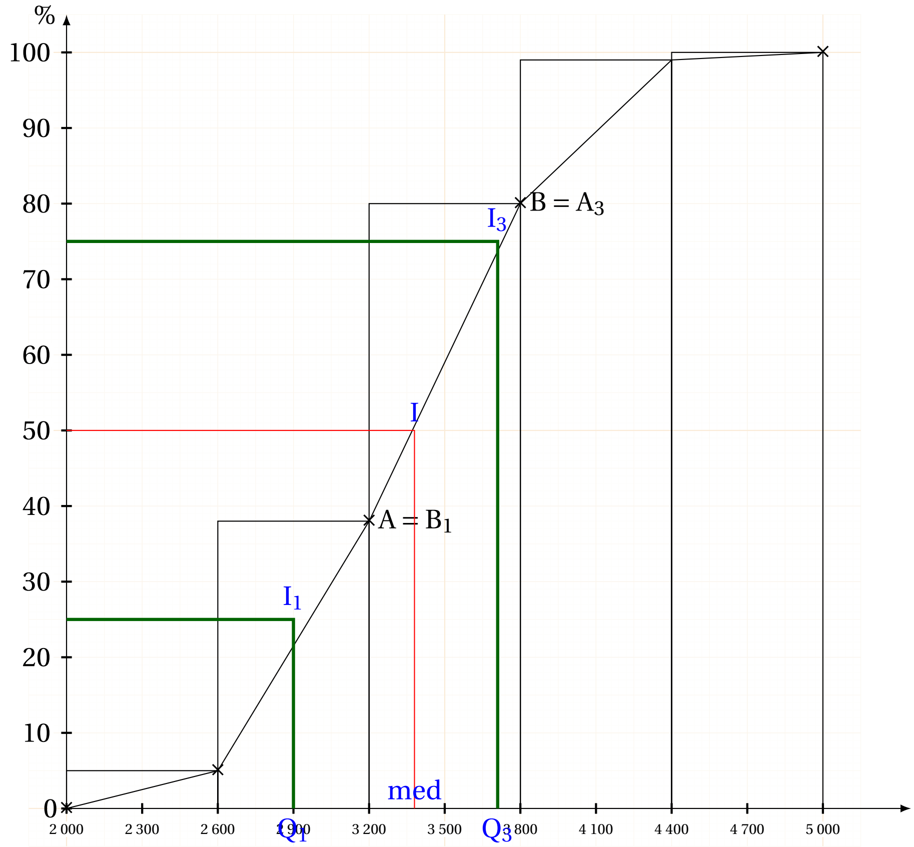
On pose $X_i = \dfrac{1}{100} x_i$

Classes	n_i	p_i	Pourcentages cumulés croissants	x_i	X_i	$n_i X_i$	$n_i X_i^2$
$[2000, 2600[$	12	6	6	2300	23	276	6348
$[2600, 3200[$	64	32	38	2900	29	1856	53824
$[3200, 3800[$	84	42	80	3500	35	2940	102900
$[3800, 4400[$	38	19	99	4100	41	1558	63878
$[4400, 5000]$	2	1	100	4700	47	94	4418
Σ	200	100	×	×	×	6724	231368

15.6.1 Histogramme des pourcentages



15.6.2 Histogramme des pourcentages cumulés croissants



Graphiquement, on lit :

* med ≈ 3380
* $Q_1 \approx 2960$
* $Q_3 \approx 3710$ ou 3740

Par le calcul, on a :

Médiane
Avec les points A(3200,38) B(3800,80), on peut opérer un changement d'unité. On utilisera donc les points $A'(32,48)$ et $B'(38,80)$.

Équation de la droite $(A'B')$: $y = 7X - 186$.

Intersection de $(A'B')$ et la droite $y = 50$.

$7X - 186 = 50$

$7X = 236$

$X = \dfrac{236}{7} \approx 33,71$

Donc med = 3371. 50% des bébés pèsent moins de 3371 grammes et 50% ont pèsent plus de 3371 grammes.

Q_1

Avec les points $A_1(2600,6)$ et $B_1(3200,38)$, on peut opérer un changement d'unité. On utilisera donc les points $A'_1(26,6)$ et $B'_1(32,38)$

Équation de la droite $(A'_1B'_1)$: $y = \dfrac{16}{3}X - \dfrac{398}{3}$

Intersection de $(A'_1B'_1)$ et la droite $y = 25$.

$\dfrac{16}{3}X - \dfrac{398}{3} = 25$

$\dfrac{16}{3}X = \dfrac{473}{3}$

$X = \dfrac{473}{3} \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{473}{16}$

$X \approx 29,56$

Donc $Q_1 = 2956$.

Q_3

Avec les points $A_3(3200,38)$ et $B_3(3800,80)$, on peut opérer un changement d'unité. On utilisera donc les points $A'_3(32,38)$ et $B'_3(38,80)$.

Équation de la droite $(A'_3B'_3)$: $y = 7X - 186$.

Intersection de $(A'_3B'_3)$ et la droite $y = 75$.

$7X - 186 = 75$

$7X = 261$

$X = \dfrac{261}{7} = 37,29$

$X \approx 37,29$

Donc $Q_1 = 3729$.

Donc 50% des bébés pèsent entre 2956 grammes et 3729 grammes.

15.6.3 Moyenne et écart-type

$\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{\Sigma_{n_i}\mathrm{X}_i}{\Sigma_{n_i}} = \dfrac{6724}{200} = 33,62.$

Donc $\overline{x} = 3362$ grammes.

$\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{231368}{200} - \left(\dfrac{6724}{200}\right)^2} \approx= 5,15.$

Donc $\sigma_x = 5,15$ grammes.

15.6.4 Répartition normale

$\overline{x} - \sigma_x = 2847$
$\overline{x} + \sigma_x = 3877$

Interpolation linéaire : $0 + \dfrac{64 \times 353}{600} + 84 + \dfrac{38 \times 77}{600} + 0 = 126,53$ bébés, soit 63,27%.

$2\overline{x} - 2\sigma_x = 2332$
$2\overline{x} + 2\sigma_x = 4392$

Interpolation linéaire : $\dfrac{\dfrac{12 \times 268}{600} + 64 + 84 + \dfrac{38 \times 592}{600}}{200} \times 100 = 95,43\%.$

15.7 Amusette : Effet de structure

Attention aux pièges des moyennes.
Dans un premier centre d'examen, on a $\overline{x_{1_G}}$ la moyenne des garçons, et $\overline{x_{1_F}}$ la moyenne des filles. Dans un seconde centre, on a $\overline{x_{2_G}}$ et $\overline{x_{2_F}}$ la moyenne des filles.

On donne : $\overline{x_{1_G}} = 13$ et $\overline{x_{1_F}} = 12$.

De plus, on a : $\overline{x_{2_G}} = 9$ et $\overline{x_{2_F}} = 8$.

Peut-on dire que les garçons sont meilleurs que les filles ?
Dans le premier centre d'examen, il y a 58 garçons et 104 filles.
Dans le second centre d'examen, il y a 87 garçons et 32 filles.

On calcule $\overline{x_G}$, la moyenne générale des garçons :

$$\frac{58 \times 13 + 87 \times 9}{58 + 87} = 10,60$$

Puis, on calcule $\overline{x_F}$, la moyenne générale des filles :

$$\frac{12 \times 104 + 8 \times 32}{104 + 32} = 11,06.$$

Finalement, les filles sont meilleures que les garçons.

16 Pourcentages

16.1 Exercice n° 0

Remplir les cases vides...

Prix HT en €	TVA en %	Prix TT en €	Coefficient multiplicateur
140	5,5	147,70	1,055
1500	19,6	1794	1,196
1450	33	1928,50	1,33

Même consigne...

Ancien prix en €	réduction en %	Nouveau prix en €	Coefficient multiplicateur
220	15	187	0,85
1790	35	1163,50	0,65
12300	0,1	12287,70	0,999

Ainsi, on peut dire que :

* Ajouter 12 % à p revient à dire que : $p + \dfrac{12}{100}p = p + 0,12p = p(1 + 0,12) = 1,12p$.
* Retrancher 12 % à p revient à dire que : $p - \dfrac{12}{100}p = p - 0,12p = p(1 - 0,12) = 0,88p$.

Enfin, le pourcentage d'évolution se calcule ainsi :

Soient $\mathrm{V_D}$ la valeur de départ et $\mathrm{V_A}$ la valeur d'arrivée.

$$\mathrm{V_A} = \mathrm{V_D}\left(1 + \frac{t}{100}\right)$$
$$1 + \frac{t}{100} = \frac{\mathrm{V_A}}{\mathrm{V_D}}$$
$$\frac{t}{100} = \frac{\mathrm{V_A}}{\mathrm{V_D}} - 1$$
$$\frac{t}{100} = \frac{\mathrm{V_A} - \mathrm{V_D}}{\mathrm{V_D}}$$
$$t = \frac{\mathrm{V_A} - \mathrm{V_D}}{\mathrm{V_D}} \times 100$$

En reprenant le premier tableau, on peut dire que :

$$t = \frac{1928,50 - 1450}{1450} \times 100 = 33$$

Le prix a donc augmenté de 33 %.

Puis, avec le second tableau :

$$t = \frac{12287,70 - 12300}{12300} \times 100 = -0,1$$

Le prix a donc diminué de 0,1 %.

16.2 Exercice nº 1

Première partie

Un prix p augmente de 20 % puis de 10 %.

A-t-il augenté de 30 % ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $1,2p$
* Prix final : $1,1 \times 1,2p = 1,32p$.

p a donc augmenté de 32 %.

Deuxième partie

Un prix p diminue de 20 % puis de 10 %.

A-t-il diminué de 30 % ?
A-t-il diminué de 32 % ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $0,8p$
* Prix final : $0,9 \times 0,8p = 0,72p$.

p a donc diminué de 28 %.

Troisième Partie

Un prix p augmente de 10 % puis diminue de 10 %.

p est-il revenu au prix initial ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $1,1p$
* Prix final : $0,9 \times 1,1p = 0,99p$.

p a donc diminué de 1 %.

Amusette

Vous achetez un objet (de valeur) chez un commerçant. Celui-ci propose :

* Une réduction de 10 % sur le prix HT puis l'application de la TVA à $19,6$ %.
* Une réduction de 10 % sur le prix TTC.

Quelle option doit-on choisir ?

	Option A	Option B
Prix initial	p	p
Prix intermédiaire	$0,9p$	$1,196p$
Prix final	$1,196 \times 0,9p = 1,0764p$	$1,196 \times 0,9p = 1,0764p$

Le choix est indifférent pour le client.

Cependant, le choix n'est pas indifférent au commerçant :

Exemple

	Option A	Option B
Client	10764	10764
Commerçant	9000	8804
État	1764	1960

Le commerçant préfèrera donc l'option A.

16.3 Exercice n° 2

Un produit A coûte 25 % plus cher qu'un produit B.

Le produit B coûte-t-il 25 % moins cher que le produit A ?

Soient p_{A} le prix du produit A et p_{B} le prix du produit B.

$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}} \times 1,25$

$p_{\mathrm{B}} = \dfrac{p_{\mathrm{A}}}{1,25}$

$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} \times \dfrac{1}{1,25}$

$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} \times 0,8$

Donc, le produit B coûte 20 % moins cher que le pruduit A.

16.4 Exercice n° 3

Le taux de TVA dans la restauration était de 19,6 %. Ce taux a été baissé à 5,5 %.

Les prix ont-ils donc baissé de 14,1 % ?

Soient p le prix HT. Le prix avec l'ancienne TVA est $p_{\mathrm{A}} = 1,196p$ et le prix avec la nouvelle TVA est $p_{\mathrm{N}} = 1,055p$.

On a donc
$p_{\mathrm{A}} = 1,196p$ $p_{\mathrm{N}} = 1,055p$

Ainsi :

$p_{\mathrm{N}} = p \times 1,055$

$p_{\mathrm{N}} = \dfrac{p_{\mathrm{A}}}{1,196} \times 1,055$

$p_{\mathrm{N}} = p_{\mathrm{A}} \times \dfrac{1,055}{1,196}$

$p_{\mathrm{N}} \approx p_{\mathrm{A}} \times 0,882$

Les prix auraient donc dû baisser de 11,8 %

Vérification
On dit que $p = 10$€

$t = \dfrac{10,55 - 11,96}{11,96} \times 100 = -11,8\ \%$

16.5 Exercice n° 4

Première partie

On place de l'argent à un taux de 1 % par mois, le taux est-il de 12 % par an ?

Soient p la somme d'argent initiale, p' la somme d'argent au bout d'un mois, et p'' la somme d'argent au bout de 2 mois.

Placement initial	p
Placement au bout d'un mois	$p' = 1,01p$
Placement au bout de deux mois	$p'' = p' \times 1,01 = 1,01 \times 1,01 \times p = 1,01^2 \times p$
...	
Placement au bout de 12 mois	$p \times 1,01^{12} = 1,1268p$

Le placement a donc augmenté de 12,68 %.

Seconde partie

Un placement au taux de 12 % par an revient-il à un placement de 1 % par mois ?

Soient p la somme d'argent initiale, p' la somme d'argent au bout d'un an.

Placement initial	p
Placement au bout d'un an	$p' = 1,12p$

Une idée géniale
On peut dire que pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

En effet, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, et donc $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a$.

Par exemple : $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

On peut dire ici que la placement au bout d'un mois est : $p \times 1,12^{\frac{1}{12}} = p \times 1,0095$.

Le placement revient donc à 0,95 % par an.

16.6 Exercice n° 5

Première partie

Le prix d'un objet augmente de 20 % la première année puis de 10 % la deuxième.

Le prix a-t-il augmenté en moyenne de 15 % ?

Soit p le prix initial. On cherche t tel que :

$$p\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = p \times 1,32$$
$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 1,32$$
$$1+\frac{t}{100} = \sqrt{1,32} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{t}{100} = -\sqrt{1,32}$$

On sait que :

$$0 \leq t \leq 100$$

$$0 \leq \frac{t}{100} \leq 1$$

$$1 \leq 1+\frac{t}{100} \leq 2$$

Ainsi :

$$1+\frac{t}{100} = \sqrt{1,32}$$
$$\frac{t}{100} = \sqrt{1,32}-1$$
$$t = \left(\sqrt{1,32}-1\right) \times 100$$

$$t = 14,89$$

Donc, une augmentation de 14,89 % suivie d'une augmentation de 14,89 % revient à une augmentation de 20 % suivie d'une augmentation de 10 %.

Seconde Partie

Le prix d'un objet diminue de 20 % la première année puis de 10 % la deuxième.

Le prix a-t-il diminué en moyenne de 15 % ?
Le prix a-t-il diminué en moyenne de 14,89 % ?

Soit p le prix initial. On cherche t tel que :

$$p\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = p \times 0,72$$

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 0,72$$

$$1+\frac{t}{100} = \sqrt{0,72} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{t}{100} = -\sqrt{0,72}$$

On sait que :

$$0 \leq t \leq 100$$

$$0 \leq \frac{t}{100} \leq 1$$

$$1 \leq 1+\frac{t}{100} \leq 2$$

Ainsi :

$$1+\frac{t}{100} = \sqrt{0,72}$$

$$\frac{t}{100} = \sqrt{0,72}-1$$

$$t = \left(\sqrt{1,32}-1\right) \times 100$$

$$t = -15,15$$

Donc, une diminution de 15,15 % suivie d'une diminution de 15,15 % revient à une diminution de 20 % suivie d'une diminution de 10 %.

17 Fluctuation d'échantillonnage

17.1 Dans les statistiques

On conçoit que si on lance un dé à 6 faces, non truqué, chacun des 6 numéros $1, 2, 3, 4, 5$ et 6, a environ une chance sur 6 de sortir.
Dans cette activité, nous nous proposons de comparer les résultats fournis par plusieurs séries de lancers, puis de voir si, lorsque le nombre de lancers est « grand », la fréquence d'apparition de chacun de ces 6 nombres est approximativement égale à $\frac{1}{6}$.

Première série

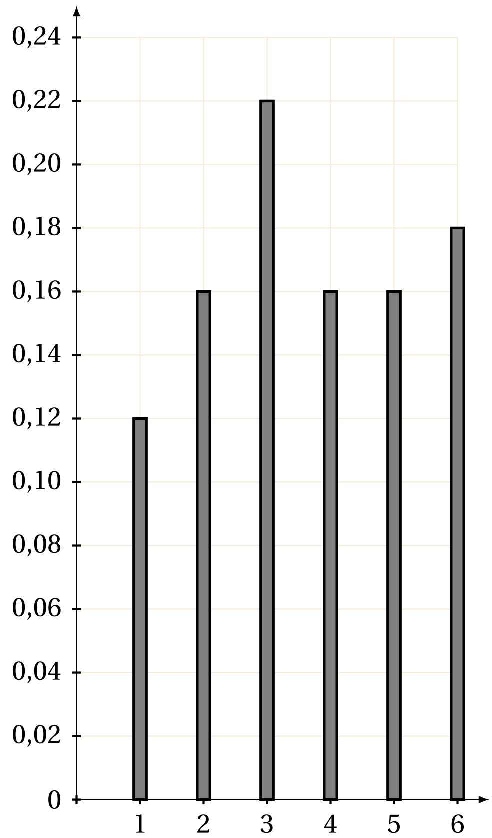
Effectuez 50 lancers d'un dé à 6 faces et remplissez le tableau ci-dessous :

Valeurs	1	2	3	4	5	6	Σ
Effectifs	6	8	11	8	8	9	50
Fréquences	0,12	0,16	0,22	0,16	0,16	0,18	1

Par exemple, si le 1 est sorti 8 fois, on dira que la fréquance est égale à $\frac{8}{50}$, c'est-à-dire 0,16 ou encore, en pourcentage, 16 %.

Construisez le diagramme en bâtons des fréquences. On choisira un centimètre pour 10 % sur l'axe des ordonnées.

Diagramme en bâtons des fréquences



Deuxième série

Effectuez une autre série de 50 lancers, en utilisant votre calculatrice.

Avec la calculatrice, on obtient un nombre aléatoire supérieur ou égal à 0, et strictement inférieur à 1, en appuyant sur les touches suivantes :

* Sur CASIO : (OPT PROB) **Ran#**
* Sur TI : (MATH PRB) **rand** (ou rand0 sur TI 89-90).

Et la partie entière d'un nombre est donnée par la fonction :

* Sur CASIO : (OPT NUM) **Int**
* Sur TI : (MATH NUM) **rint**.

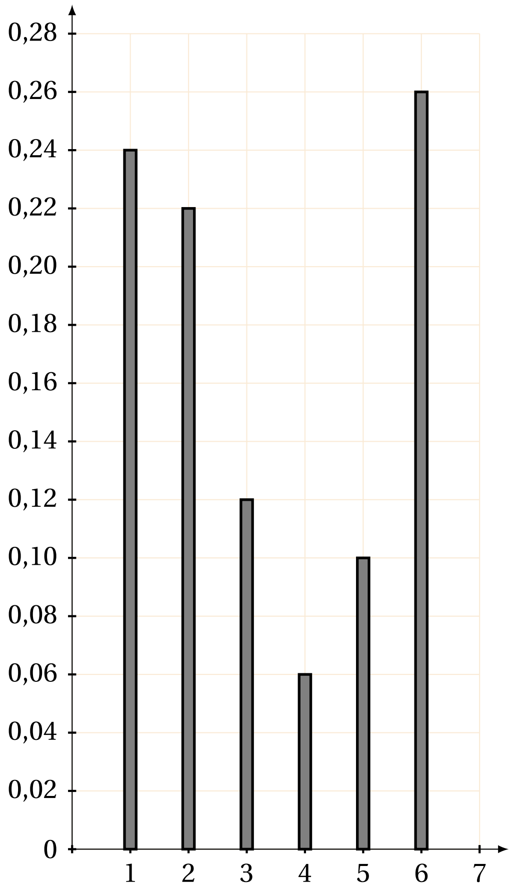
On a ainsi un moyen d'obtenir un nombre aléatoire entier de 1 à 6 avec la calculatrice, en tapant : **Int(6rand) + 1**.

Maintenant, effectuez une série de lancers de dé avec votre calculatrice, et complétez le tableau suivant :

Valeurs	1	2	3	4	5	6	Σ
Effectifs	12	11	6	3	5	13	50
Fréquences	0,24	0,22	0,12	0,06	0,10	0,26	1

Construisez le diagramme en bâtons des fréquences.

Diagramme en bâtons des fréquences

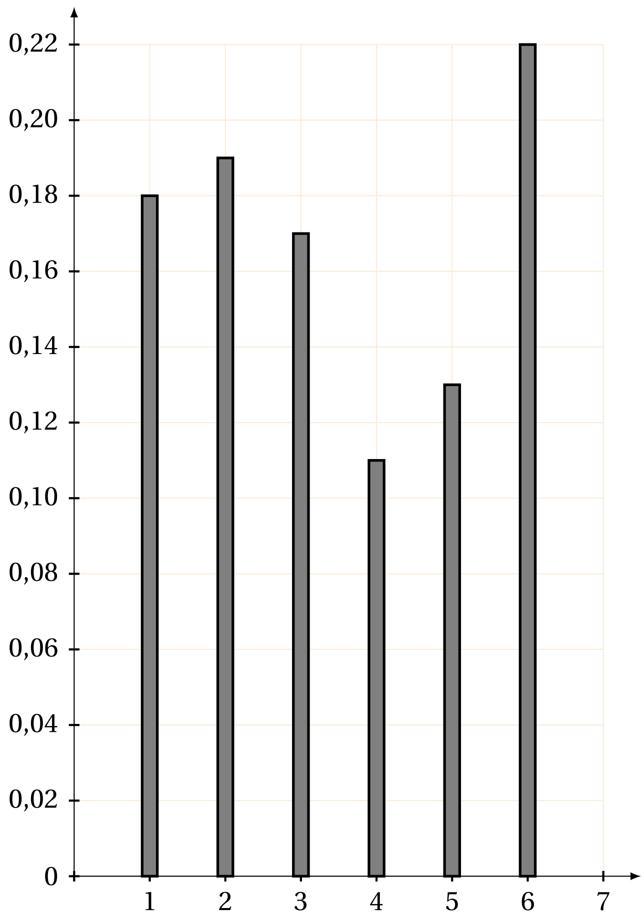


Troisième série

Regroupez les résultats des deux séries de lancers, puis complétez le tableau associé à cette nouvelle série de 100 lancers, puis le diagramme en bâtons associé.

Valeurs	1	2	3	4	5	6	Σ
Effectifs	18	19	17	11	13	22	100
Fréquences	0,18	0,19	0,17	0,11	0,13	0,22	1

Diagramme en bâtons des fréquences



Conclusion

Les fréquences obtenues lors de ce trois séries de lancers sont différentes. Vous observez que pour chacun des nombres la distribution des fréquences **fluctue**.
Ce phénomène est appelé fluctuation d'échantillonnage.

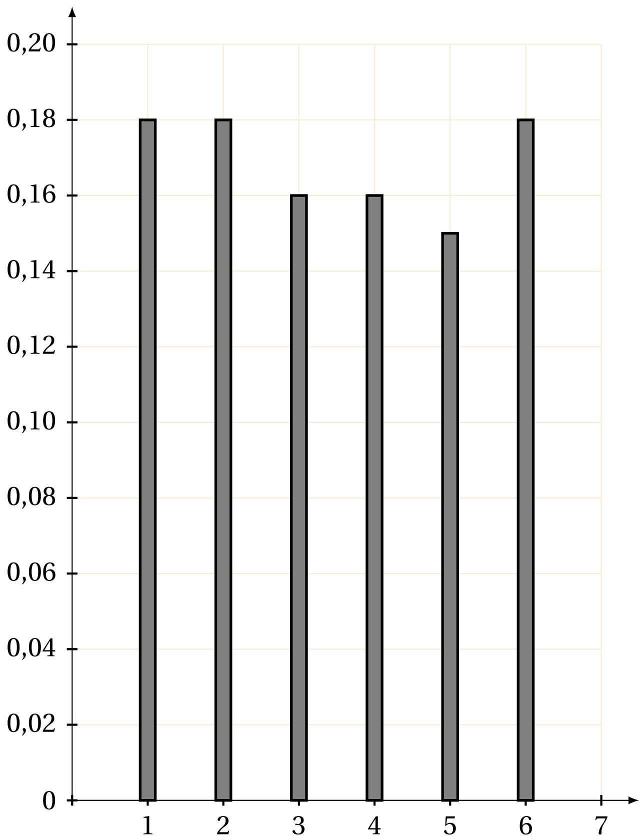
Regroupons les résultats obtenus par groupe de 4 échantillons de la classe :

Valeurs	1	2	3	4	5	6	Σ
Fréquences de l'échantillon 1	140	108	109	118	102	123	700
Fréquences de l'échantillon 2	135	131	106	102	98	128	700
Fréquences de l'échantillon 3	122	131	119	107	103	118	700
Fréquences de l'échantillon 4	119	129	117	109	103	123	700
Totaux	516	499	451	436	406	492	2800
Fréquences	0,18	0,18	0,16	0,16	0,15	0,18	1,01

On constate que $p \approx \dfrac{1}{6} \approx 0,17$.

Remarque : $\Sigma_{f_i} = 1$. Ici, il y a un problème d'arrondi.

Diagramme en bâtons des fréquences



17.2 Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 %

Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est p.
On considère un échantillon de taille n.

Si $0,2 \leq p \leq 0,8$ et si $n \geq 25$, alors dans au moins 95 % des cas,
la fréquence appartient à l'intervalle $\mathrm{I} = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

17.2.1 Exemple n° 1

On considère dans une rivière une population de truites.
La proportion mâles-femelles est de 0,5 pour chaque sexe. On prélève 100 truites.
On constate que la proportion de femelles dans l'échantillon est de 0,64.
Au seuil de 95 %, peut-on suspecter une anomalie ?

On note p la proportion de femelles dans la rivière. $p = 0,5$, on a bien $0,2 \leq p \leq 0,8$.

On note n la taille de l'échantillon prélevé. $n = 100$, et on a bien $n \geq 25$.

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,4$$
$$p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,6$$

Ainsi, $\mathrm{I}\,[0,4; 0,6]$

Donc $f = 0,64$, et $f \notin \mathrm{I}$

La fréquence de 0,64 n'est pas due à une fluctuation. On peut suspecter une anomalie, par exemple une pollution.

N.B. : Le nombre total de truites dans la rivière est inconnu, mais nous est indifférent.

17.2.2 Exemple n° 2

Dans une commune de 50 000 habitants, il y a 25 500 hommes.
Au conseil municipal, composé de 43 élus, il y a 17 femmes.
Au seuil de 95 %, peut-on considérer que la parité hommes / femmes est respectée ?

On note p la proportion de femmes dans la commune. On a $p = \dfrac{25500}{50000} = 0,51$. On a bien $0,2 \leq p \leq 0,8$.

On note n la taille de l'échantillon (conseil municipal). Avec $n = 43$, on a bien $n \geq 25$.

$p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{43}}$
$p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{43}}$
$f = \dfrac{17}{43}$.

On a $0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{43}} \leq \dfrac{17}{48} \leq 0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{43}}$, car :

* $\left(0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{43}}\right) - \dfrac{17}{43} > 0$
* $\left(0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{43}}\right) - \dfrac{17}{43} < 0$

Ainsi, On a $0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{43}} \leq f \leq 0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{43}}$.

Au seuil de 95 %, on peut considérer qu'une fréquence égale à $\dfrac{17}{43}$ est due à une fluctuation d'échantillonnage. La parité au conseil général est donc respectée.

17.2.3 Exemple n^o 3

Lors d'une élection, un sondage portant sur 1 000 personnes donne 400 votants pour le candidat A. Avec un risque d'erreur de 5 %, quelles informations peut-on obtenir sur la proportion réelle de votants pour A ?

Cette fois, on cherche p.

On a $n = 1000$, avec $n \geq 25$.

$f = \dfrac{400}{1000} = 0,4$

On doit avoir $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{array}{ll} p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f & p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq f \\ p \leq f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} & p \geq f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Donc $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi : $0,4 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \leq p \leq 0,4 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

$0,4 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,3684$

$0,4 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,4316$

$0,3683 \leq p \leq 0,4316$

A va obtenir entre 37 % et 43 % des voies. Il ne sera donc pas élu.

17.2.4 Exemple n° 4

Lors d'une élection, un sondage portant sur 900 personnes donne 459 votants pour le candidat A. Avec un risque d'erreur de 5 %, quelles informations peut-on obtenir sur la proportions réelle de votants pour A ?

On cherche p.

On a $n = 900$, avec $n \geq 25$.

$f = \dfrac{459}{900} = 0,51$

On doit avoir $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{array}{ll} p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f & p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq f \\ p \leq f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} & p \geq f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Donc $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi : $0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{900}} \leq p \leq 0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{900}}$

$0,51 - \dfrac{1}{\sqrt{900}} \approx 0,4767$

$0,51 + \dfrac{1}{\sqrt{900}} \approx 0,5433$

$0,0,4767 \leq p \leq 0,5433$

A va obtenir entre 47 % et 54 % des voies. On ne peut pas savoir si A sera élu.

18 Géométrie spatiale

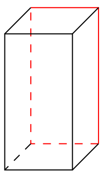
18.1 Règles de la perspective cavalière

* Une droite de l'espace est représentée par une droite.
* Deux droites parallèles de l'espace sont représentées par deux droites parallèles.
* Le milieu d'un segment de l'espace est représenté au milieu du segment.
* Les éléments visibles sont dessinés en trains pleins et les éléments cachés en pointillés.
* Dans un plan vu de face, les éléments sont représentés en vraie grandeur.

18.2 Les solides usuels

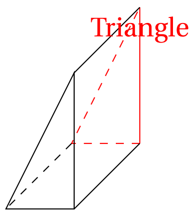
18.2.1 Les solides droits.

Le pavé droit

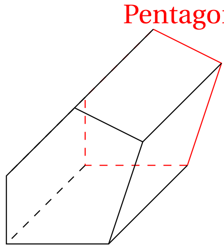


Les prismes

Ex_1

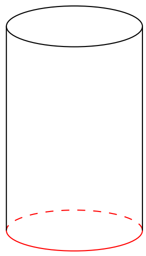


Ex_2



La base est un polygone

Le cylindre



La base est un disque

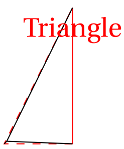
$V = \beta \times h.$

β = Aire de la base

h = hauteur

18.2.2 Les pyramides et les cônes

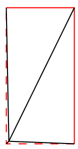
Le tétraèdre



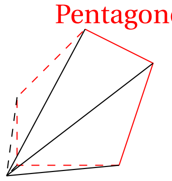
$V = \frac{1}{3}\beta \times h$

Les pyramides

Ex_1

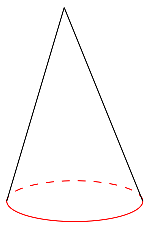


Ex_2



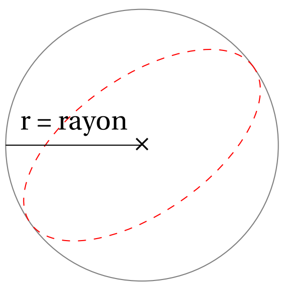
La base est un polygone

Le cylindre



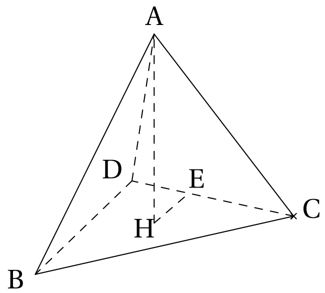
La base est un disque

18.2.3 La sphère



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

18.3 Exercice



Soit ABCD un tétraèdre régulier. Les quatres faces sont des triangles équilatéraux. On a AB = BC = CA = AD = DC = BD = a.

H est le pied de la hauteur issue de A. H est ainsi le centre de gravité du triangle BCD car BCD est un triangle équilatéral.

E est le point d'intersection de (BH) et de (CD). E est le milieu de [CD] car (BH) est une médiane du triangle BCD. Le triangle BEC est rectangle en E car (BH) est aussi une hauteur du triangle BCD.

Théorème de Pythagore dans le triangle BEC rectangle en E

$\mathrm{BE}^2 + \mathrm{EC}^2 = \mathrm{BC}^2$

$\mathrm{BE}^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$

$\mathrm{BE}^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$

$\mathrm{BE}^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$\mathrm{BE}^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\mathrm{BE} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

D'autre part, $\mathrm{BH} = \frac{2}{3}\mathrm{BE}$, d'où $\mathrm{BH} = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\mathrm{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Le triangle AHB est rectangle en H

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

$AH^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$

$AH^2 + \dfrac{a^2}{3} = a^2$

$AH^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3}$

$AH^2 = \dfrac{2}{3}a^2$

$AH = \sqrt{\dfrac{2a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Aire de la base = aire du triangle BCD

$\beta = \dfrac{1}{2}CD \times BE$

$\beta = \dfrac{1}{2}a \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\beta = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Soit V le volume de ABCD. On a $h = AH$ et β = aire de BCD.

$V = \dfrac{1}{3}\beta \times h$

$V = \dfrac{1}{3} \times a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = a^3 \times \dfrac{\sqrt{18}}{36}$

$V = a^3\dfrac{3\sqrt{2}}{36}$

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

18.4 Calcul du nombre d'arêtes d'un solide convexe

Euler a établi que tous les solides convexes vérifient la formule : S + F − A = 2.

Ballon de football

12 pentagones et 20 hexagones réguliers.

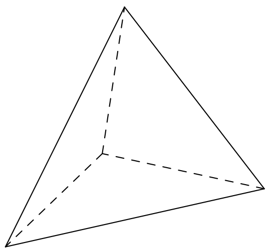
* S = 60 (12 × 5)
* F = 32 (20 + 12)
* A = 90

18.5 Les solides de Platon

Il existe cinq polyèdres réguliers convexes inscriptibles dans une sphère.

18.5.1 Tétraèdre

Quatre triangles équilatéraux.



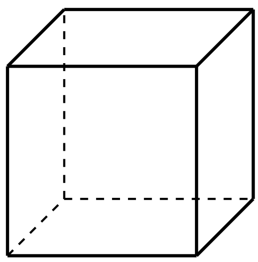
* S = 4
* F = 4
* A = 6

Il représentait l'élément feu.

18.5.2 Cube

Six carrés.

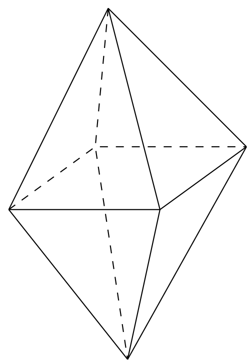
* S = 8
* F = 6
* A = 12



Il représentait l'élément terre.

18.5.3 Octaèdre

Huit triangles équilatéraux.



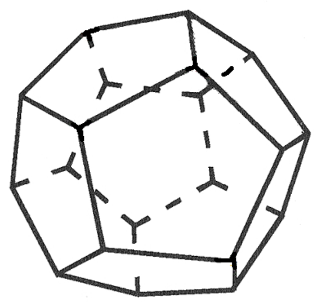
* S = 6
* F = 8
* A = 12

Il représentait l’élément air.

18.5.4 Dodécaèdre

12 pentagones réguliers.

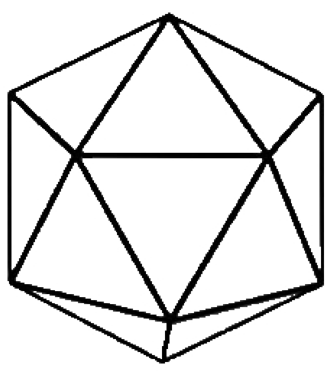
* S = 20
* F = 12
* A = 30



Il représentait l’univers.

18.5.5 Icosaèdre

30 triangles équilatéraux.



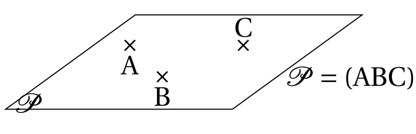
* S = 12
* F = 20
* A = 30

Il représentait l’eau.

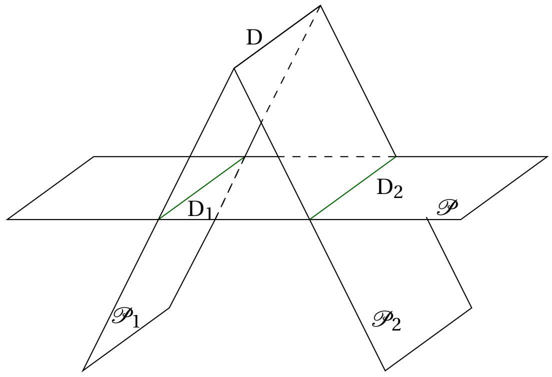
18.6 Détermination d’un plan

18.6.1 Axiome n° 1

Il existe un plan P et un seul, passant par 3 points A, B et C non-alignés.



Théorème du toit

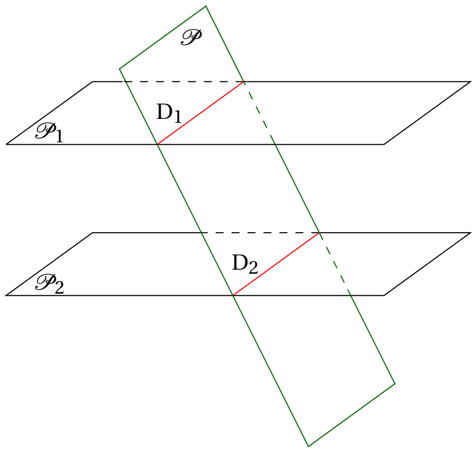


On a : $D_1 // D_2$. $D_1 \subset P_1$ et $D_2 \subset P_2$.
P_1 et P_2 sont sécants suivants D, donc D est parralèle à D_1 et D_2.

18.8.2 Plans parallèles

Propriété n°1 : Si un plan contient deux droites D_1 et D_2 sécantes et parallèles à un plan P', alors P est parallèle à P'.

Propriété n°2 :



Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan P sécant à P_1 est sécant à P_2 et les droites d'intersection D_1 et D_2 sont parallèles.

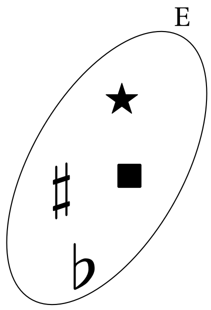
19 Probabilités

19.1 Ensembles finis

19.1.1 Définitions

* Soit E un ensemble.
  E est un ensemble fini si et seulement si E est vide, ou si E est constitué d'un nombre défini d'éléments.
* Soit E un ensemble fini non vide. On appelle <u>cardinal de E</u> et on note Card E le nombre d'éléments de E.

Exemple



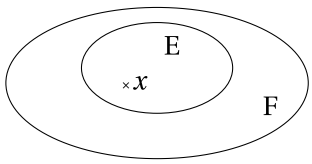
Card E = 4

On complète la définition en posant : Card $\varnothing = 0$.

19.1.2 Propriétés

Soient E et F deux ensembles finis.

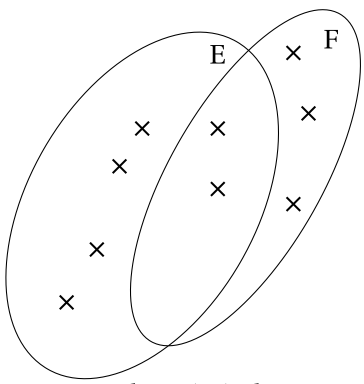
a)



* $\forall x \in \mathrm{E}$, $x \in \mathrm{F}$.
* $\exists x \in \mathrm{F}$ tel que $x \notin \mathrm{E}$

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, alors Card E $\leq$ Card F.

b)



On a : Card E = 6 et Card F = 5.

Card $(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = 9$.

Card $(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = 2$.

Plus généralement, Card $(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$ = Card E + Card F − Card $(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$.

c) On a : $E = \left\{A; B; C\right\}$ et $F = \left\{1; 2\right\}$. Donc Card E = 3 et Card F = 2.

Ainsi, $E \times F = \left\{ (a;1)\,(a;2)\,(b;1)\,(b;2)\,(c;1)\,(c;2) \right\}$, et Card $(E \times F) = 6$.

Donc, Card $(E \times F) = (\text{Card } E)\,(\text{Card } F)$.

19.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini. On donne Card E = n.
Soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemples :

* $E = \varnothing$. Donc CardE = 0
  On a $\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing\right\}$, et Card$\mathscr{P}(E) = 1 = 2^0$
* $E = \left\{a\right\}$. Donc CardE = 1
  On a $\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing; \{a\}\right\}$, et Card$\mathscr{P}(E) = 2 = 2^1$
* $E = \left\{a, b\right\}$. Donc CardE = 2
  On a $\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing; \{a\}\{b\}\{a,b\}\right\}$, et Card$\mathscr{P}(E) = 4 = 2^2$
* $E = \left\{a, b, c\right\}$. Donc CardE = 3
  On a $\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing\{a\}\{b\}\{c\}\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\}\right\}$, et Card$\mathscr{P}(E) = 8 = 2^3$

D'une manière générale :
Soit E un ensemble fini tel que CardE = n, on a $\mathscr{P}(E) = 2^n$.

Exercice
Soit une assemblée de 10 personnes.
Combien de délégations constituées d'au moins 2 personnes peut-on constituer ?

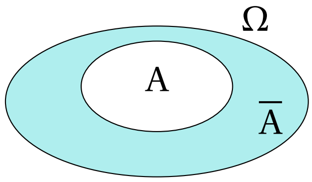
$N = 2^{10} - 1 - 10 = 1013$

19.2 Vocabulaire des probabilités

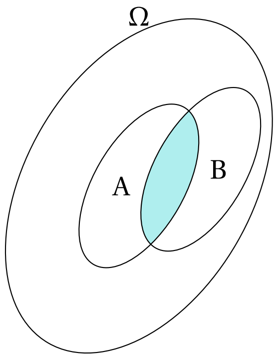
Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire statistique	Vocabulaire probabiliste
Ensemble E	Population	Univers Ω.
Element x, avec $x \in \mathrm{E}$	Individu	Eventualité ou cas possible. Un univers est constitué d'éventualités.
Sous-ensemble A, avec $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$	Echantillon	Évènement $\mathrm{A} \subset \Omega$.
Partie vide	$\times$	Événement impossible
Partie pleine	$\times$	Événement certain
Singleton	$\times$	Événement élémentaire

Soit Ω un univers.
Soient A et B deux événements de Ω.

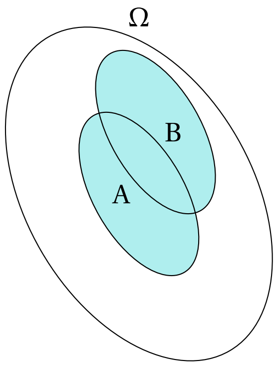
1. $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement contraire de A.
$x \in \overline{\mathrm{A}} \Longleftrightarrow x \notin \mathrm{A}$.



2. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement intersection de A et de B.
$x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Longleftrightarrow x \in \mathrm{A}$ **et** $x \in \mathrm{B}$.



3. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est l'événement réunion de A et de B.
$x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Longleftrightarrow x \in \mathrm{A}$ **ou** $x \in \mathrm{B}$.



19.3 Lois de De Morgan

On jette un dé non pipé.

Univers $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$.

Événement A : « Le résultat est pair » $A = \left\{2, 4, 6\right\}$.

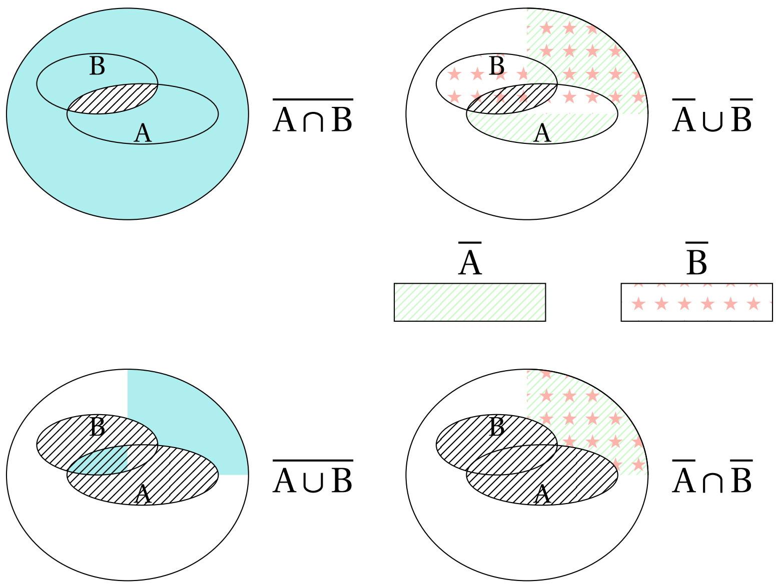
Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 » $B = \left\{3, 4, 5, 6\right\}$

On a :

* $\overline{A} = \left\{1, 3, 5\right\}$
* $\overline{B} = \left\{1, 2\right\}$
* $A \cap B = \left\{4, 6\right\}$
* $A \cup B = \left\{2, 3, 4, 5, 6\right\}$
* $\overline{A \cap B} = \left\{1, 2, 3, 5\right\}$
* $\overline{A \cup B} = \left\{1\right\}$
* $\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{1\right\}$
* $\overline{A} \cup \overline{B} = \left\{1, 2, 3, 5\right\}$

On constate que :

* $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
* $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$



19.4 Probabilité et espace probabilisé fini

19.4.1 Définition

Soit Ω un univers.
On appelle probabilité sur Ω toute fonction $p : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & p(\mathrm{A}) \end{array}$

telle que :

Premier axiome : La probabilité de l'événement certain est égale à 1 : $p(\Omega) = 1$.

Deuxième axiome : Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $p(\mathrm{A}) \geq 0$.

Troisième axiome : Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\Omega)$,
si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, c'est-à-dire si A et B sont incompatibles, alors $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + (\mathrm{B})$.

19.4.2 Théorèmes fondamentaux

Soit Ω un univers. Soit p une probabilité définie sur Ω.

* Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - p(\mathrm{A})$.
  En particulier, $p(\varnothing) = p\left(\overline{\Omega}\right) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
  La probabilité de l'évènement impossible est donc nulle.

* Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\Omega)$:
  Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $p(\mathrm{A}) \leq p(\mathrm{B})$.
  Ainsi, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a : $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$.

* Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

19.4.3 Récapitulation

* $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$.

* $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$

* $p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - p(\mathrm{A})$

* $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{B}) - p\left(\mathrm{A}cap\mathrm{B}\right)$.

Enfin, on appelle espace probabilisé fini tout univers dans lequel on a défini une probabilité.

19.5 Espace probabilisé fini dans lequel les événements sont équiprobables

Soit Ω un univers tel que $\text{card}\,\Omega = n$.

$\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\right\}$

On suppose que $p\left(\left\{\omega_1\right\}\right) = p\left(\left\{\omega_2\right\}\right) = p\left(\left\{\omega_3\right\}\right) = ... = p\left(\left\{\omega_n\right\}\right) = p_0$.

On a aussi : $\Omega = \left\{\omega_1\right\} \cup \left\{\omega_2\right\} \cup \left\{\omega_3\right\} \cup ... \cup \left\{\omega_n\right\}$

Les événements élémentaires distincts sont incompatibles.
D'où : $p(\Omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + ... + p(\omega_n)$.

$p(\Omega) = p_0 + p_0 + p_0 + ... + p_0$

$p(\Omega) = np_0$

Or, on sait que : $p(\Omega) = 1$.

Donc $np_0 = 1$

et $p_0 = \dfrac{1}{n}$.

Soit A un événement quelconque non impossible, tel que $\text{card}\,A = k$ avec $k \leq n$.

$A = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_k\right\}$

$p(A) = kp_0$

$p(A) = \dfrac{k}{n}$

Soit Ω un univers dans lequel les événements élémentaires sont équiprobables. Soit A un événement quelconque tel que $\text{card}\,A = k$

$p(A) = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}$

Et si $A = \varnothing$?

$p(A) = p(\varnothing) = 0$

$\dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{\text{card}\,\varnothing}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{0}{n} = 0$

19.6 Exemples

19.6.1 Exemple n° 1

Soit un jeu de 52 cartes. On tire une carte.
Événement A : « On tire un pique. »
Événement B : « On tire une carte rouge. »
Événement C : « On tire une figure. »

Ω = ensemble des 52 cartes du jeu. Donc card $\Omega = 52$.

* A = ensemble des piques, et card A = 13
  $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{card A}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$
* B = ensemble des cartes rouges, et card B = 26
  $p(\mathrm{B}) = \dfrac{\text{card B}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$
* C = ensemble des figures, et card C = 12
  $p(\mathrm{C}) = \dfrac{\text{card C}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$
* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ = ensemble des piques rouges, et card $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$
  $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ car A et B sont incompatibles.
* $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ = ensemble des figures de piques, et card $(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = 3$
  $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{\text{card } (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{\text{card } \Omega} = \dfrac{3}{52}$
* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ = ensemble des piques ou des cartes rouges
  $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$ car A et B sont incompatibles.
  $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$
* $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ = ensembles des piques ou des figues ou les deux.
  $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$
  $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{13} - \dfrac{3}{52} = \dfrac{11}{26}$

Soit un événement E : « On tire ni un pique ni une carte rouge. »
Ainsi, la probabilité de tirer un trèfle est $p(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{4}$.
Autre méthode : $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$.
$p(\mathrm{E}) = p\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$
$p(\mathrm{E}) = 1 - \dfrac{3}{4}$
$p(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{4}$

Soit un événement F : « On tire ni un pique ni une figure. »
$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{C}}$.
$p(\mathrm{F}) = p\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{C}}\right) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$
$p(\mathrm{F}) = 1 - \dfrac{11}{26}$
$p(\mathrm{F}) = \dfrac{15}{26}$

19.6.2 Exercice n° 2

Première partie

On jette un dé non pipé.
Soit un événement A : « Le résultat est pair. »

$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$, avec card$\Omega = 6$.

$A = \left\{2, 4, 6\right\}$ et card $A = 3$.

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Deuxième partie

On jette 2 dés non pipés.
Soit un événement B : « La sommes des résultats est supérieure ou égale à 10. »

$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\} \times \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$, avec card $\Omega = 6 \times 6 = 36$.

$B = \left\{(4, 6)\,(5, 6)\,(5, 5)\,(5, 6)\,(6, 5)\,(6, 4)\right\}$, avec card $B = 6$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Troisième partie

On jette 3 dés non pipés.
Soit un événement C : « On fait 421. »

$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\} \times \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\} \times \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$,
avec card $\Omega = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

$C = \left\{(4, 2, 1)\,(4, 1, 2)\,(2, 4, 1)\,(2, 1, 4)\,(1, 4, 2)\,(1, 2, 4)\right\}$, avec card $C = 6$

$$p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

19.6.3 Amusette n° 1

On jette deux dés non pipés. On s'intéresse à la sommes des résultats, et on appelle A cette somme. Quelle est l'événement qui a la probabilité la plus élevée ?

* $p\,(\mathrm{A}=1)=0$
* $p\,(\mathrm{A}=2)=\dfrac{1}{36}$
* $p\,(\mathrm{A}=3)=\dfrac{1}{18}$
* $p\,(\mathrm{A}=4)=\dfrac{1}{12}$
* $p\,(\mathrm{A}=5)=\dfrac{1}{9}$
* $p\,(\mathrm{A}=6)=\dfrac{5}{36}$
* $p\,(\mathrm{A}=7)=\dfrac{1}{6}$
* $p\,(\mathrm{A}=8)=\dfrac{5}{36}$
* $p\,(\mathrm{A}=9)=\dfrac{1}{9}$
* $p\,(\mathrm{A}=10)=\dfrac{1}{12}$
* $p\,(\mathrm{A}=11)=\dfrac{1}{18}$
* $p\,(\mathrm{A}=12)=\dfrac{1}{36}$

L'événement $\mathrm{A}=7$ a donc la probabilité la plus élevée.

Remarque : La somme des probabilités est bien égale à 1.

19.6.4 Amusette n° 2

On jette un dé pipé.
Les nombres 1,2,3,4, et 5 ont la même probabilité de sortie, mais la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 3 fois la probabilité d'obtenir un 1.

Déterminer la probabilité de sortie de chaque nombre.

$p\,(\mathrm{X}=1) = p\,(\mathrm{X}=2) = p\,(\mathrm{X}=3) = p\,(\mathrm{X}=4) = p\,(\mathrm{X}=5) = p_0$

$p\,(\mathrm{X}=6) = 3p\,(\mathrm{X}=1) = 3p_0$

On a $p\,(\mathrm{X}=1) + p\,(\mathrm{X}=2) + p\,(\mathrm{X}=3) + p\,(\mathrm{X}=4) + p\,(\mathrm{X}=5) + p\,(\mathrm{X}=6) = 1$

$p_0 + p_0 + p_0 + p_0 + p_0 + 3p_0 = 1$

$5p_0 + 3p_0 = 1$

$8p_0 = 1$

$p_0 = \dfrac{1}{8}$

Donc :

* $p\,(\mathrm{X}=1) = \dfrac{1}{8}$
* $p\,(\mathrm{X}=2) = \dfrac{1}{8}$
* $p\,(\mathrm{X}=3) = \dfrac{1}{8}$
* $p\,(\mathrm{X}=4) = \dfrac{1}{8}$
* $p\,(\mathrm{X}=5) = \dfrac{1}{8}$
* $p\,(\mathrm{X}=6) = \dfrac{3}{8}$

19.6.5 Exercice n° 3

Soit une urne contenant deux boules rouges et trois boules blanches.

Première partie

Soit un événement A : « On tire une boule rouge. »

Quelle est la probabilité de A ?

$\Omega = \left\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3\right\}$, et card $\Omega = 5$

$A = \left\{R_1, R_2\right\}$, et card $A = 2$

$p\left(A\right) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{2}{5}$

Deuxième partie

On tire deux boules simultanément.
Soit un événement A : « On tire deux boules rouges. »
Soit un événement B : « On tire une boule rouge et une boules blanche. »
Soit un événement C : « On tire deux boules blanches. »

$\Omega = \left\{\left\{R_1, R_2\right\}\left\{R_1, B_1\right\}\left\{R_1, B_2\right\}\left\{R_1, B_3\right\}\left\{R_2, B_1\right\}\left\{R_2, B_2\right\}\left\{R_2, B_3\right\}\left\{B_1, B_2\right\}\left\{B_1, B_3\right\}\left\{B_2, B_3\right\}\right\}$, card $\Omega = 10$.

Remarque : Ω est un ensemble de paires de boules.

$A = \left\{\left\{R_1, R_2\right\}\right\}$, et card $A = 1$

$p\left(A\right) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{1}{10}$

$B = \left\{\left\{R_1, B_1\right\}\left\{R_1, B_2\right\}\left\{R_1, B_3\right\}\left\{R_2, B_1\right\}\left\{R_2, B_2\right\}\left\{R_2, B_3\right\}\right\}$, et card $B = 6$

$p\left(A\right) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$B = \left\{\left\{B_1, B_2\right\}\left\{B_1, B_3\right\}\left\{B_2, B_3\right\}\right\}$, et card $C = 3$

$p\left(A\right) = \dfrac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \dfrac{3}{10}$

On vérifie que $p\left(A\right) + p\left(B\right) + p\left(C\right) = 1$

On a bien $\dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$

19.6.6 Exercice n° 4

Soit un jeu de 52 cartes.

Première partie

On tire successivement deux cartes avec remise.

Ω = ensemble des 52 cartes × ensemble des 52 cartes, avec card $\Omega = 52 \times 52 = 2704$

* Soit un événement A : « On tire deux piques. »
* Soit un événement B : « On ne tire pas de pique. »
* Soit un événement C : « On tire au moins un pique. »
* Soit un événement D : « On tire un pique et un seul. »

A = ensemble des 13 piques × ensemble des 13 piques, et card A = 13 × 13 = 169

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{card A}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{169}{2704} = \frac{1}{16}$$

B = ensemble des 39 cartes non-piques × ensemble des 39 cartes non-piques,
et card B = 39 × 39 = 1521

$$p(\mathrm{B}) = \frac{\text{card B}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1521}{2704} = \frac{9}{16}$$

$\mathrm{C} = \overline{\mathrm{B}}$

$$p(\mathrm{C}) = p\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{B}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$\mathrm{D} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$

$$p(\mathrm{D}) = p\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Or, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$ car A et B sont incompatibles.

Ainsi $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

Et $p(\mathrm{D}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

On vérifie que (A) + (D) + (B) = 1 (ensemble des cas possibles).
On constate d'ailleurs que (A) + (B) + (C) + (D) $\neq$ 1.

Seconde partie
On tire successivement deux cartes sans remise.

Ω = ensemble des 52 cartes × ensemble des 51 cartes restantes, avec card $\Omega = 52 \times 51 = 2652$.

A = ensemble des 13 piques × ensemble des 12 piques restants, et card $\mathrm{A} = 13 \times 12 = 156$

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{card A}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{156}{2652} = \frac{1}{17}$$

B = ensemble des 39 cartes non-piques × ensemble des 38 cartes non-piques restantes, et card B = $39 \times 38 = 1482$

$$p(\mathrm{B}) = \frac{\text{card B}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1482}{2652} = \frac{19}{34}$$

$\mathrm{C} = \overline{\mathrm{B}}$

$$p(\mathrm{C}) = p\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{B}) = 1 - \frac{19}{34} = \frac{15}{34}$$

$\mathrm{D} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$

$$p(\mathrm{D}) = p\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Or, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$ car A et B sont incompatibles.

Ainsi $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{1}{17} + \frac{19}{34} = \frac{21}{34}$

Et $p(\mathrm{D}) = 1 - \frac{21}{34} = \frac{13}{34}$

On vérifie que $(\mathrm{A}) + (\mathrm{D}) + (\mathrm{B}) = 1$ (ensemble des cas possibles). On constate d'ailleurs que $(\mathrm{A}) + (\mathrm{B}) + (\mathrm{C}) + (\mathrm{D}) \neq 1$.

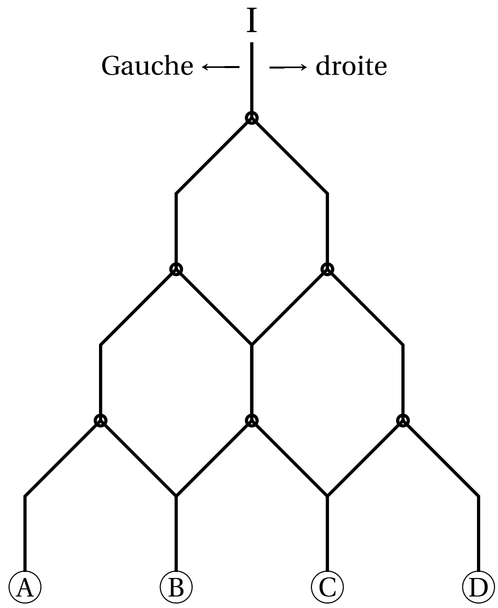
19.7 Événements indépendants

Soit Ω un univers.
Soit p une probabilité définie sur Ω.
Soient A et B deux événements sur Ω.

A et B sont indépendants $\iff p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

Attention à ne pas confondre « indépendants » et « incompatibles ».

19.7.1 Exercice : Le Pachinko



La probabilité pour une boule lâchée en I de prendre la direction « gauche » à une intersection est de $\dfrac{1}{3}$. Les événements successifs sont indépendants.

Soit G_i l'événement : « La boule prend la direction gauche à la $i^{\text{ème}}$ intersection. »
$p(\mathrm{G}_1) = p(\mathrm{G}_2) = p(\mathrm{G}_3) = p(\mathrm{G}_4) = p(\mathrm{G}_5) = p(\mathrm{G}_6) = p(\mathrm{G}) = \dfrac{1}{3}$.

$$p\left(\overline{\mathrm{G}}\right) = 1 - p(\mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Soit un événement A : « La boule arrive en A. »

$$\mathrm{A} = \mathrm{G} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{G}$$

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{G} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{G}) = p(\mathrm{G}) \times p(\mathrm{G}) \times p(\mathrm{G}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Soit un événement B : « La boule arrive en B. »

$$B=\left(G\cap G\cap\overline{G}\right)\cup\left(G\cap\overline{G}\cap G\right)\cup\left(\overline{G}\cap G\cap G\right)$$

Ces trois éléments sont incompatibles deux à deux.

$$p(B)=p\left[\left(G\cap G\cap\overline{G}\right)\cup\left(G\cap\overline{G}\cap G\right)\cup\left(\overline{G}\cap G\cap G\right)\right]$$

$$p(B)=p\left(G\cap G\cap\overline{G}\right)+p\left(G\cap\overline{G}\cap G\right)+p\left(\overline{G}\cap G\cap G\right)$$

$$p(B)=p(G)\times p(G)\times p\left(\overline{G}\right)+p(G)\times p\left(\overline{G}\right)\times p(G)+p\left(\overline{G}\right)\times p(G)\times p(G)$$

$$p(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$p(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}$$

$$p(B)=3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}$$

$$p(B)=\frac{2}{9}$$

Soit un événement C : « La boule arrive en C. »

$$C=\left(\overline{G}\cap\overline{G}\cap G\right)\cup\left(\overline{G}\cap G\cap\overline{G}\right)\cup\left(G\cap\overline{G}\cap\overline{G}\right)$$

Ces trois éléments sont incompatibles deux à deux.

$$p(C)=p\left[\left(\overline{G}\cap\overline{G}\cap G\right)\cup\left(\overline{G}\cap G\cap\overline{G}\right)\cup\left(G\cap\overline{G}\cap\overline{G}\right)\right]$$

$$p(C)=p\left(\overline{G}\cap\overline{G}\cap G\right)+p\left(\overline{G}\cap G\cap\overline{G}\right)+p\left(G\cap\overline{G}\cap\overline{G}\right)$$

$$p(C)=p\left(\overline{G}\right)\times p\left(\overline{G}\right)\times p(G)+p\left(\overline{G}\right)\times p(G)\times p\left(\overline{G}\right)+p(G)\times p\left(\overline{G}\right)\times p\left(\overline{G}\right)$$

$$p(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$p(C)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$$

$$p(C)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$$

$$p(C)=\frac{4}{9}$$

Soit un événement D : « La boule arrive en D. »

$$D=\overline{G}\cap\overline{G}\cap\overline{G}$$

$$p(D)=p\left(\overline{G}\cap\overline{G}\cap\overline{G}\right)=p\left(\overline{G}\right)\times p\left(\overline{G}\right)\times p\left(\overline{G}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

On vérifie que $p(A)+p(B)+p(C)+p(D)=1$.

19.8 Épreuves répétées

On considère une expérience n'admettant que deux résultats possibles, appelés « succès » ou « échec » et notés respectivement S et $\overline{S}$.

19.8.1 Épreuve de Bernoulli

On répète l'épreuve dans des conditions identiques, les résultats successifs étant indépendants les uns des autres.

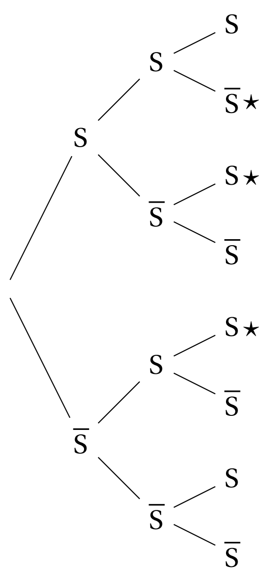
19.8.2 Schéma de Bernoulli

Exemple
On jette un dé non-pipé.
Soit un événement S : « On obtient un 6. » $p\,(S) = \dfrac{1}{6}$.

Épreuve de Bernoulli : On jette le dé trois fois de suite.

Schéma de Bernoulli : Soit un événement A : « On obtient exactement deux fois 6 au cours des trois jets. »

Quelle est la probabilité de A ?



$$S\cap S\cap S \quad p(S)\times p(S)\times p(S) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$S\cap S\cap \overline{S} \quad p(S)\times p(S)\times p(\overline{S}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}$$

$$S\cap \overline{S}\cap S \quad p(S)\times p(\overline{S})\times p(S) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}$$

$$S\cap \overline{S}\cap \overline{S} \quad p(S)\times p(\overline{S})\times p(\overline{S}) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\overline{S}\cap S\cap S \quad p(\overline{S})\times p(S)\times p(S) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}$$

$$\overline{S}\cap S\cap \overline{S} \quad p(\overline{S})\times p(S)\times p(\overline{S}) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\overline{S}\cap \overline{S}\cap S \quad p(\overline{S})\times p(\overline{S})\times p(S) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\overline{S}\cap \overline{S}\cap \overline{S} \quad p(\overline{S})\times p(\overline{S})\times p(\overline{S}) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$\mathrm{A} = \left(\mathrm{S} \cap \mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}}\right) \cup \left(\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S}\right) \cup \left(\overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\right)$.

Ces trois événements sont incompatibles deux à deux.

$p(\mathrm{A}) = p\left[\left(\mathrm{S} \cap \mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}}\right) \cup \left(\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S}\right) \cup \left(\overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\right)\right]$

$p(\mathrm{A}) = p\left(\mathrm{S} \cap \mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}}\right) + p\left(\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S}\right) + p\left(\overline{\mathrm{S}} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\right)$

$p(\mathrm{A}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$p(\mathrm{A}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$

$p(\mathrm{A}) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$

$p(\mathrm{A}) = \frac{5}{72}$

19.8.3 Généralistation

Soit une épreuve de Bernoulli, avec p la probabilité de succès de l'épreuve.

On répète l'épreuve n fois dans des conditions identiques.
Les résultats étant indépendants les uns des autres.

Schéma de Bernoulli de paramètre n et p : $\mathscr{B}\left(\mathbf{n}, \mathbf{p}\right)$

Soit A l'événement « On obtient exactement k succès. » est donnée par la formule :

$p(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$ avec le nombre de manières d'obtenir k succès dans n épreuves.

Remarque : On a $0 \leq k \leq n$.

Exemples :
$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$. Il y a 4 façons d'obtenir trois succès quand l'épreuve est répétée quatre fois :

$\mathrm{S\,S\,S\,\overline{S}}$
$\mathrm{S\,S\,\overline{S}\,S}$
$\mathrm{S\,\overline{S}\,S\,S}$
$\mathrm{\overline{S}\,S\,S\,S}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$. Il y a 6 façons d'obtenir deux succès quand l'épreuve est répétée quatre fois :

$\mathrm{S\,S\,\overline{S}\,\overline{S}}$
$\mathrm{S\,\overline{S}\,S\overline{S}}$
$\mathrm{\overline{S}\,S\,S\overline{S}}$
$\mathrm{S\,\overline{S}\,\overline{S}\,S}$
$\mathrm{\overline{S}\,S\,\overline{S}\,S}$
$\mathrm{\overline{S}\,\overline{S}\,S\,S}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$. Il y a 10 façons d'obtenir trois succès quand l'épreuve est répétée cinq fois :

$\mathrm{S\ S\ S\ \overline{S}\ \overline{S}}$
$\mathrm{S\ S\overline{S}\ S\ \overline{S}}$
$\mathrm{S\ \overline{S}\ S\ S\ \overline{S}}$
$\mathrm{\overline{S}\ S\ S\ S\overline{S}}$
$\mathrm{S\ S\ \overline{S}\ \overline{S}\ S}$
$\mathrm{S\ \overline{S}\ S\ \overline{S}\ S}$
$\mathrm{\overline{S}\ S\ S\ \overline{S}\ S}$
$\mathrm{S\ \overline{S}\ \overline{S}\ S\ S}$
$\mathrm{\overline{S}\ S\ \overline{S}\ S\ S}$
$\mathrm{\overline{S}\ \overline{S}\ S\ S\ S}$

19.8.4 Triangle de Pascal

$a+b$	1 1	$n=1$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1 2 1	$n=2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1	$n=3$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1	$n=4$
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1	$n=5$
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$	1 6 15 20 15 6 1	$n=6$

Calculatrice :	3	combinaison	2
	4	combinaison	2
	4	combinaison	3
	5	combinaison	3

19.8.5 Amusette

Il naît 1044 garçons pour 1000 filles.
Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 garçons pout 5 familles de 5 enfants ?

Épreuve de Bernoulli : Faire un enfant.

Succès : « Avoir un garçon. » $p = \dfrac{1044}{2044} = \dfrac{261}{511}$

On répète l'épreuve 5 fois.

Schéma de Bernoulli de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{1044}{2044}$

Soit un événement A : « On obtient exactement trois garçons. »

$$p\,(\mathrm{X}=3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{261}{511}\right)^3 \left(\frac{1000}{2044}\right)^2$$

$$p\,(\mathrm{X}=3) = 10 \times \left(\frac{261}{511}\right)^3 \left(\frac{1000}{2044}\right)^2$$

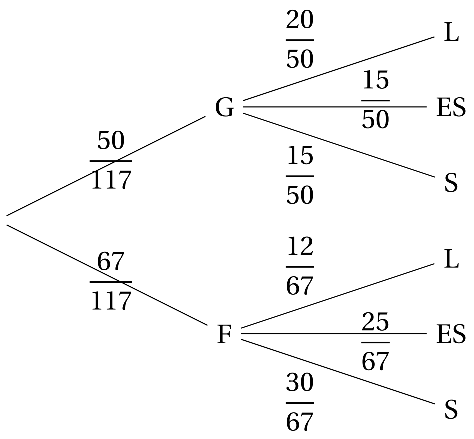
$p\,(\mathrm{X}+3) \approx 0,3189$

À la calculatrice : binompdf$\left(5, \dfrac{261}{511}, 3\right)$

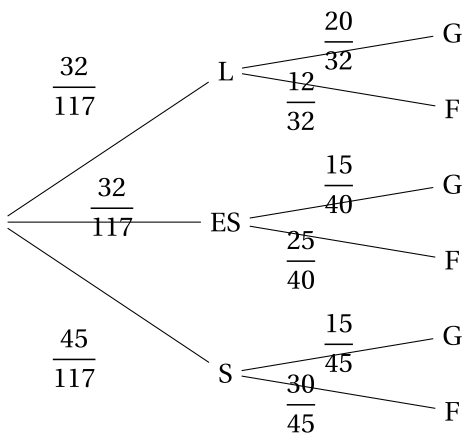
19.9 Lien entre les tableaux à doubles entrées et les arbres de probabilités

Sexe / Série	L	ES	S	Total
Garçons	12	25	30	67
Total	32	40	45	117

Deux arbres à probabilités possibles :



Notations : $p\,(\mathrm{G}) = \dfrac{50}{117}$ et $p\,(\mathrm{F}) = \dfrac{67}{117}$. On a aussi $p_{\mathrm{G}}\,(\mathrm{L}) = \dfrac{20}{50}$, ceci s'appelle une <u>probabilité conditionnelle</u>.



Notations : $p\,(\mathrm{L}) = \dfrac{32}{117}$, $p\,(\mathrm{ES}) = \dfrac{40}{117}$ et $p\,(\mathrm{S}) = \dfrac{45}{117}$. On a aussi $p_{\mathrm{L}}\,(\mathrm{G}) = \dfrac{20}{32}$.

Maintenant, une petite amusette :

Soit un événement A : « L'élève est une fille et une élève de L »
Quelle est la probabilité de A ?

$A = F \cap L$

$$p(F \cap L) = \frac{12}{117}$$

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a $p(F \cap L) = p(F) \times p_F(L)$

$$p(F \cap L) = \frac{657}{117} \times \frac{12}{67} = \frac{12}{117}$$

Soit un événement B : « L'élève est un garçon ou un élève de S. »

$B = G \cup S$

$$p(G \cup S) = p(G) + p(S) - p(G \cap S)$$

$$p(G \cup S) = \frac{50}{117} + \frac{45}{117} - \frac{15}{117}$$

$$p(G \cup S) = \frac{80}{117}$$

19.10 Exercices

19.10.1 Exercice nº 1

On jette simultanément trois dés non-pipés.

Soit un événement A : « On fait un triple. »

Quelle est la probabilité de A ?

$\Omega = \left\{1,2,3,4,5,6\right\} \times \left\{1,2,3,4,5,6\right\} \times \left\{1,2,3,4,5,6\right\}$, et card $\Omega = 6 \times 6 \times 6 = 216$

$\mathrm{A} = (1,1,1) \cap (2,2,2) \cap (3,3,3) \cap (4,4,4) \cap (5,5,5) \cap (6,6,6)$, et card $\mathrm{A} = 6$

$p\left(\mathrm{A}\right) = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

19.10.2 Exercice nº 2

On joue 4 fois à pile ou face.

Soit un événement A : « On obtient exactement deux fois pile et deux fois face. »

Soit un événement B : « On obtient au moins une fois pile. »

On a : $\mathscr{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

$p\left(\mathrm{A}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2$

$p\left(\mathrm{A}\right) = 6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$p\left(\mathrm{A}\right) = \dfrac{3}{8}$

$p\left(\mathrm{B}\right) = 1 - p\left(\mathrm{X} = 0\right)$

$p\left(\mathrm{X} = 0\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^4$

$p\left(\mathrm{X} = 0\right) = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$p\left(\mathrm{X} = 0\right) = \dfrac{1}{16}$

$p\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$