Ecole Centrale de Nantes
Université de Nantes
APN, MACS, MFA Année 2019-2020

Schémas combinés volumes Finis/éléments finis pour des écoulements en milieu poreux

Mazen SAAD

Table des matières

1 Volumes finis elliptiques

Exercice 1.1 (Matrices monotones)

1. On dit qu'une matrice A est **monotone** ssi (A inversible et $A^{-1} \geq 0$). Montrer que A monotone ssi ($Ax \geq 0$ alors $x \geq 0$).
2. (Exemples de matrices monotones). Soit A une matrice vérifiant $a_{i,j} \leq 0$ $\forall i \neq j$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout $i = 1, N$. Montrer que
   (a) $a_{i,i} > 0$.
   (b) Ecrire $A = D(I - M)$ avec D la diagonale de A et M à préciser.
   (c) Montrer que $\rho(M) < 1$ (ρ rayon spectrale) et A monotone.
3. En déduire que si A une matrice inversible vérifiant $a_{i,j} \leq 0$ $\forall i \neq j$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geq 0$, alors A monotone.

Exercice 1.2 (Condition suffisante pour la stabilité l^∞)
Soit A une matrice vérifiant

— La matrice A est **monotone**

— $\exists$ un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $AV \geq \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E} = (1, \cdots, 1)$

Alors $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|V\|_\infty$.

Exercice 1.3 (Equation de Laplace en 1D sur un maillage non uniforme)
On considère le problème suivant

$$-\partial_x(\lambda(x)\partial_x u)(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0, L[\tag{1.1}$$

$$u(0) = u(L) = 0 \tag{1.2}$$

avec f régulière, dans $C^0(]0,1[)$, $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$.

On souhaite approcher la solution du problème sur un maillage irrégulier. Pour cela, on divise l'intervalle $]0, L[$ en N intervalles de longueur h_1, h_2, ...h_N. On note x_i le centre de la maille $M_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, alors $x_{\frac{1}{2}} = 0$ et $x_{N+\frac{1}{2}} = L$

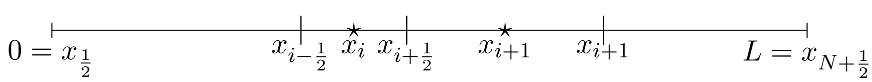


FIGURE 1 – Maillage.

Le principe des volumes finis consiste à intégrer l'équation sur chaque maille M_i :

$$\lambda(x_{i-\frac{1}{2}})\partial_x u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \lambda(x_{i+\frac{1}{2}})\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx, \text{ pour } i = 1, 2, ..., N. \tag{1.3}$$

Pour approcher la dérivée $\partial_x u$ aux interfaces, on considère l'approximation la plus naturelle

$$\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ pour } i = 2, N-1 \tag{1.4}$$

avec $h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+1}+h_i}{2} = x_{i+1} - x_i$. C'est une approximation centrée par rapport au point $\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ qui est différent du point $x_{i+\frac{1}{2}}$ en général.

En posant $f_i = \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx$, on considère alors le schéma numérique :

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} = h_i f_i \text{ pour } i = 2, N-1 \tag{1.5}$$

Pour traiter les conditions aux limites, par exemple pour la maille M_1, on approche alors la dérivée par une dérivée décentrée

$$\partial_x u(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{u_1 - u_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_{\frac{1}{2}}}, \tag{1.6}$$

On a $u_{\frac{1}{2}} = u(0) = 0$, et on note pour garder les mêmes notations $h_{\frac{1}{2}} = x_1 - x_{\frac{1}{2}}$.

1. Préciser alors la condition aux limites à droite.
2. Ecrire précisément le sytème linéaire à résoudre, en prolongeant la formule pour (1.5) pour $i = 1, N$
3. Montrer que le système se traduit sous forme matricielle

   $$A_h U_h = F_h$$

   avec

   $$U_h = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^T, \quad F_h = (h_1 f_1, h_2 f_2, \cdots, h_N f_N)^T$$

   Préciser A_h. Montrer que A_h est inversible en localisant les valeurs propres de A_h. Montrer que A_h est monotone.
4. On va montrer **le principe du maximum discret**, à savoir si $F_h \geq 0$ alors $u_h \geq 0$. Pour cela, soit i_0 un plus petit indice tel que

   $$u_{i_0} = \min_i u_i < 0$$

   Ecrire la ligne i_0 du système linéaire et conclure.
5. Montrer que le principe du maximum assure que la matrice A_h est inversible.
6. **Formulation variationnelle discrète.**

   (a) Définir les flux $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$, pour $i = 0, N$ de telle sorte que

   $$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = h_i f_i \text{ pour } i = 1, N \tag{1.7}$$

   (b) **Intégration par parties.** Soit $v_h = (v_1, v_2 \cdots v_N)$. Montrer que

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})v_i = \sum_{i=1}^{N-1}\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(v_i - v_{i+1}) + \mathcal{F}_{N+\frac{1}{2}}v_N - F_{\frac{1}{2}}v_1$$

   En prenant $v_0 = v_{N+1} = 0$, On déduit **la formule d'intégration par parties discrètes**

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})v_i = \sum_{i=0}^{N}\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(v_i - v_{i+1})$$

(c) En prenant $u_0 = u_{N+1} = 0$, montrer que

$$(A_h u_h, v_h) = \sum_{i=0}^{N} h_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right). \tag{1.8}$$

Montrer que A_h est définie positive.

(d) On définit un gradient discret ∂_x^h constant par interface comme suit :

$$\partial_x^h u_h(x) = \begin{cases} \frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}, i = 1, N-1 \\ \frac{u_1 - 0}{h_{\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]0, x_1[\\ \frac{0 - u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]x_N, L[\end{cases}$$

Définir la fonction $\lambda_h(x)$ constante par interface et en déduire que (1.8) est équivalente à

$$(A_h u_h, v_h) = \int_0^L \lambda_h \partial_x^h u_h(x) \partial_x^h v_h(x)\, dx = \int_0^L f_h(x) v_h(x)\, dx \tag{1.9}$$

7. **Inégalité de Poincaré en 1D.** Montrer que

$$\|u_h\|_{L^2} := \left(\sum_{i=1}^{N} h_i |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{L} \|u_h\|_\infty \leq L \|\partial_x^h u_h\|_{L^2} := L \left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+\frac{1}{2}} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

8. **Estimation H^1 discrete.** Montrer qu'il existe C indépendante de h, telle que

$$\lambda_0 \|\partial_x^h u_h\|_{L^2(0,L)} \leq C \|f_h\|_2 \leq C \|f\|_{L^2(0,L)}$$

9. **Convergence vers une solution faible**.

(a) Montrer que qu'il existe une sous suite, encore notée, $(u_h)_h$ telle que

$$u_h \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, L) \tag{1.10}$$

$$\partial_x^h u_h \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } L^2(0, L) \tag{1.11}$$

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$. Montrer que si

$$E_h = \int_0^L \partial_x^h u_h(x) \varphi(x)\, dx + \int_0^L u_h \partial_x \varphi dx \to 0, \text{ quand } h \to 0 \tag{1.12}$$

alors $\xi = \partial_x u \in \mathcal{D}'(0, L)$ (au sens des distributions).

(c) Montrer que

$$\int_0^L u_h \partial_x \varphi dx = -\sum_{i=0}^{N} (u_{i+1} - u_i) \varphi(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

En utilisant la définition du gradient discret, développer $\int_0^L \partial_x^h u_h(x) \varphi(x) dx$. En déduire qu'il existe une fonction $c_i(\varphi)$ dépendante de φ telle

$$E_h = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) c_i(\varphi) h_{i+\frac{1}{2}}^2.$$

Montrer (1.12) et conclure.

(d) Soit $v \in \mathcal{D}(0, L)$, on considère $v_h(x)$ la fonction constante par morceaux associée à $(v(x_i))_{i=1,N}$. Passer à la limite dans la formulation variationnelle discrète (1.9) et préciser la formulation décrite par la solution u.

10. **Consistance.** Dans cette partie, pour alléger les notations on considère $\lambda = 1$. On définit l'erreur de troncature $T_h =^t (T_0, T_1, ..., T_N)$ avec

$$(T_h)_i = \frac{1}{h_i}\Big(\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}\Big) - f_i := (\tilde{A}_h \overline{U}_h)_i - f_i$$

avec $u(x_i)$ est la valeur de la solution exacte au point x_i, le vecteur $\overline{U}_h = (u(x_i))_i$, la matrice $\tilde{A}_h$ est la matrice A_h où chaque ligne i est divisée par h_i.

(a) Soit $f = 1$, donner la solution exacte $u(x)$.Considérer le maillage tel que $h_{2i} = h$ et $h_{2i+1} = 2h$. Calculer T_{2i} et T_{2i+1}. Montrer que le schéma n'est pas consistant.

(b) Ecrire le développement de Taylor de $\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}$ au point $x_{i+\frac{1}{2}}$ à l'ordre 4 et montrer que l'erreur de consistance s'écrit comme suit :

$$T_h = T_h^0 + T_h^1, \tag{1.13}$$

avec

$$T_h^0 = \frac{1}{h_i}(u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})) - \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx + O(h^2) \tag{1.14}$$

$$T_h^1 = \frac{1}{h_i}(\alpha_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}}) + O(h) \tag{1.15}$$

En déduire que le schéma est consistant ssi le maillage est uniforme.

(c) (Consistance faible). Montrer que T_h^1 est l'image par l'opérateur aux différences d'une fonction ψ_h définie constante par maille, telle que

$$T_h^1 = \tilde{A}_h \psi_h + O(h) \text{ et } (\psi_h)_i = \frac{h_i^2}{4} u''(x_i) \text{ sur }]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[. \tag{1.16}$$

(d) **Stabilité L^∞.** On définit $v(x) = x - x^2$, montrer que

$$(\tilde{A}_h V_h)_i = 1 + \frac{h_{i-1}h_{i+1}}{2h_i}.$$

En déduire

$$\|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \leq 1/4.$$

(e) **(Ordre de convergence)** Nous allons démontré que la consistance faible et la stabilité assure la convergence su schéma.
Montrer que

$$\|\overline{U_h} - U_h\|_\infty \leq \|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \|T_h^0\|_\infty + \|\psi_h\|_\infty + O(h)\|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty.$$

Conclure.

Exercice 1.4 (Equation de Laplace avec terme convectif sur un maillage triangulaire)
On considère l'équation elliptique suivante

$$-\Delta u(x) + \mathrm{div}(\mathbf{V}(x)u(x)) + bu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1.17}$$

avec la condition aux limites suivante :

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.18}$$

On suppose :

(i) Ω est un ouvert borné polygonal de $\mathbb{R}^2$,

(ii) $b \geq 0$

(iii) $f \in L^2(\Omega)$

(iv) $\mathbf{V} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ et $\mathrm{div}\, \mathbf{V}(x) \geq 0$.

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation admissible et satisfaisant la condition d'orthogonalité de Ω. On note

(a) $\sigma_{KL} = \partial K \cap \partial L$, pour $K, L \in \mathcal{T}$.

(b) x_K le centre de K, et $x_K x_L$ est orthogonal à σ_{KL}.

(c) $d_{KL} = \|x_L - x_K\|$ si $\sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega$ et $d_{K_\sigma} = \|x_K - x_\sigma\|$ si $\sigma = \partial K \cap \partial\Omega$.

(d) **Les voisins :** $\mathcal{N}_K^o = \{L; \sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega\}$, $\mathcal{N}_K^\sigma = \{\sigma; \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega\}$ et $\mathcal{N}_K = \mathcal{N}_K^o \cup \mathcal{N}_K^\sigma$.

(e) **Coefficient de transmissibilité :** $\tau_{KL} = |\sigma_{KL}|/d_{KL}$ et $\tau_{K_\sigma} = |\sigma_{K_\sigma}|/d_{K_\sigma}$

(f) $\mathcal{E}^o = \{\sigma_{KL}; \sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega\}$: ensemble des segments à l'intérieur du domaine.

(g) $\mathcal{E}^\sigma = \{\sigma_{K_\sigma}; \sigma_{K_\sigma} \subset \partial\Omega \cap \partial K\}$

On considère le schéma numérique suivant : Pour tout K

$$\sum_{L \in N_K^o} \tau_{KL}(u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} \tau_{K_\sigma} u_K + \sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} + b|K| u_K = |K| f_K, \tag{1.19}$$

où

$$V_{KL} = \int_{\sigma_{KL}} \mathbf{V}(x) \cdot n_{KL} dx, \text{ et } V_{K_\sigma} = \int_{\sigma_{K_\sigma}} \mathbf{V}(x) \cdot n_{K_\sigma} dx,$$

$$u_{KL} = \begin{cases} u_K & \text{si } V_{KL} \geq 0 \\ u_L & \text{si } V_{KL} < 0, \end{cases} \text{ et } u_{K_\sigma} = \begin{cases} u_K & \text{si } V_{K_\sigma} \geq 0 \\ 0 & \text{si } V_{K_\sigma} \geq 0, \end{cases}$$

$f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx$, $|K| = \mathrm{aire}(K)$, $|\sigma_{KL}| = \mathrm{mesure}(\sigma_{KL})$.

1. On note $V_{KL}^+ = \max(0, V_{KL})$ et $V_{KL}^- = \min(0, V_{KL})$. Soit $G_{KL} = V_{KL} u_{KL}$ le flux convectif à l'interface σ_{KL}, c'est un schéma **upwind ou upstream ou décentré**. Exprimer le flux en fonction de V_{KL}^+ et V_{KL}^- et montrer que le flux est consevatif :

$$G_{KL} = -G_{LK}.$$

2. Ecrire le système linéaire associé à la figure 2.

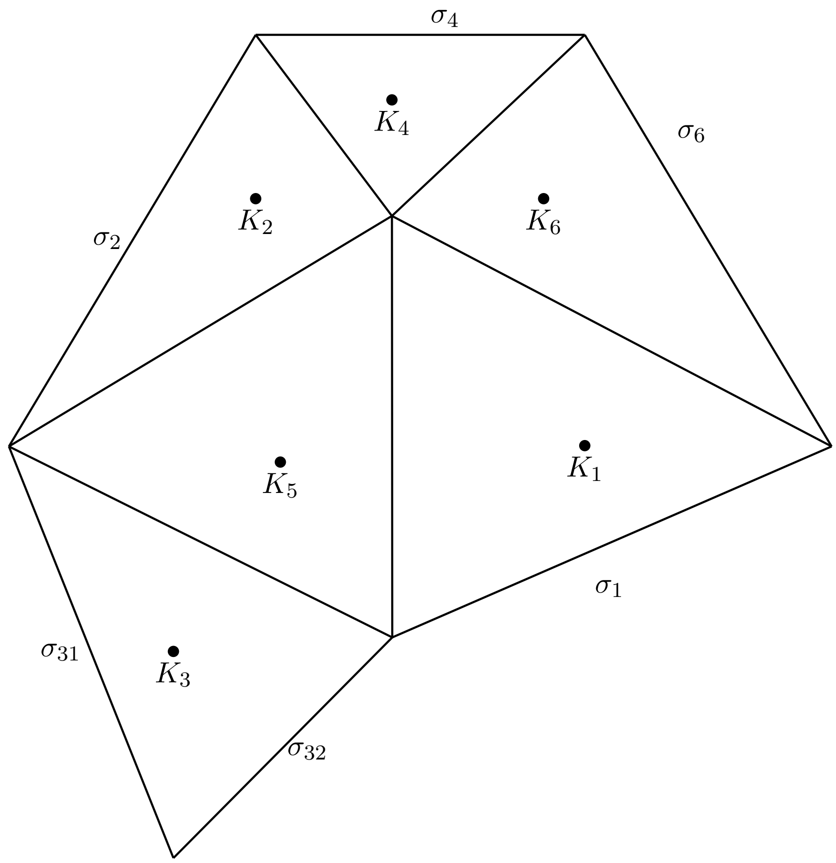


FIGURE 2 – Maillage

3. On va montrer **le principe du maximum** suivant :
   Si $f_K \geq 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}$, alors $u_K \geq 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}$.
   Pour cela, soit $K_0 = \text{argmin}_{K \in \mathcal{T}_h} u_K$. On suppose $u_{K_0} < 0$. Ecrire l'équation satisfaite par K_0. Montrer que le terme convectif vérifie :
   $$\sum_{L \in N_{K_0}} V_{K_0 L} u_{K_0 L} \leq u_{K_0} \sum_{L \in N_{K_0}} V_{K_0 L} \leq 0.$$
   Déduire une contradiction sur l'équation de K_0 et conclure.
4. **Terme convectif cas continu**. Montrer que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,
   $$\int_\Omega \text{div}(\mathbf{V}u) u \, dx = -\int_\Omega \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{u^2}{2} \, dx = \int_\Omega \text{div}(\mathbf{V}) \frac{u^2}{2} \, dx \geq 0$$
5. **Terme convectif cas discret**. On note
   $$G_{conv} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} \right) u_K.$$
   Montrer que
   $$G_{conv} = \sum_{\sigma_{KL}} \left(\frac{V_{KL}}{2} (u_K^2 - u_L^2) + \frac{|V_{KL}|}{2} (u_K - u_L)^2 \right), \tag{1.20}$$

avec la notation $u_L = 0$ si $\sigma_{KL} \in \partial\Omega$.
Montrer que

$$\sum_{\sigma_{KL}} \frac{V_{KL}}{2}(u_K^2 - u_L^2) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K^2 \int_K \operatorname{div}(\mathbf{V})\, dx. \tag{1.21}$$

En déduire que

$$G_{conv} \geq 0.$$

6. On note $u_h(x)$ la fonction définit constante par triangle, c'est-à-dire : $u_h(x) = u_K$ pour $x \in K$. Définir, d'après le cours, le gradient discret noté $\nabla_h u_h$ constant par diamond. On définit alors la norme discrète suivante :

$$\|u_h\|_{1,h} = \Big(\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}^o} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 + \sum_{\sigma_{K_\sigma} \in \mathcal{E}^\sigma} \tau_{K_\sigma} |u_K|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

   Soit $\psi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \psi_K \mathbf{1}_K(x)$. Montrer que le schéma (1.19) est équivalent à la formulation variationnelle discrète

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}^o} \tau_{KL}(u_K - u_L)(\psi_K - \psi_L) + \sum_{\sigma_{K_\sigma} \in \mathcal{E}^\sigma} \tau_{K_\sigma} u_K \psi_K \right) \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(\sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} \Big) \psi_K + b \int_\Omega u_h \psi_h \, dx = \int_\Omega f_h \psi_h \, dx,\end{aligned} \tag{1.22}$$

7. En utilisant l'inégalité de Poincaré, montrer que la norme H^1-discrète est bornée : $\exists C > 0$ telle que

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C.$$

   Que peut-on déduire sur la convergence de la suite $(u_h)_h$.

8. **Projection dans L^2.**
   (a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, vérifier que $\varphi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varphi(x_K) \mathbf{1}_K(x)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ (et dans $L^p(\Omega), p \geq 1$).
   (b) Pour $f \in L^2(\Omega)$, la fonction $f_h(x) := \pi_h f := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} f_K \mathbf{1}_K(x)$ et f_K est la moyenne sur K. Montrer que i) $\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$, ii) Par densité de $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, montrer que $\pi_h f \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$, iii) $\pi_h f \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ $p \geq 1$.
9. **Convergence.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $\varphi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varphi(x_K) \mathbf{1}_K(x)$, on considère alors $\varphi_h(x)$ comme fonction test dans (1.23) et on note chaque terme comme suit : $T_h^d + T_h^c + T_h^b = T_h^f$.
   (a) Montrer que T_h^d s'écrit :

$$T_h^d = \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot (\nabla\varphi)_h \, dx \tag{1.23}$$

   où $(\nabla\varphi)_h$ est une fonction définie constante par diamond comme le gradient de ϕ en un point du diamond. Passer à la limite.

(b) Montrer la convergence de T_h^b et T_h^f.

(c) **Terme Convectif.**

i. Le cas continue. Montrer que, pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{V}u)\varphi dx = \int_\Omega u\psi \mathrm{div}\mathbf{V} dx - \int_\Omega u \mathrm{div}(\mathbf{V}\varphi) dx.$$

ii. Vérifier que

$$T_h^c = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_K V_{KL}\varphi(x_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K}(u_{KL}-u_K)V_{KL}\varphi(x_K) := (T_h^c)_1 + (T_h^c)_2$$

iii. Montrer que

$$(T_h^c)_1 = \int_\Omega u_h\varphi_h \mathrm{div}\ \mathbf{V} dx.$$

Passer à la limite.

iv. Vérifier que

$$\begin{aligned}(T_h^c)_2 = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K}(u_{KL}-u_K)\int_{\sigma_{KL}} \mathbf{V}\cdot n_{KL}(\varphi(x_K)-\varphi(x))\,dx \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_{KL}\int_{\sigma_{KL}}(\mathbf{V}\cdot n_{KL}\varphi(x))\,dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_K\int_{\sigma_{KL}}(\mathbf{V}\cdot n_{KL}\varphi(x))\,dx \\ &:= (R_h^c)_1 + (R_h^c)_2 + (R_h^c)_3\end{aligned}$$

v. Montrer que

$$|(R_h^c)_1| \le C(\varphi)h\|u_h\|_{1,h}.$$

vi. En intégrant par parties, montrer que $(R_h^c)_2 = 0$.

vii. Montrer que

$$(R_h^c)_3 = -\int_\Omega u_h \mathrm{div}(\varphi\mathbf{V})\,dx.$$

Conclure.

10. Ecrire la formulation variationnelle satisfaite par u.

2 Problèmes d'évolution

Exercice 2.1 (Schéma décentré sur un maillage triangulaire.)
On considère le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique linéaire en dimension deux d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,t) + V(x,y)\cdot\nabla u(x,y,t) = 0 \text{ pour } t\in(0,T), (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,y,0) = u^0(x,y) \text{ pour } (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème modélise le transport d'un contaminant dans le sol. On suppose

$$0 \le u_{min} \le u^0(x,y) \le u_{max} \tag{2.2}$$

$$V \text{ est une fonction vectorielle continue telle que } divV(x,y) = 0. \tag{2.3}$$

Soit $(t_n)_{n=0,\dots,N}$ une partition de $[0,T]$ de pas fixe $\delta t = t_{n+1} - t_n$, et soit $\mathcal{T}_h$ une triangularisation de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_h = \cup_i K_i$ où K_i désigne un triangle quelconque. On note :

$\lvert K_i \rvert$	la surface du triangle K_i
$\mathcal{E}_i = \{j; \partial K_i \cap \partial K_j \neq \Phi\}$	ensemble des voisins du triangle $K_i, card\ \mathcal{E}_i = 3$
$\Gamma_{ij} = \partial K_i \cap \partial K_j$	côtés de K_i, $j \in \mathcal{E}_i$
n_{ij}	normale à $\Gamma_{i,j}$ extérieure à $K_i(n_{ij} = -n_{ji})$
$\lvert \Gamma_{ij} \rvert$	la longueur du côté Γ_{ij}
$\mathcal{A}_h$	famille des arêtes.

(faire un dessin avec ces notations).

On suppose que les triangles ne dégénèrent pas : $\exists a, b > 0$ tels que

$$ah \leq |\Gamma_{ij}| \leq bh, \qquad ah^2 \leq |K_i| \leq bh^2; \qquad \forall\, \Gamma_{ij} \in \mathcal{A}_h \qquad \forall K_i \in \mathcal{T}_h. \tag{2.4}$$

On définit K_i le volume de contrôle et on désigne par (x_i, y_i) le centre de gravité de K_i et par u_i^n la solution approchée sur la maille K_i et à l'instant t^n. Sur un côté $\Gamma_{i,j}$, la vitesse V est calculée par

$$(V \cdot n)_{ij} = \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\Gamma_{ij}} V \cdot n \, d\sigma.$$

1. En utilisant (2.3), Montrer que pour tout K_i

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_i} (V \cdot n)_{ij} |\Gamma_{ij}| = 0. \tag{2.5}$$

2. En intégrant l'équation (2.1) sur $K_i \times (t_n, t_{n+1})$, montrer que le schéma aux volumes finis explicite décentré amont s'écrit pour $n = 0, N-1$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \mathcal{E}_i} |\Gamma_{ij}| \left(((V \cdot n)_{ij})^+ u_i^n + ((V \cdot n)_{i,j})^- u_j^n \right) \tag{2.6}$$

avec les notations $a^+ = \frac{a+|a|}{2}$, $a^- = \frac{a-|a|}{2}$ et $u_i^0 = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u^0(x,y) dxdy$.
En déduire que ce schéma s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \mathcal{E}_i} |\Gamma_{i,j}| (-(V \cdot n)_{i,j})^+ (u_i^n - u_j^n). \tag{2.7}$$

3. Montrer que sous une condition de type CFL (une relation reliant δt, h, V, a et b) le schéma (2.7) est L^∞ stable. En déduire aussi que

$$u_{min} \leq u_i^n \leq u_{max}, \forall i, \forall n.$$

4. *Stabilité* L^2. On note $w_{ij} = -|\Gamma_{ij}|(V \cdot n)_{ij}$. On suppose par la suite la condition de type CFL suivante :

$$\frac{\delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{ij}^+ \leq 1 - \xi \tag{2.8}$$

avec $\xi > 0$. Cette condition assure-t-elle la stabilité L^∞ du schéma ? pourquoi ?

(a) Montrer qu'en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)^2 \leq \frac{\delta t^2}{|K_i|^2} \left(\sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{ij}^+ \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{ij}^+ (u_i^n - u_j^n)^2 \right) \tag{2.9}$$

En déduire que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_i |K_i| (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 \leq (1 - \xi) \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_i \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{ij}^+ (u_i^n - u_j^n)^2. \tag{2.10}$$

(b) Vérifier que

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^n = \frac{1}{2} (u_i^{n+1})^2 - \frac{1}{2} (u_i^n)^2 - \frac{1}{2} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2. \tag{2.11}$$

On définit la norme 2 par $\|u^n\|_2 = (\sum_i |K_i| |u_i^n|^2)^{\frac{1}{2}}$, Montrer que le schéma vérifie

$$\frac{1}{2} \|u^N\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u^0\|_2^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+1} - u^n\|_2^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_i \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{i,j}^+ (u_i^n - u_j^n) u_i^n = 0. \tag{2.12}$$

(c) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_i \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{i,j}^+ (|u_i^n|^2 - |u_j^n|^2) = 0. \tag{2.13}$$

(Indication : regrouper cette expression arête par arête).

(d) Vérifier que

$$(u_i^n - u_j^n) u_i^n = \frac{1}{2} (u_i^n - u_j^n)^2 + \frac{1}{2} (u_i^n)^2 - \frac{1}{2} (u_j^n)^2, \tag{2.14}$$

et montrer que

$$\|u^N\|_2^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_i \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{i,j}^+ (u_i^n - u_j^n)^2 \leq \|u^0\|_2^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+1} - u^n\|_2^2 \tag{2.15}$$

(e) En déduire que

$$\|u^N\|_2 \leq \|u^0\|_2,$$

et

$$\xi \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_i \sum_{j \in \mathcal{E}_i} w_{i,j}^+ (u_i^n - u_j^n)^2 \leq \|u^0\|_2^2.$$

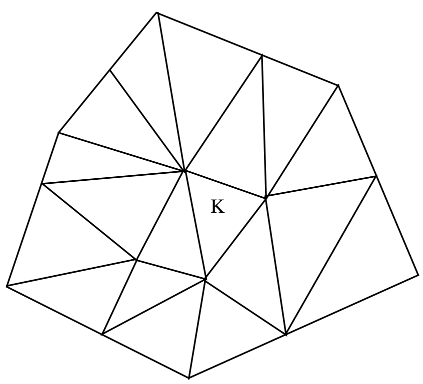
3 Schémas pour l'écoulement diphasique en milieu poreux

Exercice 3.1 (Point fixe dans $\mathbb{R}^m$)
On rappelle le **théorème de point fixe Brouwer**.*Soit f une fonction continue de K dans K et K un convexe et compact de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe $x^\star \in K$ tel que $f(x^\star) = x^\star$.*
Soit ξ une application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe $r > 0$, telle que

$$\xi(x) \cdot x \geq 0, \text{ si } \|x\| = r.$$

Montrer qu'il existe $\overline{x} \in \overline{B(0,r)}$ telle que $\xi(\bar{x}) = 0$.
(*Pour montrer ce résultat, considérer l'application $S : \overline{B(0,r)} \mapsto \overline{B(0,r)}$ définie par $S(x) = -r\frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$, conclure par contradiction.*)

Exercice 3.2 (Retour sur la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-conforme)
Soit Ω un domaine polygonal. On recouvre exactement Ω par des domaines élémentaires du type triangle.



Le domaine Ω est partitionné en N_T triangles K_i :

$$\Omega = \cup_{i=1}^{N} K_i$$

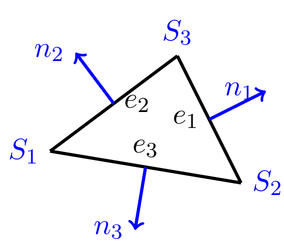
On s'intéresse aux éléments finis $\mathbb{P}_1$-conforme.

$$V_h = \{\varphi_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \varphi_h \in \mathbb{P}_1 \text{ sur } K, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

où $\mathcal{T}_h$ est une triangularisation de Ω et $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des polynômes de degré un.

La dimension de V_h est N_s le nombre des sommets du maillage et $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Base de V_h
$(\varphi_i)_{i=1,N_s}$ t.q. $\varphi_i(S_j) = \delta_{ij}$, $\forall S_j$ un sommet du maillage.



Construction de φ_i. La fonction φ_i est construite par triangle et sa restriction sur chaque triangle est un polynôme de degré 1. φ_i est identiquement nulle sur tous les triangles où S_i n'est pas un sommet. Le support de la fonction φ_i est l'ensemble des triangles où S_i est un sommet.

1. Les sommets $S_1 = (x_1, y_1)$, $S_2 = (x_2, y_2)$ et $S_3 = (x_3, y_3)$. Vérifier que les équations des droites sont
   Eq. e_1 : $(x_2 - x_3)y = (y_2 - y_3)x + y_3x_2 - y_2x_3$

Eq. $e_2 : (x_1 - x_3)y = (y_1 - y_3)x + y_3x_1 - y_1x_3$
Eq. $e_3 : (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x + y_2x_1 - y_1x_2$
En déduire que $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{|e_1|}\begin{pmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{|e_2|}\begin{pmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n}_3 = \frac{1}{|e_3|}\begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

2. Montrer que $\nabla\varphi_i = -\frac{|e_i|}{2|K|}\mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, 3$. En déduire que si tous les angles du triangle sont aigus alors

$$\int_K \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx = \frac{|e_1||e_2|}{4|K|^2}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 < 0, \text{ si } \hat{S}_3 < 90°.$$

3. **Convergence forte des interpolations** Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et $\pi_h\psi$ son interpolé dans V_h,

$$\pi_h\psi(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \psi(S_i)\varphi_i(x).$$

Le théorème d'interpolation locale (déjà vu), s'écrit

$$\int_K |\pi_K g(x,y) - g(x,y)|^2 dxdy \leq c\, h_K^4 \|\nabla^2 g\|^2_{L^2(K)}. \tag{3.1}$$

et

$$\int_K |\nabla\pi_K g(x,y) - \nabla g(x,y)|^2 dxdy \leq c\, h_K^2 \|\nabla^2 g\|^2_{L^2(K)}. \tag{3.2}$$

Vérifier que

$$\|\psi_h - \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|\nabla^2\psi\|_{L^2(\Omega)},$$

et

$$\|\nabla\psi_h - \nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\nabla^2\psi\|_{L^2(\Omega)},$$

et alors

$$\psi_h \longrightarrow \psi \text{ fort dans } H^1(\Omega). \tag{3.3}$$

exercice

Exercice 3.3 (Problème elliptique)
Soit Ω un domaine polygonal. On considère le problème d'écoulement diphasique non linéaire elliptique :

$$\begin{cases} \alpha u(x) - \operatorname{div}(\Lambda(x)\nabla u(x) - \mathbf{V} f(u)) = \alpha u^\star(x) & x \in \Omega \\ (\Lambda(x)\nabla u(x) - \mathbf{V} f(u)) \cdot \nu = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\alpha > 0$, $u^\star \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{V} \in (L^2(\Omega))^N$, f une fonction continue et bornée (il existe f_∞ tel que $|f(u)| \leq f_\infty$) et $\Lambda(x)$ un tenseur elliptique et bornée, il existe $\lambda_0 > 0$, tel que

$$\Lambda(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda_0 |\xi|^2, \forall x \in \Omega.$$

On discrétise ce problème avec la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ conforme sur un maillage triangulaire donné $\mathcal{T}_h$.

Soit $u_h = \sum_{j=1}^{N_s} u_j \varphi_j(x) \in V_h$ solution de la formulation discrète :

$$\alpha \int_\Omega u_h \varphi_i dx + \int_\Omega \Lambda(x)\nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx - \int_\Omega f(u_h)\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \alpha \int_\Omega u^\star(x)\varphi_i dx, \quad i = 1, N_s \tag{3.5}$$

1. On définit l'application :
$$\xi : \mathbb{R}^{N_s} \longmapsto \mathbb{R}^{N_s}$$
$$d = (u_1, u_2, \cdots, u_{N_s}) \longmapsto \xi(d) = (\xi_1(d), \xi_2(d), \cdots, \xi_{N_s}(d))$$
où
$$\xi_i(d) = \alpha \int_\Omega u_h \varphi_i dx + \int_\Omega \Lambda(x)\nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx - \int_\Omega f(u_h)\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i \, dx - \alpha \int_\Omega u^\star(x)\varphi_i dx \tag{3.6}$$
Montrer que
$$\xi(d) \cdot d \geq \frac{\alpha}{2} \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} - C,$$
où C est une constante indépendante de d. En déduire que l'équation (3.5) admet au moins une solution.
2. Montrer que la suite $(u_h)_h$ est bornée uniformément dans $H^1(\Omega)$.
3. En déduire qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_{h)_h}$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ et que $(f(u_h))$ converge vers $f(u)$ dans $L^2(\Omega)$.
4. Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et $\pi_h \psi$ son interpolé dans V_h,
$$\psi_h := \pi_h \psi(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \psi(S_i)\varphi_i(x).$$
Montrer que
$$\alpha \int_\Omega u_h \psi_h dx + \int_\Omega \Lambda(x)\nabla u_h \cdot \nabla \psi_h \, dx - \int_\Omega f(u_h)\mathbf{V} \cdot \nabla \psi_h \, dx = \alpha \int_\Omega u^\star(x)\psi_h \, dx. \tag{3.7}$$
Passer à la limite sur h.

Exercice 3.4 (Problème diphasique (eau/huile) en milieu poreux)
Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $T > 0$. On considère le problème non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \operatorname{div}\Big(\Lambda(x)\nabla u(t,x) - \mathbf{V}(x) f(u(t,x))\Big) = 0 \quad (t,x) \in Q_T \\ \big(A(u)\nabla u - \mathbf{V} f(u)\big) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\mathbf{V} \in (L^2(\Omega))^N$ est la vitesse de Darcy, f une fonction continue et bornée désignant la fraction des flux (il existe f_∞ tel que $|f(u)| \leq f_\infty$) et $\Lambda(x)$ un tenseur elliptique et bornée, il existe $\lambda_0 > 0$, tel que

$$\Lambda(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda_0 |\xi|^2, \forall x \in \Omega.$$

Pour montrer l'existence de solutions pour ce problème, on va décrire la méthode suivante

Méthode de semi-discrétisation en temps. Pour cela, on découpe l'intervalle de temps $[0,T]$ en N intervalles de pas $\delta t = T/N$ et note $t_n = nh$. On introduit alors un cadre fonctionnel discret. Soit E un espace de Banach, par exemple $E = L^2(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$. On se donne $(u_0, u_1, \cdots, u_N) \in E^{N+1}$. On définit **l'opérateur constant** par intervalle en temps :

$$u_{\delta t} : [0,T] \longmapsto E$$

par

$$u_{\delta t}(0) = u_0, \quad u_{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} \chi_{]t_n, t_{n+1}]}(t), \text{ si } 0 < t \leq T.$$

où $\chi_{]t_n,t_{n+1}]}(t)$ est la fonction caractéristique sur l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$. On peut également construire **l'opérateur d'interpolation affine** en temps :

$$\tilde{u}_{\delta t} : [0,T] \longmapsto E$$

par

$$\tilde{u}_{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t}(t - t_n) + u_n \right) \chi_{]t_n, t_{n+1}]}(t), \text{ si } 0 \leq t \leq T.$$

On vérifie facilement que $\tilde{u}_{\delta t}$ est continue sur $[0,T]$ et

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}_{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} \chi_{]t_n, t_{n+1}]}(t) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

1. Montrer que $\|u_{\delta t}\|_{L^p(0,T;E)} = \left(\sum_{n=1}^N \delta t \|u_n\|_E^p\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|u_{\delta t}\|_{L^\infty(0,T;E)} = \max\limits_{n=1,N} \|u_n\|_E$.
2. On discrétise (3.8) sur chaque intervalle $]t_n, t_{n+1}[$ par une méthode d'Euler implicite :

$$u_{\delta t}(0) = u_0$$

on cherche u_{n+1} solution de

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\delta t} - \operatorname{div}\Big(\Lambda(x)\nabla u_{n+1}(x) - \mathbf{V} f(u_{n+1})\Big) = 0 \quad x \in \Omega \\ \big(\Lambda(x)\nabla u_{n+1} - \mathbf{V} f(u_{n+1})\big) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

Montrer que l'algorithme : pour $n = 0, N-1$, chercher $u_{n+1} \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\int_\Omega \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\delta t} v(x)\, dx + \int_\Omega \Lambda(x) \nabla u_{n+1}(x) \cdot \nabla v(x)\; dx - \int_\Omega \mathbf{V} f(u_{n+1}) \cdot \nabla v(x)\; dx = 0, \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.10)$$

est bien posé en utilisant l'approximation par la méthode d'élément finis $\mathbb{P}_1$-conforme.

3. Montrer l'estimation d'énergie suivante

$$\|u_{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_0 \delta t \|\nabla u_{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\delta t}{\lambda_0} f_\infty^2 \|\mathbf{V}\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (3.11)$$

4. Montrer que tout $1 \leq M \leq N$, l'estimation suivante

$$\|u_M\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_0 \sum_{n=0}^{M-1} \delta t \|\nabla u_{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{T}{\lambda_0} f_\infty^2 \|\mathbf{V}\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.12)$$

5. En déduire qu'il existe C une constante indépendante de h telle que

$$\|u_{\delta t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.13)$$

$$\|u_{\delta t}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3.14)$$

6. Que peut-on déduire sur la convergence de la suite $(u_{\delta t})_{\delta t}$?
7. On admet dans cette partie le résultat de convergence forte "minimale"

$$u_{\delta t} \longrightarrow u \quad \text{p.p } (t,x) \in Q_T. \quad (3.15)$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand le pas de discrétisation $\delta t \to 0$. L'idée est de construire une formulation variationnelle discrète à partir de la construction de la suite u_n pour faire apparaître la fonction $u_{\delta t}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$, telle que $\varphi(T, \cdot)$. On choisit maintenant $v(x) = \varphi(t_n, x) := \varphi_n(x) \in H^1(\Omega)$ dans (3.10).

(a) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_\Omega (u_{n+1} - u_n) \varphi_n\, dx + \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \int_\Omega \Lambda \nabla u_{n+1}(x) \cdot \nabla \varphi_n\; dx - \sum_{n=0}^{N-1} \int_\Omega \mathbf{V} f(u_{n+1}) \cdot \nabla \varphi_n\; dx = 0 \quad (3.16)$$

(b) **Terme d'évolution en temps.** Le fait qu'on n'a pas de renseignements sur la dérivée discrète en temps, alors on intègre par partie de façon discrète. Montrer que

$$\mathcal{I}_{\delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} \int_\Omega (u_{n+1} - u_n) \varphi_n\, dx = -\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega u_n (\varphi_n - \varphi_{n-1})\, dx - \int_\Omega u_0 \varphi(0,x)\, dx. \quad (3.17)$$

Montrer que

$$\mathcal{I}_{\delta t} = -\iint_{Q_T} u_{\delta t}\psi_{\delta t}\, dtdx - \int_\Omega u_0\varphi(0,x)\, dx \tag{3.18}$$

où $\psi_{\delta t}$ est une fonction définie constante par intervalle en temps et dépend de $\partial_t\varphi$. Montrer que

$$\psi_{\delta t} \longrightarrow \partial_t\varphi \text{ fort dans } L^2(Q_T).$$

Conclure sur la convergence de $\mathcal{I}_{\delta t}$.

(c) **Terme de diffusion.** On définit la fonction constante par morceaux

$$\tilde{\varphi}_{\delta t}(t,x) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\chi_{]t_n,t_{n+1}]}(t)$$

Montrer que le terme de diffusion s'écrit

$$\mathcal{J}_{\delta t} = \iint_{Q_T} \Lambda\nabla u_{\delta t}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_{\delta t} dtdx$$

Conclure sur la convergence de $\mathcal{J}_{\delta t}$.

(d) **Terme de convection.** Montrer que

$$f(u_{\delta t})\nabla\tilde{\varphi}_{\delta t} \longrightarrow f(u)\nabla\varphi \text{ fort dans } L^2(Q_T).$$

(e) Conclure.

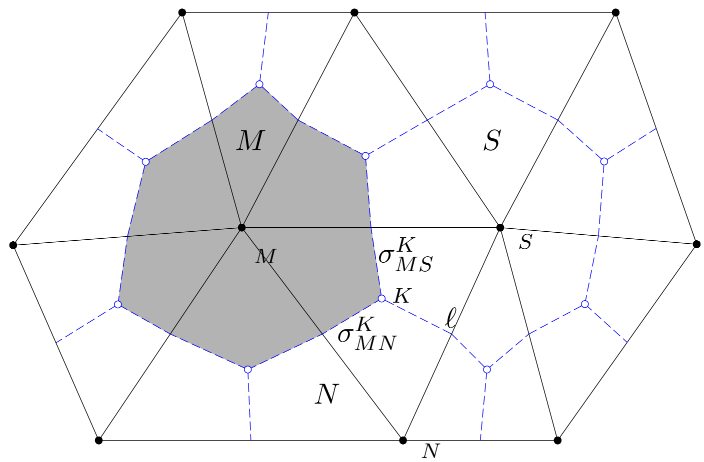
Exercice 3.5 (Schéma positif pour le problème elliptique)
Soit Ω un domaine polygonal. On considère le problème d'écoulement diphasique non linéaire elliptique :

$$\begin{cases} \alpha u(x) - \operatorname{div}(\Lambda(x)\nabla u(x) - \mathbf{V}f(u)) = \alpha u^\star(x) & x\in\Omega \\ (\Lambda(x)\nabla u(x) - \mathbf{V}f(u))\cdot\nu = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

où $\alpha > 0$, $u^\star \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{V}\in(L^2(\Omega))^N$, $\operatorname{div}\mathbf{V} = \mathbf{0}$, f une fonction continue, bornée et croissante (il existe f_∞ tel que $|f(u)| \le f_\infty$) et $\Lambda(x)$ un tenseur elliptique et bornée, il existe $\lambda_0 > 0$, tel que

$$\Lambda(x)\xi\cdot\xi \ge \lambda_0|\xi|^2, \forall x\in\Omega.$$

On discrétise ce problème avec la méthode combinée éléments finis $\mathbb{P}_1$conforme et volumes finies décentré sur un maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$.On construit le maillage dual CVFE, noté $\mathcal{M}_h$, autour des sommets selon la figure



Soit $u_h = \sum_M u_M \varphi_M(x) \in V_h$, solution du schéma CVFE : pour tout $M \in \mathcal{M}_h$

$$\alpha|M|u_M + \sum_{\sigma^K_{MS} \subset \partial M} \Lambda^K_{MS}(u_M - u_S) + \sum_{\sigma^K_{MS} \subset \partial M} G(u_M, u_S, \mathbf{n}^K_{MS}) = \alpha|M|u^\star_M \tag{3.20}$$

avec G le flux numérique pour la partie convective

$$G(u_M, u_S, \mathbf{n}^K_{MS}) = |\sigma^K_{MS}| f(u_M)\ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^K_{MS})^+ + |\sigma^K_{MS}| f(u_S)\ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^K_{MS})^-$$

avec

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^K_{MS} = \frac{1}{|\sigma^K_{MS}|} \int_{\sigma^K_{MS}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^K_{MS}\, d\sigma.$$

et les coefficients de transmissibilité sur K sont

$$\Lambda^K_{MS} = -\int_K \Lambda(x) \nabla\varphi_S \cdot \nabla\varphi_M.$$

1. Montrer que la forme générale de $G(u, v, \mathbf{n}) = |\sigma| f(u)\ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^+ + |\sigma| f(v)\ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^-$ vérifie :

(a) **(conservation)** $G(u, v, \mathbf{n}) = -G(v, u, -\mathbf{n})$

(b) **(consistance)** $G(u, u, \mathbf{n}) = |\sigma| f(u) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$

(c) **(Monotone)** $u \mapsto G(u, \cdot, \cdot)$ est croissante, $\quad v \mapsto G(\cdot, v, \cdot)$ est décroissante

2. On suppose que les coefficients de rigidité $\Lambda^K_{MS} > 0$ pour $M, L \in S_K$ (M et L sommets de K). Montrer que si $u^\star_M \geq 0$, $\forall M \in \mathcal{M}_h$ alors $u_M \geq 0$, $\forall M \in \mathcal{M}_h$.

3. Soit $m = Card(\mathcal{M}_h)$. Définir l'application ξ

$$\xi : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

permettant de montrer l'existence de u_h.

4. Montrer que la suite $(u_h)_h$ est bornée uniformément dans $H^1(\Omega)$.

5. En déduire qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_{h)_h}$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ et que $(f(u_h))$ converge vers $f(u)$ dans $L^2(\Omega)$.

6. Suivre les mêmes démarches que le cours pour montrer la convergence du schéma numérique.

4 TP

Exercice 4.1 (Schéma VF4–Problème diffusion)
Le but est de programmer la méthode de volumes finis VF4 sur un maillage triangulaire orthogonale. On considère l'équation elliptique suivante

$$-\Delta u(x) + \theta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{4.1}$$

avec la condition aux limites suivante :

$$u(x) = g, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.2}$$

1. Gestion du maillage.
Le maillage de type MAILLAGEGEO (dans le dossier Lestests) contient les informations nécessaires pour construire un maillage :

— nombre des sommets **Nbs**

— nombre des triangles **Nbt**

— nombre de segments **Nseg**

— nombre des sommets interieurs **Nsint**

— nombre des sommets sur le bord **Nbord**

— Les coordonnées de tous les sommets CoordS(1 :2,1 :Nbs) et le type des sommets 0 pour un sommet à l'intérieur du domaine et 1 s'il est sur le bord.

— Pour chaque triangle, les numéros des trois sommets NuSo(1 :3,1 :Nbt), les coordonnées du centre CoordK, aire AireK

— Pour chaque segment, les numéros des deux sommets NuSeg(1 :2, .), le nombre des voisins NombVoisSeg =2 si le segment à l'intérieur et 1 s'il est sur le bord, les numéros des deux triangles de part et d'autre du segment, NumTVoisSeg(1 :2) avec NumTVoisSeg(2) négatif si le segment est sur le bord, le type du segment NTypSeg(:) =0 si le segment est à l'intérieur et 1 s'il est sur le bord, TauKL et enfin dKL

— Le programme principal est : laplacienvfmacs.f90. Avant de commencer à programmer, ouvrir chaque module longr, parmmage, imprime, intmatvec, algebrelineaire, plotvtkmod et comprendre sans les modifier. Le module fsourcemod peut être modifier.
Le programme principal contient toutes les étapes commentées.

— La subroutine init contient les données et donc modifiable.

— Comprendre la subroutine readmesh (nonmodifiable)

— La structure de la matrice A est celle du stockage creux classique : les coefficients non nuls de A, indice premier dans la ligne, indice de colonne. La subroutine matrixinitVF4 (non modifiable) alloue la structure de la matrice à comprendre absolument pour comprendre le reste !

— Le second membre est : $|K|f(x_K)$, compléter l'instruction $A\%F$.

— $A\%Bg$ contient le second membre et la contribution sur le bord.

— Expliquer la subroutine assembleVF4 et la compléter.

— Expliquer la subroutine assembletheta

— compléter le fichier fsoucemod pour tester le code avec les solutions exactes solutions :

(a) ChoixPb = 1, Uexacte = 1.

(b) ChoixPb = 2, Uexacte = $x + y$

(c) ChoixPb = 3, Uexacte = $x^2 - y^2$

(d) ChoixPb = 4, Uexacte = $\cos(5\pi(x + y))$

(e) ChoixPb = 5, Uexacte = $x(1 - x)y(1 - y)$

(f) Choixpb = 6, Uexacte = $\sin(\pi x)sin(\pi y)$

— pour exécuter le programme lire *readme*

— Calculer l'erreur L^2 entre la solution exacte et la solution calculée.

— Comparer la norme du gradient discret de la solution calculée et celle de la solution exacte

— Tracer les solutions Ucalcule.vtk et Uexacte.vtk si vous disposez d'un logiciel pour lire les formats vtk. Le maillage maillage1.jpeg est celui associé à MAILLAGEGEO1

Exercice 4.2 (Schéma VF4–Problème diffusion–convection (Facultatif))
Modifier le code pour ajouter le terme convectif $div(\mathbf{V}u)$ en utilisant le schéma décentré classique.