

Stage de fin d'étude
Université de Nantes
M2 MACS promotion 2019-2020

Étude de schémas de couplage en temps
de modèles de types boîtes noires et
implémentation dans la plateforme
logicielle PROCOR pour les accidents
graves dans les réacteurs nucléaires

Effectué par:
DHIYAOU-DINE
AHMED KASSIM

Tuteur:
LOUIS VIOT

Septembre 2020

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier vivement le chef du laboratoire **LMAG** M. Laurant SAAS et mon tuteur de stage M. Louis VIOT de m'avoir permis de réaliser ce stage au sein du laboratoire **LMAG** pour une durée de quatre mois, ce qui était un grand honneur pour moi de travailler avec cette belle équipe, enthousiaste et accueillante. Je le remercie pour la qualité de ses recommandations, sa disponibilité, sa patience et sa gentillesse. Mes remerciements pour tout le personnel du laboratoire **LMAG** de m'accueillir dans leur famille pour une si agréable aventure et de me faire profiter de leur expertise et valeur. Je tiens aussi à remercier, les enseignants de ce Master, qui nous ont inculqué des outils fondamentales, sans quoi il serait difficile de faire face à mes recherches. En fin, un grand merci pour les responsables de ce Master, de nous avoir permis de poursuivre cette formation, une chose qui me tenait beaucoup à cœur.

Contents

1	Introduction	4
2	Accidents graves dans les réacteurs à eau pressurisée	6
2.1	Fonctionnement et sûreté dans les REP	6
2.2	Phénomène d'accident grave dans un REP	8
3	Équations gouvernant le système	11
3.1	Équations paramétrées de sous-domaine regroupés	11
3.2	Équation sur l'interface	12
3.3	Système couplés	14
4	Schémas de résolution du couplage et de synchronisation des modèles	15
4.1	Les équations discrètes couplées	15
4.2	Schémas de couplages explicites	17
4.3	Schémas de couplages implicites	17
5	Analyse numérique et exemples	18
5.1	Analyse de la stabilité linéaire pour un couplage de solveur LP	18
5.2	Cas explicite	19
5.3	Analyse de la stabilité	19
5.4	Cas implicite	21
5.5	Analyse de la stabilité	21
5.6	Résultats numériques	23
6	Conclusion	25

List of Figures

1	Principe de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée	6
2	De la gauche vers la droite : Assemblage combustible et crayon combustible	7
3	Représentation schématique de la propagation du corium du cœur du réacteur jusqu'au radier en béton du puits du réacteur.	9
4	Représentation d'une décomposition d'un domaine Ω centrée sur Ω_i et ses voisins $\Omega_{j \in N_i}$	11
5	Graphe de couplage partiel d'un système complexe associé à un problème de couplage. Le système est composé de k modèle. Le graphe est centré sur le modèle \mathcal{M}_i et seuls ses couplages sont présentés.	15
6	Intersection entre \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2	18
7	interface heat flow rate $\bar{h} = 3.5$	24
8	interface température $\bar{h} = 3.5$	24
9	interface heat flow rate $\bar{h} = 3.7$	24
10	interface température $\bar{h} = 3.7$	24

1 Introduction

La résolution mathématique et numérique des problèmes multi-échelle et multi-physiques couplés est un défi technique majeur dans le domaine de l'ingénierie. Dans le domaine des accidents graves dans les réacteurs nucléaires, des différents phénomènes sont couplés avec un temps caractéristique, longueur et masse, qui varient de micro-secondes à jours, millimètres à mètres, kilogrammes à des centaines de tonnes. Cela exige une simulation de l'intégralité d'un scénario d'accident grave ou une partie de ce dernier, ce qui conduit à un problème couplé de différentes grandeurs physiques. Pour cela il faut utiliser des simulations pour avoir une bonne compréhension de certains phénomènes intervenants le long de ces accidents. A cause d'un manque de connaissances physiques et phénoménologiques de ce type de problème, un large spectre de modèles, modélisant les phénomènes physiques sous-jacents est utilisé (par exemple, modèles stationnaire, modèles réduits ...). Les modèles appelés "0D modèles", ou aussi appelés "Lumped parameter models" (LP models), se basent sur l'intégration des EDP sur tout le volume considéré du domaine. Cela permet de gagner en temps de calcul et en coup de calcul. Toute fois, la simplification implique un prix à payer

- les modèles LP utilisent des lois de fermetures souvent décrites par des fonctions non linéaires, donc pas très simple à évaluer.
- Les modèles LP ignorent le temps final de propagation des informations de l'équation continue, le temps de discrétisation ...

et encore d'autres difficultés à gérer.

Pour le couplage de ces phénomènes, nous disposons de deux types de schémas :

- les schémas de couplage explicites
- les schémas de couplage implicites

Dans les codes accidents graves, le schéma explicite est généralement utilisé. Malheureusement, les modèles utilisés dans les AG sont souvent raides et non adaptés au schéma explicite. Le but du stage est d'étudier l'utilisabilité des schémas explicites et implicites sur un exemple de couplage important pour les AG.

Ici nous nous concentrons sur les solutions numériques du couplage de modèles *OD* hétérogènes par une approche partitionnée. Nous considérons par conséquent un couplage simple de deux domaines liquide et solide, mais ce couplage est très important pour les accidents graves dans les réacteurs nucléaires. En général, dans les accidents graves, les problèmes couplés font intervenir de nombreux modèles (≥ 10) couplés.

Notre travail consiste à :

1. étudié la stabilité théorique d'un problème couplé par un schéma explicite
2. étudié la stabilité théorique d'un problème couplé par un schéma implicite
3. validé notre étude théorique par des simulations numériques

Pour cela, notre travail est composé comme suit :

Dans la section (2) on présente le concept d'accident grave dans les réacteurs nucléaires à eau pressurisée (ce qui est le domaine de notre travail).

Dans la section (3) nous définissons les équations modélisant notre problème et définissons les conditions aux bords suivant le type de contact entre deux domaines et enfin, nous définissons les lois de fermetures de nos systèmes.

Dans la section (4) nous présentons le concept de couplage entre domaines ainsi que les couplages explicites et implicites que nous allons appliquer à nos systèmes.

Enfin, dans la section (5) nous étudions la stabilité de nos systèmes avec un schéma explicite et un schéma implicite et nous interprétons numériquement les résultats obtenus.

2 Accidents graves dans les réacteurs à eau pressurisée

Suite à un accident au sein d'un réacteur nucléaire, des produits radioactifs se dispersent dans la nature, présentant beaucoup de risques en premier lieu envers les gérants des installations nucléaires, puis l'environnement et la population, proche ou distante de ces installations. Dans la sûreté nucléaire, le principal travail consiste à réduire ces risques, afin d'assurer la sécurité de tous. Dans cette étude, nous ne parlerons que des réacteurs à eau pressurisée (**REP**). L'extension de cette étude à d'autres types de réacteurs tels que, les réacteurs bouillants de Fukushima Daiichi ou réacteurs à neutrons rapides reste possible, en prenant en compte la géométrie et les phénomènes physiques propres de ces réacteurs.

2.1 Fonctionnement et sûreté dans les REP

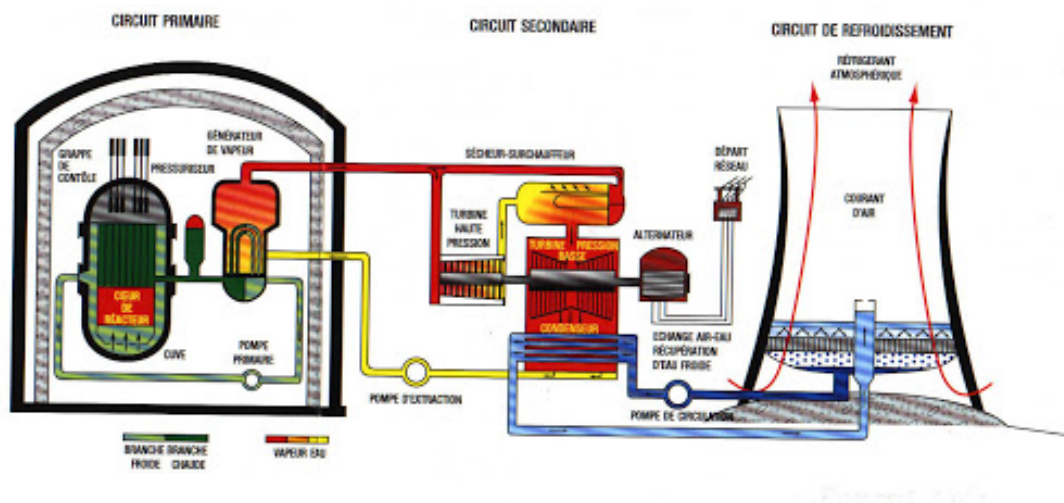


Figure 1: Principe de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée

Dans un réacteur de puissance type REP (Figure 1), les réactions neutroniques du cœur du réacteur génèrent de l'énergie. Celle-ci est extraite à l'aide d'un fluide caloporteur : l'eau, sous forme de chaleur. La transformation de l'énergie thermique en énergie électrique se fait en plusieurs étapes au sein du réacteur :

1. Extraction par refroidissement de la chaleur du cœur du réacteur contenant le combustible. Cette extraction est assurée par l'eau circulant en circuit fermé dans le circuit primaire du réacteur à une pression de 155 bars et à une température pouvant atteindre 320° C.
2. Transmission de la chaleur récupérée par l'eau dans la circuit primaire à l'eau circulant dans la circuit secondaire au niveau du générateur de vapeur. Étant à une pression inférieure, elle s'évapore et alimente le groupe turbo-alternateur produisant l'électricité.

3. Le reste de l'énergie contenue dans l'eau est enfin transmise à l'extérieur.

La chaleur extraite du cœur, moteur du réacteur nucléaire provient :

- principalement des réactions de fission de certains isotope de l' ^{235}U contenus dans le combustible nucléaire disposé dans le cœur du réacteur nucléaire dans des assemblages de crayons de combustibles.

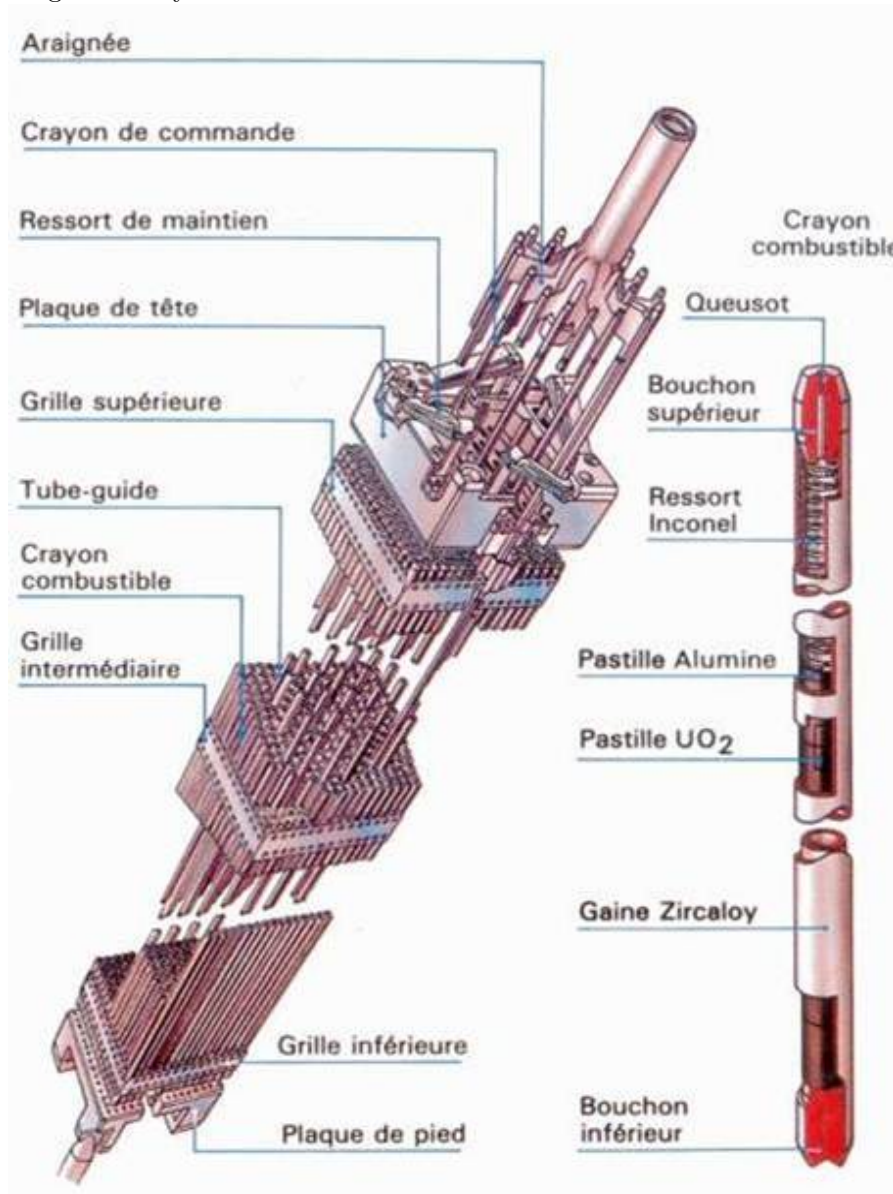


Figure 2: De la gauche vers la droite : Assemblage combustible et crayon combustible

- d'une puissance résiduelle due à la désintégration radioactive des produits de fission.

Ainsi, pour assurer la sûreté d'un **REP** à tout moment de son fonctionnement, une maîtrise de la réactivité du cœur est nécessaire pour assurer l'extraction de l'énergie émise sous forme de chaleur tout en assurant le confinement des matières radioactives. Trois barrières physiques successives présentes dans le réacteur assurent ce confinement : la gaine des crayons combustibles, le circuit primaire fermé (la cuve du réacteur) et l'enceinte de confinement en béton du réacteur. Toutefois, des défaillances humaines ou physiques peuvent parvenir, comme la rupture de gaines, fuite dans le circuit primaire, ablation de l'enceinte de confinement du réacteur. Pour pallier ces défaillances, des stratégies de défense en profondeur, divisée en plusieurs niveaux ont été introduite.

A ce concept de défense en profondeur déterministe, issu du retour d'expérience et de recherche, on associe une approche de sûreté probabiliste. Elle trouve son intérêt dans les réacteurs nucléaires du fait du grand nombre de défaillances humaines possibles et du manque de connaissance globale sur la physique mise en jeu.

Ces deux approches combinées, permettent la mise en place de mesure prévenant tout incident pouvant survenir dans un réacteur et apporter des corrections éventuellement. Ainsi, l'extraction de l'énergie émise par le cœur, la maîtrise de la réactivité du cœur et l'ensemble des barrières physique sont assurés, tout en prévenant le rejet de déchets radioactifs dans l'environnement.

Malgré toutes ces mesures, une accumulation d'incident, provenant d'erreurs matérielles ou humaines, peut conduire à une situation de fusion partielle ou complète du cœur : on parle alors d'accidents graves (**AG**)

2.2 Phénomène d'accident grave dans un REP

Un accident dans un réacteur nucléaire peut être causé par plusieurs facteurs, tels que : l'insertion d'une quantité importante de réactivité dans le cœur par retrait des barres de commandes permettant de réguler sa neutronique. Ce sont des accidents de réactivité. Il ne sont pas traités dans cette étude.

Ici nous ne présentons les accidents graves initiés pas la perte de l'eau, constituant le réfrigérant primaire. On parle alors d'accidents de perte du réfrigérant primaire (**APRP**). Cette perte peut avoir différentes causes, comme l'ouverture d'une brèche de plus ou moins grande taille dans le circuit primaire du réacteur ou une perte d'électricité permettant, entre autres, aux pompes injectant l'eau de fonctionner.

Lors d'un **AG** dans un **REP** le manque de liquide de refroidissement (due à une cause citée ci-dessus par exemple) dans la cuve du réacteur conduit à l'échauffement et à la fusion du cœur du réacteur : la matière ainsi obtenue est le bain de corium (matériaux liquides oxydés et métalliques). Le corium a une température avoisinant les 2850 K. Au cours de sa progression, il interagit avec les structures métalliques environnantes pour se re-localiser au fond de la cuve. Au contact avec l'eau présente au fond de la cuve, le corium peut se refroidir et former un lit de débris. Ce lit de débris n'étant plus refroidi, va alors fusionner à son tour pour former un bain de corium. Des flux de chaleur importants provenant du corium vont être imposés sur la cuve pouvant mener à sa rupture et à la propagation du corium dans le puits de cuve. Le corium va donc interagir avec le radier en béton du réacteur, l'ablater et potentiellement s'échapper vers l'extérieur.

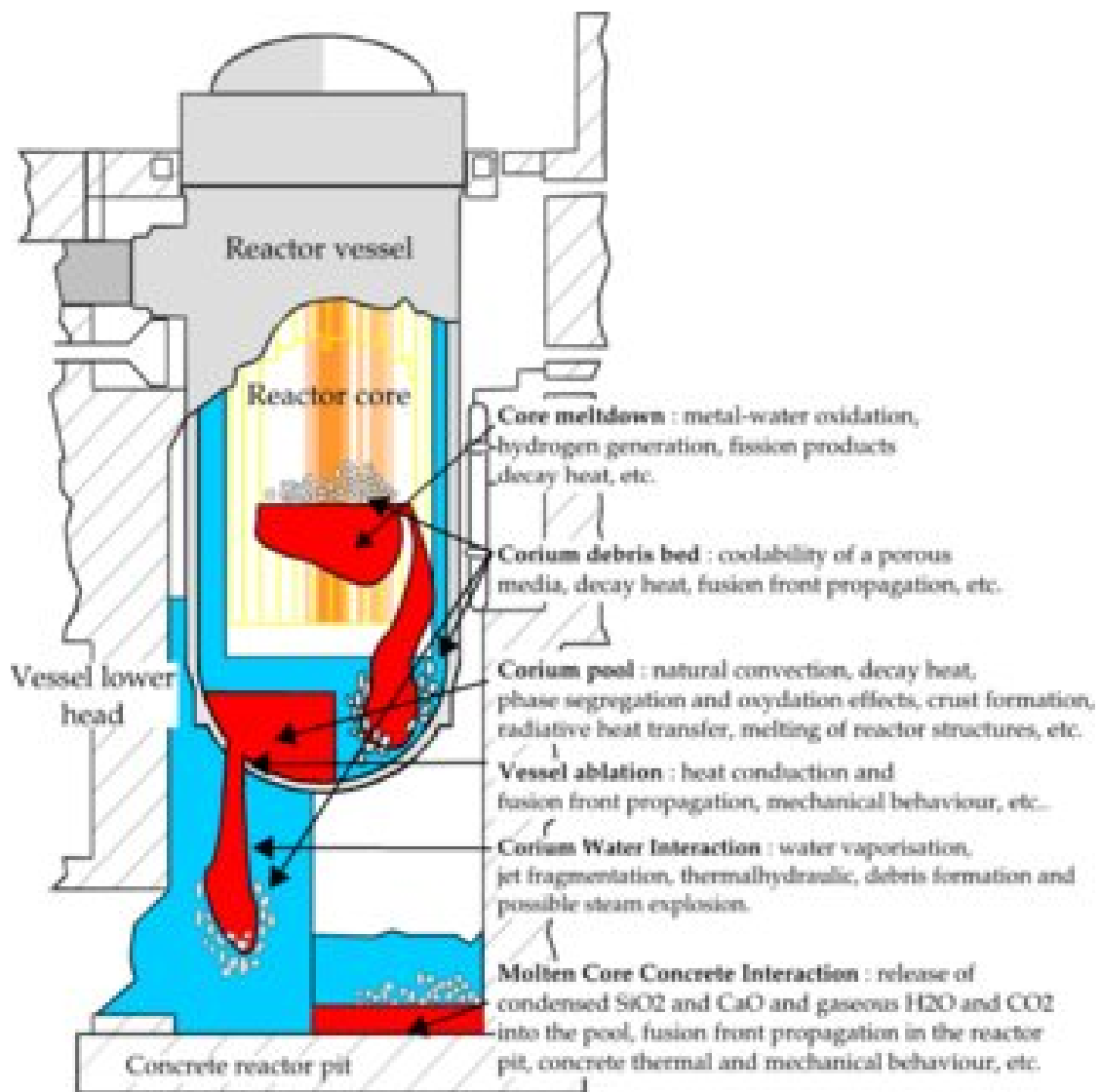


Figure 3: Représentation schématique de la propagation du corium du cœur du réacteur jusqu'au radier en béton du puits du réacteur.

Lors de la propagation du corium, on a trois risques majeurs :

- Interaction corium/eau (Figure 3). Aussi appelé explosion de vapeur. Elle se produit en cas de contact entre le corium et l'eau dans la cuve ou dans le fond de cuve. Une explosion due à la vaporisation instantanée de l'eau causée par le fort écart de température entre les deux matériaux est possible et peut fortement endommager les structures environnantes.
- Le risque hydrogène. Lors de l'oxydation des gaines des crayons combustibles, des structures métalliques contenues dans la cuve, de la structure de la cuve ou du

béton de la cuve, un fort dégagement d'hydrogène est possible. A une concentration trop importante, l'hydrogène peut s'enflammer et une explosion peut endommager l'enceinte du réacteur.

- Interaction corium/béton (Figure 3). Lorsque le corium atteint le puits de cuve lors de sa propagation, il entre en contact avec le béton composant ce dernier. Cette interaction est à l'origine de l'ablation du béton et pourrait conduire au percement du radier dans certain cas et à la libération de produits radioactifs dans l'environnement.

Ces trois risques mettent en péril la troisième barrière avant l'environnement extérieur au réacteur.

Par conséquent, une modélisation précise de la propagation du corium depuis la fonte du cœur jusqu'à son interaction avec le radier en béton du réacteur est essentielle pour prévenir l'apparition de ces phénomènes.

3 Équations gouvernant le système

On suppose que le problème couplé se base sur différentes caractéristiques des différents domaines. La figure (Figure 4) décrit une décomposition du domaine Ω tel que $\Omega = \bigcup_{i \in [1, m]} \Omega_i$ sans chevauchement. Les domaines voisins de Ω_j sont couplé avec Ω_i par l'interface Γ_{ij} . Ω_j peut être le voisin actuel de Ω_i (i.e $\Gamma_{ij} \neq \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$) ou peut être distant du domaine Ω_i auquel cas il est lié par des phénomènes lointains (i.e $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = 0$). Les voisins du domaine Ω_i sont représentés par l'ensemble $N_i = \{j / \exists \Gamma_{ij}\}$, avec un cardinal qu'on note $n_i = \text{card}(N_i)$. En fin, le frontière de Ω_i peut être calculé par $\partial = \Gamma_i \cup (j \in N_i \Gamma_{ij})$. Le domaine Ω_i est défini en terme de masse par $m_i[kg]$ et température moyenne notée $T_i[K]$:

$$m_i = \int_{\Omega_i} \rho dV, \quad T_i = \frac{1}{V_{\Omega_i}} \int_{\Omega_i} T dV.$$

Le vecteur des variables d'état du sous-domaine Ω_i est noté $\mathbf{u}_i = (m_i, T_i)^t$. Notez que dans cet article, nous représentons chaque sous-domaine en termes de températures moyennes même si il pourrait être représenté en terme d'enthalpie moyenne. Les variables d'interface sont les flux thermiques $\phi_{ij}[W.m^{-2}]$, la température $T_{ij}[K]$, le débit massique $\dot{m}_{ij}[kg.s^{-1}]$ ou la surface $S_{ij}[m^2]$. Ces variables sont regroupées dans le vecteur $\mathbf{b} = \{(\phi_{ij}, T_{ij}, \dot{m}_{ij}, S_{ij})^t\}$ pour $i \in [1, m]$ et $j \in N_i$.

3.1 Équations paramétrées de sous-domaine regroupés

Les équations sont exprimées en termes d'équations macroscopiques de conservations de masse et d'énergie. Elles sont obtenues à partir des équations de conservation locales, ici les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq pour les domaines liquide et équations de chaleur pour les domaines solides, intégrées sur le sous-domaine correspondant (Le Tellier et al., 2017). Étroitement liée au modèle physique local, cette approche conduit au modèle dit LP ou modèle «0D» du sous-domaine décrit par les deux équations différentielles ordinaires (ODE)

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j \in N_i} \dot{m}_{ij} \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (1)$$

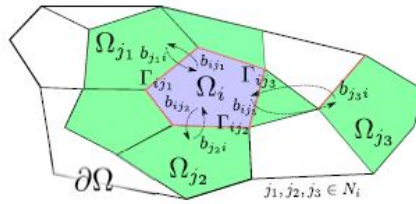


Figure 4: Représentation d'une décomposition d'un domaine Ω centrée sur Ω_i et ses voisins $\Omega_{j \in N_i}$

$$m_i C_{p_i} \frac{dT_i}{dt} + \sum_{j \in N_i} \dot{m}_{ij} C_{p_i} (T_i - T_{ij}) = \sigma_i \phi_i S_i + \sum_{j \in N_i} \sigma_{ij} \phi_{ij} S_{ij} + m_i \dot{q}_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad (2)$$

avec $m_i[kg]$ la masse et $T_i[K]$ la température moyenne du domaine Ω_i , $\phi_i[W.m^{-2}]$ le flux de chaleur sur le bord $\Gamma_i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ avec comme température T_{b_i} et comme surface $S_i[m^2]$ ($\sigma_i = -1$ pour un refroidissement et $\sigma_i = 1$ sinon), ϕ_{ij} le flux de chaleur de refroidissement ou de chauffage et $\dot{m}_{ij}[kg.s^{-1}]$ le débit de la masse algébrique sur Γ_{ij} avec comme température T_{ij} et la surface S_{ij} . Enfin, $C_{p_i}[J.kg^{-1}.K^{-1}]$ la capacité de chaleur et $\dot{q}_i[W.kg^{-1}]$ la puissance résiduelle par unité de masse provenant de la fission des éléments radioactifs du sous-domaine Ω_i .

3.2 Équation sur l'interface

Les interface entre deux sous-domaines Ω_i et Ω_j dans notre étude, peuvent être soit fixe, soit mobile. Dans le cas d'un échange de produit fondu ou matière solide entre un sous domaine solide et un sous domaine liquide, l'interface est mobile. Elle est associée à un front de solidification/fusion plan correspondant à la condition de Stefan à l'interface (Le Tellier et al., 2017). Les interfaces fixes correspondent à l'équilibre thermique, en supposant aucun échange de masse à travers l'interface et une conduction thermique. Pour une interface mobile, les conditions d'équilibre à l'interface Γ_{ij} sont données par :

$$\dot{m}_{ij} = -\dot{m}_{ji} \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (3)$$

$$\phi_{ij} S_{ij} = \phi_{ji} S_{ji} + \Delta \mathcal{H}^{fus} \dot{m}_{ij} \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (4)$$

$$T_{ij} = T_{ji} = T^{fus} \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (5)$$

avec $\Delta \mathcal{H}^{fus}$ l'enthalpie de fusion et T^{fus} la température de fusion du domaine Ω_i , les deux supposées fixes. En particulier, ces conditions stipulent que le taux de masse sur les deux cotés de l'interface pour la conservation de la masse et que les flux de chaleurs doivent respecter la condition de Stefan. Pour simplifier, les matériaux des sous-domaines sont traités comme corps purs et aucune thermochimie n'est considérée.

Pour une interface fixe, les conditions d'équilibre sur l'interface Γ_{ij} sont données par :

$$\dot{m}_{ij} = -\dot{m}_{ji} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, \quad (6)$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, \quad (7)$$

$$\phi_{ij} S_{ij} = \phi_{ji} S_{ji} \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (8)$$

Des lois de fermetures appropriées sont requises pour les flux et les températures sur l'interface pour les équations ci-dessus.

Si le domaine Ω_i est solide, les loi de fermeture pour les flux thermiques ϕ_{ij} peuvent être calculées à partir de l'équation de conduction de la diffusion thermique sous certaines hypothèses et approximations. Une comparaison de ces différents modèles d'approximations

avec une solution de référence est donnée par une discrétisation par éléments finis de l'équation de conduction thermique dans Le Tellier et al. (2017). Par exemple, le modèle quadratique suppose un profil de température quadratique dans le domaine solide. Les flux de chaleur de conduction aux interfaces Γ_{ij} et Γ_{ik} associés aux surfaces supérieure et inférieure du cylindre sont alors données par : (Le Tellier et al., 2017):

$$\phi_{ij} = \lambda_i \frac{6T_i - 4T_{ij} - 2T_{ik}}{e_i} \quad (9)$$

$$\phi_{ik} = \lambda_i \frac{6T_i - 4T_{ik} - 2T_{ij}}{e_i} \quad (10)$$

Avec e_i la longueur caractéristique et λ_i la conductivité thermique.

Notez, par exemple, la propagation instantanée de la température T_{ik} à l'interface Γ_{ik} vers l'interface Γ_{ij} dans l'Eq. (10), indique que le modèle stationnaire donne des lois de fermeture qui propagent instantanément les données liées aux limites entre les interfaces du domaine.

On peut aussi trouver d'autres lois de fermeture non linéaire pour ϕ_{ij} . Par exemple une loi de transfert de chaleur de convection :

$$\phi_{ij} = \frac{\lambda_i N_u}{e_i} (T_i - T_{ij})^\beta \quad (11)$$

Elle est par exemple utilisée pour calculer le flux de chaleur du bain de corium dans la partie inférieure vers la cuve. Pour les calculs avec ce flux, deux cas sont possible :

- le cas où l'on utilise un Rayleigh interne. Dans ce cas le $\beta = 1$, ce qui rend le système bien exploitable au calcul et des résultat conforme à l'analyse numérique. Dans ce cas, nous validerons notre analyse par la simulation numérique.
- le cas où l'on utilise un Rayleigh externe. Dans ce cas, les calculs sont très compliqués pour l'analyse numérique. Dans ce cas, nous aurons recours aux simulations pour analyser le comportement du système.

Dans la suite de notre analyse nous considérerons le cas ou $\beta = 1$. L'égalité (11) s'écrit :

$$\phi_{ij} = C^{te} e_i^\alpha (T_i - T_{ij})$$

En effet :

$$\phi_{ij} = \frac{\lambda_i N_u}{e_i} (T_i - T_{ij})$$

Avec N_u est le nombre de Nusselt, donné par une corrélation expérimentale à partir du Rayleigh.

$$\text{avec } N_u = a R_{ai}^b \text{ et } R_{ai} = C^{te} e_i^c \text{ et } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } N_u = a \cdot C^{t'} \cdot e_i^{c \cdot b}$$

$$\text{on obtient } \phi_{ij} = C^{te''} e_i^{c \cdot b - 1} (T_i - T_{ij})$$

$$\text{D'où } \phi_{ij} = C^{te} e_i^\alpha (T_i - T_{ij})$$

Avec R_{ai} le Rayleigh interne.

3.3 Système couplés

On considère un système couplé composé d'un domaine liquide et d'un domaine solide couplé sans échange de masse. Dans ce cas, les deux domaines sont couplés par les équations (3), (4) et (5). Les flux à l'interface sont donnés par :

$$\phi_{ij} = C^{te} e_i^\alpha (T_i - T_{ij}) \quad (12)$$

$$\phi_{ik} = \lambda_i \frac{6T_i - 4T_{ij} - 2T_{ik}}{e_i} \quad (13)$$

Dans notre étude nous considérons un interface fixe (interaction entre domaine solide et domaine liquide). Donc, on considère un flux de convection et un flux de conduction. Par conséquent, les lois de fermeture pour les flux à l'échelle macroscopique de l'équation de la conservation de l'énergie (2) seront donné par les équation *LP* (12) et (13).

Notez qu'à titre de comparaison, ces flux thermiques seront également calculés par des modèles de conduction thermique 1D lors de l'analyse numérique de notre problème.

4 Schémas de résolution du couplage et de synchronisation des modèles

Dans cette partie, pour définir la notion de couplage et synchronisation, nous revenons dans le concept général d'accident grave où les modèles peuvent prendre n'importe quel forme, pas seulement des modèles *OD*. Nous allons aussi définir les schémas explicites et implicites de réduction du couplage.

Chaque phénomène physique intervenant lors de la propagation du coirum dans un réacteur nucléaire lors d'un AG est modélisé par un modèle \mathcal{M}_i .

On associe un solveur numérique à chaque modèle. On notera \mathcal{M}_i le modèle ou son solveur associé. Dans notre contexte des AG, on utilise une modélisation par blocs couplés des phénomènes physiques. L'ensemble des modèles modélisant la propagation prend la forme d'un système complexe qu'on représente par le schéma ci-dessous

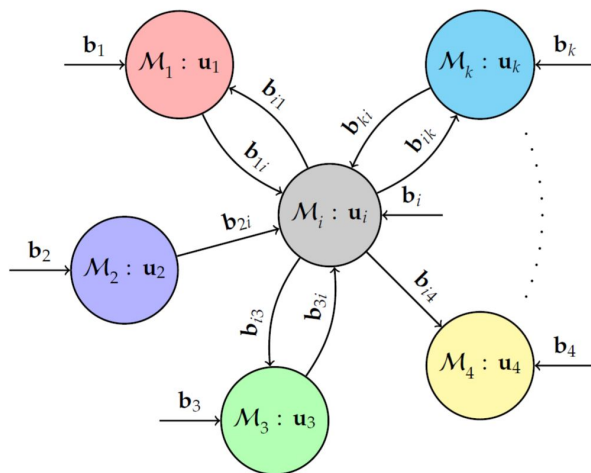


Figure 5: Graphe de couplage partiel d'un système complexe associé à un problème de couplage. Le système est composé de k modèle. Le graphe est centré sur le modèle \mathcal{M}_i et seuls ses couplages sont présentés.

4.1 Les équations discrètes couplées

Le solveur \mathcal{M}_i de la figure 5 est le modèle constitué des équations (1) et (2). Les modèles \mathcal{M}_i sont discrétisés en espace et en temps en interne et couplés en temps à un niveau supérieur externe aux modèles. On a ainsi deux niveau de boucle en temps. D'une part, avec des schémas implicites ou explicites de type Euler, Runge-Kutta d'ordre élevé par exemple, les modèles gèrent eux même leur schéma interne de discrétisation. Le modèle a son propre schéma d'intégration et son propre temps d'intégration. Le schéma d'intégration est supposé adapté à la physique du problème locale considéré. D'autre part, les modèles sont résolus et communiquent entre les temps $t^0, t^1, \dots, t^n, \dots$. Une

synchronisation est effectuée à chaque pas de temps. On note Δt le pas de temps. Il peut varié au cours de la simulation.

Pour tout solveur \mathcal{M}_i représentant le sous-domaine $\{\Omega_i\}_{i \in [1,m]}$, les équations discrétisées sont représentées par une fonction $\mathcal{F}_i^{\Delta t}$. Elle prend en paramètre, le vecteur d'état u_i du modèle \mathcal{M}_i , les variables de couplage reçues $\{b_{ij}\}_{j \in N_i} \stackrel{\text{déf}}{=} b_{*i}$ par ce solveur ainsi que les conditions limites b_i . En utilisant ces notations, la résolution du problème de couplage revient à résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1^{\Delta t}(u_1, \{b_{j1}(u_j, b_{*j})\}_{j \in N_1}) = 0 \\ \mathcal{F}_2^{\Delta t}(u_2, \{b_{j2}(u_j, b_{*j})\}_{j \in N_2}) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_m^{\Delta t}(u_m, \{b_{jm}(u_j, b_{*j})\}_{j \in N_m}) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Les interactions entre les modèles apparaissant dans (14) par le biais des variables d'entrées $b_{ij}(u_j, b_{*j})$ à l'interface Γ_{ij} entre les modèles \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_j pour $j \in N_{*i}$. Lors de la résolution du modèle \mathcal{M}_j , on calcul les variables d'interface à partir de u_j et b_{*j} . Ces dernières sont calculées par d'autres modèles nécessitant des données du modèle \mathcal{M}_i . Pour ce qui concerne le pas de temps de couplage Δt , il peut être calculé par une fonctionnelle \mathcal{F}_i si un événement lors de la résolution forçant le solveur \mathcal{M}_i à stopper sa résolution avant la fin complète du pas de temps. Ce pas de temps permet la synchronisation des modèles qu'on présente ci-après.

Mathématiquement, le solveur \mathcal{M}_i peut être vu comme une fonction calculant les variables de sorties b_{i*} à partir des variables d'entrées b_{*i} . Pour des raisons de simplicité, seules les variables d'interfaces apparaissent. On définit donc \mathcal{M}_i par :

$$b_{i*} = \mathcal{M}_i^{\Delta t}(b_{*i}) \quad (15)$$

De (15), on peut définir le problème couplé à l'interface Γ_{ij} en terme de solveur

$$b_{ij} = \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t}(b_{ji}, \{b_{ki}\}_{k \in N_i, k \neq j}) \quad (16)$$

$$b_{ji} = \mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t}(b_{ij}, \{b_{kj}\}_{k \in N_j, k \neq i}) \quad (17)$$

avec \mathcal{P}_{ij} le projecteur sur l'interface Γ_{ij} . Ces équations impliquent un principe d'"action-réaction" sur une interface entre deux domaines. Une modification de la variable b_{ij} entrainera une modification de la l'interface associée b_{ji} et vis-versa. La force de ce couplage est représentée par les matrices jacobienne $\{(\partial \mathcal{M}_i^{\Delta t}) / \partial b_{ki}\}_{k \in N_i}$ et $\{(\partial \mathcal{M}_j^{\Delta t}) / \partial b_{kj}\}_{k \in N_j}$. Malheureusement on ne peut pas exploiter cette force car le calcul du jacobien n'est pas toujours simple, et des fois pas possible.

En combinant (16) et (17) on obtient un problème de point fixe à l'interface Γ_{ij}

$$b_{ij} = \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t} \left(\mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t}(b_{ij}, \{b_{kj}\}_{k \in N_j, k \neq i}), \{b_{ki}\}_{k \in N_i, k \neq j} \right) \quad (18)$$

ce qui nous permet de définir l'opérateur résiduel à l'interface Γ_{ij} par

$$\mathcal{R}_{ij}(b) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t} \left(\mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t}(b, \{b_{kj}\}_{k \in N_j, k \neq i}), \{b_{ki}\}_{k \in N_i, k \neq j} \right) - b, \forall \quad b \quad (19)$$

Ce résidu exprime le déséquilibre crée à l'interface Γ_{ij} : si Ω_i et Ω_j sont fortement couplés, les conditions d'équilibres sur l'interfaces sont satisfaites et dans ce cas le résidu est nul car $\mathcal{R}_{ij}(b_{ij})$. Sinon, les deux domaines sont faiblement couplés.

4.2 Schémas de couplages explicites

Les schémas de couplages explicites résolvant le problème par un seul appel du solveur par pas de temps. Ils sont basés sur des solutions de (14) par des méthodes de Gauss-Seidel semi-explicites. Pour des algorithmes mieux parallélisable on peut utilisé aussi des méthodes type Jacobi ou explicites. En supposant qu'on résout $\mathcal{M}_i^{\Delta t}$ avant de résoudre $\mathcal{M}_j^{\Delta t}$, le problème résolu à l'interface Γ_{ij} s'écrit :

$$b_{ij}^{n+1} = \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t} \left(b_{ji}^n, \{b_{ki}^\bullet\}_{k \in N_i, k \neq j} \right) \quad (20)$$

$$b_{ji}^{n+1} = \mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t} \left(b_{ij}^{n+1}, \{b_{kj}^\bullet\}_{k \in N_j, k \neq i} \right) \quad (21)$$

la quantité b_{ki}^\bullet est évalué à t^n ou t^{n+1} si le solveur $\mathcal{M}_k^{\Delta t}$ est appelé avant ou après $\mathcal{M}_i^{\Delta t}$.

4.3 Schémas de couplages implicites

A l'interface Γ_{ij} , le couplage implicite est donnée par :

$$b_{ij}^{n+1} = \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t} (b_{ji}^{n+1}, \{b_{ki}^{n+1}\}_{k \in N_i, k \neq j}) \quad (22)$$

$$b_{ji}^{n+1} = \mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t} (b_{ij}^{n+1}, \{b_{kj}^{n+1}\}_{k \in N_j, k \neq i}) \quad (23)$$

On remarque que (22) et (23) donne des mêmes valeurs discrètes que le problème de point fixe (19), avec un résidu nul, ce qui implique qu'à l'interface Γ_{ij} on a un équilibre et donc le couplage entre Ω_i et Ω_j est fort. Cependant, il est intéressant de voir que d'un point de vu mathématique, le découplage à chaque pas de temps de (22) et (23) n'est pas possible, et c'est souvent moins contraignant d'utiliser des méthodes itératives, qui sont des suites itératives jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit rempli.

$$b_{ij}^{n+1,k+1} = \mathcal{P}_{ij} \circ \mathcal{M}_i^{\Delta t} (b_{ji}^{n+1,k}, \{b_{ki}^{n+1}\}_{k \in N_i, k \neq j}) \quad (24)$$

$$\tilde{b}_{ji}^{n+1,k+1} = \mathcal{P}_{ji} \circ \mathcal{M}_j^{\Delta t} (b_{ij}^{n+1,k+1}, \{b_{kj}^{n+1}\}_{k \in N_j, k \neq i}) \quad (25)$$

À partir de (25)

$$b_{ij}^{n+1,k+1} = \omega \tilde{b}_{ij}^{n+1,k+1} + (1 - \omega) b_{ij}^{n+1,k} \quad (26)$$

Les itérations continues jusqu'à ce que un critère de convergence soit satisfait.

5 Analyse numérique et exemples

5.1 Analyse de la stabilité linéaire pour un couplage de solveur LP

Pour notre analyse, nous revenons à notre problème initial de couplage entre un domaine liquide \mathcal{M}_1 et un domaine solide \mathcal{M}_2 (figure 6).

Les conditions aux bords de Dirichlet-Neumann à l'interface Γ_{12} sont données par (6), (7) et (8) : $\dot{m}_{12} = \dot{m}_{21} = 0$, $T_{12} = T_{21}$ et $\phi_{12} = \phi_{21}$. On calcul l'énergie de conservation des deux domaines en supposant leurs masses constantes. On fait donc l'analyse de la stabilité linéaire pour le solveur LP. Cette analyse se base sur une discrétisation en temps pour l'équation de conservation d'énergie (2) et les lois de fermeture (12) et (13) pour résoudre le problème de flux de conduction et de convection.

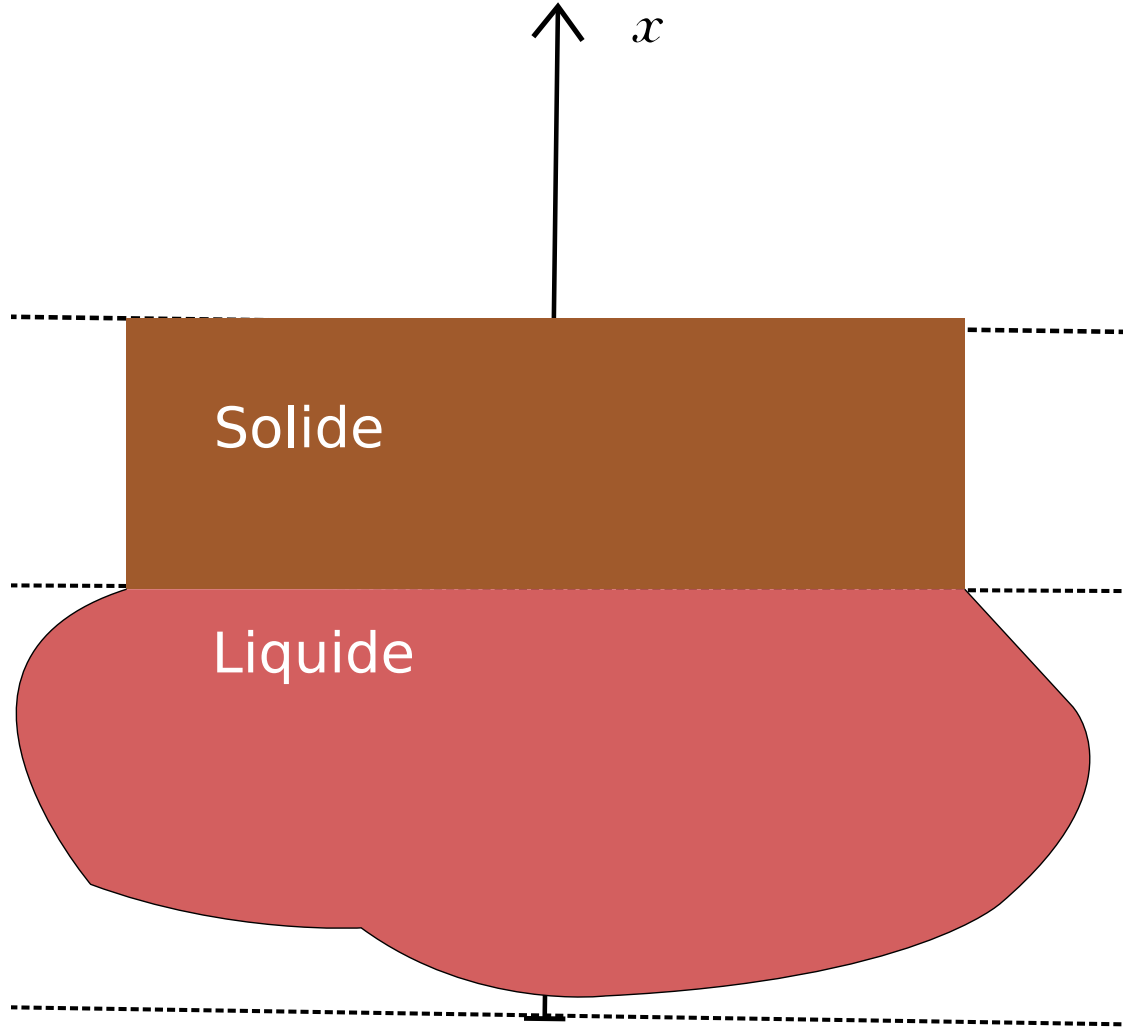


Figure 6: Intersection entre \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2

5.2 Cas explicite

L'objectif est de construire un prototype pour simuler un couplage de deux domaine Ω_1 et Ω_2 avec un schéma explicite sur un pas de temps de discrétisation. Pour se faire, on utilise un schéma d'Euler explicite pour Ω_1 et un schéma d'Euler implicite pour Ω_2 . On note Δt le pas de temps. Pour le premier domaine on a le système :

$$\mathcal{S}1 \begin{cases} \phi_{12}^n = C^{te} e_1^\alpha (T_1^n - T_{12}^n)^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \in \Omega_1 \\ \rho_1 C p_1 e_1 \frac{T_1^n - T_1^{n-1}}{\Delta t} = -\phi_{12}^n \in \Omega_1 \end{cases} \quad (27)$$

Avec la continuité de la température sur l'interface

$$T_{12}^n = T_{21}^n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{12} \quad (28)$$

et pour le deuxième domaine on a le système

$$\mathcal{S}2 \begin{cases} T_{21}^{n+1} = -\frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} \phi_{21}^n + \frac{3}{2} T_2^{n+1} - \frac{1}{2} T_{b_2} \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \\ \rho_2 C p_2 e_2 \frac{T_2^{n+1} - T_2^n}{\Delta t} = -\phi_{21}^n \in \Omega_2 \end{cases} \quad (29)$$

Avec la continuité du flux sur l'interface

$$\phi_{21}^n = -\phi_{12}^n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{12} \quad (30)$$

5.3 Analyse de la stabilité

Pour une température T_{21}^n donnée à l'interface à un instant t^n , le premier domaine va de t^{n-1} à t^n et un flux de chaleur est calculé à t^n . Ce flux de chaleur est alors imposé au second domaine. Celui-ci va de t^n à t^{n+1} et calcule une nouvelle température T_{21}^{n+1} à t^{n+1} et ainsi de suite. Le schéma couplé fait donc un seul appel par temps pour le solveur. Le schéma est explicite. On veut trouver des conditions de stabilités de ce schéma explicite.

•

$$\phi_{12}^n = C^{te} e_1^\alpha (T_1^n - T_{12}^n) \quad (31)$$

et

$$\phi_{12}^{n+1} = e_1^\alpha (T_1^{n+1} - T_{12}^{n+1}) \quad (32)$$

En faisant (32) - (31) on a:

$$\begin{aligned} \phi_{12}^{n+1} - \phi_{12}^n &= C^{te} e_1^\alpha (T_1^{n+1} - T_1^n) - C^{te} e_1^\alpha (T_{12}^{n+1} - T_{12}^n) \\ \text{or} \quad \rho_1 C p_1 e_1 \frac{T_1^n - T_1^{n-1}}{\Delta t} &= -\phi_{12}^n \\ \text{donc} \quad \phi_{12}^{n+1} - \phi_{12}^n &= -C^{te} e_1^\alpha \frac{\Delta t}{\rho_1 C p_1 e_1} - C^{te} e_1^\alpha (T_{12}^{n+1} - T_{12}^n) \\ \text{On note} \quad \tau_1 &= \frac{\rho_1 C p_1 e_1}{C^{te} e_1^\alpha} \\ \text{On a} \quad \phi_{12}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1} \right) &= \phi_{12}^n - C^{te} e_1^\alpha (T_{12}^{n+1} - T_{12}^n) \end{aligned} \quad (*)$$

Dans (S2)

$$T_{21}^{n+1} - T_{21}^n = \frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} (\phi_{21}^n - \phi_{21}^{n-1}) + \frac{3}{2} (T_2^{n+1} - T_2^n)$$

$$\text{Or } \rho_2 C p_2 e_2 \frac{T_2^{n+1} - T_2^n}{\Delta t} = -\phi_{21}^n$$

$$\text{Alors } T_{21}^{n+1} - T_{21}^n = \frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} (\phi_{21}^n - \phi_{21}^{n-1}) + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\rho_2 C p_2 e_2} \phi_{12}^n \quad (**)$$

En faisant (**) dans (*) on a

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1}\right) \phi_{12}^{n+1} = \phi_{12}^n - C^{te} e_1^\alpha \frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} (\phi_{12}^n - \phi_{12}^{n-1}) - \frac{3}{2} e_1^\alpha \lambda_2 \frac{\Delta t}{\rho_2 C p_2 e_2} \phi_{12}^n$$

$$\text{On note } \hbar = C^{te} e_1^\alpha / \left(\frac{e_2}{\lambda_2}\right) \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{\rho_2 C p_2 e_2}{C^{te} e_1^\alpha}$$

$$\text{Donc } \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1}\right) \phi_{12}^{n+1} = \left(1 - \frac{\hbar}{4}\right) \phi_{12}^n + \frac{\hbar}{4} \phi_{12}^{n-1} - \frac{3}{2} \hbar \frac{\Delta t}{\tau_2} \phi_{12}^n$$

On obtient finalement :

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1}\right) \phi_{12}^{n+1} - \left[1 - \left(1 + 6 \frac{\Delta t}{\tau_2}\right) \frac{\hbar}{4}\right] \phi_{12}^n - \frac{\hbar}{4} \phi_{12}^{n-1} = 0 \quad (33)$$

Avec $\hbar = C^{te} e_1^\alpha / (\frac{e_2}{\lambda_2})$, $\tau_1 = \frac{\rho_1 C p_1 e_1}{C^{te} e_1^\alpha}$ et $\tau_2 = \frac{\rho_2 C p_2 e_2}{C^{te} e_1^\alpha}$.

Pour assurer la stabilité du schéma explicite dans Ω_2 , on impose Δt assez petit que τ_2 tel que : $\Delta t / \tau_2 \ll 1$. L'équation caractéristique de (33) s'écrit donc :

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1}\right) x^2 - \left(1 - \frac{\hbar}{4}\right) x - \frac{\hbar}{4} = 0 \quad (34)$$

- Si $\Delta / \tau_1 \ll 1$ et pour tout \hbar , (34) admet deux racines réelles et en utilisant un développement de Taylor lorsque $\Delta / \tau_1 \ll 0$ on obtient :

$$x_1^* = 1 - \frac{4}{\hbar + 4} \frac{\Delta t}{\tau_1} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\Delta t}{\tau_1} \right)^2 \right]$$

et

$$x_2^* = -\frac{\hbar}{4} + \frac{\hbar^2}{4(\hbar + 4)} \frac{\Delta t}{\tau_1} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\Delta t}{\tau_1} \right)^2 \right]$$

Théoriquement, on remarque que si $\frac{\Delta t}{\tau_1} \ll 1, \frac{\Delta t}{\tau_2} \ll 1$, alors la condition de stabilité est $|\hbar| \leq 4$. Malheureusement on constate numériquement que le rapport $\frac{\Delta t}{\tau_1}$ et $\frac{\Delta t}{\tau_2}$ ne sont pas négligeable. Par conséquent, on a recours à la simulation numérique pour calculer la valeur \hbar^{stab} de stabilité pour laquelle on a stabilité si $\hbar < \hbar^{stab}$.

5.4 Cas implicite

L'algorithme de résolution est décrit ci-après. Pour une température $T_{21}^{n+1,0}$ pour le domaine Ω_1 , on itère pour $k \geq 0$ avec les étapes suivantes :

1. On calcul le flux de chaleur $\phi_{12}^{n+1,k+1}$ avec

$$S3 \begin{cases} \phi_{12}^{n+1,k+1} = C^{te} e_1^\alpha (T_1^n - T_{12}^{n+1})^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \in \Omega_1 \\ \rho_1 C p_1 e_1 \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = -\phi_{12}^{n+1,k+1} \in \Omega_1 \end{cases} \quad (35)$$

Avec la continuité de la température sur l'interface

$$T_{12}^{n+1} = T_{21}^{n+1,k} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (36)$$

2. On calcul la température à l'interface $\tilde{T}_{21}^{n+1,k+1}$ avec

$$S4 \begin{cases} \tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} = -\frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} \phi_{21}^{n+1} + \frac{3}{2} T_2^{n+1} - \frac{1}{2} T_{b_2} \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \rho_2 C p_2 e_2 \frac{T_2^{n+1} - T_2^{n-1}}{\Delta t} = -\phi_{21}^n \in \Omega_2 \end{cases} \quad (37)$$

Avec la continuité du flux sur l'interface

$$\phi_{21}^{n+1} = -\phi_{12}^{n+1,k+1} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (38)$$

3. Test de convergence avec

$$\frac{|\tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} - T_{21}^k|}{T_{21}^k} \leq \epsilon_{rel} \quad (39)$$

Si le résultat n'est pas satisfaisant on procède à une relaxation de la température sur l'interface

$$T_{21}^{n+1,k+1} = \omega \tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} + (1 - \omega) T_{21}^{n+1,k} \quad (40)$$

et on ré-effectue l'opération. Autrement, les flux de chaleur et températures définitifs sont donnés par $T_{21}^{n+1} = T_{21}^{n+1,k+1}$ et $\phi_{12}^{n+1} = \phi_{12}^{n+1,k+1}$. Par conséquent, les variables internes T_1^{n+1} et T_2^{n+1} peuvent être absolument calculer implicitement : l'algorithme itératif nous permet d'utiliser un solveur implicite pour les deux domaines si on peut découpler les deux domaines.

5.5 Analyse de la stabilité

•

$$\tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} = \frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} \phi_{12}^{n+1,k+1} + \frac{3}{2} T_2^{n+1} - \frac{1}{2} T_{b_2}$$

Avec $\rho_2 C p_2 e_2 \frac{T_2^{n+1} - T_2^{n-1}}{\Delta t} = -\phi_{21}^n$

On obtient

$$\tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} = \frac{1}{4} \frac{e_2}{\lambda_2} \phi_{12}^{n+1,k+1} - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\rho_2 C p_2 e_2} \phi_{12}^{n+1,k+1} + g(T_2^n, T_{b_2}) \quad (41)$$

Avec $g(T_2^n, T_{b_2}) = \frac{3}{2} T_2^n - \frac{1}{2} T_{b_2}$

Le flux s'écrit

$$\begin{aligned} \phi_{12}^{n+1,k+1} &= C^{te} e_1^\alpha (T_1^{n+1} - T_{21}^{n+1,k}) \\ \text{Avec } \rho_1 C p_1 e_1 \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} &= -\phi_{12}^{n+1,k+1} \\ \phi_{12}^{n+1,k+1} &= C^{te} e_1^\alpha \left(-\frac{\Delta t}{\rho_1 C p_1 e_1} \phi_{12}^{n+1,k+1} + T_1^n - T_{21}^{n+1,k} \right) \\ \text{Donc } \left(1 + C^{te} e_1^\alpha \frac{\Delta t}{\rho_1 C p_1 e_1} \right) \phi_{12}^{n+1,k+1} &= C^{te} e_1^\alpha T_1^n - C^{te} e_1^\alpha T_{21}^{n+1,k} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\phi_{12}^{n+1,k+1} = \frac{C^{te} e_1^\alpha}{1 + \frac{\Delta t}{\rho_1 C p_1 e_1} C^{te} e_1^\alpha} T_1^n - \frac{C^{te} e_1^\alpha}{1 + \frac{\Delta t}{\rho_1 C p_1 e_1} C^{te} e_1^\alpha} T_{21}^{n+1,k} \quad (42)$$

(42) dans (41) On obtient

$$\tilde{T}_{21}^{n+1,k+1} = -\frac{\hbar}{4} \left(\frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \right) T_{21}^{n+1,k} + g(T_1^n, T_2^n, T_{b_2}) \quad (43)$$

(43) dans (40) on obtient

$$T_{21}^{n+1,k+1} = \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] T_{21}^{n+1,k} + g(T_1^n, T_2^n, T_{b_2}) \quad (44)$$

On note $T_{2,1}^{n+1}$ la solution du problème aux point fixe associé à l'équation (44) et $e_k = |T_{2,1}^{n+1,k} - T_{2,1}^{n+1}|$ l'erreur à l'itération k.

Réduction de l'expression de l'erreur

$$\begin{aligned} e_k &= |T_{2,1}^{n+1,k} - T_{2,1}^{n+1}| \\ &= \left| \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] (T_{21}^{n+1,k-1} - T_{21}^{n+1,k-2}) \right| \\ \text{Donc } e_{k+1} &= \left| \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] (T_{21}^{n+1,k} - T_{21}^{n+1,k-1}) \right| \\ \text{D'où } e_{k+1} &= \left| \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] e_k \right| \end{aligned}$$

Donc l'erreur d'itération est donnée par

$$e_{k+1} = \mathcal{K} e_k \quad (45)$$

Avec

$$\mathcal{K} = \left| \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] \right| \quad (46)$$

Pour que le schéma soit stable, il suffit que \mathcal{K} soit inférieur à 1

$$\begin{aligned} \mathcal{K} < 1 &\iff \left| \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] \right| < 1 \\ &\iff -1 < 1 - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega < 1 \\ &\iff -2 < - \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega < 0 \\ &\iff 0 < \left(1 + \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \frac{\hbar}{4} \right) \omega < 2 \end{aligned}$$

Donc, l'algorithme itératif converge vers la solution à l'interface, c'est à dire $T_{21}^{n+1,\infty} = T_{21}^{n+1}$ et $\phi_{12}^{n+1,\infty} = \phi_{12}^{n+1}$ si et seulement si :

$$0 < \omega < \frac{2}{\left(1 + \left| \frac{1 - 6\Delta t/\tau_2}{1 + \Delta t/\tau_1} \right| \frac{\hbar}{4} \right)} \quad (47)$$

- Pour $\Delta t = 0$
L'équation (44) devient

$$T_{21}^{n+1,k+1} = \left[1 - \left(1 + \frac{\hbar}{4} \right) \omega \right] T_{21}^{n+1,k} + g(T_1^n, T_2^n, T_{b_2}) \quad (48)$$

et (47) devient

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \hbar/4} \quad (49)$$

Pour $\hbar > 4$, avec \hbar la valeur limite de convergence du schéma explicite, le schéma implicite converge avec $\omega < 1$. Plus ω est petit, plus lente sera la convergence.

5.6 Résultats numériques

L'analyse de la stabilité expérimentale sont illustrées par les figures suivantes. La courbe rouge nous trace le schéma implicite, et la courbe bleue nous trace le schéma explicite. Les deux domaines faisant l'objet de cette simulation sont à une température d'équilibre de $T_1 = T_2 = T_{12} = T_{21} = 2000K$ à $t = 0s$ et une discontinuité est appliqué sur le bord haut et le bord bas. Les conditions aux bords sont imposées à $t = 0^+$. On cherche par des simulations le \hbar^{stab} qui limite la région de stabilité en variant le \hbar . Les figures (7) et (8) montrent que les oscillations s'atténuent pour un $\hbar = 3.5$. Donc on est encore

sous régime de stabilité. Par contre les figures (9) et (10) montrent que les oscillations s'intensifient, ce qui montre que le schéma n'est plus stable pour un $\bar{h} = 3.7$. Ce qui nous permet de conclure que numériquement, on trouve qu'on a stabilité si $\bar{h} \in [3.5, 3.7]$.

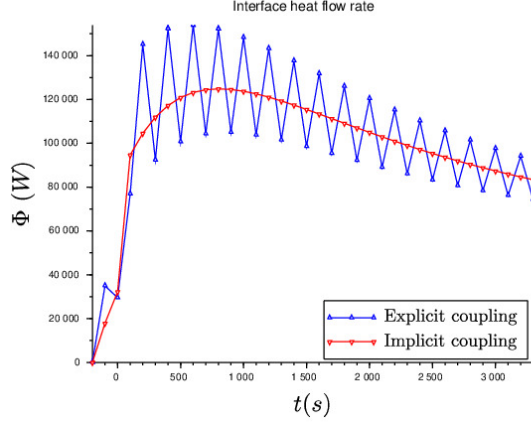


Figure 7: interface heat flow rate $\bar{h} = 3.5$

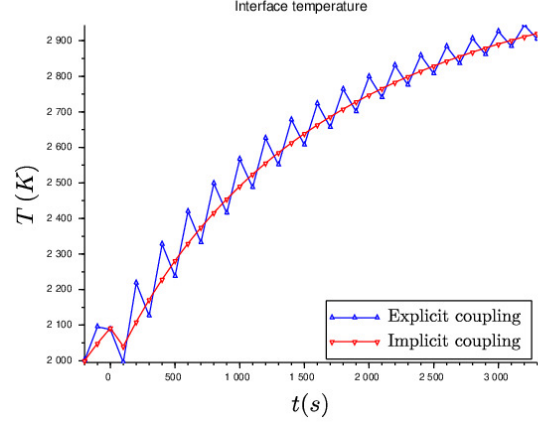


Figure 8: interface température $\bar{h} = 3.5$

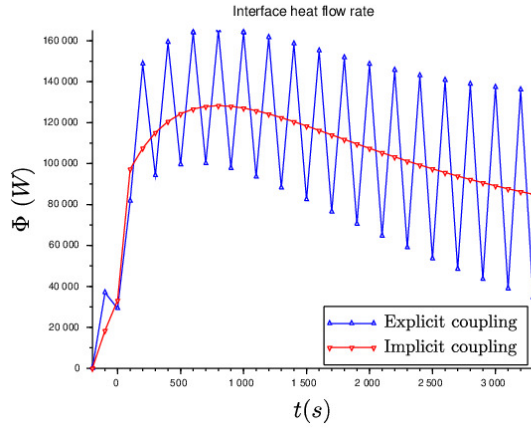


Figure 9: interface heat flow rate $\bar{h} = 3.7$

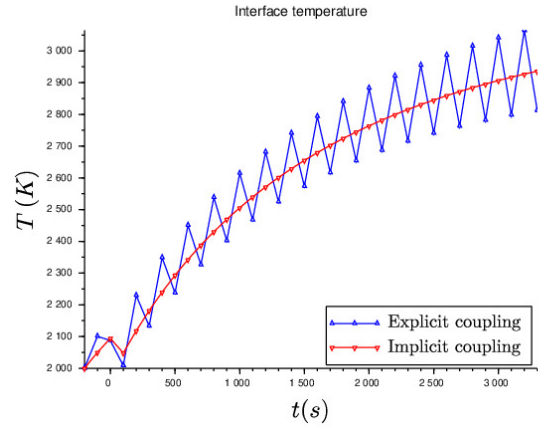


Figure 10: interface température $\bar{h} = 3.7$

Numériquement, on remarque que $\frac{\Delta t}{\tau_1}$ n'est pas négligeable et donc la condition de stabilité du schéma explicite n'est pas $|\bar{h}| < 4$, mais $\bar{h} < \bar{h}^{stab}$ avec \bar{h}^{stab} à calculer. Par la simulation numérique nous trouvons que $\bar{h}^{stab} \approx 3.6$. On remarque aussi numériquement que, pour différentes valeurs de ω vérifiant la relation (47), on a toujours une stabilité. La vitesse de convergence varie en fonction de la valeur de ω .

6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire le contexte multi-physiques et multi-échelles des AG dans les REP. De ce contexte, on a défini les équations modélisant le problème à résoudre pour répondre au besoins de sécurité. On a aussi défini le concept de couplage et présenté l'approche partitionnée utilisée pour résoudre les problèmes de couplage. Dans le cadre de notre étude, on s'est concentré sur un problème de couplage entre un domaine solide et un domaine liquide représentés par des équations $0D$ ou LP . C'est un problème très important pour les AG. Ensuite, on a fait une analyse numérique du couplage pour trouver des conditions de stabilités des schémas explicites et implicites utilisés pour résoudre notre problème. Par le calcul, on a vérifié les résultats de l'analyse numérique et on remarque que $\frac{\Delta t}{\tau_1}$ n'est pas négligeable et donc la condition de stabilité du schéma explicite n'est pas $|\tilde{h}| < 4$, mais $\tilde{h} < \tilde{h}^{stab}$ avec \tilde{h}^{stab} à calculer. Par la simulation numérique nous trouvons que $\tilde{h}^{stab} \approx 3.6$. On remarque aussi numériquement que, pour différentes valeurs de ω vérifiant la relation (47), on a toujours une stabilité. La vitesse de convergence varie en fonction de la valeur de ω . Le schéma implicite permet de supprimer les oscillations du schéma explicite et il rend les calcul précis et utilisable pour les accidents graves.

References

- [1] L.VIOT, L.SAAS and F.DE VUYST *Solving coupled problems of lumped parameter models in a platform for severe accidents in nuclear reactors*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 16(6):555–577 (2018)
- [2] L.VIOT, *Couplage et synchronisation de modèles dans un code scénario d'accident graves dans les réacteurs nucléaires* 12 octobre 2018.
- [3] R.LE TELLIER, E.SKRZYPEK and L. SAAS *On the treatment of plane fusion front in lumped parameter thermal models with convection*, Applied Thermal Engineering june 21, 2019.
- [4] ISABELLE RAMIÈRE, THOMAS HELFER *Iterative residual-based vector methods to accelerate fixed point iterations*, Computers and Mathematics with Application, Elsevier, 2015, 70, pp.2210 - 2226.