

**Projet de Fluide compressible
Promotion M2 MACS 2019-2020**

**Étude de deux modèle d'écoulement de
fluides**

PRÉSENTÉ PAR :
DHIYAOU-DINE AHMED
KASSIM

ENSEIGNANT :
CHRISTOPHE BERTHON

Décembre 2019

Résumé

Dans cette brochure on étudie deux modèles d'écoulement de fluide, dans le cadre du projet des Fluides compressibles. Dans un premier temps, on étudie théoriquement un cas scalaire et on propose un code Fortran permettant d'observer et d'analyser les résultats théoriques. Notre code est un code volume fini du schéma de Lax-Friedrichs. Nous proposons en suite une méthode de remonter en ordre en utilisant un schéma MUSCL. Dans un second temps, Nous étudions un système hyperbolique et proposons aussi un code Fortran permettant d'observer et d'analyser les résultats théoriques. Dans le code, on implémente un schéma volume fini de Lax-Friedrichs et de Rusanov.

1 Modèle scalaire

On considère tout d'abord le modèle scalaire avec transition de phase suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \\ u(0, t) = u_0(x) \end{cases}$$

avec $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la vitesse de l'écoulement, $f(u) = u(u^2 - 1)$ et u_0 une condition initiale.

On considère des conditions de Newmann homogènes.

1.1 Étude théorique des solutions par rapport à la donnée initiale

1.2 Étude de la fonction f

$$f(u) = u(u^2 - 1) \implies f'(u) = 3u^2 - 1 \implies f''(u) = 6u$$

$$\text{si } u > 0 \implies f'' > 0 \implies f \text{ est convexe}$$

$$\text{si } u < 0 \implies f'' < 0 \implies f \text{ est concave}$$

Remarque. On a :

$$f'(u) = 3u^2 - 1$$

. f' est inversible et on note $f' = a$ et on a donc $(f')^{-1} = a^{-1}$ avec

$$a^{-1}(u) = \sqrt{\frac{u+1}{3}} \quad \text{si } u_L > 0 \quad \text{et } u_R > 0$$

et

$$a^{-1}(u) = -\sqrt{\frac{u+1}{3}} \quad \text{si } u_L < 0 \quad \text{et } u < 0$$

Dans la suite on aura que

$$a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \sqrt{\frac{x}{3t} + \frac{1}{3}}$$

On considère une donnée initiale constante par morceaux et on note u_L et u_R les deux états de celle-ci

- si $u_L > 0$ et $u_R > 0$:

Dans ce cas on est dans la partie où la fonction est convexe.

- si $u_L < u_R$:

on a donc une détente. La solution s'écrit :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < f'(u_L)t, \\ a^{-1}(\frac{x}{t}) & \text{si } f'(u_L)t < x < f'(u_R)t, \\ u_R & \text{si } x > f'(u_R)t \end{cases}$$

- si $u_L > u_R$:

on a un choc. La solution s'écrit :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma u_L t, \\ u_R & \text{si } x > \sigma u_R t \end{cases}$$

- si $u_L < 0$ et $u_R < 0$:

on est dans la partie où la f est concave.

- si $u_L > u_R$:

on a donc une détente. La solution s'écrit :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < f'(u_L)t, \\ a^{-1}(\frac{x}{t}) & \text{si } f'(u_L)t < x < f'(u_R)t, \\ u_R & \text{si } x > f'(u_R)t \end{cases}$$

- si $u_L < u_R$:

on a un choc. La solution s'écrit :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma u_L t, \\ u_R & \text{si } x > \sigma u_R t \end{cases}$$

- si $u_L * u_R < 0$:

f n'est ni convexe ni concave. On considère l'enveloppe convexe supérieure

- si $u_L < 0$ et $u_R > 0$:

Soit u^* solution de l'équation

$$f'(u^*) = \frac{f'(u_L) - f'(u^*)}{u_L - u^*}$$

- entre u_L et u^* ($u_L < u^*$) :

la graphe est au dessous de la courbe. on a donc un choc. La solution s'écrit donc :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma u_L t, \\ u^* & \text{si } x > \sigma u^* t \end{cases}$$

— entre u^* et u^R ($u^* < u^R$) :

La graphe suit la courbe de f et f' est inversible. On a donc une détente.

La solution s'écrit donc :

$$u(x, t) = \begin{cases} u^* & \text{si } x < f'(u^*)t, \\ a^{-1}(\frac{x}{t}) & \text{si } f'(u^*)t < x < f'(u_R)t, \\ u_R & \text{si } x > f'(u_R)t \end{cases}$$

— calcul de u^* En résolvant l'équation

$$f'(u^*) = \frac{f'(u_L) - f'(u^*)}{u_L - u^*}$$

on obtient que $u^* = \pm \frac{u_L}{2}$. Donc

si $u_L < 0$ et $u_R > 0$, $u^* = +\frac{u_L}{2}$.

Et si $u_L > 0$ et $u_R < 0$, $u^* = -\frac{u_L}{2}$.

1.3 Montée en ordre

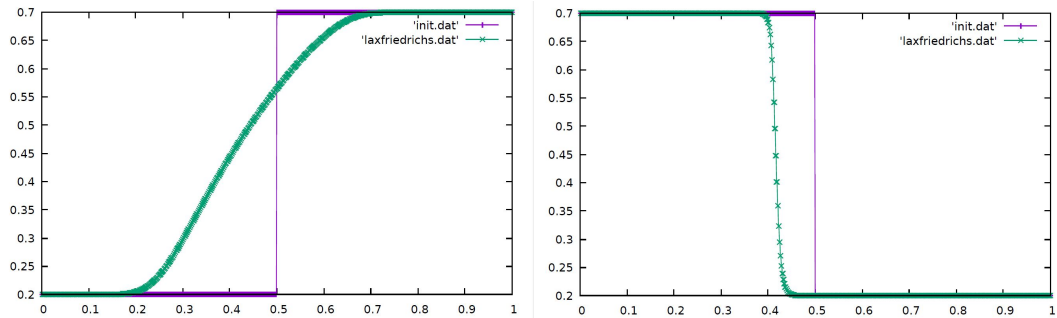
Pour la montée en ordre en espace on utilise un schéma MUCSL. On constate que la solution est similaire à celle de Lax-Friedrichs mais avec plus de viscosité. Pour la montée en ordre en temps, on a bien qu'on est linéaire par rapport à la variable temps. Donc on va utiliser un schéma de type Rung-Kutta, plus précisément le R-K2. Comme on est déjà ordre 2 avec MUSCL, on aura bien un schéma d'ordre 2 en temps et en espace.

1.4 Schémas de Lax-Friedrichs

Pour approcher la solution exacte, on utilise le schéma volume fini de Lax-Friedrichs. Le schéma s'écrit :

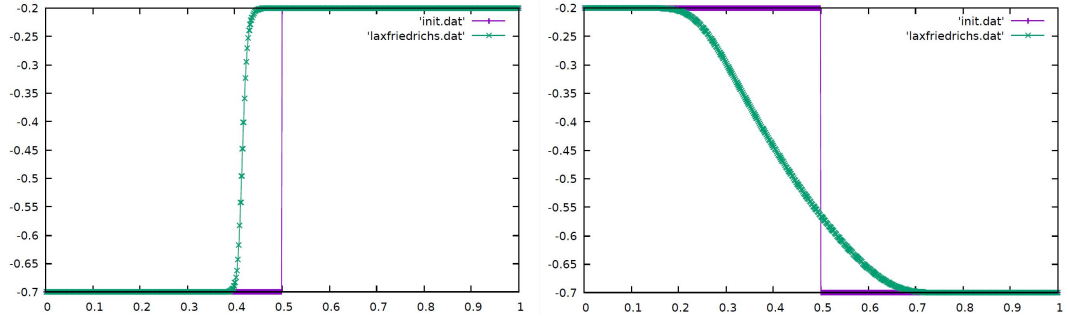
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2 * \Delta x} (f(U_{i+1}^n) - f(U_{i-1}^n))$$

— A $t = 0.5$, avec 500 points. Dans le cas $u_L > 0$ et $u_R > 0$ (f convexe). On prend $u_L = 0.2$ et $u_R = 0.7$. A gauche on a une détente (pour $u_L < u_R$) et à droite on a un choc ($u_L > u_R$).

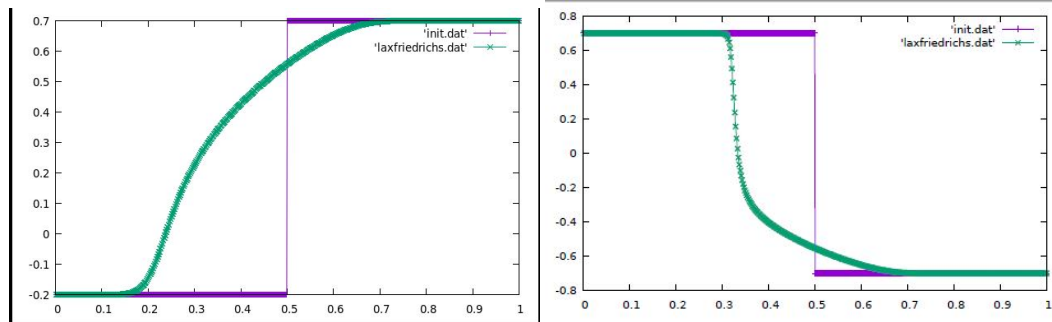


Pour la détente, on a bien une vitesse d'entrée égale à $f'(u_L) = f'(0.2) = -0.4$ et une vitesse de sortie égale à $f'(u_R) = f'(0.7) = 1.1$. Pour le choc, on a une vitesse égale à $\sigma = -0.33$.

- A $t = 0.5$, avec 500 points. Dans le cas $u_L < 0$ et $u_R < 0$ (f concave). On prend $u_L = 0.2$ et $u_R = 0.7$. A droite on a un choc (pour $u_L < u_R$) et a gauche on a une détente ($u_L > u_R$).



- A $t = 0.5$, avec 500 points. Dans le cas $u_L < 0$ et $u_R > 0$ (f est ni convexe ni concave). On prend $u_L = -0.2$ et $u_R = 0.7$. Ici $u^* = -0.1$ et donc entre $u_L = -0.2$ et -0.1 un choc et entre -0.1 et $u_R = 0.7$ une détente.



2 Système hyperbolique

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g\theta h^2/2) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(h\theta u) = 0 \end{cases}$$

2.1 Passages aux variables primitives

Dans cette section on va écrire sous une autre forme nous permettant de mieux étudier notre système.

Avec la première équation du système on obtient :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = \partial_t h + u\partial_x(h) + h\partial_x(u)$$

On a :

$$\partial_t h + u\partial_x(h) + h\partial_x(u) = 0 \quad (1)$$

Avec la deuxième équation du système on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g\theta h^2/2) &= h\partial_t(u) \\ + u\partial_t(h) + u\partial_x(hu) + hu\partial_t(u) + g\theta\partial_x(h^2/2) + h^2/2\partial_x(\theta) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\partial_t u + u\partial_x u + g\theta\partial_x h + \frac{h}{2}\partial_x \theta = 0$$

Avec la troisième équation on obtient :

$$\partial_t(h\theta) + \partial_x(h\theta u) = h\partial_t(\theta) + \theta\partial_t(h) + hu\partial_x(\theta) + \theta\partial_x(hu) = 0$$

On obtient :

$$\partial_t \theta + u\partial_x \theta = 0$$

On a le système

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x(h) + h\partial_x(u) = 0, \\ \partial_t u + u\partial_x u + g\theta\partial_x h + \frac{h}{2}\partial_x \theta = 0, \\ \partial_t \theta + u\partial_x \theta = 0 \end{cases}$$

Le système peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U$$

avec la A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g\theta & u & g\frac{h}{2} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda^- = u - \sqrt{gh\theta}$, $\lambda^0 = u$, et $\lambda^+ = u + \sqrt{gh\theta}$ Et les vecteurs propres associés sont respectivement :

$r^- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{g\theta}{h}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $r^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2\frac{\theta}{h} \end{pmatrix}$ et $r^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{g\theta}{h}} \\ 0 \end{pmatrix}$ Pour λ^- et λ^+ on va considérer λ^δ pour simplifier les calculs pour la suite On a donc : $\lambda^\delta = u + \delta\sqrt{gh\theta}$ et r^δ sont vecteur propre associé est noté $r^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta\sqrt{\frac{g\theta}{h}} \\ 0 \end{pmatrix}$

2.2 Étude des champs

- Pour $\lambda^\delta = u + \delta\sqrt{gh\theta}$:
on calcul $\nabla\lambda^\delta \cdot r^\delta$

$$\nabla\lambda^\delta \cdot r^\delta = \begin{pmatrix} \frac{g\delta\theta}{2\sqrt{g\delta\theta}} \\ 1 \\ \frac{gh\delta}{2\sqrt{g\delta\theta}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \delta\sqrt{\frac{g\theta}{h}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Donc les champs associés sont VNL

- Pour $\lambda^0 = u$

$$\nabla\lambda^0 \cdot r^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-2\theta}{h} \end{pmatrix} = 0$$

Le champ associé est LD

2.3 Les invariants de Riemann

- Les invariants de Riemann associés à λ^δ .

On a deux invariants de Riemann (car on a un vecteur de dimension 3 et une valeur propre d'ordre de multiplicité 1).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial h} \cdot 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \delta\sqrt{\frac{g\theta}{h}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \cdot 0 = 0$$

Donc θ est un invariant de Riemann.

Par les intégrales premiers on obtient :

$$\frac{dh}{1} = \frac{du}{\delta\sqrt{\frac{g\theta}{h}}} \Rightarrow \frac{dh}{1} - \frac{du}{\delta\sqrt{g\theta h}} = 0 \Rightarrow d(2\sqrt{h} - \frac{1}{\delta\sqrt{g\theta}}) = 0$$

Donc

$$2\sqrt{h} - \frac{1}{\delta\sqrt{g\theta}}$$

est un invariant de Riemann.

— Les invariants de Riemann associés à λ^0 .

On attend deux invariants de Riemann.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial h} \cdot 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \cdot \frac{-2\theta}{h} = 0$$

On a que u est un invariant de Riemann.

Par les intégrales premiers on obtient :

$$\frac{dh}{1} = \frac{du}{\frac{-2\theta}{h}} \Rightarrow \frac{dh}{1} + \frac{d\theta}{2\theta} = 0 \Rightarrow d(2\ln(h) + \frac{1}{2}\ln(\theta)) = 0$$

Donc $2\ln(h) + \frac{1}{2}\ln(\theta)$ est un invariant de Riemann.

2.4 Résolution du problème de Riemann

Dans les champs VNL θ est constante.

— si l'onde est une détente, puisque θ est un invariant de Riemann il est constant

— si l'onde est un choc, on doit considérer les relations de Rankine-Hugoniot.

—

$$-\sigma(h_R - h_L) + (h_R u_R - h_L u_L) = 0$$

—

$$-\sigma(h_R \theta_R - h_L \theta_L) + (h_R \theta_R u_R - h_L \theta_L u_L) = 0$$

Par la première relation :

$$h_R(u_R - \sigma) = h_L(u_L - \sigma) = M \neq 0$$

Par la deuxième relation :

$$h_R \theta_R (u_R - \sigma) = h_L \theta_L (u_L - \sigma) = 0$$

De plus dans un choc, $\sigma \neq u_L$ et $\sigma \neq u_R$. Il en résulte que la solution du problème de Riemann pour θ est seulement donnée par une discontinuité de contact qui se propage à la vitesse u^* . En conséquence, on peut seulement considérer le problème de Riemann pour h et hu .

On se donne un état $w_L = (h_L, h_L u_L)$. On cherche les états droits qui connecte w_L par une détente VNL . Dans notre cas on a 1-onde et 3-onde.

— 1-détente : $\lambda^- = u - \sqrt{gh}$ La 1-détente est caractérisée par la constante de l'I.R.

On a que $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ et que $u \geq u_L$. si w_L est dans la courbe de

1-détente alors la solution du problème de Riemann est une détente caractérisée par

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0 \\ w_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans la détente, $\frac{x}{t} = \lambda^-(w)$ et on en déduit

$$\begin{cases} u = \frac{1}{3}(u_L + 2\sqrt{gh_L} + \frac{2x}{t}) \\ h = \frac{1}{9g}(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \end{cases}$$

- 3-détente : $\lambda^+ = u + \sqrt{gh}$. La 1-détente est caractérisée par la constante de l'I.R. On a que $u = u_L - 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ et que $u \geq u_L$. si w_L est dans la courbe de 3-détente alors la solution du problème de Riemann est une détente caractérisée par

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0 \\ w_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

De plus dans le 3-détente on a

$$\begin{cases} u = \frac{1}{3}(-u_L + 2\sqrt{gh_L} + \frac{2x}{t}) \\ h = \frac{1}{9g}(-u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \end{cases}$$

(raisonnement analogue que pour la 1-détente)

- Dans un deuxième temps on considère les chocs. on se donne une état w_L et on cherche tous les états w qui peuvent être connectés à w_L par un choc de vitesse σ . Les chocs sont caractérisés par les relations de Rankine-Hugoniot :

$$-\sigma(h - h_L) + (hu - h_L u_L) = 0$$

$$-\sigma(hu - h_L u_L) + (hu^2 + gh^2/2 - h_L u_L^2 - gh_L^2/2) = 0 \quad (*)$$

L'objectif est de déterminer u en fonction de h . En utilisant la relation (*) on trouve

$$(u - u_L)^2 = g/2(h_L - h)^2 \frac{h_L + h}{h_L h}$$

Par les inégalités de Lax :

- Pour le 1-choc :
on trouve que $h_L < h$ et que $u < u_L$. On en déduit la courbe de Hugoniot

$$u = u_L - \sqrt{g/2(h - h_L)^2 \frac{h_L + h}{h_L h}}$$

avec $h_L < h$ et $u_L < u$

— Pour le 3-choc :
on obtient

$$u = u_L + \sqrt{g/2(h - h_L)^2 \frac{h_L + h}{h_L h}}$$

avec $h_L > h$ et $u_L > u$.

Si w_R appartient à la courbe de Hugonio pour le 3-choc, alors la solution du problème de Riemann pour

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0 \\ w_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

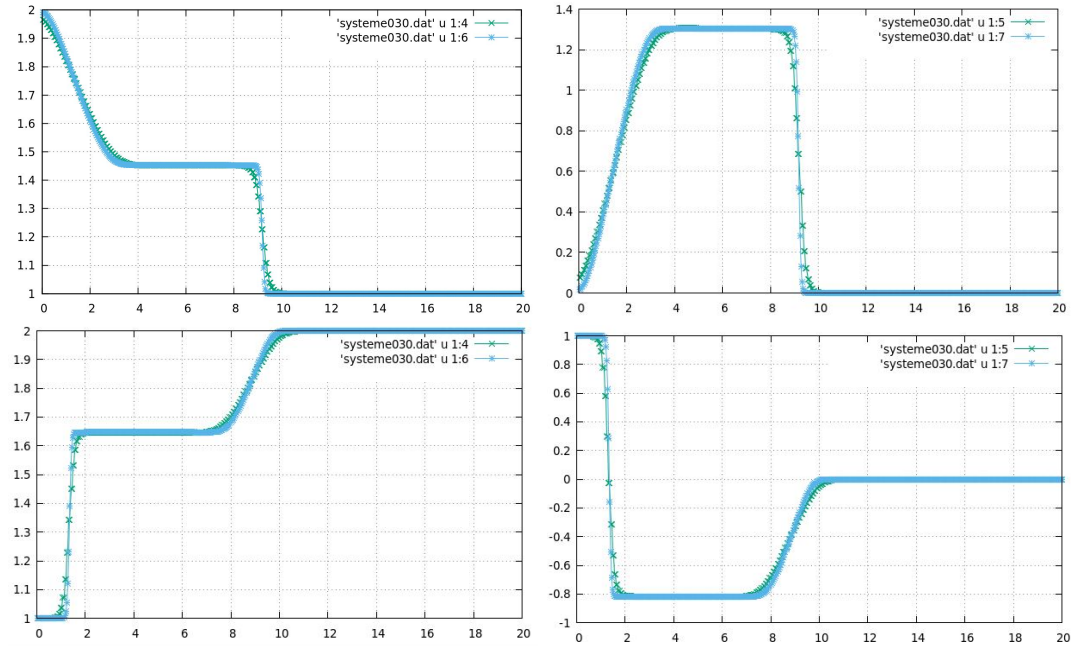
est un 3-choc

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < \sigma_3 t \\ w_R & \text{si } x > \sigma_3 t \end{cases}$$

où

$$\sigma_3 = \frac{h_R u_R - h_L u_L}{h_R - h_L} \quad \text{ou} \\ \sigma_3 = \frac{h_R u_R^2 + g h_R^2 / 2 - h_L u_L^2 - g h_L^2 / 2}{h_R u_R - h_L u_L}$$

2.5 Schémas



A gauche on a les schémas pour diverses données pour la hauteur et à droite les schémas pour pour diverses données la vitesse.