Projet de Calcul Numérique Scientifique C++
Promotion M2 MACS 2019-2020

Équation hyperbolique scalaire (non) linéaire et raffinement de maillage

PRÉSENTÉ PAR :
Dhiyaou-dine AHMED KASSIM

ENSEIGNANT :
Nachaoui ABDELJALIL

Novembre 2019

Résumé

Dans ce cette brochure, on résume notre projet intitulé Équation hyperbolique scalaire (non) linaire et raffinement de maillage . Le travail consiste à expliquer et mettre en œuvre une technique de raffinement de maillage pour mieux détecter les discontinuités du problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, pour $x \in [-1,1]$ avec des conditions aux bords périodique. Pour la validation de notre code, on considère :

- un flux linéaire $f(u) = au, \quad a \in \mathbb{R}^*$ et une donnée initiale régulière de type sinusoïdale,
- un flux de Burger $f(u) = \frac{u^2}{2}$ avec une donnée initiale de type créneau

Pour l'approximation de la solution, on utilise une méthode volume finis et un schéma numérique de Lax-Friedrichs.

Introduction

Dans ce projet, on se propose d'approcher numériquement les système hyperbolique

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

avec f soit une fonction linéaire soit une fonction de Burger. Pour cela on utilise la méthode de Lax-Friedrichs

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2 * \Delta x}(f(U_{i+1}^n) - f(U_{i-1}^n))$$

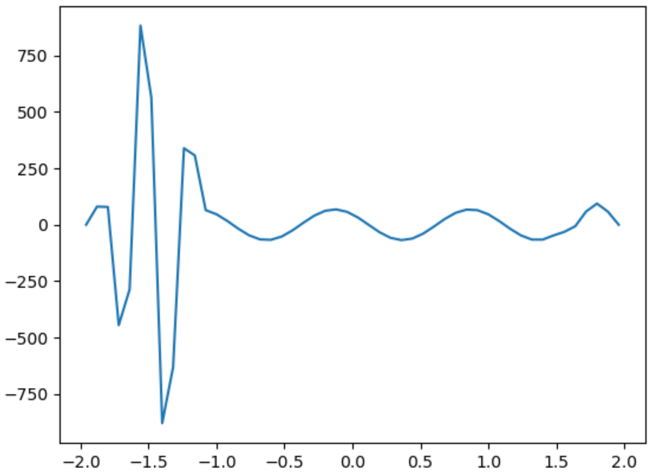
Pour une meilleur approximation on met en place une méthode de raffinement qui va nous permettre en plus d'une meilleur approximation, mieux localiser les éventuelles discontinuité de la solution.

Conditions initiales

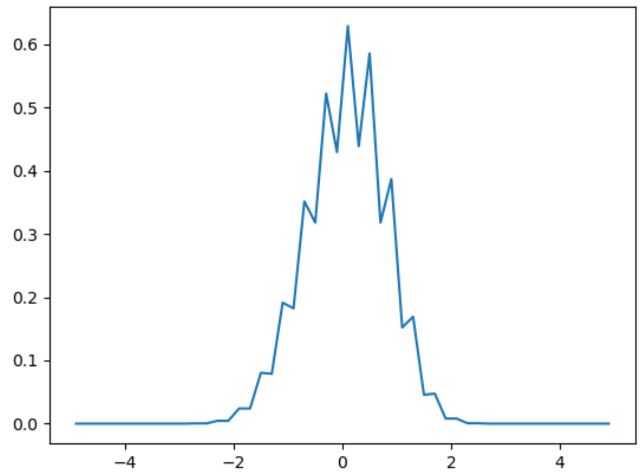
Nous allons étudier deux types de conditions initiales : une fonction sinusoïdale ($sinus(2\pi x)$) et un type créneau.

Interprétation graphique (dans l'intervalle $[-1,1]$)

A t = 0.5, pour la fonction sinusodale on remarque qu'elle est transportée de $a * t$, avec a = 4 (la valeur de est prédéfinie dans le code)



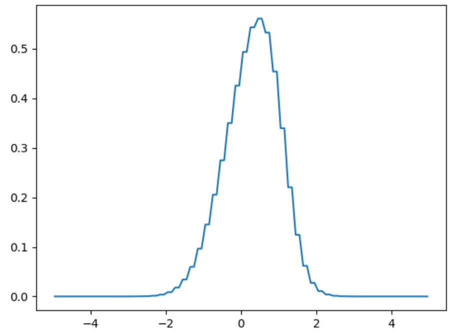
Pour le créneau, on remarque l'apparition de tangentes verticales ce qui caractérise un choc dans la solutions.

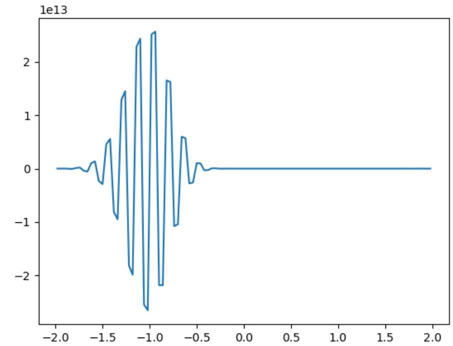


Résultat à t = 1

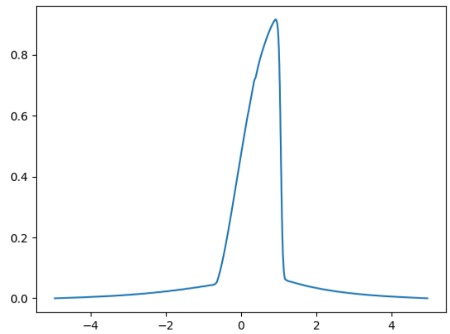
On fait une interprétation graphique des résultats à t = 1 puis on compare les résultats obtenus avec raffinement et sans raffinement.

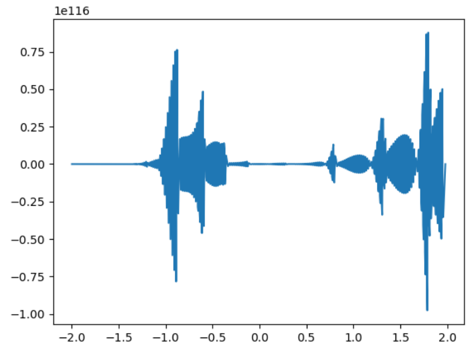
A = t = 1, on obtient les résultats suivant sans raffinement de la maillage. Comme on utilise beaucoup de points(100 point sans le raffinement), on constate une meilleure approximation





Avec le raffinement du maillage on remarque que, les endroits où on avait l'apparition de tangentes verticales dans le créneau deviennent de plus en plus lisse. Quant à la solution sinusoïdale on remarque de fortes oscillations, ce qui caractérise le transport de la courbe à la vitesse a définie dans le programme. En revanche l'abscisse de la discontinuité est plus proche de la solution exacte.





Présentation de l'algorithme de raffinement

L'algorithme de raffinement consiste à appliquer un schéma de Lax-Friedrichs sur un maillage évolutif.

Le raffinement consiste à diviser la $i^{éme}$ cellule en 2. Si $|U_i^n - U_{i-1}^n| > C_1$ et si $\Delta X_i > C_2$ à chaque itération en temps, avec C_1 et C_2 des constantes choisit dans le programme qui permettent de maitriser la précision. En suit on applique encore le schéma de Lax-Friedrichs sur note nouveau maillage en redéfinissant Δt à chaque itération pour conserver la condition CFL jusqu'au temps final(ici Tfin).

Comparaison avec la solution exacte

On a que la solution est constante le long des caractéristique (résolution du système par la méthodes des caractéristiques).

Si on considère donc la solution pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

D'après la méthodes des caractéristiques on a que la solution est de la forme :

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 \quad x < -1/2 \\ \frac{x+1/2}{t} \quad -1/2 < x < t+1/2 \\ 1 \quad t+1/2 < x < t/2+1/2 \\ 0 \quad x > t/2+1/2 \end{cases}$$

A t = 1 on a le graphe suivant :