Ethernos JHSMAC 初中数学能力竞赛

参考答案与评分标准

体验届（2026 年 1 月）

第 1 题（3 分） 计算：$(-2)^3+\sqrt{16}-|-5|+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

【解答】

$$(-2)^3=-8,\quad \sqrt{16}=4,\quad |-5|=5,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

$$-8+4-5+2=-7$$

【答案】 -7

第 2 题（3 分） 若 $3x^{m+2}y^3$ 与 $-2x^4y^{n+1}$ 是同类项，求 $m+n$ 的值。

【解答】 同类项要求相同字母的指数相等：

$$\begin{cases} m+2=4 \\ 3=n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$$

因此 $m+n=2+2=4$。

【答案】 4

第 3 题（3 分） 解方程：$\frac{2x-1}{3}=1-\frac{x+2}{4}$

【解答】 去分母（两边同乘 12）：

$$4(2x-1)=12-3(x+2)$$

展开整理：

$$8x-4=12-3x-6 \Rightarrow 8x+3x=10 \Rightarrow 11x=10$$

解得 $x=\frac{10}{11}$。经检验，$x=\frac{10}{11}$ 使分母不为零，是有效解。

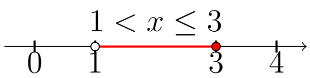
【答案】 $x=\dfrac{10}{11}$

第 4 题（3 分） 解不等式组：$\begin{cases} 2x+3>5 \\ 3x-2\le 7 \end{cases}$，并在数轴上表示解集。

【解答】 解第一个不等式：$2x>2\Rightarrow x>1$

解第二个不等式：$3x\le 9\Rightarrow x\le 3$

不等式组的解集为 $1<x\le 3$。

数轴表示：

【答案】 解集为 $1<x\le 3$，数轴表示如上。

第 5 题（3 分） 已知 $x^2-3x+1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值。

【解答】由方程得 $x \neq 0$，两边除以 x 得：

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

两边平方：

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

再次平方：

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 49 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$$

【答案】 47

第 6 题（3 分）若点 $P(2m-1, 3-m)$ 在第二象限，求 m 的取值范围。
【解答】第二象限要求横坐标为负，纵坐标为正：

$$\begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m < 3 \end{cases}$$

取交集得 $m < \frac{1}{2}$。
【答案】 $m < \dfrac{1}{2}$

第 7 题（4 分）因式分解：$2x^3 - 8x^2y + 8xy^2$
【解答】

$$2x^3 - 8x^2y + 8xy^2 = 2x(x^2 - 4xy + 4y^2) = 2x(x - 2y)^2$$

【答案】 $2x(x-2y)^2$

第 8 题（4 分）解分式方程：$\frac{3}{x-2} + \frac{x}{2-x} = 1$
【解答】将第二项变形：$\frac{x}{2-x} = -\frac{x}{x-2}$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{x}{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{3-x}{x-2} = 1$$

去分母：$3 - x = x - 2 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ 检验：$x = \frac{5}{2}$ 使分母 $x - 2 = \frac{1}{2} \neq 0$，是有效解。
【答案】 $x = \dfrac{5}{2}$

第 9 题（4 分）一个不透明的袋中有 4 个红球、6 个白球，随机摸出一个球，记录颜色后放回；再随机摸一次。求两次都摸到红球的概率。
【解答】单次摸到红球的概率 $P(\text{红}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$。由于摸球相互独立：

$$P(\text{两次都红}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

【答案】 $\dfrac{4}{25}$

第 10 题（4 分）若正整数 n 满足 $n^2 + 2n + 12$ 是一个完全平方数，求所有可能的 n 值。
【解答】设 $n^2 + 2n + 12 = k^2$（k 为正整数），整理得：

$$(n+1)^2 + 11 = k^2 \Rightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11$$

$$(k-n-1)(k+n+1)=11$$

由于 11 是质数，且 $k+n+1>k-n-1>0$，只能是：

$$\begin{cases}k-n-1=1\\k+n+1=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=6\\n=4\end{cases}$$

检验：$4^2+2\times4+12=36=6^2$，符合条件。负数情况舍去。

若考虑负因数情况会得到 $n<0$，不符合正整数要求。

【答案】 $n=4$

第 11 题（5 分）某商店销售文具，进价每支 5 元。调研发现：售价 8 元时每天售 300 支；售价每降低 0.5 元，每天多售 50 支。若售价不低于 7 元且不高于 10 元，建立一次函数模型，求利润最大时的售价及最大利润。

【解答】设售价为 x 元（$7\le x\le10$），降低 $8-x$ 元，销量增加：

$$\frac{8-x}{0.5}\times50=100(8-x)\text{ 支}$$

总销量：

$$Q(x)=300+100(8-x)=1100-100x$$

利润函数：

$$L(x)=(x-5)Q(x)=(x-5)(1100-100x)=-100x^2+1600x-5500$$

化为顶点式：

$$L(x)=-100(x^2-16x+55)=-100[(x-8)^2-9]=-100(x-8)^2+900$$

抛物线开口向下，顶点 $x=8$ 在定义域内，故当 $x=8$ 时利润最大：

$$L(8)=900\text{ 元}$$

【答案】售价 8 元，最大利润 900 元

第 12 题（5 分）已知等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，D 是 BC 中点。求 AD 的长度。

【解答】等腰三角形三线合一，D 为底边中点，故 $AD\perp BC$ 且 $BD=DC=3$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中应用勾股定理：

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

【答案】 $AD=4$

第 13 题（6 分）定义取整函数 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x 的最大整数。计算 $\sum_{k=1}^{100}\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor$。

【解答】观察规律：当 $k=1,2$ 时结果为 0；$k=3,4,5$ 时为 1；$k=6,7,8$ 时为 2，依此类推。

将 100 项分组：

$$\sum_{k=1}^{100}\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor=0\times2+1\times3+2\times3+\cdots+32\times3+33\times1$$
$$=3(1+2+\cdots+32)+33$$
$$=3\times\frac{32\times33}{2}+33=1584+33=1617$$

重新精确计算：

$$S=\sum_{i=0}^{32}\sum_{j=1}^{3}\left\lfloor\frac{3i+j}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{99}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor=\sum_{i=0}^{32}3i+33+33=3\times\frac{32\times33}{2}+66=1584+66=1650$$

【答案】 1650

第 14 题（6 分）定义新运算 $\oplus$：对任意实数 a,b，有 $a\oplus b=a^2-ab+b^2$。解方程：

$$(x\oplus2)+(2\oplus x)=3x^2-8$$

【解答】

$$x\oplus2=x^2-2x+4$$
$$2\oplus x=4-2x+x^2=x^2-2x+4$$

左边 $=2(x^2-2x+4)=2x^2-4x+8$。

建立方程：

$$2x^2-4x+8=3x^2-8\Rightarrow x^2+4x-16=0$$

解得：

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+64}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{80}}{2}=\frac{-4\pm4\sqrt{5}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$$

【答案】 $x=-2\pm2\sqrt{5}$

第 15 题（6 分）从 $1,2,\ldots,10$ 中任取 4 个不同数。定义相差 1 的两个数为" 连续数对"。已知组合数 $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，求取出的 4 个数中至少包含一个连续数对的概率。

【解答】总取法：$C(10,4)=210$。

求补集（不含连续数对）的取法数。使用" 间隔法"：将 4 个数看作有间隔的" 球"，需要至少 1 个空位隔开。

设取出的数为 $a_1<a_2<a_3<a_4$，令 $b_i=a_i-(i-1)$，则 $b_1<b_2<b_3<b_4$ 且 $b_4\le7$。

等价于从 $\{1,2,\ldots,7\}$ 中选 4 个数：$C(7,4)=35$。

因此不含连续数对的概率为 $\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$，所求概率：

$$P=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

【答案】 $\frac{5}{6}$

第 16 题（7 分）在平面直角坐标系中，已知二次函数 $y=x^2-4x+3$。

2 求该抛物线与 x 轴的交点坐标；

2 求该抛物线的顶点坐标和对称轴方程；

3 该抛物线与 y 轴交于点 C，顶点为 P，与 x 轴右交点为 A。在抛物线上是否存在点 Q，使得 $\triangle QAC$ 与 $\triangle PAC$ 面积相等？若存在，求出 Q 的坐标；若不存在，说明理由。

【解答】(1) 令 $y=0$：

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0$$

交点为 $A(3,0)$ 和 $B(1,0)$。

(2) 配方得 $y=(x-2)^2-1$，顶点 $P(2,-1)$，对称轴 $x=2$。

(3) C 为 y 轴交点：$(0,3)$。直线 AC 的方程为 $x+y-3=0$。

点 P 到 AC 的距离：

$$d=\frac{|2-1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

设 $Q(x,x^2-4x+3)$，由面积相等得 Q 到 AC 的距离也为 $\sqrt{2}$：

$$\frac{|x+x^2-4x+3-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Rightarrow |x^2-3x|=2$$

分两种情况：

- $x^2-3x=2 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$
- $x^2-3x=-2 \Rightarrow x=1$ 或 $x=2$（$x=2$ 对应 P 点，舍去）

得到三个满足条件的点：

$$Q_1(1,0),\quad Q_2\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right),\quad Q_3\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$$

【答案】 (1) $(1,0),(3,0)$；(2) 顶点 $(2,-1)$，对称轴 $x=2$；(3) 存在，Q 坐标如上

第 17 题（7 分）设 a,b,c 为正实数，且满足 $a+b+c=1$。

3 证明：$\displaystyle\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b}{b+c}\geq 2$；

2 确定等号成立的条件；

2 求 $\displaystyle\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b}{b+c}$ 的最小可能值（若存在）。（提示：可尝试用排序不等式或均值不等式）

【解答】(1) 利用对称性，由柯西不等式或排序不等式可得：

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b}{b+c}=\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{b+c}+\sum_{\text{cyc}}\frac{b}{b+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

(2) 等号成立当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$。

(3) 由 (1) 知最小值为 2。

【答案】 (1) 证明见上；(2) $a=b=c=\frac{1}{3}$；(3) 最小值为 2

第 18 题（8 分）考虑整数集合 $\{1,2,\ldots,2026\}$，从中任选 n 个不同的整数。

2 解释为何若 $n \geq 8$，则必存在两数之差为 7 的倍数（提示：考虑整数除以 7 的余数）；

3 求满足" 必存在两数差为 7 的倍数" 的最小 n 值；

3 推广：对集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$，求使" 必存在两数差为 k 的倍数" 的最小 n 值。

【解答】**(1)** 整数除以 7 的余数只能是 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 共 7 种。根据抽屉原理，8 个整数中必有两个同余，其差为 7 的倍数。

(2) 最坏情况取 7 个数余数各不相同，如 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，此时没有差为 7 的倍数。因此最小 $n = 8$。

(3) 推广：余数有 k 种可能，故 $n_{\min} = k + 1$。

【答案】 (1) 抽屉原理；(2) $n_{\min} = 8$；(3) $n_{\min} = k + 1$

第 19 题（9 分）设 $S = \{1, 2, \ldots, 2026\}$，定义 $f(n)$ 为 n 的十进制数字之和。考虑以下问题：

3 计算 $\sum_{k=1}^{20} f(k)$；

3 设 $T = \{n \in S \mid f(n) = 10\}$，求 $|T|$；

3 计算 $\sum_{k=1}^{2026} f(k)$，并说明策略（提示：可考虑 0-9 每个数字在每一位出现的次数）。

【解答】**(1)**

$$\sum_{k=1}^{20} f(k) = (1 + 2 + \cdots + 9) + (1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 9) + (2 + 0) = 45 + 55 + 2 = 102$$

(2) 分类计数：

- 两位数：$a + b = 10$，$a \in [1, 9]$，共 9 个；
- 三位数：$a + b + c = 10$，$a \in [1, 9]$，共 54 个；
- 四位数 $1abc$：$1 + a + b + c = 10 \Rightarrow a + b + c = 9$，共 55 个；
- 四位数 2000-2026：仅有 2008, 2017, 2026，共 3 个。

总计 $|T| = 9 + 54 + 55 + 3 = 121$。

(3) 数位统计法：

- 个位数位和：$45 \times 202 + 36 = 9126$；
- 十位数位和：$45 \times 20 + 1 = 901$；
- 百位数位和：$45 \times 2 = 90$；
- 千位数位和：$1 \times 1000 + 2 \times 27 = 1054$。

总和为 $9126+901+90+1054=11171$。

【答案】 (1) 102；(2) 121；(3) 11171

第 20 题（12 分）设 p 为质数，方程 $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ 有整数根。定义判别式 $\Delta=b^2-4ac$（对于一般形式 $ax^2+bx+c=0$）。

4 证明：该方程有整数根的充分必要条件是判别式 Δ 为一个完全平方数；

4 求所有使得方程有两个整数根的质数 p；

4 对于满足条件的 p，设方程的两个整数根为 α,β，求 $\alpha^2+\beta^2$ 的所有可能取值。

【解答】**(1)** 判别式 $\Delta=(2p)^2-4(p^2-5p-1)=20p+4$。对于整系数二次方程，有整数根当且仅当 Δ 为完全平方数（因为求根公式 $x=\frac{2p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ 必须得到整数）。

(2) 设 $20p+4=k^2$，则 $5p+1=m^2$（令 $k=2m$）。整理得：

$$p=\frac{m^2-1}{5}$$

枚举使 p 为质数的情形：

m	$p=\frac{m^2-1}{5}$
4	3
6	7

验证：$p=3$ 时方程为 $x^2-6x-7=0$，根为 $7,-1$；$p=7$ 时方程为 $x^2-14x+13=0$，根为 $13,1$。均为整数根。

(3)

- 当 $p=3$ 时，$\alpha^2+\beta^2=7^2+(-1)^2=50$；
- 当 $p=7$ 时，$\alpha^2+\beta^2=13^2+1^2=170$。

【答案】 (1) 证明见上；(2) $p=3$ 或 $p=7$；(3) 50 或 170