제3장 확　률

표본공간이 $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이고, 표본공간의 부분집합이 각각 $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{2, 3, 4, 5\}$, $D=\{1, 6, 7\}$이라 할 때, 다음 사건들의 집합을 구하시오.

(1) $A\cup C$　　(2) $A\cap B$　　(3) $(C^c\cap D)\cup B$　　(4) $A\cap C\cap D^c$

[풀이] (1) $A\cup C=\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$　　(2) $A\cap B=\varnothing$

(3) $(C^C\cap D)\cup B=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$　　(4) $A\cap C\cap D^c=\{2, 4\}$

조달청에서 발주한 정보기술 용역 사업에 S, L, C 등 3개 업체가 입찰에 참여하였다. 서류심사 결과 S가 낙찰 받을 확률은 C보다 2배 만큼 높고, L이 낙찰 받을 확률은 C보다 3배 만큼 높은 것으로 나타났다. 이를 토대로 S, L, C가 각각 낙찰 받을 확률을 구하시오.

[풀이] $P(S)=2P(C)$, $P(L)=3P(C)$

$P(S)+P(L)+P(C)=2P(C)+3P(C)+P(C)=6P(C)=1$

$P(C)=\frac{1}{6}$, $P(L)=\frac{3}{6}$, $P(S)=\frac{2}{6}$

사건 A와 B에 대하여 $P(A)=0.4$, $P(A\cup B)=0.8$일 때 사상 A와 B가 서로 배반인 경우와 사상 A와 B가 서로 독립인 경우 각각에 대하여 $P(B)$를 구하시오.

[풀이]

서로 배반인 경우 : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.4=0.4$

서로 독립인 경우 : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=P(A)+P(B)[1-P(A)]$

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.4}{1-0.4}=\frac{2}{3}$$

사건 A와 B에 대하여 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$일 때 다음 확률을 구하시오.

(1) 사건 A와 B가 서로 독립일 때 $P(A\cup B)$

(2) 사건 A와 B가 서로 배반일 때 $P(A|B)$

[풀이] (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.2+0.5-0.2\text{x}0.5=0.6$

(2) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$

한 대기업에서는 부품을 3개 협력업체에서 구입하고 있다. 과거의 자료에 의하면 구매 부품의 20%는 R기업에, 50%는 S기업에, 30%는 L기업에서 구매하였다. 그런데 R기업에서 구매한 부품의 5%가 불량이었고, S기업은 4%, L기업은 8%가 불량이었다고 할 때 다음 확률을 구하시오.

(1) 대기업에서 구매한 부품이 불량일 확률을 구하라.

(2) 대기업에서 구매한 불량한 부품이 L기업에서 구매했을 확률을 구하라.

[풀이]

$P(R)=0.2,\ P(S)=0.5,\ P(L)=0.3,\ P(D|R)=0.05,\ P(D|S)=0.04,\ P(D|L)=0.08$

(1) $P(D)=P(D\cap R)+P(D\cap S)+P(D\cap L)=0.2\times0.05+0.5\times0.04+0.3\times0.08=0.054$

(2) $P(L|D)=\dfrac{P(L\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(D|L)\times P(L)}{P(D)}=\dfrac{0.3\times0.08}{0.054}=\dfrac{4}{9}$

다음 함수들이 이산 확률변수 X의 확률분포가 되도록 상수 C값을 구하시오.

(1) $f(x)=C(x^2+4),\quad x=0,1,2,3$

(2) $f(x)=C\binom{2}{x}\binom{3}{3-x},\quad x=0,1,2$

[풀이] (1) $\sum_{x=0}^{3} f(x)=4C+5C+8C+13C=1,\ 30C=1,\ \therefore C=\dfrac{1}{30}$

(2) $\sum_{x=0}^{2} f(x)=C+6C+3C=1,\ 10C=1,\ \therefore C=\dfrac{1}{10}$

어느 공정에서 생산되는 제품의 불량률이 1%라 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 200개의 제품을 검사했을 때, 불량개수의 평균과 표준편차를 구하시오.

(2) 200개의 제품을 검사했을 때, 2개의 불량이 나올 확률을 구하시오.

(3) 200개의 제품을 검사했을 때, 2개 이하의 불량이 나올 확률을 구하시오.

[풀이] (1)~(3) ; $X \sim B(200,\ 0.01)$

(1) $E[X]=np=200\times0.01=2.0$

$Var(X)=np(1-p)=200\times0.01\times0.99=1.98$

(2) $f(2)=\binom{200}{2}0.01^2\times0.99^{198}=0.2720$

(3) $P(X\le 2)=.99^{200}+200\times.01\times.99^{199}+\binom{200}{2}\times.01^2\times.99^{198}=0.6767$

통계학 시험성적이 평균 74, 표준편차 7.9인 정규분포를 따른다고 할 때 다음을 구하시오.

(1) 하위 10% 학생들에게 F를 줄 때, 시험을 통과할 최하점수

(2) 상위 5% 학생들에게 A를 줄 때, B의 최고점수

[풀이]

(1) $P(X>k)=P(Z>\frac{k-74}{7.9})=1-P(Z>\frac{k-74}{7.9})=0.90$

$P(Z>\frac{k-74}{7.9})=1-0.90=0.10$

$P(Z\leftarrow 1.28)=0.1003$

$P(Z\leftarrow 1.29)=0.0985$

$\frac{k-74}{7.9}=-1.28-\frac{0.1003-0.1000}{0.1003-0.0985}\times\{(-1.28-(-1.29)\}$

$\therefore k=63.87438$

따라서 64점은 맞아야 F를 면할 수 있다.

(2) $P(X\geq k)=P(X\geq\frac{x-74}{7.9})=1-P(Z<\frac{x-74}{7.9})=0.05$

$P(Z<\frac{x-74}{7.9})=0.95$

$P(Z<1.64)=0.9495$

$P(Z<1.65)=0.9505$

$\frac{k-74}{7.9}=1.65-\frac{0.9505-0.95}{0.9505-0.9495}\times 0.01$

$k=1.645\times 7.9+74=86.9955$

따라서, B의 최고 점수는 86점.

어느 대학 지원자 600명에 대한 시험 결과가 평균 115, 표준편차 12인 정규분포를 따른다고 한다. 그 대학이 최소 95점 이상의 점수를 요구할 때 탈락하게 될 학생의 수를 구하시오.

[풀이]

$P(X\leq 95)=P\left(Z\leq\frac{94-115}{12}\right)=p(Z\leq -1.75)=0.0401$

$600\times 0.0401=24.06\fallingdotseq 25$명

소나무의 크기는 평균이 μ(m)이고 표준편차가 2(m)인 정규분포를 따른다고 한다. 9개의 소나무를 랜덤하게 추출하였다.

(1) 표본평균과 모평균의 차이가 1(m) 이내일 확률을 구하시오.

(2) 표본평균과 모평균의 차이가 1(m) 이내일 확률을 0.9가 되려면 표본의 크기는 얼마이어야 하는가?

[풀이]

(1) $n=9$, $\sigma=2$이므로 $\sigma_{\overline{X}}=2/\sqrt{9}=2/3$이다. 따라서

$$\begin{aligned} P(|\overline{X}-\mu|\le 1) &= P(-1\le \overline{X}-\mu \le 1) \\ &= P(-1.5\le z\le 1.5) \\ &= 0.9332-0.0668=0.8664 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} P(-1\le \overline{X}-\mu\le 1) &= P\left(-\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\le z\le \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=0.9 \end{aligned}$$

<부록 1>의 표준정규분포표에서 $P(-1.645\le z\le 1.645)=0.9$임을 알 수 있다. 따라서 $0.5\sqrt{n}=1.645$이다. 그러므로 $n=(2\times 1.645)^2\approx 11$이다.

대학교 학생들의 이동통신요금을 알아보기 위하여 50명 학생들의 한 달 요금을 조사해 보니 평균은 52000원, 표준편차는 7500원이었다. 이를 근거로 대학생 통신비의 모평균에 대한 99% 신뢰구간을 추정하시오.

[풀이]

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 52000 \pm 2.576\frac{7500}{\sqrt{50}} = (49268,\ 54732)$$

전구의 수명이 평균은 800시간, 표준편차는 40시간인 정규분포를 따르는 것으로 알려져 있다. 이러한 전구 중 30개를 표본으로 추출하여 수명시험을 한 결과 표본평균이 788시간이었다. 귀무가설로 $\mu = 800$시간 대립가설로 $\mu \neq 800$시간을 유의수준 4%로 검정하시오.

[풀이]

1)귀무가설 $H_0 : \mu = 800$

2)대립가설 $H_1 : \mu \neq 800$

3)유의수준 $\alpha = 0.04$

4)기각역 $z < -2.55$ 또는 $z > 2.55$

5)검정통계량 $z = \frac{788-800}{40/\sqrt{30}} = -1.64$

6)귀무가설 채택