# Day 5. Linear Complex Structure

JJM Math

February 28, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

## 1 Complex Structure

$2n$-차원의 real vector space $V$는 $\mathbb{R}^{2n}$과 isomorphic하고, $\mathbb{R}^{2n}$은 자연스럽게 $\mathbb{C}^n$과 ($\mathbb{R}$-vector space로써) isomorphic하다. $\mathbb{C}^n$ 위에는 $V$에는 없는 추가적인 구조가 자연스럽게 존재하는데, 이는 *complex scalar multiplication*이다. $v \in \mathbb{C}^n$ 위에 $s + it \in \mathbb{C}$를 곱해주는 것은 다음과 같다. (여기서 $s, t \in \mathbb{R}$이라 하자.)

$$(s + it)v = s \cdot v + t \cdot iv$$

마찬가지로, 여기서 우변의 $\cdot$은 real scalar multiplication이고, 이는 원래부터 $V$에 있었던 구조이다. 여기서 알 수 있는 사실은, 만약 real vector space $V$ 위에 complex scalar multiplication을 정의하고 싶다면 $iv$를 정의하는 것으로 충분하다는 것이다. $v$를 $iv$로 보내는 map $V \to V$는 linear map일 것이고, 따라서 우리는 complex structure라는 것을 특별한 성질을 만족하는 linear map을 결정하는 것으로 정의할 수 있겠다. 특히 우리가 $\mathbb{R}^{2n}$ 위에 standard symplectic form을 정의할 때 사용했던 행렬 $J_0$은, bilinear form이 아닌 linear map으로 간주한다면 $\mathbb{R}^{2n}$ 위에 standard complex structure, 즉 symplectic basis를 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$으로 잡은 뒤 $x_j + iy_j \mapsto z_j \in \mathbb{C}^n$로 $\mathbb{R}^{2n}$과 $\mathbb{C}^n$을 identify시켰을 때의 'multiplication by $i$'를 나타낸다는 것을 확인한 바 있었다. 이번 글에서는 이에 대해 더 자세히 알아보려고 한다.

Real vector space $V$ 위에 정의된 **complex structure**는 $J^2 = -\mathrm{Id}$인 endomorphism $J : V \to V$을 의미한다. 위에서 정의한 '$v$를 $iv$로 보내는 map'이 이러한 성질을 만족시킨다는 것은 바로 확인할 수 있다. 간단히 말해서 $J$는 'multiplication by $i$'의 역할을 하는 map이 된다. 만약 이러한 $J$가 존재한다면, 우리는 $V$ 위에 다음과 같이 complex scalar multiplication을 정의할 수 있다.

$$(s + it) \cdot v = s \cdot v + t \cdot Jv$$

마찬가지로, 여기서 우변의 $\cdot$은 real scalar multiplication이다. 이러한 $J$가 주어진 real vector space $(V, J)$를 **complex vector space**라고 부른다.

**Remark 1.** 당연히 이러한 complex structure는 vector bundle 위에도 정의될 수 있다. Complex manifold가 무엇인지 아는 독자라면 위와 같이 real manifold의 tangent bundle 위에 complex structure를 줌으로써 이를 complex manifold로 간주할 수 있으리라고 기대할 수 있다. 그러나 complex manifold의 tangent bundle에 존재하는 complex structure는 chart로부터 자연스럽게 내재적으로 정의된 것이다. 따라서 tangent bundle을 complex vector bundle로 만들 수 있다고 해서 그 manifold가 complex manifold라는 뜻은 아니다. 이런 맥락에서 tangent bundle 위에 complex structure가 주어진 manifold를 **almost complex manifold**라고 부른다.

이러한 정의를 처음 만났을 때 해야하는 것은, $(V, J)$의 *standard form*이 있는지 확인해보는 것이다.

**Lemma 2.** $\dim V = 2n$이고 $V$ 위에 complex structure $J$가 주어졌다고 하자. 그렇다면 isomorphism $A : \mathbb{R}^{2n} \to V$가 존재하여 $JA = AJ_0$이다. 다시 말해, 모든 complex vector space는 $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$과 *complex vector space*로써 isomorphic하다.

짐작할 수 있듯 이를 증명하는 것은 매우 간단하다. (사실 그냥 complex basis를 잡아주면 끝난다.) 하지만 미래를 위해 보다 다양한 요소들이 개입된 방식의 증명을 살펴보자.

*Proof.* $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$를 $V$의 complexification이라고 하자. (여기서 $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2n$이 된다. 즉 $V_{\mathbb{C}}$는 $V$보다 차원이 2배 높은 공간이다.) $V_{\mathbb{C}}$ 위에는 $J$와는 무관한 자연스러운 complex structure가 존재하고, $J$ 역시 자연스럽게 complex linear map $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$로 확장될 수 있다. 이러한 확장을 한다면 $J$의 eigenvalue에 대해 논할 수 있다. 여전히 $J^2 = -\mathrm{Id}$이므로 $J$의 eigenvalue는 $\pm i$이다. 이제 $J$의 eigenspace들을 다음과 같이 표기하자.

$$E^{\pm} = \ker(\mathrm{Id} \mp iJ)$$

($E^{\pm}$는 각각 $\pm i$에 대응되는 eigenspace이다.) 그렇다면 다음과 같은 관찰들을 할 수 있겠다.

1. $J$는 real matrix이므로 $\pm i$를 같은 multiplicity만큼 가진다. 또한 $v \in E^+$였다면 $\bar{v} \in E^-$이다. 즉, $\dim E^+ = \dim E^-$이다.

2. $\mathrm{Id} + J^2 = (\mathrm{Id} + iJ)(\mathrm{Id} - iJ) = (\mathrm{Id} - iJ)(\mathrm{Id} + iJ) = 0$이므로 $\mathrm{im}(\mathrm{Id} \mp iJ) \subset E^{\pm}$이다.

3. 위의 결과와 dimension theorem을 사용하면 다음을 얻는다.

$$\dim \mathrm{im}(\mathrm{Id} + iJ) = 2n - \dim E^- \leq \dim E^+$$

그런데 $\dim E^+ + \dim E^- \leq \dim V_{\mathbb{C}} = 2n$이므로 $\dim E^+ + \dim E^- = 2n$이다. 즉, 다음과 같은 eigenspace decomposition이 존재한다.

$$V = E^+ \oplus E^-$$

이는 $\ker(\mathrm{Id} \pm iJ) = \mathrm{im}(\mathrm{Id} \mp iJ)$라는 사실 역시 함의한다. 특히 $\dim E^\pm = n$이다.

이제 $E^+$의 basis $v_j - iw_j$를 잡자. $(v_j, w_j \in V)$ 그렇다면 $J(v_j - iw_j) = i(v_j - iw_j) = w_j + iv_j$이므로 다음이 만족되어야 한다.

$$J(v_j) = w_j, \;\; J(w_j) = -v_j$$

또한 $v_j, w_j$들은 $\mathbb{R}$-linearly independent하다는 것도 확인할 수 있는데, 각각의 pair들은 $\mathbb{C}$-linearly independent하며 만약 어떤 실수 $c$에 대하여 $v_j = cw_j$였다면 $J(v_j) = cw_j$, $J(w_j) = c^{-1}v_j$이므로 위의 관계식이 성립할 수 없기 때문이다. 따라서 $v_j, w_j$들은 $V$의 basis가 된다. 또한 이들이 만족시키는 관계식은 $x_j, y_j$가 $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$에서 만족시키는 관계식과 일치한다. 따라서 $x_j, y_j$를 $v_j, w_j$로 옮겨주는 linear map $A$는 $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$과 $(V, J)$ 사이의 complex vector space isomorphism이 된다. $\square$

위의 증명에서 알 수 있는 것은, complex vector space $(V, J)$는 항상 $v_1, Jv_1, \cdots, v_n, Jv_n$ 꼴의 basis를 갖는다는 것이다. (위에서 $w_j = Jv_j$로 두면 된다.) 또한 여기서 $v_j + Jv_j$는 $V$의 complex basis가 된다는 사실도 알 수 있다. $GL_n(\mathbb{C})$는 connected이고, 따라서 우리는 $v_j$들의 길이를 적당히 조절하고 적당히 linear combination(=column operation)을 해줌으로써 다음이 성립하도록 만들 수 있다.

$$\det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 + Jv_1 & v_2 + Jv_2 & \cdots & v_n + Jv_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = 1$$

즉, 다음과 같이 말할 수 있겠다.

**Proposition 3.** Complex vector space $(V, J)$는 $J$로부터 유도되는 orientation을 가진다.

# 2 Compatible Complex Structures

우리는 symplectic structure를 공부하고 있었으므로, 이제 complex structure들 중 주어진 symplectic structure $\omega$과 잘 어울리는 녀석들을 보도록 하자. Symplectic vector space $(V, \omega)$에 정의된 complex structure $J$가 $\omega$과 **compatible**하다는 것은 다음을 의미한다.

- $J$가 symplectomorphism이다. 즉, $\omega(v, w) = J^*\omega(v, w) = \omega(Jv, Jw)$이다.
- $\omega(v, Jv) > 0$ for any $v \neq 0$이다.

이 두 조건이 만족된다면 다음과 같이 정의한 $g_J$가 inner product가 된다는 것을 알 수 있다.

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw) \tag{1}$$

첫번째 조건은 $g_J$가 symmetric임을, 두번째 조건은 $g_J$가 positive definite임을 알려준다. 구체적으로는 다음과 같이 보일 수 있겠다.

$$g_J(w, v) = \omega(w, Jv) = \omega(Jw, J^2 v) = -\omega(Jw, v) = \omega(v, Jw) = g_J(v, w).$$

반대로 (1)과 같이 정의한 $g_J$가 inner product가 된다는 것은 $J$가 $\omega$-compatible임과 동치이다. 친숙한 예로, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$에 정의된 $J_0$은 $\omega_0$-compatible이며, 이로부터 정의되는 inner product는 standard inner product이다.

만약 두번째 조건만을 만족시킨다면 $J$를 **tame**이라고 하는데, 이 경우에는 다음과 같이 inner product를 정의할 수 있다.

$$g_J(v, w) = \frac{1}{2}(\omega(v, Jw) - \omega(Jv, w))$$

**Remark 4.** 여기서는 사람들마다 달라지는 sign convention이 있는데, $\omega(v, Jv) > 0$으로 둘 것인지 아니면 $\omega(Jv, v) > 0$으로 둘 것인지가 그것이다. 이는 $\omega_0$를 정의하는 것이 우리의 $J_0$인지, 아니면 $-J_0$인지에 따라 달라지는 것으로 보인다. Standard complex structure는 우리의 $J_0$으로 두는 것이 관습적으로 이미 굳어졌지만, standard symplectic structure를 $\pm J_0$ 중 무엇으로 두는지에 대해서는 딱 하나의 convention이 정해지지 않은 것 같다. 우리는 앞으로 $\omega(v, Jv) > 0$이라는 convention을 쓸 것이다. (필자에게는 법적으로 둘 중 하나만 쓰게 했으면 좋겠다는 작은 바람이 있다.) 어느 쪽을 택해도 괜찮지만 일관성은 있는 것이 좋겠다. (물론 일관성이 없는 저자들도 있다... 정말 끔찍해...)

우리는 **Day 2.**의 Proposition 6.에서 symplectic structure, complex structure, inner product 중 2개가 주어진다면 나머지 하나가 결정된다는 것을 확인한 바 있다. 그러한 맥락에서 compatible $J$를 생각하는 것은 매우 자연스럽다고 할 수 있겠다. 또한 이들이 모두 결정된다면 Hermitian inner product를 생각할 수도 있겠다. 이는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h_J(v, w) = \omega(v, Jw) + i\omega(v, w)$$

이렇게 정의한 $h_J$가 hermitian form이 된다는 것을 직접 확인해 보자.

이제 어떠한 $J$가 $\omega$와 compatible인지에 대해 알아볼 차례이다. 이에 대해서는 꽤 괜찮은 정리가 있다.

**Proposition 5.** $(V, \omega)$ 위의 $J$에 대해 다음은 모두 동치이다.

1. $J$는 $\omega$-compatible이다.
2. $(V, \omega)$은 $v_1, \cdots, v_n, Jv_1, \cdots, Jv_n$ 꼴의 symplectic basis를 가진다.
3. Symplectomorphism $A : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to (V, \omega)$이 존재하여 $A^*J = J_0$이다.
4. $\omega(v, Jv) > 0$ for any $v \neq 0$이고, $L \in \mathcal{L}(V, \omega)$이라면 $J(L) \in \mathcal{L}(V, \omega)$이다.

*Proof.* 먼저 1을 가정하고 2를 보이자. $V$ 안의 Lagrangian subspace $L$을 하나 잡고, $L$의 $g_J$에 대한 orthonormal basis $v_1, \cdots, v_n$을 잡자. 그렇다면 $\omega(v_j, Jv_k) = g_J(v_j, v_k) = \delta_{jk}$이고, $g_J(v_j, Jv_k) = \omega(Jv_j, Jv_k) = \omega(v_j, v_k) = 0$이다. 따라서 $v_1, \cdots, v_n, Jv_1, \cdots, Jv_n$은 $(V, \omega)$의 symplectic basis이다. 2가 3을, 3이 1을 함의하는 것은 거의 자명하다.

이제 1과 4가 동치라는 것을 보이자. $J$가 $\omega$-compatible이라면 $J$는 symplectomorphism이므로 4가 성립한다. 반대로 4를 가정해 보자. $J$가 주어졌다고 하고, $g_J$를 (1)과 같이 정의하자. $g_J$가 inner product임을 보이면 증명이 끝난다. 그런데 $g_J(v, v) > 0$이라 가정했으므로 symmetric이라는 것만 보이면 충분하다. $g_J$가 symmetric이 아니라고 해보자. 그렇다면 $\omega(v, Ju) \neq \omega(u, Jv)$인 $v, w$가 존재할 것이다. 다음과 같이 $w$를 정의하자.

$$w = u - \frac{\omega(v, Ju)}{\omega(v, Jv)} v$$

그렇다면 정의로부터 다음을 얻는다.

$$\omega(v, Jw) = 0, \quad \omega(w, Jv) = \omega(u, Jv) - \omega(v, Ju) \neq 0.$$

만약 $w, Jv$가 linearly dependent였다면 $\omega(w, Jv) = 0$이었을 것이다. 따라서 $w, Jv$는 linearly independent이고, $J$는 vector space isomorphism이므로 $v, Jw$ 역시 linearly independent하다. 이제 $\omega(v, Jw) = 0$이므로 $v, Jw$를 포함하는 Lagrangian subspace $L$을 잡을 수 있다. 그렇다면 $J(L)$에는 $w, Jv$가 포함되어 있는데, $\omega(w, Jv) \neq 0$이므로 $J(L)$은 Lagrangian subspace가 아니다. 이는 가정에 모순되므로 $g_J$는 symmetric이어야 하고, 따라서 증명이 끝난다. □

# 3 Space of Complex Structures

$V$ 위에 주어질 수 있는 complex structure들의 집합을 $\mathcal{J}(V)$라고 하자. $\mathcal{J}(V)$는 $End(V)$의 subset이고, 따라서 적당한 topology가 존재한다. Sympletic structure들의 공간에 대해 알아보았듯, $\mathcal{J}(V)$의 topology 역시 알아볼 가치가 있을 것이다. 당연히 $\mathcal{J}(V)$와 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$은 homeomorphic하고, 따라서 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$에 대해서만 알아보면 충분하리라 생각할 수 있다.

먼저 **Day 2.**에서 살펴보았던 symplectic structure들의 공간 $\Omega(\mathbb{R}^{2n})$을 생각해보자. 이를 $GL_{2n}(\mathbb{R})/Sp(2n)$로 간주할 수 있다는 사실을 생각해보면 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$은 $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$로 간주할 수 있으리라 기대할 수 있다. 구체적으로 다음과 같은 map을 정의하자.

$$\begin{aligned} GL_{2n}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \\ A &\mapsto AJ_0A^{-1} \end{aligned}$$

이는 당연히 group map이고, Lemma 2에 의해 이는 surjective이다. 또한 $A \in GL_n(\mathbb{C})$라면 $AJ_0 = J_0A$이므로 이 map의 kernel은 $GL_n(\mathbb{C})$가 된다. 따라서 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$은 $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$로 간주할 수 있다. 또한 **Day 2.**에서 알아보았던 것과 마찬가지로 orthogonalization process를 통해 다음의 homotopy equivalence 역시 존재한다.

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) = GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C}) \simeq O(2n)/U(n)$$

그런데 $GL_n(\mathbb{C})$는 connected인 반면 $GL_{2n}(\mathbb{R})$은 connected가 아니다. 즉, $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$은 항상 2개의 component를 가지고, 이는 determinant의 부호로 결정될 것이다.

여기서 주의해야 할 점은 (필자 역시 혼란에 빠졌던 부분이다) 위의 identification은 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$의 원소를 행렬 그대로 identify하는 것이 아니라는 부분이다. 따라서 $J$의 determinant가 아닌, $J$에 대응되는 $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$의 determinant를 보아야 한다. ($J$는 $\pm i$를 같은 개수만큼 eigenvalue로 가지기 때문에 $J$의 determinant는 항상 1이다.) 위의 map으로부터 이 대응은 $J$를 $J_0$으로 바꿔주는 좌표 변환 $A$에 대응시키는 것이라는 점을 알 수 있다. 따라서 구체적으로는 $J$를 표현하는 행렬이 아닌, $J$로 만들어지는 basis와 $J$를 identify한 것으로 보는게 맞겠다. 예컨대, $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}$에는 2개의 orthogonal complex structure가 존재하는데 이들은 다음과 같다.

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

이 둘이 각각 'multiplication by $i$', 그리고 'multiplication by $(-i)$'에 대응된다는 것을 확인해 보라. $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$와의 identification 아래에서 이들은 각각 다음과 같은 행렬에 대응된다.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$의 standard basis $e_1, e_2$를 생각해보면, $J_0(e_1) = e_2$이므로 $e_1, J_0e_1$은 standard orientation을 유도하지만, $J_0^-(e_1) = -e_2$이므로 $e_1, J_0^-e_1$은 reversed orientation을 유도하게 된다. 다시 말해 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$의 원소들은 $\mathbb{R}^{2n}$의 standard orientation을 유도하는 것과 그 반대의 orientation을 유도하는

것으로 분류할 수 있겠다. Standard orientation을 유도하는 원소들만을 모아둔 것을 $\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n})$이라 쓰자. 앞서 언급한 identification을 사용한다면 다음을 알 수 있다..

$$\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n}) = GL^+_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C}), \quad \mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n}) \cap SO(2n) \simeq SO(2n)/U(n)$$

여기서 후자의 $\cap$은 identification을 생각하지 않은 것이다. 즉, $J$가 complex structure이면서 orthogonal한 경우를 생각한 것이다. 이러한 $J$들을 **orthogonal complex structure**라고 부르자. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \simeq O(2)/U(1) \simeq \mathbb{Z}_2$이고, 따라서 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$의 원소들 중 orthogonal한 녀석은 앞서 보았던 $J_0, J_0^-$뿐임을 알 수 있다. 특히 $\mathbb{R}^2$ 위에 줄 수 있는 orientation-preserving orthogonal complex structure는 1개뿐이다. $\mathbb{R}^4$의 경우에는 다음의 정리가 있다.

**Proposition 6.** $\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^4)$는 $S^2$와 homotopy equivalent하다.

*Proof.* $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^4) \cap SO(4)$라고 하자. $e_1, \cdots, e_4$를 $\mathbb{R}^4$의 standard basis라고 하자. 그렇다면 $J \in SO(4)$이므로 $Je_1$은 $e_1$과 orthogonal하다. $e_1, Je_1$으로 결정되는 2차원 subspace를 $E$라고 하자. 만약 $Je_1$이 결정되었다면, 어떤 $v \in E^\perp$에 대해서도 $v, Jv$는 $E^\perp$의 orthonormal basis가 될 것이고, 따라서 $e_1, Je_1, v, Jv$는 $\mathbb{R}^4$의 positively oriented orthonormal basis가 될 것이다. 이는 다시말해 $Je_1$을 결정한다면 $J$가 완전히 결정된다는 것이다.

그러므로 우리는 $Je_1$을 어떤 것으로 결정할지만 보면 된다. $J \in SO(4)$이므로 이는 unit vector 여야 하고, $e_1$과는 orthonormal이어야 한다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^4) \cap SO(4) \simeq \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum |x_j|^2 = 1,\, x_1 = 0 \right\}$$

우변은 $\mathbb{R}^3$ 안의 $S^2$와 같고, 따라서 원하는 것이 증명되었다. □

이제 $(V, \omega)$을 symplectic vector space라 하고, $\omega$-compatible complex structure들만 모아둔 $\mathcal{J}(V)$의 subspace $\mathcal{J}(V, \omega)$를 생각하자. $\mathcal{J}(V)$는 위상적으로 꽤 복잡한 구조를 갖고 있는 반면 $\mathcal{J}(V, \omega)$은 훨씬 간단한 구조를 갖고 있다. $J$가 $\omega$-compatible이라면 $g_J$가 inner product라는 사실을 떠올려 보자. 만약 $J \mapsto g_J$라는 대응이 bijection이라면 우리는 $\mathcal{J}(V, \omega)$을 $V$ 위에 주어진 inner product들의 공간과 identify시킬 수 있을 것이다. 그런데 inner product들의 공간은 convex이므로 contractible이고, 이는 위상적으로 생각할 수 있는 가장 단순한 공간이다. 다음 정리는 이 추측이 (어느 정도는) 옳음을 말해준다.

**Proposition 7.** $V$ 위의 symmetric positive definite symplectic matrix들의 모임을 $\mathcal{P}(V)$라 하자. 그렇다면 $\mathcal{J}(V, \omega)$은 $\mathcal{P}(V)$와 diffeomorphic하다. 특히 두 공간은 모두 contractible이다.

*Proof.* 편의상 $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$이라 하자. $J$가 $\omega_0$-compatible이라는 것은 다음과 같다.

1. $J^2 = -\mathrm{Id}$

2. $J^*\omega_0 = J$, 다시말해 $J^t J_0 J = J_0$.

3. $\omega(v, Jv) = \langle J_0 v, Jv\rangle = \langle v, -J_0 J v\rangle > 0$.

$P = -J_0 J$라고 정의하자. 그러면,

$$P^t = (-J_0 J)^t = J^t J_0 = -J^t J_0 J^2 = -(J^t J_0 J)J = -J_0 J = P$$

따라서 $P$는 symmetric이고, 3에 의하여 positive definite이다. 또한 $J_0, J$는 모두 symplectic이므로 $P$는 symplectic이고, 따라서 $P \in \mathcal{P}(V)$이다. 반대로 $P \in \mathcal{P}(V)$가 주어졌다면 $J = -J_0^{-1}P$로 정의한 $J$가 $\omega_0$-compatible이라는 것은 쉽게 확인할 수 있다.

이제 $\mathcal{P}(V)$가 contractible이라는 것을 알아보자. **Day 2.**의 Proposition 8.의 증명에서 $P \in \mathcal{P}(V)$라면 $P^\alpha \in \mathcal{P}(V)$ for any $\alpha \geq 0$라는 것을 확인해본 바 있다. 즉, 다음과 같은 contraction이 존재한다.

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(V) \times [0,1] &\to \mathcal{P}(V) \\ (P, \alpha) &\mapsto P^{1-\alpha} \end{aligned}$$

어떤 $P$에 대해서도 $P^0 = \mathrm{Id}$이므로 원하는 것이 증명되었다. $\square$

# 4 More on Compatible Structures

**Remark 8.** 이 절의 내용들은 대부분 tame complex structure에 대해서도 비슷하게 성립한다. 하지만 이에 대해서는 따로 다루지 않을 것이고, 만약 이후 관련 내용이 필요해진다면 결과만을 가져다 쓰도록 하자.

앞서 증명한 정리의 또다른 증명이 있는데, 이는 $\mathcal{J}(V,\omega)$과 $V$ 위의 모든 inner product들의 공간 $\mathrm{Sym}^+(V)$ 사이의 homotopy equivalence를 직접 건설하는 방식으로 이뤄진다. $\mathrm{Sym}^+(V)$는 convex이고, 따라서 contractible이다. 왜 굳이 이렇게 어려워 보이는 증명을 한번 더 하는지에 대해서는... 잘 모르겠으니 천천히 알아보도록 하자. 필자의 경험상 이렇게 불필요하게 복잡해 보이는 증명 방식은 나중에 쉬운 증명이 통하지 않는 상황에서 중요하게 쓰이곤 한다. 일단은 $J, \omega, g$ 사이의 compatibility에 대해 더 자세히 알아보는 것이 1차적인 목적이라 생각하면 될 것이다.

위에서는 $J$의 $\omega$에 대한 compatibility에 대해 논했지만, 사실 $J, \omega, g$는 서로서로 잘 어울릴 수 있는 친구들이다. $g \in \mathrm{Sym}^+(V)$가 주어졌을 때 이와 잘 어울리는 $J, \omega$들의 공간은 다음과 같이 정의할 수 있겠다.

$$\mathcal{J}(V, g) = \{J \in \mathcal{J}(V) : J^*g = g\}$$
$$\Omega(V, g) = \{\omega \in \Omega(V) : \omega(-,-) = g(J-,-) \text{ for some } J \in \mathcal{J}(V, g)\}$$

첫번째 정의는 자연스럽다. 두번째 정의 역시 자연스러운데, $g(Jv,w)=\omega(v,w)$이고 $J^*g=g$였다면

$$\omega(w,v)=g(Jw,v)=g(v,Jw)=g(-J^2v,Jw)=-J^*g(Jv,w)=-g(Jv,w)=-\omega(v,w)$$

이므로 $\omega$은 symplectic form이 되기 때문이다. 또한 $J$가 $\omega$-compatible이라면, 이로부터 얻어지는 inner product $g_{J,\omega}$에 대해서 $g_{J,\omega}(J-,-)=\omega_{g,J}(-,-)$라는 것도 쉽게 알 수 있다. 이들은 $J,\omega,g$ 들이 각각 compatible한 것이 무엇인지를 표현했다고 볼 수 있겠다.

이제 다음과 같은 map을 정의하자.

$$\begin{aligned} F:\mathrm{Sym}^+(V)\times\mathcal{J}(V)&\to\Omega(V)\\ (g,J)&\mapsto\omega_{g,J}=\frac{1}{2}(g(J-,-)-g(-,J-)) \end{aligned} \tag{2}$$

위에서 $\omega(-,-)=g(J-,-)$가 skew-symmetric이라는 것을 보인 것과 마찬가지로 $\omega_{g,J}$가 skew-symmetric이라는 것을 보일 수 있다. 또한 $J$는 $\omega_{g,J}$-compatible인데, 이는 다음 식으로부터 알 수 있다.

$$\omega_{g,J}(-,J-)=\frac{1}{2}(g(J-,J-)-g(-,J^2-))=\frac{1}{2}(J^*g+g)$$

즉, $\omega_{g,J}(-,J-)$은 2개의 inner product $g$와 $J^*g$의 convex linear combination이므로 inner product 이고, 따라서 $J\in\mathcal{J}(V,\omega_{g,J})$이다. 특히 $J\in\mathcal{J}(V,g)$였다면 $\omega_{g,J}(-,J-)=g(-,-)$이고, 따라서 $\omega_{g,J}\in\Omega(V,g)$이다. 즉, $g\in\mathrm{Sym}^+(V)$를 하나 고정하고 $F(g,-)=f_g$의 정의역을 $\mathcal{J}(V,g)$로 제한한다면 이는 $\Omega(V,g)$로 가는 map이 된다. 또한 $f_g:\mathcal{J}(V,g)\to\Omega(V,g)$가 diffeomorphism이 된다는 것 구체적인 inverse를 잡음으로써 어렵지 않게 보일 수 있다. (뒤쪽을 참조하면 이를 잡는 데에 도움이 될 것이다.)

이제 $\mathrm{Sym}^+(V),\mathcal{J}(V),\Omega(V)$ 위에 $GL(V)$-action을 정의하자. $A\in GL(V)$이라면, 각각에 대한 action은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A\cdot g)(v,w)&=A^*g(v,w)=g(Av,Aw)\\ (A\cdot J)(v)&=A^{-1}JAv\\ (A\cdot\omega(v,w)&=A^*\omega(v,w)=\omega(Av,Aw) \end{aligned}$$

그렇다면 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_{A\cdot g,A\cdot J}(v,w)&=\frac{1}{2}\left(A^*g(A^{-1}JAv,w)-A^*g(v,A^{-1}JAw)\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(g(JAv,Aw)-g(Av,JAw)\right)\\ &=\omega_{g,J}(Av,Aw)=(A\cdot\omega_{g,J})(v,w) \end{aligned}$$

따라서 우리의 map $F$는 $F(A\cdot g, A\cdot J) = A\cdot F(g,J)$를 만족하고, 이를 보통 $GL(V)$-*equivariant* 하다고 말한다.

이제 마지막으로 $\mathrm{Sym}^+(V)\times\Omega(V)\to\mathcal{J}(V)$를 정의해 보자. 먼저 $g\in\mathrm{Sym}^+(V), \omega\in\Omega(V)$일 때 다음과 같은 $A_{g,\omega}\in GL(V)$를 정의하자.

$$\omega(v,w) = g(A_{g,\omega}v, w)$$

이 $A$는 우리의 $J$를 만드는 재료가 될 것이다. $\omega$과 $g$ 모두 non-degenerate이기 때문에 이러한 $A_{g,\omega}$은 잘 정의된다. 편의상 $A = A_{g,\omega}$으로 쓰자. $g(Av,w) = -g(v,Aw)$임은 자명하고, 따라서 $A$는 $g$에 대해 skew-adjoint이다. $g$에 대한 $A$의 adjoint matrix를 $A^*$라 쓰자. 즉, $g(Av,w) = g(v,A^*w)$이다. (만약 $V=\mathbb{R}^{2n}$이고 $g$가 standard inner product라면 $A^*$는 그냥 $A^t$이다.) 이제 $P = A^*A = -A^2$을 생각하면, 이는 $g$에 대해 self adjoint이고 $g(v,Pv) = g(Av,Av) > 0$이므로 positive definite이다. 그러므로 $g$에 대한 적당한 orthonormal basis를 잡아 $P$를 대각화시킬 수 있고, $Q^2 = P$이면서 $g$에 대해 self adjoint이고 positive definite인 $Q = Q_{g,\omega} : V\to V$를 찾을 수 있다.

이제 $Q, A$를 갖고 $J$를 정의해보자. 먼저 $Q^2 = -A^2$이므로 $Q$와 $A$는 commute하고, $J^2 = -\mathrm{Id}$여야하므로 $J = Q^{-1}A\in\mathcal{J}(V)$로 정의하면 적절한 것이다. 이렇게 정의한 $J$에 대해서는 다음이 성립한다.

$$J^* = A^*(Q^{-1})^* = -AQ^{-1} = -Q^{-1}A = -J$$

따라서 $J$는 skew-symmetric이고, 이는 $g(Jv,Jw) = g(v,J^*Jw) = g(v,-J^2w) = g(v,w)$임을 의미하므로 $J\in\mathcal{J}(V,g)$이다. 또한, $Q$가 positive definite symmetric이라는 것으로부터 $\omega(-,J-) = g(A-,J-) = g(QJ-,J-)$가 inner product라는 것도 알 수 있고, 따라서 $J\in\mathcal{J}(V,\omega)$이기도 하다. 또한, $(g,\omega)\mapsto J_{g,\omega}$이 $GL(V)$-equivariant라는 것은 아까와 비슷하게 간단한 계산을 통해 보일 수 있겠다.

지금까지 우리는 다음과 같은 3개의 map을 만들었다.

$$\begin{aligned} J\mapsto g_J = g_{\omega,J} &: \mathcal{J}(V,\omega)\to\mathrm{Sym}^+(V)\\ (g,J)\mapsto\omega_{g,J} &: \mathrm{Sym}^+(V)\times\mathcal{J}(V)\to\Omega(V)\\ (g,\omega)\mapsto J_{g,\omega} &: \mathrm{Sym}^+(V)\times\Omega(V)\to\mathcal{J}(V)\end{aligned}$$

이 map들이 구체적으로 어떤 관계를 가지는지 알아보자.

**Proposition 9.** $J\mapsto\omega_{g,J}$과 $\omega\mapsto J_{g,\omega}$는 $\mathcal{J}(V,g)$와 $\Omega(V,g)$ 사이의 diffeomorphism이다.

*Proof.* 각각의 map들이 smooth라는건 그냥 적당히 이해하도록 하자. 여기서는 두 map들의 합성이 identity임을 보일 것이다. 먼저 $J\in\mathcal{J}(V,g)$라고 하자. 그렇다면 정의로부터 $\omega_{g,J} = g(J-,-)$이므로 $A_{g,\omega_{g,J}} = J$이고, $Q = \mathrm{Id}$로 잡으면 되므로 $J_{g,\omega} = Q^{-1}A = J$이다. 즉, $J_{g,\omega_{g,J}} = J$이다.

반대로 $\omega \in \Omega(V,g)$라고 하자. 그렇다면 어떤 $J \in \mathcal{J}(V,g)$에 대해 $g(A_{g,\omega}v,w) = \omega(v,w) = g(Jv,w)$이므로 $A_{g,\omega} = J$이고, 따라서 위와 마찬가지로 $J_{\omega,g} = J$이다. 그렇다면 $\omega_{g,J} = g(J-,-) = \omega$이다. 즉, $\omega_{g,J_{g,\omega}} = \omega$이다. □

**Proposition 10.** $g \in \mathrm{Sym}^+(V)$를 하나 고정하자. 그렇다면 $G : \omega \mapsto J_{g,\omega}$과 $F : J \mapsto \omega_{g,J}$는 서로의 homotopy inverse이다. 즉, $\mathcal{J}(V)$와 $\Omega(V)$는 homotopy equivalent하다.

*Proof.* 다음과 같은 homotopy를 잡아보자.

$$\varphi_t(\omega) = (1-t)\omega + t\omega_{g,J_{g,\omega}}$$

$\varphi_0 = \mathrm{Id}$이고, $\varphi_1 = F \circ G$이므로 이것이 잘 정의된다는 것만 보이면 충분하다. $J_{g,\omega} \in \mathcal{J}(V,g) \cap \mathcal{J}(V,\omega)$이고, $J' \in \mathcal{J}(V,\omega_{g,J'})$이므로 $J_{g,\omega}$은 $\omega$과 $\omega_{g,J_{g,\omega}}$ 모두와 compatible하다. Inner product의 convex combination은 inner product이므로, $J_{g,\omega}$은 모든 $t$에 대해서 $\varphi_t(\omega)$-compatible이기도 하다. 따라서 $\varphi_t(\omega) \in \Omega(V)$이고, 원하는 것을 보였다.

반대 방향 역시 비슷한데, 이 경우는 다음과 같은 homotopy를 잡으면 된다.

$$\psi_t(J) = J_{g_t,\omega_{g_t,J}}, \ \ g_t = \frac{1+t}{2}g + \frac{1-t}{2}J^*g$$

$\psi_0 = \mathrm{Id}$이고, $\psi_1 = G \circ F$이며 $\psi$가 잘 정의되었다는 것을 보일 수 있다. □

**Proposition 11.** $g \in \mathrm{Sym}^+(V)$를 하나 고정하자.

1. Inclusion $\mathcal{J}(V,g) \to \mathcal{J}(V)$은 homotopy equivalence이고, inverse는 $J \mapsto J_{g,\omega_{g,J}}$이다.

2. Inclusion $\Omega(V,g) \to \Omega(V)$는 homotopy equivalence이고, inverse는 $\omega \mapsto \omega_{g,J_{g,\omega}}$이다.

*Proof.* $J \in \mathcal{J}(V,g)$라면 $J_{g,\omega_{g,J}} = J$임은 위에서 확인하였다. 따라서 $J \mapsto J_{g,\omega_{g,J}}$를 $\mathcal{J}(V) \to \mathcal{J}(V,g)$의 projection으로 생각한다면, 이것이 inclusion의 homotopy inverse라는 것은 Proposition 9.의 증명으로부터 확인할 수 있다. 마찬가지로 $\omega \mapsto \omega_{g,J_{g,\omega}}$을 projection으로 생각한다면 Proposition 9.의 증명으로부터 원하는 것을 얻을 수 있다. □

**Theorem 12.** $\omega \in \Omega(V)$를 하나 고정하자. 그렇다면 $J \in \mathcal{J}(V,\omega)$에 대하여 $J \mapsto g_J$는 homotopy equivalence이고, 그 inverse는 $g \mapsto J_{g,\omega}$으로 주어진다. 특히, $\mathcal{J}(V,\omega)$은 contractible이다.

*Proof.* 위의 두 map을 합성하면 $J \mapsto J_{g_J,\omega}$이고, 이것이 identity라는 것은 쉽게 확인할 수 있다. 반대 방향의 합성은 $g \mapsto g_{J_{g,\omega}}$으로 주어질 것인데, $\mathrm{Sym}^+(V)$가 contractible이라는 것으로부터 이것이 identity와 homotopic하다는 것을 알 수 있다. □

이 결과들을 요약하면, 다음과 같은 $GL(V)$-equivariant commutative diagram이 있다는 것으로 생각할 수 있겠다. 특히 여기서 보이는 모든 map들은 homotopy equivalence이다.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}(V,g) & \xrightarrow{\text{Prop.10}} & \mathcal{J}(V) \\ {\scriptstyle\text{Prop.8}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{Prop.9}} \\ \Omega(V,g) & \xrightarrow{\text{Prop.10}} & \Omega(V) \end{array}$$

이를 다른 방향으로 이해하기 위해서, compatible pair들의 공간을 생각하자.

$$\mathcal{C}(V) = \{(\omega, J) : \omega \in \Omega(V), J \in \mathcal{J}(V,\omega)\}$$

$\mathcal{C}(V)$는 $\Omega(V)$, $\mathcal{J}(V)$으로 자명한 projection을 가진다. 이를 각각 $\pi_\Omega, \pi_\mathcal{J}$라고 하자. 앞의 정리들을 통해, 적당히 고정된 $g \in \mathrm{Sym}^+(V)$에 대해 다음과 같이 정의되는 map들이 이 projection들의 homotopy inverse임을 확인할 수 있다.

$$\omega \mapsto (J_{g,\omega}, \omega)$$
$$J \mapsto (J, \omega_{g,J})$$

이는 다음과 같은 commutative diagram으로 이해할 수 있다.

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{O(2n)}{U(n)} & \longrightarrow & \frac{GL_{2n}(\mathbb{R})}{GL_n(\mathbb{C})} & \longleftarrow & \frac{GL_{2n}(\mathbb{R})}{U(n)} & \longrightarrow & \frac{GL_{2n}(\mathbb{R})}{Sp(2n)} & \longleftarrow & \frac{O(2n)}{U(n)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}(V,g) & \longrightarrow & \mathcal{J}(V) & \xleftarrow{\pi_\mathcal{J}} & \mathcal{C}(V) & \xrightarrow{\pi_\Omega} & \Omega(V) & \longleftarrow & \Omega(V,g) \end{array}$$

여기서 세로 방향은 모두 diffeomorphism이고, 가로 방향은 모두 homotopy equivalence이다.

# 5 예고

다음 글에서는 드디어 vector space에서 벗어나 symplectic vector bundle에 대해 알아볼 것이다. Vector bundle이란 어떤 manifold 위에 vector space의 smooth family를 정의한 것으로 생각할 수 있고, symplectic vector bundle이란 그 위에 smooth family of symplectic structure를 정의한 것으로 이해할 수 있다. Symplectic manifold는 tangent bundle $TM$을 symplectic vector bundle로 간주할 수 있는 경우를 의미한다. 따라서 지금까지 논의한 symplectic linear algebra의 내용들이 적용될 수 있을 것이지만, manifold의 기하학에 따라 많은 변경점이 있을 것이다.