Day 3. Lagrangian Subspaces, Maslov Index

JJM Math

February 21, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이 글에서는 symplectic space의 중요한 subspace인 Lagrangian subspace에 대해 다룰 것이다. 이는 symplectic manifold의 Lagrangian submanifold로 계승될 예정이다. Lagrangian submanifold가 진정한 'object'라고 말하는 사람들도 있는데, 필자의 공부가 모자란 관계로 무슨 말인지 잘 이해하지는 못했다. 이를 이용하는 좋은 예시로 symplectic reduction도 소개해보려 한다. 그리고 loop에 주어지는 index의 일종인 Maslov index에 대해서도 알아볼 것인데, 이는 Floer theory에서 chain group에 grading을 주는 역할을 한다.

1 Lagrangian Subspaces

Lagrangian subspace의 정의는 linear subspace $L \subset (V, \omega)$ such that

- $\omega|_L = 0$
- $2 \dim L = \dim V$

이었다. 이름에서 짐작할 수 있듯, 이는 다양한 역할을 한다. Lagrangian subspace가 어떤 맥락에서 자연스럽게 등장하는지 알아보자.

Example 1.

1. 지난 글에서 정의한 $(E \oplus E^*, \omega)$을 생각하자. 이 안에서 E와 E^*는 모두 Lagrangian subspace임을 쉽게 확인할 수 있다. 이는 cotangent bundle 안에서 base manifold와 cotangent fiber가 각각 Lagrangian submanifold라는 것으로 번역될 수 있겠다.
2. 지난 글에서 $\mathbb{R}^{2n}$과 identify한 $\mathbb{C}^n$에 대하여 $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$을 생각하면, 이 안의 real axis $\mathbb{R}^n$은 Lagrangian subspace가 된다.

3. $A:(V,\omega)\to(V,\omega)$의 graph를 생각하자.

$$\Gamma_A=\{(v,Av):v\in V\}$$

Γ_A가 $(V\oplus V,\omega\oplus(-\omega))$의 Lagrangian subspace라는 것과 A가 symplectomorphism이라는 것이 동치라는 것을 쉽게 확인해볼 수 있다. 즉, symplectomorphism은 Lagrangian subspace로 표현될 수 있다.

위의 3번째 예시를 통해, Lagrangian subspace들의 공간을 생각해볼 수 있다. (V,ω)의 Lagrangian subspace는 $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$의 Lagrangian subspace와 1대1로 대응될 것이므로, 이 공간을 다음과 같이 표기하자.

$$\mathcal{L}(V,\omega)\simeq\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)=\mathcal{L}(n)=\{L\subset V:L\text{ is Lagrangian}\}.$$

그러나 아직 이 공간(집합)에는 topology를 줄 수 없는데, 이는 linear subspace들의 공간이고 우리는 아직 이런 곳에 topology를 주는 법을 배운 적이 없기 때문이다. 물론 Grassmannian을 생각할 수도 있겠지만, 그보다 좀더 explicit한 방법을 생각하자.

아이디어는 위의 3번 예시이다. Symplectomorphism A에 대해 graph Γ_A가 Lagrangian이었으므로, $L\subset\mathbb{R}^{2n}$이 Lagrangian이라면, 이것을 어떤 matrix $X\in M_n(\mathbb{R})$에 대하여 Γ_X로 표현할 수 있으리라는 기대를 할 수 있겠다. 만약 이것이 가능하다면 그러한 matrix들의 공간을 생각한 뒤, 서로 같은 Lagrangian subspace L을 정의하는 X들 사이에 equivalence relation을 줌으로써 $\mathcal{L}(n)$을 다루기 쉬운 녀석으로 바꿀 수 있겠다.

이 과정을 알아보자. $X,Y\in M_n(\mathbb{R})$에 대하여 다음과 같이 Z를 정의하고, $L=\mathrm{im}Z$라고 하자.

$$Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\in M_{2n\times n}(\mathbb{R})$$

$z\in L$은 $u\in\mathbb{R}^n$에 대해 $z=(Xu,Yu)$와 같이 표현할 수 있다. L이 Lagrangian이 되는 것을 알아보기 위해 다음과 같은 간단한 계산을 해보자.

$$\begin{aligned}\omega_0(z,z')=\omega_0((Xu,Yu),(Xu',Yu'))&=\begin{pmatrix}u^tX^t & u^tY^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{Id}\\\mathrm{Id}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Xu'\\Yu'\end{pmatrix}\\&=u^tY^tXu'-u^tX^tYu'=u^t(X^tY-Y^tX)u'\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{im}Z$가 isotropic이려면 $X^tY=Y^tX$여야 하고, $\mathrm{im}Z$가 Lagrangian이려면 추가로 $\mathrm{rank}Z=n$이어야 한다. 이 결과를 통해 $\mathcal{L}(n)$을 $M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$의 적당한 부분집합으로 간주할 수 있고, 자연스러운 topology를 가지게 되겠다. 특히 위에서 $X=\mathrm{Id}$인 경우 $\mathrm{im}Z=\Gamma_Y$이고, 이것이

Lagrangian이라는 것은 Y가 symmetric matrix (for any rank)인 것과 동치라는 것을 확인해볼 수 있다.

im$Z$는 Z의 column vector들로 span되는 공간이므로, Z의 column vector는 Lagrangian subspace im$Z$의 basis가 된다. 이러한 맥락에서 위에서 정의한 $Z \in M_{2n,n}(\mathbb{R})$를 **Lagrangian frame**이라고 부른다. Z가 Lagrangian frame이 될 조건인 $X^tY = Y^tX$는 익숙한 식인데, 지난 글에서 확인했던 $U = X + iY$가 unitary matrix가 될 조건의 허수부였다. 그리고 다른 하나의 조건은 다음과 같았다.

$$X^tX + Y^tY = \mathrm{Id}_n$$

이는 Z의 column vector들이 *orthonormal basis*가 된다는 것과 동치이다. 이 경우 Z를 **unitary Lagrangian frame**이라고 부른다. 지금까지의 결과를 다음과 같이 요약할 수 있겠다.

Proposition 2. $\mathrm{im}Z = L$이라 두자.

1. L이 Lagrangian이라는 것은 $X^tY = Y^tX$와 동치이다.
2. Lagrangian frame Z가 unitary라는 것은 $U = X + iY$가 unitary라는 것과 동치이다.
3. Lagrangian subspace L, L'이 있을 때, 어떤 $A \in Sp(2n)$이 존재하여 $A(L) = L'$이다.
4. $\mathcal{L}(n) \simeq U(n)/O(n)$. 특히, $\pi_1(\mathcal{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$.

Proof. 1,2는 위에서 확인하였고, 3을 확인해 보자. 이를 위해서는 고정된 Lagrangian L과 *horizontal Lagrangian*

$$L_h = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

에 대하여, $A(L_h) = L$인 $A \in Sp(2n)$을 찾는 것으로 충분하다. L_h의 unitary Lagrangian frame을 X, Y로 잡은 뒤, $A = X + iY$로 정의하자. 그러면 $A \in U(n) \subset Sp(2n)$이고, $A(L_h) = L$이다.

이제 4에 대해 알아보자. Unitary frame Z가 있다면 이는 $U(n)$의 원소를 정의하고, Lagrangian subspace $L = \mathrm{im}Z$를 정의할 수 있으므로, 위에서 언급한대로 $\mathcal{L}(n)$을 $U(n)$의 quotient로 생각할 수 있다. 이제 주어진 2개의 unitary frame Z, Z'가 같은 L을 정의한다고 해보자. 이들은 L의 orthonormal basis이고, 따라서 $O(n)$들은 이러한 Z들을 연결해줄 것이다. 즉, $\mathcal{L}(n)$의 원소는 $U(n)/O(n)$의 class에 대응된다. $\pi_1(\mathcal{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$라는 것은 $\pi_1(U(n)) \simeq \mathbb{Z}$라는 것으로부터 유도된다. □

2 Linear Symplectic Reduction

이번 절에서는 Lagrangian subspace로 기술할 수 있는 linear symplectic reduction에 대해 알아볼 것이다. 이는 기본적으로 coisotropic subspace $W \subset (V, \omega)$로부터 새로운 symplectic vector space $\bar{W}$를 얻어내는 과정이다.

W가 coisotropic이라는 것은 $W^\omega \subset W$라는 뜻이었고, 따라서 ω을 W로 제한한다면 W^ω은 ω이 degenerate하는 부분이 된다. 우리는 이 부분을 없애줌으로써 symplectic vector space를 만들 수 있겠다. 즉, W의 **symplectic reduction**은 다음과 같다.

$$\bar{W} = W/W^\omega.$$

$\pi : W \to \bar{W}$를 projection, $i : W \to V$를 inclusion이라 하자. 이 위에는 자연스러운 symlplectic structure $\bar{\omega}$이 존재하는데, 이는 다음을 만족시킨다.

$$\pi^*\bar{\omega} = i^*\omega$$

$\bar{\omega}$는 모두 예상할 수 있듯 $\bar{\omega}([v],[w]) = \omega(v,w)$로 주어진다. 이것이 실제로 symplectic form임을 보이는 것은 독자들에게 맡기겠다. 보다 일반적으로, 임의의 subspace에 대해 $W/(W \cap W^\omega)$은 symplectic vector space가 된다. 이 역시 symplectic reduction이라고 부른다.

이제 Lagrangian subspace $L \subset V$가 $\bar{W}$에서는 어떤 모습이 될지를 생각해보자. 아주 간단한 예시로 $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$이고, symplectic basis $(x_1, \cdots, y_3)$에 대하여 $W = \mathrm{Span}(x_1, x_2, y_1)$인 경우를 생각하자. ω을 통해 W의 원소와 pairing했을 때 항상 0인 basis는 x_2, x_3일 것이고, 따라서 $W^\omega = \mathrm{Span}(x_2)$이 될 것이다. 이 경우 $\bar{W} = \mathrm{Span}([x_1],[y_1])$이 된다. 이제 가장 단순한 Lagrangian인 $L = \mathrm{Span}(x_1, x_2, x_3)$를 생각하자. L의 $\bar{W}$ 안의 image는 $\mathrm{Span}([x_1])$이고, 이는 $\bar{W}$의 Lagrangian이 된다. 즉, V의 Lagrangian이 $\bar{W}$의 Lagrangian을 만들어낸다는 것이다. 이는 더 일반적인 경우에도 성립한다.

Lemma 3. $L \subset V$가 Lagrangian이고 $W \subset V$가 coisotropic이라면,

$$\bar{L} = ((L \cap W) + W^\omega)/W^\omega$$

은 $\bar{W}$의 Lagrangian subspace이다.

Proof. 먼저 $\tilde{L} = L \cap W + W^\omega \subset V$이 Lagrangian임을 보이자. 이를 위해서는 다음 두가지 사실이 필요하다. W_1, W_2를 아무 subspace라고 하면,

- $(W_1 \cap W_2)^\omega = W_1^\omega + W_2^\omega$.
- $(W_1 + W_2)^\omega = W_1^\omega \cap W_2^\omega$.

이에 대한 증명은 매우 간단하므로 생략하도록 하자. (Perp와 관련된 내용을 떠올리자.) 그렇다면 다음과 같이 $\tilde{L}$이 Lagrangian임을 보일 수 있다.

$$\tilde{L}^\omega = (L \cap W)^\omega \cap W^{\omega\omega} = (L + W^\omega) \cap W = L \cap W + W^\omega = \tilde{L}$$

이제 $\bar{L} = \pi(\tilde{L})$이 Lagrangian임을 보이자. $\bar{\omega}$의 정의상 $\bar{L} \subset \bar{L}^{\bar{\omega}}$임은 자명하다. 반대로 $[v] \in \bar{L}^{\bar{\omega}}$을 생각하자. 이는 정의상 다음과 같다.

$$\bar{\omega}([v],[w]) = 0 \text{ for any } [w] \in \bar{L}$$

이는 $\omega(v,w) = 0$ for any $w \in \tilde{L}$이라는 것과 같고, 따라서 $v \in \tilde{L}^{\omega} = \tilde{L}$이므로 $[v] \in \bar{L}$이다. 따라서 반대쪽 inclusion 역시 확인하였다. □

Example 4 (Lagrangian Correspondence)**.** 이 예시는 symplectomorphism 아래에서 Lagrangian subspace가 대응되는 방식을 설명해준다.

(V_0, ω_0)과 (V_1, ω_1)을 같은 차원의 symplectic vector space이라 하고, $A : V_0 \to V_1$을 symplectomorphism이라 하자. 그리고 $L_0 \subset V_0$을 Lagrangian subspace라 하자. Γ_A는 $(V_0 \oplus V_1, (-\omega_0) \oplus \omega_1)$의 Lagrangian subspace가 된다는 것을 확인한 바 있고, (부호는 반대지만 Lagrangian이라는 것은 변하지 안흔다) 이와 함께 L_0도 다뤄야하므로 다음과 같은 symplectic vector space를 정의하는 것이 필요하다.

$$(V, \omega) = (V_0 \oplus V_0 \oplus V_1, \omega_0 \oplus (-\omega_0) \oplus \omega_1)$$

이 안의 coisotropic subspace $W = \Delta \oplus V_1$을 생각하자. $\Delta = \Gamma_{\mathrm{Id}}$이므로 $\Delta \subset V_0 \oplus V_0$는 Lagrangian이고, 따라서 $W^{\omega} = \Delta \oplus 0$라는 것은 거의 자명하다. 이와 같이 정의한 W의 symplectic quotient는 $W/W^{\omega} = V_1$이 될 것이다.

이제 L_0이 어떻게 대응되는지를 알아보기 위해 $L = L_0 \times \Gamma_A$를 생각하자. 이것이 Lagrangian이라는 것은 자명하다. 먼저 다음을 확인하자.

$$\begin{aligned} L_0 \times \Gamma_A \cap \Delta \times V_1 &= \{(v, w, Aw) : v \in L_0, w \in V_0\} \cap \{(w, w, u) : w \in V_0, u \in V_1\} \\ &= \{(v, v, Av) : v \in L_0\} := L' \end{aligned}$$

따라서 다음을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{L} &= (L' + \Delta \times 0)/\Delta \times 0 \\ &= \{(w, w, Av) : w \in V_0, v \in L_0\} / \Delta \times 0 \\ &\simeq \{Av : v \in L_0\} = A(L_0) \end{aligned}$$

즉, $L_0 \times \Gamma_A$은 symplectic reduction에 의해 $A(L_0)$에 대응된다.

3 Maslov Index

Maslov index란 특정한 loop들에 대하여 정수값을 부여하는 함수이다. 이번 글에서는 $Sp(2n)$ 안의 loop와 $\mathcal{L}(n)$ 안의 loop에 대한 Maslov index를 알아볼 것이다. 계속해서 언급했듯 이 index는 Floer homology를 다루는 데에 중요한 역할을 하게 되는데, 개략적으로는 다음과 같다. (지금은 읽지 않아도 좋은 부분이다.) $x : S^1 \to M$가 symplectic manifold 안의 loop라면, x^*TM은 S^1 위의 symlectic bundle이 될 것이다. 그런데 $Sp(2n)$이 connected이므로 x^*TM은 trivial bundle이 될 것이다. 이 trivialization의 선택은 $S^1 \to Sp(2n)$을 정의할 것이고, 이것이 Maslov index가 된다. 이와 같이 각 loop들에 index를 부여하게 되는데, 이 index가 바로 Floer homology에서 x의 degree가 된다.

3.1 Case 1. Loops of Symplectic Matrices

먼저 정의를 위한 몇 가지 convention을 정해두자.

- $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$라고 하고, $\Omega(Sp(2n))$을 $Sp(2n)$의 loop space, 즉 $C(S^1, Sp(2n))$이라 하자. 편의상 based loop space를 생각할 것인데, 이는 $A(0) = \mathrm{Id}_{2n}$인 loop들만을 생각한다는 것이다. (Group structure를 생각하면 다른 모든 loop들은 이러한 loop들의 평행이동이라 생각할 수 있겠다.) Loop들 사이에는 **loop product**를 정의할 수 있는데, 이는 다음과 같다. $A, B \in \Omega(Sp(2n))$이라 하자. $A * B$는 다음과 같은 loop이다.

$$A * B(t) = \begin{cases} A(2t) & \text{if } t \leq 1/2 \\ B(2t-1) & \text{if } t \geq 1/2 \end{cases}$$

  이것은 fundamental group $\pi_1(Sp(2n))$에서의 group operation과 동일하다.

- $n+m = k$인 경우, $Sp(2n) \oplus Sp(2m)$은 $Sp(2n+2m)$의 subgroup으로 간주할 수 있다. 방법은 다음과 같다.

$$Sp(2n) \oplus Sp(2m) = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in Sp(2n+2m) : X \in Sp(2n), Y \in Sp(2m) \right\}$$

  마찬가지로, $A \in \Omega(Sp(2n))$, $B \in \Omega(Sp(2m))$이 있다면 이들의 image를 direct sum해줌으로써 $A \oplus B \in \Omega(Sp(2n+2m))$을 얻을 수 있다.

- $A \in Sp(2n)$에 대해 polar decomposition $A = UP$를 생각하자. 여기서 U는 unitary matrix이고, $U = X + iY$로 표현할 수 있다. U를 complex matrix로 간주한다면 $\det_{\mathbb{C}}(U) \in S^1$을 정의할 수 있다. (앞에서 이것이 $U(n)$과 S^1의 fundamental group 사이의 isomorphism을

유도한다는 것을 확인한 바 있다.) 이제 다음과 같은 map을 정의하자.

$$\rho : Sp(2n) \to S^1$$
$$A = UP \mapsto \det_{\mathbb{C}}(U)$$

이는 complex determinant의 $Sp(2n)$으로의 확장이라 생각할 수도 있겠다. Polar decomposition은 deformation retraction이었으므로, 이 함수 역시 π_1에서 isomorphism을 유도한다.

이들을 갖고 Maslov index의 성질을 서술할 수 있다.

Theorem 5. 다음을 만족하는 함수 $\mu : \Omega(Sp(2n)) \to \mathbb{Z}$가 유일하게 존재한다.

- (Homotopy) A_1, A_2가 homotopic하다면 $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.
- (Loop Product) $\mu(A * B) = \mu(A) + \mu(B))$ 특히, constant loop Id_{2n}에 대해 $\mu(\mathrm{Id}_{2n}) = 0$.
- (Direct Sum) $\mu(A \oplus B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (Normalization) 다음과 같은 loop $R : S^1 \to Sp(2)$를 생각하자.

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$$

  그렇다면 $\mu(R) = 1$이다.

이를 만족하는 μ를 **Maslov index**라고 부른다.

Proof. $\mu(A) = \deg(\rho \circ A)$라 정의하자. 여기서 deg란 $\Omega(S^1) = C(S^1, S^1)$에서 up to homotopy 정의된 map이다. 즉, $\pi_1(S^1)$과 $\mathbb{Z}$ 사이의 가장 자연스러운 isomorphism이라 볼 수 있겠다. 구체적으로는 다음과 같다.

$$(S^1 \xrightarrow{A} Sp(2n) \xrightarrow{\rho} S^1) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

정의상 $\mu(R) = 1$임은 자명하고, (Normalization)이 성립한다. deg는 up to homotopy 정의되었으므로 (Homotopy)는 당연히 성립한다. 이제 polar decomposition을 이용하여 주어진 loop A를 $U(n)$ 안의 loop로 homotope하자. 이 과정에서 Maslov index는 변하지 않는다. 이 경우 $\rho = \det_{\mathbb{C}}$이고, 앞서 언급한 바와 같이 이는 $\pi_1(U(n))$에서 $\pi_1(S^1)$으로 가는 isomorphism이다. 여기서 loop product는 fundamental group의 원소들 사이의 operation과 같으므로 (Loop Product) 역시 성립하는 것을 확인할 수 있겠다. (특별히, group에서 loop product는 사실 group의 원소들을 각각 곱해서 주어지는 loop와 homotopic하다.) (Direct Sum)은 (Loop Product)로부터 따라오게 되는데, 이는

다음의 식으로부터 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{2n} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{2m} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{2n} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

이제 이것의 uniqueness에 대해 알아보자. Up to homotopy 정의되려면 $\mu : \pi_1(Sp(2n)) \to \mathbb{Z}$여야 하고, loop product를 +로 바꾼다는 것은 이것이 group homomorphism이라는 것이다. 따라서 μ는 $\mu(1)$의 값으로 결정되는데, 이는 normalization으로부터 나온다. □

이 정의에는 필연적으로 ρ가 개입되는데, 구체적인 loop에 대해 μ를 계산하기 위해서는 ρ를 어떻게 계산해야 하는지도 알아야 한다. 이는 저번 글에서 얘기한 symplectic matrix의 eigenvalue들을 이용하여 계산될 수 있다. 보다 구체적인 내용은 Audin, Damien의 [Morse Theory and Floer Homology]의 Section 8.3을 참조하기 바란다.

3.2 Case 2. Loops of Lagrangian Subspaces

앞서 우리는 $\pi_1(\mathcal{L}(n))$이 $\mathbb{Z}$와 isomorphic하다는 것을 알아보았다. 이 isomorphism 역시 Maslov index로 주어진다. 바로 앞 절에서 언급한 내용들 역시 $\mathcal{L}(n)$에서 analogy를 가진다. 특히 $\mathcal{L}(n) \oplus \mathcal{L}(m)$은 $\mathcal{L}(n+m)$의 subspace로 간주할 수 있다. 편의상 앞 절에서 정의한 Maslov index를 $\tilde{\mu}$라고 표기하고, $\Omega(\mathcal{L}(n))$의 loop들은 $L(0) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$를 basepoint로 가진다고 가정하자.

Theorem 6. 다음을 만족하는 함수 $\mu : \Omega(\mathcal{L}(n)) \to \mathbb{Z}$가 유일하게 존재한다.

- (Homotopy) L_0, L_1 are homotopic iff $\mu(L_0) = \mu(L_1)$.
- (Product) $L \in \Omega(\mathcal{L}(n))$, $A \in \Omega(Sp(2n))$이 주어졌다면,

$$\mu(A(L)) = \mu(L) + 2\tilde{\mu}(A).$$

- (Direct Sum) $\mu(L \oplus L') = \mu(L) + \mu(L')$.
- (Zero) Constant loop L_0에 대해 $\mu(L_0) = 0$.
- (Normalization) $R : S^1 \to \mathcal{L}(1)$을 다음과 같이 정의하자.

$$R(t) = e^{\pi i t}\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

  그렇다면 $\mu(R) = 1$이다.

특히 μ는 앞 4개의 조건만으로도 유일하게 결정된다. 즉, (Normalization)은 나머지 4개의 조건으로부터 도출될 수 있다.

Proof. 앞선 경우와 마찬가지로, 구체적인 map을 잡을 것이다. $\rho : \mathcal{L}(n) \to S^1$을 다음과 같이 정의하자.

$$\rho(L) = \det_{\mathbb{C}}(U^2)$$

여기서 U는 L의 unitary frame으로 만들어지는 unitary matrix들의 loop이다. 그 뒤 $\mu = \deg(\rho \circ L)$로 정의하자. 차이점이라면 식 안에 제곱 항이 들어있다는 것인데, 이 부분을 이해하는 것이 중요할 것이다. 이는 Lagrangian의 orientation을 고려하지 않았기 때문에 생기는 부분이다. 예컨대 $\mathbb{R}^2$ 안의 다음과 같은 Lagrangian frame들을 생각해보자.

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 둘은 당연히 같은 Lagrangian subspace $\mathbb{R} \times \{0\}$을 정의하지만, $U(n)$의 원소로 봤을 때는 1과 -1로 서로 다르다. (하지만 $O(1) = \{\pm 1\}$의 action으로 인해 identify된다.) 마찬가지로, 더 높은 차원에서도 비슷한 일이 생겨나게 된다. 즉, 모든 Lagrangian subspace들은 positively oriented frame과 negatively oriented frame을 가진다는 것이다. 예컨대 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$의 2가지 unitary frame들은 각각 다음과 같다.

$$U_\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

물론 이들에 $O(n)$의 원소를 곱해서 얻어지는 것들도 포함할 수 있다. $A \in O(n)$이라면 $\det A = \pm 1$이고, 따라서 어떤 $[U] \in U(n)/O(n)$에 대해서도 $\det_{\mathbb{C}}$는 2개의 값을 갖게 될 것이다. 이 문제를 해결하기 위해 $\det_{\mathbb{C}}(U)$가 아닌 $\det_{\mathbb{C}}(U^2)$로 정의한 것이다.

이렇게 정의한 μ가 homotopy invariant라는 것은 자명하다. 이제 $\mu(L_0) = \mu(L_1)$이라고 하고, 이들의 unitary frame U_0, U_1을 생각하자. 이 경우 $U_j(0) = \mathrm{Id}$라 간주할 수 있지만, $U_j(1) = U_-$인 경우가 있을 수 있다. 이는 $U_j(t)$에 곱해주는 것이 $O(n)$ 안의 *continuous* path이기 때문이다. $O(n)$은 disconnected이고, 따라서 $U_j(1)$가 $U_\pm$ 중 하나로 identify될 수 있다면 다른 쪽으로는 identify되는 것이 불가능할 것이다. 다만 이 경우 $U_0(1) = U_1(1)$은 성립해야 할텐데, 만약 $U_0(1) = \mathrm{Id}$, $U_1(1) = U_-$였다면 $\det_{\mathbb{C}}(U_0^2)$은 짝수이고 $\det_{\mathbb{C}}(U_1^2)$은 홀수일 것이기 때문이다. (왜 그런가?) 이제 다음과 같은 unitary space 안의 loop를 생각하자.

$$U(t) = U_0(t) U_1(t)^{-1}$$

그렇다면 $U(t)$는 loop이고, $\mu(L_0) = \mu(L_1)$이므로 이는 contractible이다. 따라서 U_0과 U_1은 homotopic하고, 따라서 L_0과 L_1 역시 homotopic하다.

이제 (Product), (Direct Sum), (Zero), (Normalization)은 모두 거의 자명하다. (앞선 절의 증명을 따라하면 된다.) 다만 (Product)에서 $\tilde{\mu}(A)$ 앞에 2가 붙어있다는 점에 주목하자. 이 이유는 앞선 절의 Maslov index의 정의와 이번 절의 정의를 비교해보면 알 수 있다.

이제 앞의 4가지 조건들로부터 (Normalization)이 도출될 수 있음을 확인해 보자. (물론 앞서 보여준 explicit한 정의로 직접 계산해보아도 된다.) Statement 속에 있는 R은 다음을 만족시킨다.

$$R(t) \oplus R(t) = A(t)L_0 \subset \mathbb{C}^2$$

여기서 $L_0 = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$는 constant loop이고, $A : S^1 \to U(2)$는 다음과 같이 주어진다.

$$A(t) = e^{\pi i t}X(t) := e^{\pi i t}\begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \in U(2)$$

이는 $R(t) \oplus R(t)$를 실제 좌표로 썼을 때 어떻게 되는지를 살펴보면 어렵지 않게 확인할 수 있다. 여기서 $\det_{\mathbb{C}}(X(t)) = 1$이고, 따라서 $\tilde{\mu}(A)$를 계산하기 위해서는 $\tilde{\mu}(e^{\pi i t}\mathrm{Id}_2)$를 계산하면 된다. 이것이 1이라는 것은 앞 절에서 본 정의를 그대로 적용하면 알 수 있다. □

Remark 7. Maslov index는 fundamental group의 표현으로 볼 수도 있지만, **Maslov cycle**이라는 $Sp(2n)$ 또는 $\mathcal{L}(n)$의 codimension 1 subvariety와 curve의 intersection의 수를 세는 것으로도 이해할 수 있다. 이에 대해서는 필요하다면 다시 자세히 알아보도록 하겠다.

4 예고

다음 글에서는 nonsqueezing theorem의 affine case를 다룰 것이다. Nonsqueezing theorem이란 간단히 말해 '더 큰' symplectic manifold를 '더 작은' symplectic manifold 안에 넣을 수 없다는 내용이다. 이는 symplectic volume이라는 invariant를 정의하는 모티베이션이 된다.