Day 4. Symplectic Width

JJM Math

February 24, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이번 글에서는 linear map의 non-squeezing property라는 것이 무엇인지 알아보고, 그것이 symplectic map과 어떤 연관을 가지는지에 대해 알아본다. 이를 이용해 symplectic width라는 불변량을 정의할 수 있는데, 이는 나중에 symplectic capacity라는, symplectic manifold의 중요한 불변량 중 하나로 일반화될 것이다.

1 Affine Non-Squeezing Theorem

$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$을 생각하자. (꼭 $\mathbb{R}^{2n}$이 아니어도 상관은 없다.) 이 안의 automorphism $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$이 **affine symplectomorphism**이라는 것은 ψ가 linear symplectomorphism과 translation의 합성이라는 것이다. 즉, $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$과 $A \in Sp(2n)$이 존재하여 다음과 같다는 뜻이다.

$$\psi(z) = Az + z_0$$

$\mathbb{R}^{2n}$의 symplectic basis를 $e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$이라 하고, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n-2}$을 symplectic decomposition이라 하자. 즉, 여기서 $\mathbb{R}^2$는 e_1, f_1으로 generate되는 공간이다. $\mathbb{R}^{2n}$ 안의 (standard metric에 대한) 반지름 R의 $2n$-ball과 cylinder를 다음과 같이 정의하자.

$$B(R) = B^{2n}(R) := \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n} : \langle z, z \rangle \leq R^2 \right\}$$
$$Z(R) = Z^{2n}(R) := B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2} = \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n} : \langle z, e_1 \rangle^2 + \langle z, f_1 \rangle^2 \leq R^2 \right\}$$

$B(R) \subset Z(R)$이라는 것은 자명하다. 궁금한 것은, $B(R)$이 symplectomorphism 아래에서 어떻게 변화할지이다. 다음 정리는 symplectomorphism이 보존하는 '구조'가 무엇인지를 어렴풋이 보여준다.

Theorem 1 (Affine Non-Squeezing Theorem). ψ가 affine symplectomorphism이고, $\psi(B(r)) \subset Z(R)$이라면 $r \leq R$이다.

Proof. 편의상 $r = 1$로 두고, $\psi(z) = Az + z_0$이라 하자.

$$u = A^t e_1,\ v = A^t f_1,\ a = \langle e_1, z_0 \rangle,\ b = \langle f_1, z_0 \rangle$$

이라 두자. $A \in Sp(2n)$이라면 $A^t \in Sp(2n)$이므로 (왜 그런가?) $\omega_0(u, v) = 1$이고, $\psi(B(1)) \subset Z(1)$은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|=1} (\langle e_1, \psi(z)\rangle^2 + \langle e_2, \psi(z)\rangle^2) &= \sup_{|z|=1} (\langle e_1, Az + z_0\rangle^2 + \langle e_2, Az + z_0\rangle^2) \\
&= \sup_{|z|=1} \big((\langle A^t e_1, z\rangle + \langle e_1, z_0\rangle)^2 + (\langle A^t e_2, z\rangle + \langle e_2, z_0\rangle)^2\big) \\
&= \sup_{|z|=1} \big((\langle u, z\rangle + a)^2 + (\langle v, z\rangle + b)^2\big) \leq R^2
\end{aligned}$$

우리는 Hölder inequality를 통해 (또는 적당한 부등식을 통해) $1 = \omega_0(u, v) = u^t J_0 v \leq |u| \cdot |v|$라는 것을 알 수 있고, 따라서 $|u| \geq 1$이라 가정할 수 있겠다. a의 부호에 따라 $z = \pm u/|u|$로 잡으면 $(\langle u, z\rangle + a)^2 = (|a| + 1)^2 \geq 1$이고, 따라서 $R \geq 1$이다. □

우리는 ω이 symplectic form일 때 ω^n은 volume form이 된다는 것을 알아본 바 있다. Symplectomorphism은 ω을 보존하므로 당연히 volume form을 보존할 것이고, 따라서 symplectomorphism은 volume-preserving function이라 생각할 수 있다. 이것은 다시 말해 부피가 V인 subspace $X \subset \mathbb{R}^{2n}$이 있다면, symplectomorphism A에 대해 $A(V)$의 volume 역시 V가 된다는 것이다. 또한 translation은 isometry이므로 affine symplectormophism ψ에 대해서도 $\psi(A)$는 volume V를 가지게 될 것이다. 특별히 2차원에서는 symplectomorphism이 곧 orientation과 volume을 보존하는 diffeomorphism과 같을 것이다.

하지만 만약 symplectomorphism이 volume만을 보존했다면 위의 정리가 성립할 일은 없다. r을 아무리 키워봤자 $B(r)$은 유한한 volume을 가질 것이고, 따라서 아무리 작은 R을 주더라도 $B(r)$을 아주 얇게 만든다면 (*squeeze* 시킨다면!) $B(R)$과 같은 volume을 가지면서 $Z(R)$ 안에 들어가도록 만들 수 있을 것이기 때문이다. 위의 정리가 함의하고 있는 것은, symplectomorphism이 일종의 '2차원 단면'의 넓이까지도 보존하고 있다는 것이다. 이 정보를 잘 formulate한다면 symplectomorphism-invariant를 만들 수 있으리라는 기대를 할 수 있겠다.

2 Symplectic Width

앞 절에서 알아본 정리를 모티브삼아 이런저런 것들을 정의해보도록 하자. 위에서 정의한 $B^{2n}(r)$, $Z^{2n}(R)$과 (affine-)symplectomorphic한 $\mathbb{R}^{2n}$의 subspace를 각각 **symplectic ball**, **symplectic cylinder**라고 부르자.

Lemma 2. Symplectic cylinder Z, Z'이 있을 때, Z와 Z'이 symplectomorphic하다는 것은 둘 모두가 고정된 R에 대해 $Z^{2n}(R)$과 symplectomorphic하다는 것과 동치이다. 즉, 여기서의 R은 symplectic cylinder들에 대한 symplectic invariant이고, 이를 **radius**라고 부른다.

Proof. $Z \simeq Z(R)$, $Z' \simeq Z(R')$이라 하고, symplectomorphism ψ가 Z를 Z'으로 옮겨준다고 하자. $B(R) \subset Z(R)$이므로 $\psi(B(R)) \subset Z(R')$이고, 따라서 $R \leq R'$이다. 그런데 이 논의에서 Z와 Z'의 자리를 바꿔주면 $R' \leq R$을 얻고, 따라서 $R = R'$이다. □

Invariant를 준다는 점에서 Theorem 1.에서 제시된 affine symplectomorphism의 성질은 꽤나 중요한 것이라 할 수 있다. 그렇다면 symplectomorphism 외에도 이러한 성질을 갖고 있는 함수들에 대해서 고려해볼 수 있겠다. $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$이 그러한 성질을 갖고 있다면 **non-squeezing property**를 갖고 있다고 한다.

Theorem 3 (Affine Rigidity)**.** 만약 $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$과 A^{-1}이 non-squeezing property를 갖고 있다면 A는 symplectic이거나 **anti-symplectic**($A^*\omega_0 = -\omega_0$)이다.

Proof. A가 symplectic도 아니고 anti-symplectic도 아니라고 하자. 그렇다면 다음과 같은 u, v가 존재할 것이다.

$$\omega_0(A^t u, A^t v) \neq \pm\omega_0(u, v) \tag{1}$$

(1)는 open condition이고, ω_0과 A^t가 continuous이므로 u, v를 약간만 바꿔 양변이 모두 0이 아니도록 만들 수 있겠다. 그렇다면 $|\omega_0(A^t u, A^t v)|$과 $|\omega_0((A^{-1})^t u, (A^{-1})^t v)|$ 중 하나는 $|\omega_0(u, v)|$보다 작을 것이다. A와 A^{-1}의 자리는 마음대로 바꿔도 괜찮으므로 편의상 다음과 같이 가정하자.

$$0 < \lambda^2 = |\omega_0(A^t u, A^t v)| < \omega_0(u, v) = 1$$

이제 $u_1 = u, v_1 = v$로 시작하는 symplectic basis (u_j, v_j)와 $u_1' = \lambda^{-1}A^t u, v_1' = \pm\lambda^{-1}A^t v$로 시작하는 symplectic basis (u_j', v_j')을 잡을 수 있다. (v_1'의 부호는 $\omega_0(u_1', v_1') = 1$이 되도록 잡는다.) 이들을 각각 column으로 갖는 matrix를 $B, B' \in Sp(2n)$이라 잡자. 그렇다면 B, B'는 각각 (e_j, f_j)를 $(u_j, v_j), (u_j', v_j')$으로 보내는 symplectomorphism이 될 것이다. 그리고 $C = (B')^{-1}A^t B$로 잡으면

다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} Ce_1 &= (B')^{-1}A^tBe_1 = (B')^{-1}A^tu = (B')^{-1}(\lambda u_1') = \lambda e_1 \\ Cf_1 &= (B')^{-1}A^tBf_1 = (B')^{-1}A^tv = (B')^{-1}(\pm\lambda v_1') = \pm\lambda f_1 \end{aligned}$$

즉, $\langle e_1, C^t z\rangle = \lambda\langle e_1, z\rangle$이고 $\langle f_1, C^t z\rangle = \lambda\langle f_1, z\rangle$이므로 C^t는 $B^{2n}(1)$을 $Z^{2n}(\lambda)$로 보내게 된다. 그런데 $\lambda < 1$이므로 이는 A가 non-squeezing property를 갖지 않는다는 것을 의미한다. □

즉, non-squeezing property는 symplectic map과 anti-symplectic map만이 갖는 고유한 특징이고, 따라서 symplectic structure를 이해하는 데에 도움을 주리라 기대할 수 있겠다. 이제 이 정리를 임의의 subset $A \subset \mathbb{R}^{2n}$에 대해서도 확장시켜 보자. A의 **symplectic width**는 다음과 같이 정의된다.

$$w_L(A) = \sup\left\{\pi r^2 : \psi(B^{2n}(r)) \subset A \text{ for some } \psi \in ASp(2n)\right\}$$

여기서 $ASp(2n)$은 affine symplectomorphism들의 group이다. (지금은 vector space의 구조, 즉 0이 0으로 옮겨지는 map들만을 보고 있는 것이 아니기 때문에 $Sp(2n)$ 대신 $ASp(2n)$을 사용하는 것이 적합하다.) Symplectic width의 기초적인 성질들로는 다음이 있다. 이를 확인해보는 것은 매우 간단할 것이다.

- (Invariance) 만약 $\psi \in ASp(2n)$이라면 $w_L(A) = w_L(\psi(A))$.
- (Monotonicity) $A \subset B$라면 $w_L(A) \leq w_L(B)$.
- (Conformality) $w_L(\lambda A) = \lambda^2 w_L(A)$.
- (Nontriviality) $w_L(B^{2n}(r)) = w_L(Z^{2n}(r)) = \pi r^2$.

3 Ellipsoids

Ball에 대한 symplectic width는 계산했으니, 이제 약간 더 일반화된 공간인 ellipsoid(타원..?)의 경우에 대해서도 알아보자. $2n$-차원의 unit ball은 다음과 같은 식으로 정의될 수 있다.

$$x_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1$$

마찬가지로, $2n$-차원의 ellipsoid는 다음과 같은 식으로 정의될 수 있겠다.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{y_n^2}{b_n^2} \leq 1$$

그런데 좌표를 잘 바꿔주면 반드시 위의 식과 같은 표현이 나오리라는 보장이 없다. Unit ball을 정의할 때 coordinate에 무관한 metric을 사용한 것과 같이, ellipsoid 역시 coordinate에 무관한 것으로 표현하는 것이 좋을 것이다. 위의 부등식은 diagonal matrix $\mathrm{diag}(a_1^2, \cdots, b_n^2)$을 이용하여 정의한 positive definite quadratic form이라 이해할 수 있고, positive definite quafratic form이 있다면 orthogonal diagonalization을 통해 항상 저런 꼴로 바꿀 수 있다. 즉, **ellipsoid**는 어떤 positive definite quadratic form에 대하여 $Q(z) \leq 1$이라는 방정식으로 주어지는 공간이다. 그리고 Q가 standard inner product라면 이는 unit ball이 될 것이다. (물론 중심이 반드시 0일 필요는 없으나, 편의를 위해 그렇게 가정해도 괜찮다.) Linear map이 ellipsoid에 어떻게 작용하는지는 그 map의 성질을 결정짓는 매우 중요한 특성이다.

Lemma 4. Linear map A가 ellipsoid E의 symplectic width를 보존한다는 것은 A가 symplectic 또는 anti-symplectic이라는 것과 동치이다.

Proof. A가 symplectic 또는 anti-symplectic이라면 당연히 $w_L(E) = w_L(A(E))$일 것이다. 또한 affine rigidity에 의하여 A symplectic 또는 anti-symplectic이라는 것은 A와 A^{-1}이 non-squeezing property를 가진다는 것과 동치이다. 따라서 A가 $w_L(E)$를 보존한다면 A가 non-squeezing property를 가진다는 것만 증명하는 것으로 충분하다.

이를 증명하기 위해 $A(B(r)) \subset Z(R)$이라 가정하자. $B(r)$은 ellipsoid이므로 $w_L(B(r)) = w_L(A(B(r))$일 것이고, 따라서 다음을 얻는다.

$$\pi r^2 = w_L(B(r)) = w_L(A(B(r)) \leq w_L(Z(R)) = \pi R^2$$

즉 $r \leq R$이다. (추가로, A가 singular라면 $w_L(A(B(r)) = 0$일 것이므로 $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$이고, A^{-1} 역시 symplectic width를 보존한다는 것은 거의 자명하다.) □

이제 symplectic map이 ellipsoid에 어떤 식으로 작용하는지를 더 자세히 알아보자. 이를 위해서는 quadratic form Q와 어울리는 (V, ω)의 좋은 symplectic basis를 잡아두면 편할 것이다.

Lemma 5. g가 (V, ω) 위의 inner product라 하자. 그렇다면 (V, ω)의 symplectic basis $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ 중 g-orthogonal하고 (즉, $g(v_j, v_k) = g(u_j, u_k) = 0$ for any $j \neq k$, $g(v_j, u_k) = 0$ for any j, k) 특별히 $g(v_j, v_j) = g(u_j, u_j)$인 것이 존재한다.

Proof. 편의상 $V \simeq \mathbb{R}^{2n}$을 잡자. 여기서 2가지 선택지가 생기는데, g를 standard inner product Id로 잡을 건인지, 아니면 ω을 standard symplectic form ω_0로 잡을 건인지이다. 이 둘은 각각 가능하지만, 둘이 동시에 가능하리라는 보장은 없다. 이 증명에서는 g가 Id에 대응되고, ω은 어떤 skew-symmetric matrix J에 대응된다고 가정하자. 즉, $\omega(v, w) = \langle v, Jw \rangle$라는 것이다.

그렇다면 $J^t = -J$이므로 $(iJ)^* = -iJ^t = iJ$이고, 따라서 $iJ \in M_{2n}(\mathbb{C})$는 Hermitian이다. 특히 $\overline{iJ} = -iJ$이므로 J는 imaginary eigenvalue $\pm i\alpha_j$들을 가진다. (여기서 α_j는 0이 아닌 실수들이고,

따라서 $\alpha_j > 0$으로 잡아도 된다.) iJ를 Hermitian basis $z_j = u_j + iv_j$로 diagonalize했다고 하자. 이를 풀어서 써보면 다음과 같다.

$$Ju_j = -\alpha_j v_j,\ Jv_j = \alpha_j u_J$$

또한 각각의 u_j, v_j들은 orthogonal하다. 이제 u_j, v_j를 scaling하여 J에 해당하는 symplectic basis로 만들 수 있다. 이 경우 u_j, v_j의 길이는 바뀌지만, orthogonality에는 지장이 없다. □

Ellipsoid E가 주어졌다는 것은 V 안의 어떤 inner product에 대한 unit ball이 주어졌다는 것으로 생각할 수 있다. 즉, ellipsoid E는 inner product g를 정의한다. 만약 (V, ω)이 symplectic vector space였다면 Lemma 5.에서 등장한 것과 같은 basis를 잡음으로써 E가 다음과 같이 표현되도록 만들 수 있겠다. (정확히 말하자면, E와 다음과 같이 정의되는 $E(r) \subset \mathbb{R}^{2n}$ 사이의 symplectomorphism을 만들 수 있다.)

$$E(r) := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{z_j}{r_j} \right|^2 \leq 1 \right\}$$

여기서 $r(E) := r = (r_1, \cdots, r_n)$은 반지름들의 순서쌍이다. 만약 $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_n$이라는 조건을 붙인다면, 이러한 r이 유일하다는 것은 어렵지 않게 증명할 수 있다. 이를 E의 **symplectic spectrum**이라고 부른다. E의 volume은 symplectic spectrum의 각 항의 제곱의 곱에 비례할 것이다. 구체적으로는 다음과 같다.

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E \frac{\omega_0^n}{n!} = \frac{\pi^n}{n!} \prod_{j=1}^{n} r_j^2$$

$E, E' \subset (V, \omega)$이 symplectomorphic하다는 것과 $r(E) = r(E')$이 동치라는 것 역시 어렵지 않게 보일 수 있을 것이다. 마지막으로 ellipsoid의 symplectic width를 계산해보자.

Theorem 6. $w_L(E) = \pi r_1(E)^2$.

Proof. 편의상 $r(E) = (r_1, \cdots, r_n)$이라고 하자. 이 결과는 다음의 등식으로부터 따라오게 된다.

$$\sup_{B \subset E} w_L(B) = w_L(E) = \inf_{E \subset Z} w_L(Z)$$

여기서 B, Z는 각각 symplectic ball, symplectic cylinder이다. Symplectomorphism A가 E를 $E(r)$로 보낸다고 하자. 이를 보인다면 $B(r_1) \subset E(r) \subset Z(r_1)$임은 자명하고, A는 symplectic width를 보존하며, $w_L(B(r_1)) = \pi r_1^2 = w_L(Z(r_1))$이므로 원하는 결과를 얻을 수 있다.

그렇다면 $B(r_1) \subset A(E) \subset Z(r_1)$이고, A^{-1}를 씌우면 다음을 얻는다.

$$A^{-1}(B(r_1)) \subset E \subset A^{-1}(Z(r_1))$$

그러므로 다음의 결과를 얻는다.

$$\inf_{E \subset Z} w_L(Z) \leq \pi r_1^2 \leq \sup_{B \subset E} w_L(B)$$

이제 B가 radius r'짜리 symplectic ball이고 $B \subset E$라고 하자. 그렇다면

$$A(B) \subset A(E) = E(r) \subset Z(r_1)$$

이므로, affine non-squeezing theorem에 의하여 $r' \leq r_1$이다. 또한 Z가 radius R짜리 symplectic cylinder이고 $E \subset Z$라고 하자. 그렇다면

$$B(r_1) \subset A(E) \subset A(Z)$$

이므로, 마찬가지로 $r_1 \leq R$을 얻는다. 즉, 다음 역시 성립한다.

$$\inf_{E \subset Z} w_L(Z) \geq \pi r_1^2 \geq \sup_{B \subset E} w_L(B)$$

이로부터 위의 등식을 증명했고, 따라서 원하는 결과를 얻는다. □

Symplectic width의 개념은 더 일반적으로 symplectic manifold 위에서도 정의할 수 있는데, 이를 *symplectic capacity*라 부른다. Gromov는 첫 절에서 다룬 non-squeezing theorem을 symplectic manifold의 경우에 대해 증명하였고, 그 결과 symplectic capacity는 매우 중요한 불변량으로 자리메김하였다. 이에 대해서는 나중에 더 자세히 알아보자. 이 불변량이 중요한 이유는 다음과 같이 생각할 수 있겠다. 우리는 조만간 Riemannian manifold 위에는 curvature가 있지만, *Darboux's theorem*에 의해 symplectic manifold는 항상 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$와 locally symplectomorphic하다는 것을 알아보게 될 것이다. 따라서 symplectic manifold는 Riemannian manifold와는 달리 local geometry를 가지지 않고, Riemannian manifold의 경우보다 global invariant가 가지는 중요도가 훨씬 크다. Floer homology가 발견되기 전까지 symplectic capacity는 symplectic manifold 위에서 정의할 수 있는 몇 안되는 global invariant 중 하나였고, 많은 연구가 이뤄져 있다.

4 예고

다음 글에서는 real vector space 위에 주어질 수 있는 complex structure에 대해 다룰 것이다. 저번에 알아봤듯 complex structure는 symplectic structure와 매우 닮아있고, inner product, symplectic form, complex structure 중 2개가 주어진다면 나머지 하나가 자동으로 결정된다는 재밌고 유용한 성질이 있다. 이는 나중에 symplectic manifold 위에 *almost* complex structure가 항상 주어질 수 있다는 내용으로 번역될 것이다. Symplectic geometry에서 빠질 수 없는 내용 중 하나가 J-holomorphic curve인데, 이를 다루기 위해서는 linear complex structure에 대한 이해가 선행되어야 한다는 점에서 다음 글에서 다룰 내용은 매우 중요하게 여길 수 있겠다.