Day 2. Symplectic Linear Algebra

JJM Math

February 20, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이번 글에서는 symplectic vector space와 symplectic linear map들에 대해 다룬다. Symplectic vector space의 정의를 알아보고, 그들 사이의 isomorphism group이라 볼 수 있는 symplectic group의 여러가지 구조에 대해서 알아본다. 특히 symplectic group, orthogonal group, complex linear group 사이의 관계는 매우 중요한데, 이 구조들은 모두 manifold 위로 올릴 수 있고 따라서 symplectic manifold는 많은 것을 알려줄 수 있는 매우 풍부한 구조를 갖게 되기 때문이다.

1 Symplectic Vector Spaces

저번 글에서 다뤘던 $J_0 \in M_{2n}(\mathbb{R})$의 성질들을 알아보자.

- (Bilinear) $\omega_0(v,w) = v^t J_0 w$로 쓴다면 ω_0은 bilinear form으로 이해할 수 있다.
- (Skew-symmetric) $\omega_0(v,w) = -\omega_0(w,v)$이다.
- (Nondegeneracy) $\omega_0(v,w) = 0$ for any $w \in \mathbb{R}^{2n}$이라면 $v = 0$이다.

여기서 bilinear와 nondegeneracy는 선형대수학 시간에 배웠던 inner product가 갖고 있는 성질이지만, symmetric인 inner product와는 다르게 ω_0은 skew-symmetric이다. $2n$-dimensional real vector space V 위에 정의된 이 3가지 성질을 만족하는 bilinear form을 **symplectic form**이라고 부르고, (V,ω)을 **symplectic vector space**라고 부른다. Nondegenerate skew-symmetric bilinear form이 짝수 차원에서만 존재 가능하다는 것은 어렵지 않게 증명할 수 있다. Nondegeneracy에 의하여 sympletic form ω은 다음과 같은 isomorphism을 자연스럽게 유도하게 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : V &\to V^* \\ v &\mapsto \omega(v,-) \end{aligned} \tag{1}$$

선형대수학에서 inner product가 Id_{2n}의 일반화라고 간주한다면, symplectic structure는 J_0의 일반화라고 간주할 수 있겠다. 또 다른 관점으로는, 임의의 bilinear form을 symmetric part와 skew-symmetric part로 나눌 수 있다는 것을 들 수 있겠다. 이 분해는 다음과 같이 주어진다.

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$$

Vector space 위에 주어진 구조를 manifold 위로 올리던 경험을 돌이켜보면, symmetric bilinear form은 (pseudo-)Riemannian geometry에 대응될 것이다. 그렇다면 '나머지 부분'인 skew-symmetric part는 symplectic geometry에 대응되게 된다. 그런데 홀수 차원의 skew-symmetric form은 최소 1차원의 kernel을 가진다. 여기서 kernel이란 위에서 정의한 $\tilde{\omega}$의 kernel을 뜻한다. $(2n+1)$-차원의 공간 위에서 최대한의 nondegeneracy를 가지는 skew-symmetric bilinear form을 생각한다면, 즉 $\dim\ker\tilde{\omega} = 1$인 경우를 생각한다면 이는 **contact structure**에 대응된다. 이에 대해서는 기회가 된다면 다뤄보도록 하자.

Example 1.

1. ω_0 on $\mathbb{R}^{2n}$은 symplectic이다. $2n$-dimensional vector space V에 대해 적당한 basis를 잡고 그에 대해 J_0에 대응되는 form을 잡는다면 이 역시 symplectic일 것이다.
2. E를 임의의 vector space라 하고, $V = E \oplus E^*$라 하자. 이 위에 ω을 다음과 같이 정의하자.

$$\omega((v,v^*),(w,w^*)) = w^*(v) - v^*(w).$$

   이 ω이 symplectic이라는 것은 어렵지 않게 확인할 수 있다. 이 사실로부터 cotangent bundle 위에 자연스러운 symplectic structure가 존재한다는 것을 엿볼 수 있다.
3. (V,ω)이 symplectic이라면 $(V,-\omega)$ 역시 symplectic이다.
4. Symplectic vector space의 direct sum 역시 자연스럽게 symplectic vector space가 된다.

저번 글에서 정의한 것과 비슷하게 **symplectomorphism**을 정의하자. $\Psi : (V,\omega) \to (V',\omega')$가 symplectomorphism이라는 것은 $\Psi^*\omega' = \omega$이라는 것이다. 즉, 다음 식이 성립한다는 것이다.

$$\Psi^*\omega'(v,w) = \omega'(\Psi(v),\Psi(w)) = \omega(v,w)$$

우리의 첫번째 목표는 symplectic vector space를 up to symplectomorphism 분류하는 것이다. Inner product의 경우를 생각해보면 이 역시 간단하게 분류될 것이라고 예상할 수 있고, 실제로 그러하다.

이 증명을 깔끔하게 풀어나가기 위한 정의가 있다. (V,ω)이 symplectic이고, $W \subset V$가 linear subspace라고 하자. W의 **symplectic complement**를 다음과 같이 정의한다.

$$W^\omega = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \text{ for any } w \in W\}$$

이는 orthogonal complement에 대응되는 개념이다. 단, 이 경우에는 항상 $\omega(v, v) = 0$이기 때문에 $W \cap W^\omega = 0$이라는 보장은 없다. 예컨대 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$에서 좌표를 (x, y)라 잡자. 만약 $W = \mathrm{Span}(x_1, y_1)$으로 잡으면 $W^\omega = \mathrm{Span}(x_2, \cdots, x_n, y_2, \cdots, y_n)$이다. 이 경우, $\omega|_W$는 여전히 symplectic form이다. 반면 $W = \mathrm{Span}(x_1, \cdots, x_n)$이라 잡으면, $W^\omega = W$이다. 이 경우, $\omega|_W = 0$이다. 이와 같이 extreme한 경우들이 있기 때문에, W와 W^ω의 관계에 따라 붙는 이름이 있다.

- $W \cap W^\omega = 0$이라면 W를 **symplectic**이라 한다.
- $W \subset W^\omega$이라면 W는 **isotropic**이라 한다.
- $W^\omega \subset W$라면 W를 **coisotropic**이라 한다.
- $W = W^\omega$이라면 W를 **Lagrangian**이라 한다.

Intersection은 이상하게 생겼을 지 몰라도, dimension formula는 여전히 성립한다.

Lemma 2. Subspace $W \subset V$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim V, \ \ W^{\omega\omega} = W$$

Proof. (1)에서 정의한 $\tilde{\omega} : V \to V^*$를 떠올려보면, $\tilde{\omega}$ 아래에서 W^ω은 $W^\perp \subset V^*$에 대응된다는 것을 알 수 있다. 따라서 증명은 perp theorem으로부터 따라온다. □

이로부터 symplectic subspace, Lagrangian subspace의 추가적인 성질들을 알 수 있다. 예컨대 Lagrangian subspace의 차원은 정확히 V의 절반이 되고, W가 symplectic이라면 W^ω 역시 symplectic이다. 이와 비슷한 성질들은 나중에 필요할 때 더 알아보도록 하자.

Theorem 3. (V, ω)이 symplectic이라 하자. 그러면 V의 basis $(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n)$이 존재하여 다음이 성립한다.

$$\omega(u_j, u_k) = 0 = \omega(v_j, v_k), \ \ \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}$$

이러한 basis를 **symplectic basis**라고 부른다. 이를 이용해 symplectomorphism $\Psi : (V, \omega) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$를 잡을 수 있다. 즉, 모든 symplectic vector space는 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$과 symplectomorphic하다.

Proof. Induction을 사용하자. $n = 1$인 경우, ω의 nondegeneracy에 의해 $\omega(u_1, v_1) = 1$인 u_1, v_1이 존재한다. 그 외의 관계들은 자명하다.

만약 $\dim W = 2n-2$인 경우까지 위의 결과가 성립한다고 해보자. V에서 첫번째 벡터 u_1를 뽑고, $n=1$인 경우와 마찬가지로 v_1을 잡는다. 이 두 벡터로 span되는 subspace를 W라 하자. 그렇다면 W는 symplectic이고, W^ω 역시 symplectic이다. 또한 $\dim W^\omega = 2n-2$이고, 따라서 induction hypothesis를 사용할 수 있다. □

Corollary 4. $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$은 V의 volume form이 된다. 즉, (V,ω)은 자연스러운 orientation을 가진다. (이는 symplectic manifold가 orientable이라는 사실로 번역될 것이다.)

2 Symplectic Group

우리는 지난 글에서 symplectic group $Sp(2n)$을 알아본 바 있다. $Sp(2n)$은 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$의 symplectomorphism들을 모아둔 것이라 생각할 수 있다. 더 일반적으로 symplectic vector space (V,ω)에 대한 symplectomorphism을 모아둔 것 역시 group이 되고, 이는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Sp(V) = Sp(V,\omega) := \{A \in GL(V) : A^*\omega = \omega\}$$

이 group의 Lie algebra 역시 생각할 수 있는데, 이는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathfrak{sp}(V) = \mathfrak{sp}(V,\omega) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : \omega(X-,-) + \omega(-,X-) = 0\}$$

다음의 정리는 간단해 보이지만, 기하학적인 의미를 생각하지 않고 $Sp(2n)$의 원소들이 행렬로서 갖는 성질들만 갖고는 증명하기 어려울 것이다.

Lemma 5. $A \in Sp(V)$라면 $\det A = 1$이다. 즉, $Sp(V) \subset SL(V)$이다.

Proof. $A \in Sp(V)$라고 하자. 그렇다면 $A^*\omega = \omega$이고, 특별히 $A^*\omega^n = \omega^n$이다. 그런데 ω^n은 volume form이므로, 이는 A가 volume과 orientation을 보존한다는 것으로 이해할 수 있다. 즉 $\det A = 1$이다. □

모든 (V,ω)은 어떤 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$와 symplectomorphic하므로, $Sp(V)$ 역시 $Sp(2n)$과 isomorphic할 것이다. 그러므로 $Sp(V)$의 성질을 파악하기 위해서는 $Sp(2n)$를 이해하는 것으로 충분하리라 생각할 수 있다. $Sp(2n)$의 특징을 알아보도록 하자.

$Sp(2n)$의 구조는 complex structure를 고려할 때 더 잘 이해할 수 있다. $Sp(2n)$을 정의할 때 등장했던 matrix J_0을 다시 살펴보자.

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ 위에는 자연스러운 complex structure가 존재하는데, $x_j + iy_j = z_j$로 complex coordinate를 잡으면 이는 $\mathbb{C}^n$과 같아진다. Real vector space 위에 complex structure를 정의한다는 것은 'multiplication by i'라는 $\mathbb{R}$-linear map J를 정의하는 것과 같고, ordered basis를 우리의 coordinate에 맞게 $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n)$ where $f_j = ie_j$으로 잡으면 이는 다음과 같이 정의된다.

$$J(x_j e_j + y_j f_j) = J(x_j + iy_j) = ix_j - y_j = -y_j e_j + x_j f_j$$

이를 matrix form으로 쓰면 앞서 정의한 J_0이 된다. 즉, J_0은 symplectic form을 정의하면서 한편으로는 complex structure도 정의한다는 것이다.

위와 같이 $\mathbb{R}^{2n}$과 $\mathbb{C}^n$을 identify했다면, 이 위의 $\mathbb{C}$-linear map을 모아둔 group인 $GL_n(\mathbb{C})$ 역시 생각할 수 있다. 이는 $GL_{2n}(\mathbb{R})$의 subgroup이고, 구체적으로는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : AJ_0 = J_0 A\} = \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : X, Y \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$$

여기서 X, Y는 각각 real part와 imaginary part라 이해할 수 있다. 즉, $A = X + iY$라고 쓸 수도 있겠다. $GL_n(\mathbb{C})$의 가장 중요한 subgroup인 **unitary group**은 다음과 같이 정의된다.

$$U(n) = \{U \in GL_n(\mathbb{C}) : U^* U = \mathrm{Id}_{2n}\}$$

이러한 identification를 바탕으로 다음의 중요한 정리를 증명할 수 있다.

Proposition 6. $Sp(2n) \cap O(2n) = O(2n) \cap GL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp(2n) = U(n)$

Proof. $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$이 $Sp(2n), O(2n), GL_n(\mathbb{C})$의 원소라는 것은 각각 다음과 같은 방정식으로 표현될 수 있다.

$$A^t J_0 A = J_0, \ A^t A = \mathrm{Id}, \ J_0 A = AJ_0$$

만약 A가 첫 둘을 만족시킨다면 $A^{-1} J_0 A = J_0$이고, 따라서 3번째 식이 성립한다. 이와 마찬가지로 셋 중 둘이 만족된다는 것이 나머지 하나까지 만족됨을 함의한다는 것을 쉽게 확인해볼 수 있다. 즉, 이 3개의 intersection들은 모두 동일한 group을 정의하게 된다.

이 group이 $U(n)$임을 확인해보자. $A \in GL_n(\mathbb{C}) \cap O(2n)$이라면 다음과 같은 식을 만들 수 있다.

$$\mathrm{Id}_{2n} = A^t A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX^t + YY^t & XY^t - YX^t \\ YX^t - XY^t & XX^t + YY^t \end{pmatrix}$$

이는 $XX^t + YY^t = \mathrm{Id}_n$, $XY^t = YX^t$라는 것과 같다. 또한 $AA^* = \mathrm{Id}$는 다음과 같이 표현될 수

있다.

$$AA^* = (X+iY)(X^t - iY^t) = (XX^t + YY^t) + i(XY^t - YX^t) = \mathrm{Id}$$

따라서 위의 조건은 $U(n)$의 정의와 정확히 일치한다. $\square$

위의 정리가 함의하는 것은, inner product 구조, symplectic 구조, 그리고 complex 구조 중 2개가 주어진다면 나머지 1개의 구조 역시 자동으로 결정된다는 것이다. 이는 다음과 같은 식으로 쓰여질 수 있다.

$$\langle v, w \rangle = \omega(v, Jw)$$

이는 뒤에서 어떤 manifold 위에 Riemannian structure, symplectic structure 그리고 (almost) complex structure 중 2개가 주어진다면 나머지 1개의 구조가 결정된다는 내용으로 번역될 것이다.

이제 symplectic matrix들의 eigenvalue들에 대해 알아보자. 이 결과 역시 나중에 유용하게 사용할 데가 있을 것이다. A의 eigenvalue들의 집합을 $\sigma(A)$라고 쓰자.

Proposition 7. $A \in Sp(2n)$이라면 다음이 성립한다.

1. $\lambda \in \sigma(A)$ iff $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$이고, 둘의 multiplicity는 같다.

2. 만약 $\pm 1 \in \sigma(A)$였다면 이들의 multiplicity는 짝수이다.

3. $\lambda\lambda' \neq 1$이고, z, z'이 각각 λ, λ'의 eigenvector라고 하자. 그렇다면 $\omega_0(z, z') = 0$이다.

다시 말해서, $\lambda \in \sigma(A)$라면 eigenvalue들은 다음과 같이 짝을 이뤄서 나타나게 된다.

- $\lambda = \pm 1$이라면 multiplicity는 짝수

- $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$이라면 $\lambda, 1/\lambda \in \sigma(A)$

- $\lambda \in S^1 \setminus \{1, -1\} \subset \mathbb{C}$라면 $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$

- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup S^1)$라면 $\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda} \in \sigma(A)$

Proof. 1. $A^t = J_0 A^{-1} J_0^{-1}$이므로 A^t는 A^{-1}과 similar하다. 그런데 A와 A^t 역시 similar하므로 결과를 얻는다.

2. $\det A = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = 1$이므로 -1의 multiplicity는 짝수이고, 1의 결과에 의하여 ± 1이 아닌 eigenvalue는 짝수개이다. 따라서 1의 multiplicity 또한 짝수이다. 마지막의 $\sigma(A)$에 대한 결과는 A가 real matrix이므로 $\lambda \in \sigma(A)$라면 $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$라는 것으로부터 확인할 수 있다.

3. $Az = \lambda z$, $Az' = \lambda' z'$이라고 하자. 그렇다면,

$$\lambda\lambda' \omega_0(z, z') = \omega_0(\lambda z, \lambda' z') = \omega_0(Az, Az') = \omega_0(z, z')$$

따라서 $\lambda\lambda' = 1$이거나 $\omega_0(z, z') = 0$일 수밖에 없다. $\square$

3 Topology of $Sp(2n)$

Symplectic group의 topology를 생각해보자. 가장 먼저 알 수 있는 것은, $Sp(2n)$은 compact가 아니라는 것이다. 이는 다음과 같은 matrix를 통해 짐작해볼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} c \cdot \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & (1/c)\mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \in Sp(2n)$$

어떤 c에 대해서도 위의 matrix가 $Sp(2n)$에 포함된다는 것은 쉽게 확인 가능하다. Non-compact Lie group에 대해서는 maximal compact subgroup이 중요한 역할을 한다. 다행스럽게도 $Sp(2n)$의 maximal compact subgroup은 우리가 잘 알고 있는 대상이다.

Proposition 8. $U(n)$은 $Sp(2n)$의 deformation retraction이고, maximal compact subgroup이다.

Proof. 먼저 다음과 같이 deformation retraction을 잡아보자.

$$\begin{aligned} f_s : Sp(2n) &\to Sp(2n) \\ A &\mapsto A(A^tA)^{-s/2} \end{aligned}$$

$f_0 = \mathrm{Id}$이고, 만약 $A \in U(n)$이었다면 $A^tA = \mathrm{Id}$이므로 $(Sp(2n) \cap O(2n) = U(n))$ $f_s|_{U(n)} = \mathrm{Id}$이다. 또한,

$$f_1(A)f_1(A)^t = A(A^tA)^{-1/2}(A^tA)^{-1/2}A^t = A(A^tA)^{-1}A^t = AA^{-1}(A^t)^{-1}A^t = \mathrm{Id}$$

이므로, $f_1(Sp(2n)) = U(n)$이라는 것도 확인할 수 있다. 이는 **symplectic polar decomposition**이라 불리는 기법인데, $U = A(A^tA)^{-1/2}$이라 두고 $P = (A^tA)^{1/2}$이라 두면 $A = UP$이고, U는 unitary, P는 positive definite symmetric symplectic matrix가 된다는 것이다.

이것이 모든 s에 대해 잘 정의되었는지만 확인하면 된다. A^tA는 positive definite symmetric matrix이다. 편의상 $P = A^tA$라고 두자. 우리는 P^s가 항상 $Sp(2n)$의 원소가 된다는 것을 보일 것이다. P의 eigenvalue를 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k > 0$라 하자. 그렇다면 $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$에 대하여 $z = \sum_{j=1}^k z_j$, $w = \sum_{j=1}^k w_j$와 같이 eigenspace decomposition을 할 수 있다. 여기서

$$\omega_0(z_i, w_j) = \omega_0(Pz_i, Pw_j) = \lambda_i\lambda_j\omega_0(z_i, w_j)$$

가 항상 성립해야 하고, 따라서 $\lambda_i\lambda_j = 1$이거나 $\omega_0(z_i, w_j) = 0$이다. 이것은 모든 (i, j)에 대해 성립한다. Positive definite symmetric에 대해 P^s는 P를 diagonalize한 뒤 그 eigenvalue에 s를

exponent로 붙이는 것으로 정의된다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\omega_0(P^s z, P^s w) = \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j)^s \omega_0(z_i, w_j) = \sum_{i,j} \omega_0(z_i, w_j) = \omega_0(z, w)$$

그러므로 P^s는 항상 $Sp(2n)$에 속하고, 원하는 것이 증명되었다.

이제 $Sp(2n)$의 subgroup G에 대해 $U(n) \subset G \subset Sp(2n)$이고, $A \in G \setminus U(n)$이라 해보자. A의 symplectic polar decomposition을 생각해보면 $A = UP$인데, $U \in G$이므로 $P \in G$이다. 그런데 $P \notin U(n)$이어야 하고, 따라서 P는 eigenvalue $\lambda > 1$을 가진다. 그러면 P^k은 eigenvalue λ^k를 가질텐데, 이는 수렴하지 않는 증가수열이고 따라서 norm을 생각해보면 $(P^k) \in G$는 수렴하지 않는다. 그러므로 G는 compact가 아니고, $U(n)$은 maximal compact subgroup이다. □

$U(n)$이 $Sp(2n)$의 deformation retraction이므로 $Sp(2n)$의 homotopy 구조는 $U(n)$의 그것과 일치할 것이다. 다음 결과는 Maslov index를 정의하는 데에 매우 중요하게 사용될 것이다.

Proposition 9. $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$이고, $\det_{\mathbb{C}} : U(n) \to S^1$은 π_1에서 isomorphism이 된다.

Proof. 먼저 $SU(n) = \{A \in U(n) : \det_{\mathbb{C}}(A) = 1\}$이 simply connected임을 보이자. $SU(1) = \{1\}$이므로 보일 것이 없고, induction argument를 사용하기 위해 다음과 같은 fibration을 생각한다.

$$SU(n-1) \to SU(n) \to S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$$
$$(c_1 \cdots c_n) \mapsto c_1$$

여기서 c_j들은 column vector를 표현한 것이다. $SU(n)$의 column vector들은 unitary basis의 원소이기 때문에 norm이 1이고, 따라서 위의 fibration은 잘 정의된다. 이를 통해 homotopy LES를 잡아주면

$$\pi_2(S^{2n-1}) \to \pi_1(SU(n-1)) \to \pi_1(SU(n)) \to \pi_1(S^{2n-1})$$

을 얻고, $n \geq 2$인 경우를 생각해보면 양 끝에 있는 group이 0이고 따라서 가운데에 있는 map은 isomorphism임을 알 수 있다.

이제 $\det_{\mathbb{C}} : U(n) \to S^1$을 생각하자. 이 역시 $SU(n)$을 fiber로 가지는 fibration이라 생각할 수 있고, 다음과 같은 LES가 유도된다.

$$\pi_1(SU(n)) \to \pi_1(U(n)) \to \pi_1(S^1) \to \pi_0(SU(n))$$

그런데 $SU(n)$가 simply connected라는 것으로부터 가운데에 있는 map이 isomorphism임을 알 수 있다. 그리고 이는 $\det_{\mathbb{C}}$에서 유도된 것이다. □

4 Space of Symplectic Structures

$\Omega(V)$를 V 위에 주어질 수 있는 symplectic structure들의 모임이라고 하자. 이는 $M_{2n}(\mathbb{R})$의 부분집합으로 간주할 수 있고, 따라서 자연스러운 topology를 가지게 된다. 이 공간을 어떻게 표현할 수 있는지 알아보도록 하자.

$\Omega(V)$에는 $GL(V)$의 action이 주어지는데, 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} GL(V) \times \Omega(V) &\to \Omega(V) \\ (A, \omega) &\mapsto (A^{-1})^* \omega \end{aligned}$$

즉, $A \cdot \omega(v, w) = \omega(A^{-1}v, A^{-1}w)$로 정의할 수 있다. 이것이 smooth group action임은 거의 자명하다. 또한 $A \cdot \omega = \omega$이라는 것은 $A \in Sp(V)$와 동치이고, 이는 $Sp(V)$가 이 action의 stabilizer라는 말과 같다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

Proposition 10. $\Omega(V) \simeq GL(V)/Sp(V) = GL_{2n}(\mathbb{R})/Sp(2n)$.

이 결과를 풀어서 설명하면, $GL(V)$를 서로 'symplectomorphic'한 것들끼리 identify'시키면 남는 것이 바로 symplectic structure들이라고 말할 수 있겠다. 이와 같은 방식으로 위의 결과를 자연스럽게 이해할 수 있다. 또한 다음과 같은 결과도 있다.

Proposition 11. 다음의 inclusion들은 homotopy equivalence이다.

$$O(2n)/U(n) \to GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$$
$$O(2n)/U(n) \to GL_{2n}(\mathbb{R})/Sp(2n)$$

Proof. 먼저 $O(2n) \to GL_{2n}(\mathbb{R})$이 homotopy equivalence라는 것은 Gram-Schmidt process를 생각하면 자명하다. Gram-Schmidt process에서 빼주는 term들을 시간에 따라 0부터 변화시키면 되기 때문이다. 그렇다면 위의 정리는 second isomorphism theorem으로부터 따라온다. 즉, homotopy equivalence를 $\simeq$로 쓴다면 다음과 같다.

$$O(2n)/U(n) = O(2n)/(O(2n) \cap GL_n(\mathbb{C})) \simeq GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$$

$Sp(2n)$의 경우도 동일하다. □

위에서 $GL_{2n}(\mathbb{R})/Sp(2n)$을 symplectic structure들의 공간으로 간주할 수 있었던 것과 마찬가지로 $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$는 *complex structure*들의 공간으로 간주할 수 있다. 이 두 공간이 homotopy equivalent하다는 것은 symplectic structure가 주어지고 하나의 inner product(여기서는 Id_{2n})가 고정되어 있다면 complex structure를 결정할 수 있다는 것으로부터 짐작할 수 있겠다.

5 예고

다음 글에서는 Lagrangian subspace에 대해 다뤄볼 것이다. Lagrangian subspace는 symplectic space의 ‘아주 특별한’ subspace들이고, 역시나 중요한 대상이다. 이를 이용할 수 있는 예시로 symplectic reduction이라는 것을 알아보겠다. 또한 symplectic matrix들의 curve에 주어질 수 있는 일종의 불변량인 Maslov index에 대해서도 알아볼 것인데, 이는 Floer homology를 정의하는 데에 매우 중요한 역할을 하게 된다.