Day 7. Symplectic Manifolds

JJM Math

March 7, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이번 글에서는 symplectic manifold를 정의하고, 정의로부터 바로 알 수 있는 성질들과 기초적인 예시들에 대해서 알아본다. Symplectic manifold 사이의 isomorphism이라 볼 수 있는 symplectomorphism은 특정한 vector field의 integral flow로 정의되는 경우가 많은데, 이러한 역할을 하는 vector field를 symplectic vector field 또는 Hamiltonian vector field라고 부른다. 특히 Hamiltonian vector field는 이후 매우 중요하게 쓰이게 되는데, Hamiltonian vector field과 연관이 깊은 Poisson bracket, 그리고 Hamiltonian symplectomorphism들에 대해서도 알아본다.

1 Symplectic Manifolds

Manifold M이 주어졌다고 하자. M 위의 **symplectic structure**란 다음을 만족시키는 2-form $\omega \in \Omega^2(M)$을 의미한다.

- (TM, ω)이 symplectic vector bundle이다. 즉, ω은 nondegenerate이다.
- (Closedness) $d\omega = 0$.

$\omega \in \Omega^2(M)$은 이미 ω이 skew-symmetric임을 함의하고 있으므로 skew-symmetric 조건은 따로 쓰지 않은 것이다. Closedness 조건이 왜 붙는지에 대해서는 뒤에서 알아보도록 하자. 이러한 ω이 주어졌을 때, (M, ω)을 **symplectic manifold**라고 부른다. Vector space에서와 마찬가지로 ω 역시 정의의 일부이다. 즉, 같은 M 위에 서로 다른 ω이 주어질 수 있다. 만약 ω이 TM 위의 symplectic form이지만 $d\omega \neq 0$인 경우, (M, ω)을 **almost symplectic manifold**라고 부른다. (이보다는 뒤에서 등장할 almost complex manifold가 더 자주 쓰일 것이다.)

다들 예상할 수 있는 정의일 것인데, 2개의 symplectic manifold $(M, \omega), (M', \omega')$이 주어졌을 때, diffeomorphism $\varphi : M \to M'$이 $\varphi^*\omega' = \omega$을 만족한다면 이를 **symplectomorphism**이라고

부른다. (M,ω)에서 자기 자신으로 가는 symplectomorphism들은 group을 이룰 것이고, 이를 다음과 같이 표기한다.

$$\mathrm{Symp}(M,\omega) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) : \varphi^*\omega = \omega\}$$

(편의에 따라 ω이 무엇인지 확실한 경우 $\mathrm{Symp}(M)$으로 쓰기도 한다.) Symplectic manifold의 정의는 간단하지만, symplectic form이 존재한다는 사실로부터 도출해낼 수 있는 성질들은 생각보다 많다. 이 중 nondegeneratedness에서 나오는 성질은 사실상 symplectic vector space의 성질로부터 오는 것이고, closedness에서 나오는 성질은 manifold 자체의 위상과 관련있다고 말할 수 있겠다.

1. TM이 symplectic vector bundle이어야 하므로 각각의 tangent space는 짝수 차원이다. 이는 M의 차원과 같고, 다시 말해 symplectic manifold는 항상 짝수 차원이다.

2. ω이 non-degenerate라는 것은 $\dim M = 2n$일 때 $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$이 nowhere vanishing이라는 것과 동치이다. 즉, ω^n은 M의 volume form을 정의하고, M은 항상 orientable이다.

3. 특히 $\dim M = 2$인 경우 ω은 그 자체로 volume form이 되고, 반대로 volume form이 있다면 그것은 항상 symplectic form이다. 따라서 orientable surface는 (boundary의 존재 여부나 compactness와 무관하게) 항상 symplectic structure를 가진다. 이것을 구체적으로 정의하는 법은 바로 다음 절에서 알아볼 것이다.

4. Vector space에서와 마찬가지로, 그리고 Riemannian manifold의 경우와 마찬가지로 ω이 nondegenerate라면 각각의 $p \in M$마다 T_pM과 T_p^*M 사이의 isomorphism을 유도할 것이고, 이는 tangent bundle TM과 cotangent bundle T^*M 사이의 isomorphism으로 확장된다. 구체적으로는 다음과 같다.
$$\begin{aligned} TM &\to T^*M \\ X &\mapsto i_X\omega = \omega(X,-) \end{aligned} \tag{1}$$
여기서 i_X는 interior product를 의미한다.

5. M 위의 Vector field들의 공간 $\mathcal{X}(M)$은 TM의 section들이고, 1-form들의 공간 $\Omega^1(M)$은 T^*M의 section들이다. 따라서 위와 같은 방식으로 $\mathcal{X}(M)$과 $\Omega^1(M)$ 사이에도 isomorphism이 존재한다.

6. $d\omega = 0$이므로 ω은 2번째 de Rham cohomology $H^2(M)$의 class를 정의한다. $\omega = d\eta$라고 해보자. M이 compact인 경우, Stokes' theorem에 의해 다음을 얻는다.
$$\int_M \omega^n = \int_M d(\eta \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \eta \wedge \omega^{n-1}$$
만약 $\partial M = \emptyset$이라면 위의 적분은 0이 된다. 그런데 ω^n이 volume form이므로 이런 일은 일어날 수 없다. 즉, closed manifold 위의 symplectic form은 절대로 exact일 수 없다.

7. 바로 위의 내용으로부터, closed symplectic manifold의 경우 $H^2(M)$에 nontrivial class $[\omega]$이 있다는 것을 알 수 있다. 즉 M이 closed이고 $H^2(M) = 0$이라면 M 위에는 symplectic structure가 존재할 수 없다. 예컨대 $n \geq 2$일 때 S^{2n}은 symplectic manifold가 될 수 없다.

2 Examples of Symplectic Manifolds

Symplectic manifold의 대표적인 예시들을 알아보자.

Example 1.

1. Vector space V를 manifold로 간주하면, T_pV는 항상 V와 isomorphic하다. 즉, vector space V 위의 (vector space로서의) symplectic form ω은 V 위의 *constant* symplectic form으로 간주할 수 있겠다. 이 경우 (V, ω)은 symplectic manifold가 된다. 특히, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$은 symplectic manifold이다. 이 경우 ω_0을 differential form으로 쓰면 다음과 같다.

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

이 form은 $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$으로 옮겨질 수 있고, 따라서 $\mathbb{T}^{2n}$ 역시 symplectic manifold이다.

2. (M, ω)이 symplectic manifold라면 $(M, -\omega)$ 역시 symplectic manifold이다.

3. $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$가 symplectic manifold라면 $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ 역시 symplectic manifold 이다.

4. Orientable surface Σ 위에는 항상 symplectic structure가 존재한다는 것을 위에서 알아본 바 있다. 이 경우 Σ는 $\mathbb{R}^3$ 안에 embed될 수 있고, 이로부터 자연스럽게 만들어지는 symplectic structure를 만들어 보자. $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$이라면 Σ의 tangent vector들을 $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$의 vector로 생각할 수 있고, normal vector field $\nu : \Sigma \to S^2$를 정의할 수 있다. 이는 $\nu(p) \perp T_p\Sigma$이고, $||\nu(p)|| = 1$이라는 성질들로 정의된다. 이렇게 $\nu(p)$가 주어졌다면 다음과 같은 symplectic form을 정의할 수 있다.

$$\omega_p(X, Y) = \langle \nu(p), X \times Y \rangle = \det(\nu(p), X, Y)$$

여기서 $X, Y \in T_p\Sigma$이고, $\times$는 외적이다. 특히 standard S^2의 경우 $\nu(p) = p$로 잡을 수 있겠다.

가장 중요한 예시는 따로 소개하도록 하겠다.

Example 2. Manifold L의 cotangent bundle T^*L을 생각하자. $\dim L = n$이라 하면 $\dim T^*L = 2n$이고, $TT^*L \simeq TL \oplus T^*L$이므로 T^*L은 항상 orientable이다. 또한 T^*L은 compact가 아니므로 $H^2(T^*L)$에 의한 obstruction 또한 없다. 따라서 적어도 지금껏 알아본 것들 중에는 T^*L 위에 symplectic form이 존재할 결정적인 obstruction은 없다고 볼 수 있겠다. 또한 $TT^*L \simeq TL \oplus T^*L$ 이므로 이 위에는 항상 (vector bundle로서의) canonical symplectic form이 존재하는데, 이것이 closed라면 T^*L은 symplectic manifold라고 말할 수 있을 것이다.

결과만 간단히 요약하자면, T^*L 위에는 **canonical 1-form** λ_{can}이 존재하고, $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$으로 정의하면 symplectic form이 된다. (여기서 $-$부호가 붙는 것은 convention에 따라 다르다.)

$$\lambda_{can} = ydx, \ \omega_{can} = dx \wedge dy$$

보다 구체적으로 알아보자. $x = (x_1, \cdots, x_n) : U \subset L \to \mathbb{R}^n$이 L의 local chart라 하자. 그렇다면 임의의 $v^* \in T_p^*U$는 어떤 $y_1, \cdots, y_n$에 대하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$v^* = \sum y_j dx_j$$

즉, L의 local chart x로부터 T^*L의 local chart (x, y)를 얻는다. 이러한 좌표계에서 λ_{can}, 그리고 ω_{can}은 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_{can} = \sum y_j dx_j, \ \ \omega_{can} = \sum dx_j \wedge dy_j$$

이 정의가 좌표계의 선택에 의존하지 않고 T^*L 전체에서 잘 정의된다는 것은 어렵지 않게 보일 수 있다. (Transition map을 생각해 보자.) 따라서 (T^*L, ω_{can})은 symplectic manifold이다.

특히 $TT^*L \simeq TL \oplus T^*L$의 identification을 생각해보면, ω_{can}은 우리가 앞서 알아본 $E \oplus E^*$ 위의 canonical form과 동일하다는 것을 알 수 있다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\omega_{can}((v_0, v_1^*), (w_0, w_1^*)) = w_1^*(v_0) - v_1^*(w_0)$$

(T^*L, ω_{can})은 우리가 **Day 1.**에서 알아봤던 phase space로 생각할 수 있을 것이고, 가장 canonical한 symplectic manifold 중 하나라고 볼 수 있다. λ_{can}이 canonical하다는 것은 다음의 성질로 이해할 수 있겠다.

Proposition 3. *임의의 1-form $\eta \in \Omega^1(L)$에 대하여 다음이 성립한다.*

$$\sigma^* \lambda_{can} = \sigma$$

또한, λ_{can}은 위의 성질로 완전히 결정된다.

Proof. 먼저 σ로 pullback한다는 것이 무엇인지 생각해보자. 1-form은 T^*L의 section이고, 따라서 σ는 $L \to T^*L$인 map이다. 더 구체적으로 local chart 위에서 σ가 다음과 같이 표현되었다고 해보자.

$$\sigma = \sum a_j(x) dx_j$$

위는 1-form으로 봤을 때의 표현이고, 이를 $L \to T^*L$로 보면 다음과 같다.

$$\sigma(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, a_1(x), \cdots, a_n(x))$$

λ_{can}을 σ로 pullback해주면 L 위의 1-form을 얻는데, $\lambda_{can} = ydx$였으므로 $\sigma^*\lambda_{can} = a(x)dx$가 되고, 이것은 σ가 된다. 또다른 λ에 대해 위의 식이 성립한다면 $\lambda = \lambda_{can}$이라는 것은 각자 확인해 보도록 하자. □

3 Symplectic Vector Fields

먼저 (1)에 등장하는 isomorphism에 주목해보자. De Rham cohomology의 관점에서 $\Omega^1(M)$의 원소들 중 일단 흥미로운 것은 closed인 것과 exact인 것들이다. 따라서 vector field 중 closed form, exact form에 대응되는 것들에 대해 관심을 가져보자. $X \in \mathcal{X}(M)$이 **symplectic**이라는 것은 $i_X\omega$이 closed라는 것이다. 다음의 Lemma는 매우 자주 사용될 것이니 기억해 두면 좋다.

Lemma 4 (Cartan's Magic Formula)**.** Vector field X과 differential form ω에 대해,

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega.$$

여기서 $\mathcal{L}$는 Lie derivative를 의미한다.

Proof. 적당한 미분기하학 교과서를 찾아보면 된다. Spivak의 [Comprehensive Introduction to Differential Geometry] 정도가 적당할 것이다. □

Cartan의 공식과 $d\omega = 0$이라는 사실을 사용하면, X가 symplectic이라는 것은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega = di_X\omega = 0$$

즉, X가 symplectic이라는 조건은 $\mathcal{L}_X\omega = 0$이라는 것으로도 쓸 수 있겠다. Lie derivative의 의미를 생각해보면 이는 X의 flow가 ω을 보존한다는 것으로 이해할 수 있겠다. 이제 symplectic vector field들의 공간을 다음과 같이 쓰자.

$$\mathcal{X}(M, \omega) = \{X \in \mathcal{X}(M) : \mathcal{L}_X\omega = di_X\omega = 0\}$$

$\mathcal{X}(M, \omega)$에 symplectic이라는 이름이 붙은 것에는 다 이유가 있다. Vector field $X \in \mathcal{X}(M)$, 더 일반적으로 time-dependent vector field $X_t \in \mathcal{X}(M)$이 주어졌을 때, 그 vector field의 **flow** Fl_t^X는

다음을 만족시키는 diffeomorphism들의 family이다.

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Fl}_t^X = X_t \circ \mathrm{Fl}_t^X,\ \mathrm{Fl}_0^X = \mathrm{Id}$$

이 미분방정식을 만족시키는 Fl_t^X는 모든 t에 대해서 diffeomorphism이라는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 즉, Fl_t^X는 Id로부터의 **isotopy**라고도 볼 수 있겠다. X에 대한 dependence를 확실히 밝혀야 할 때는 Fl_t^X라고 쓰지만, 혼동의 여지가 없다면 간단히 φ_t 또는 ψ_t라고 쓰도록 하자. Fl_t^X는 작은 t에 대해서는 항상 존재하고, M이 closed라면 모든 t에 대해서 존재한다.

Proposition 5. M이 closed이고, ψ_t가 $X_t \in \mathcal{X}(M)$의 flow라고 하자. 모든 t에 대해 $\psi_t \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$라는 것과 $X_t \in \mathcal{X}(M,\omega)$라는 것은 동치이다. 즉, $\mathcal{X}(M,\omega)$은 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$의 *Lie algebra*이다.

Proof. 먼저 $\psi_0 = \mathrm{Id}$이므로 $\psi_0 \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$이다. 또한 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega = \psi_t^*(i_{X_t}d\omega + di_{X_t}\omega) = \psi_t^* di_{X_t}\omega$$

그러므로 $di_{X_t}\omega = 0$이라는 것과 $\psi_t^*\omega = \omega$이라는 것이 동치라는 것을 알 수 있다. □

$\mathcal{X}(M,\omega)$이 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$의 Lie algebra라는 것을 보다 구체적으로 설명하자면 다음과 같다. Lie group G의 Lie algebra를 찾기 위해서는 보통 $1 \in G$를 지나는 path를 잡은 다음 그것을 미분하게 된다. 이 경우 ψ_t는 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ 안의 path이며 $\psi_0 = \mathrm{Id}$이고, 이것이 X_t의 flow라는 것은 다시 말해 ψ_t를 t로 미분하면 X_t가 된다는 것으로 이해할 수 있다. $\mathcal{X}(M)$에는 자연스러운 Lie algebra structure가 있는데, 이것이 $\mathcal{X}(M,\omega)$에서도 잘 정의된다는 것을 알아보자.

Proposition 6. $X, Y \in \mathcal{X}(M,\omega)$이라면 $[X,Y] \in \mathcal{X}(M,\omega)$이다. 구체적으로, $H = \omega(X,Y) \in C^\infty(M)$에 대해 다음이 성립한다.

$$i_{[X,Y]}\omega = dH$$

즉, $\mathcal{X}(M,\omega)$은 Lie bracket에 대해 닫혀 있으며, (1) 아래에서 그에 대응되는 1-form은 exact이다.

Proof. 우리는 다음과 같은 sign convention을 사용한다.

$$[X,Y] = \mathcal{L}_Y X = \left.\frac{d}{dt}(\mathrm{Fl}_t^Y)^* X\right|_{t=0}$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M,\omega)$이라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= \frac{d}{dt} i_{(\mathrm{Fl}_t^Y)^* X}\omega = \mathcal{L}_Y(i_X\omega) \\ &= di_Y i_X\omega + i_Y di_X\omega = di_Y i_X\omega = d(\omega(X,Y)) \end{aligned}$$

따라서 $i_{[X,Y]}\omega = dH$라는 것을 보였고, $di_{[X,Y]}\omega = d^2H = 0$이므로 symplectic이다. $\square$

4 Hamiltonian Vector Fields and Poisson Bracket

이제 exact form에 대응되는 vector field들에 대해 알아보자. 1-form η가 exact라는 것은 $\eta = dH$ for some $H \in C^\infty(M)$이라는 뜻이었고, 그렇다면 우리는 다음을 만족하는 $X_H \in \mathcal{X}(M)$에 관심이 있을 것이다.

$$i_{X_H}\omega = dH \tag{2}$$

이러한 X_H를 **Hamiltonian vector field**라고 부르고, H를 **Hamiltonian function**이라 부르며, X_H의 flow는 **Hamiltonian flow**라고 부른다. Hamiltonian vector field들의 공간을 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$으로 쓰자. 정의로부터 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega) \subset \mathcal{X}(M,\omega)$라는 것은 자명하다.

Remark 7. Hamiltonian vector field가 항상 symplectic이라는 것은 Hamiltonian flow가 항상 symplectomorphism이라는 것과 같다. 즉, $H \in C^\infty(M)$마다 하나의 symplectomorphism family가 정의된다는 것이다. 또한 곧 확인하겠지만 상수만큼 차이나는 H들이 아니라면 서로 다른 family를 정의한다. 이는 Riemannian geometry와 symplectic geometry 사이의 큰 차이점 중 하나를 보여준다. Riemannian geometry에서 symplectomorphism에 해당하는 것은 isometry인데, 주어진 Riemannian manifold (M,g)의 isometry group은 항상 유한 차원의 Lie group으로 주어지게 된다. 하지만 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$은 항상 무한차원이고, 이는 symplectic manifold가 굉장히 많은 symmetry를 가진다는 것으로 해석할 수 있겠다.

정의로부터 바로 다음이 성립한다는 것을 확인할 수 있겠다.

$$dH(X_H) = (i_{X_H}\omega)(X_H) = i^2_{X_H}\omega = 0$$

따라서 X_H는 H의 level set $H^{-1}(c)$에 tangent하다. 이는 **Day 1.**에서 알아보았던 *energy conservation law*와 일치하는 결과라고 볼 수 있겠다

Hamiltonian H가 하나 주어진다면, Hamiltonian vector field X_H 역시 하나 잘 정의된다는 것은 쉽게 알 수 있다. (1)는 isomorphism이었고, 따라서 $X_H = X_{H'}$이었다면 $dH = dH'$일 것이다. M이 connected라 하면 이는 H와 H'이 constant만큼 차이난다는 말이 된다. 즉, 다음과 같은 short exact sequence를 생각할 수 있겠다.

$$\begin{gathered} 0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to \mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(X,\omega) \to 0 \\ H \mapsto X_H \end{gathered} \tag{3}$$

따라서 Hamiltonian vector field를 다루는 것은 M 위의 Hamiltonian function을 다루는 것과 연

관이 깊을 것이다.

이제 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$의 Lie algebra structure를 알아보자. $d^2H=0$이므로 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$이 $\mathcal{X}(M,\omega)$의 subset임은 자명하다. 또한 다음의 성질들은 쉽게 보일 수 있고, 이는 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$이 linear subspace라는 것 또한 알려준다.

$$X_{F+G}=X_F+X_G,\ X_{cF}=cX_F$$

마지막으로 Proposition 3.에 의하여 $X_F,X_G\in\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$에 대해 다음이 성립한다.

$$[X_F,X_G]=X_H \text{ where } H=\omega(X_F,X_G)=dF(X_G) \tag{4}$$

따라서 $\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$은 $\mathcal{X}(M,\omega)$의 Lie subalgebra이다. 또한 위에서 찾은 H는 F,G에 적당한 operation을 가한 것이라 생각할 수 있겠다. $F,G\in C^\infty(M)$의 **Poisson bracket**을 다음과 같이 정의하자.

$$\{F,G\}=\omega(X_F,X_G)$$

Poisson bracket 아래에서 $C^\infty(M)$은 Lie algebra가 되고, (4)은 다시 다음과 같이 쓸 수 있겠다.

$$[X_F,X_G]=X_{\{F,G\}}$$

즉, 에 등장하는 $H\mapsto X_H$는 Lie algebra homomorphism이고, 이는 Lie algebra 사이의 short exact sequence가 된다. ($\mathbb{R}$ 위에는 자명한 Lie algebra 구조를 주면 된다.)

마지막으로 $\psi\in\mathrm{Symp}(M,\omega)$에 대해 Hamiltonian vector field가 어떻게 변화하는지를 알아보자. ψ는 $C^\infty(M)$ 위에 $H\mapsto H\circ\psi$로 자연스럽게 act한다. 그렇다면 $H\circ\psi$에 해당하는 Hamiltonian vector field를 찾아보면 될 것이고, 이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$i_{X_{H\circ\psi}}\omega=d(H\circ\psi)=\psi^*dH=\psi^*i_{X_H}\omega=i_{\psi^*X_H}\omega$$

즉, $X_{H\circ\psi}=\psi^*X_H$이다. 지금까지의 알아본 바를 요약하면 다음과 같다.

Proposition 8. (M,ω)이 symplectic manifold라 하자.

1. Hamiltonian flow φ_H^t는 symplectomorphism이고, H의 level set에 tangent하다.
2. $X_F,X_G\in\mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$이라면 $[X_F,X_G]=X_{\{F,G\}}$이다.
3. $\psi\in\mathrm{Symp}(M,\omega)$에 대해 $X_{H\circ\psi}=\psi^*X_H$이다.

이제 Hamiltonian H가 주어졌을 때 그 level set $H^{-1}(c)$에 대해서 조금 더 알아보자. X_H가 만드는 Hamiltonian flow는 M 위의 $\mathbb{R}$-action이라고 볼 수 있고, 이 아래에서 $H^{-1}(c)$는 invariant submanifold가 된다. 특히 c가 regular value라면 $H^{-1}(c)$는 codimension 1이므로 **hypersurface**가 된다. 이 때 $H^{-1}(c)$는 자연스러운 orientation을 가지는데, M의 orientation 중에서 첫 방향이 X_H인 녀석을 택하면 나머지 basis가 $H^{-1}(c)$의 orientation을 정의하게 된다.

반대로 $S \subset (M, \omega)$이 compact oriented hypersurface라고 하자. (T_pM, ω_p)를 symplectic vector space로 보았을 때 T_pS는 coisotropic subspace가 된다. 이는 다시말해 $(T_pS)^\omega \subset T_pS$라는 뜻이다. (왜 그런지는 **Day 2.**로 돌아가서 다시 곰곰히 생각해 보자.) 따라서 S는 **coisotropic submanifold**라고 할 수 있겠다. 또한 $\dim(T_pS)^\omega = \dim T_pM - \dim T_pS = 1$이다. 따라서 이 때 T_pS의 symplectic complement $(T_pS)^\omega$들로 만들어지는 S 위의 line bundle L을 생각해볼 수 있겠다. 즉, 다음을 생각한다는 것이다.

$$L_p = \{v \in T_pM : \omega(v, w) = 0 \text{ for any } w \in T_pS\}$$

이것이 integrate된다면 S 위의 1차원 foliation을 정의할 것이고, 이를 S의 **characteristic foliation**이라 한다. (Foliation이란 manifold로 parametrize된 다른 manifold를 의미한다.) 이에 대해서는 symplectic action을 다룰 때 더 자세히 알아볼 것이다.

Example 9. 간단한 예시로 Example 1.4.에서 알아본 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 위의 standard symplectic structure를 생각해 보자. $\mathbb{R}^3$의 coordinate를 (x, y, z)로 두고, Hamiltonian $H : S^2 \to \mathbb{R}$을 $H(x, y, z) = z$라고 하자. 즉, H는 Morse theory 등에서 흔히 등장하는 *height function*이다. 이 때 cylindrical polar coordinate를 사용하면 X_H는 $\partial/\partial\theta$임을 알 수 있다. (X_H는 H의 gradient vector field를 90도 회전시킨 것이라 간주한다면 이해가 쉽다.) 이 경우, $c \neq \pm 1$에 대해 $H^{-1}(c)$는 (반지름이 서로 다른) S^1이 되며, X_H로 만들어지는 action에 invariant하다는 것을 알 수 있다. 또한 임의의 codimension 1 submanifold $S \subset M$에 대하여 $TS^\omega = TS$임은 자명하다. 따라서 이 경우 characteristic foliation은 자기 자신이 된다.

5 Hamiltonian Isotopies

이제 isotopy에 대해서 간단히 알아보자. Symplectic isotopy와 Hamiltonian isotopy는 다음 글에서 symplectic submanifold를 다룰 때에 중요하게 사용될 것이다. Manifold M 위의 **isotopy**란 $\mathrm{Diff}(M)$ 안의 path를 의미한다. 즉, diffeomorphism들로만 이뤄진 homotopy를 isotopy라고 한다. (경우에 따라 diffeomorphism이 아닌 homeomorphism만을 고려할 수도 있다.) 마찬가지로, **symplectic isotopy**는 $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ 안의 path라고 정의할 수 있겠다. 이는 symplectic vector field X_t의 flow로 볼 수 있다는 것을 알아본 바 있다.

Hamiltonian vector field로 만들어지는 isotopy는 **Hamiltonian isotopy**라 부르는데, 이 경우 자연스러운 정의를 위해서는 time-dependent Hamiltonian을 사용하여 정의해야 한다. 즉, $H : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}$에 대한 vector field X_t를 각각의 t에 대해 $i_{X_t}\omega = dH_t$로 정의한다면, X_t의

flow가 Hamiltonian isotopy가 되는 것이다. 이 경우 X_t는 H의 derivative에 대하여 정의되었으므로, $c : [0,1] \to \mathbb{R}$에 대하여 $H + c = H'$이었다면 H, H'은 같은 X_t를 정의한다.

$\psi \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$에 대하여 Hamiltonian isotopy ψ_t가 존재하여 $\psi_1 = \psi$라면, 즉 ψ가 어떤 $X_t \in \mathcal{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$의 time 1 flow로 정의될 수 있다면 ψ를 **Hamiltonian symplectomorphism**이라 부른다. 이들의 모임을 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$이라 쓰고, 만약 ψ가 X_{H_t}의 time 1 flow였다면 $\psi = \varphi_H$로 표기하기도 한다. 즉, 다음과 같이 쓸 수 있겠다.

$$\mathrm{Ham}(M,\omega) = \{\varphi_H \in \mathrm{Symp}(M,\omega) : H \in C^\infty([0,1] \times M)\}$$

M이 compact가 아닌 경우, compactly supported Hamiltonian만을 고려하는 것이 편한 경우도 많다. 이 경우는 다음과 같이 표기한다.

$$\mathrm{Ham}_c(M,\omega) = \{\varphi_H \in \mathrm{Symp}(M,\omega) : H \in C_0^\infty([0,1] \times M)\}$$

이제 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 위의 group structure에 대해 알아보자.

Proposition 10. $\mathrm{Ham}(M,\omega)$은 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$의 normal subgroup이다.

이 증명은 좋은 미분기하학 연습문제이다.

Proof. 먼저 $\varphi_t = \mathrm{Fl}_t^{X_F}$, $\psi_t = \mathrm{Fl}_t^{X_G}$라고 하자. 우리가 원하는 것을 보이려면 $\varphi_t \circ \psi_t$, φ_t^{-1}, 그리고 $f \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$에 대하여 $f^{-1} \circ \varphi_t \circ f$가 모두 Hamiltonian이라는 것을 보여야 한다. 이를 위해서는 각각을 정의하는 Hamiltonian function을 찾아줘야 하겠다. 모든 증명에 공통적으로 사용되는 공식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \psi_t) = \frac{d}{dt}\varphi_t \circ \psi_t + d\varphi_t \circ \frac{d}{dt}\psi_t$$

Composition $\varphi_t \circ \psi_t$는 다음과 같이 주어진 Hamiltonian으로 generate된다.

$$(F\#G)_t = F_t + G_t \circ \varphi_t^{-1}$$

이는 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 $G_t \circ \varphi_t^{-1}$에 대응되는 Hamiltonian vector field를 Y라 하면 Proposition 8.의 3.에 따라 $Y = (\varphi_t^{-1})^* X_G = d\varphi_t \circ X_G \circ \varphi_t^{-1}$이다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \psi_t) &= \left(\frac{d}{dt}\varphi_t\right) \circ \psi_t + d\varphi_t \circ \frac{d}{dt}\psi_t = (X_F \circ \varphi_t) \circ \psi_t + d\varphi_t \circ (X_G \circ \psi_t) \\ &= X_F \circ (\varphi_t \circ \psi_t) + d\varphi_t \circ (X_G \circ \varphi_t^{-1}) \circ (\varphi_t \circ \psi_t) = (X_F + d\varphi_t \circ X_G \circ \varphi_t^{-1})(\varphi_t \circ \psi_t)\end{aligned}$$

따라서 $\varphi_t \circ \psi_t$는 $X_F + d\varphi_t \circ X_G \circ \varphi_t^{-1}$의 integral flow이고, 위에서 알아본 바에 의하여 이는 $X_{F\#G}$이다.

Inverse φ_t^{-1}는 다음과 같은 Hamiltonian으로 generate된다.

$$K_t = -F_t \circ \varphi_t$$

위에서와 마찬가지로, $X_K = -\varphi_t^* X_F = -(d\varphi_t)^{-1} X_F \circ \varphi_t$라는 것을 알 수 있다. 이제 φ_t^{-1}의 미분을 살펴보자. $\varphi_t \circ \varphi_t^{-1} = \mathrm{Id}$이고 Id는 t에 대해 상수이므로 다음이 성립한다.

$$0 = \frac{d}{dt}\mathrm{Id} = \frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \varphi_t^{-1}) = \frac{d}{dt}\varphi_t \circ \varphi_t^{-1} + d\varphi_t \circ \frac{d}{dt}\varphi_t^{-1} = X_F \circ \varphi_t \circ \varphi_t^{-1} + d\varphi_t \circ \frac{d}{dt}\varphi_t^{-1}$$

우변에 φ_t^{-1}의 미분만 남기면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^{-1} = -\left((d\varphi_t)^{-1} X_F \circ \varphi_t\right) \circ \varphi_t^{-1} = X_K \circ \varphi_t^{-1}$$

따라서 원하는 결과를 얻었다.

마지막으로 $f^{-1} \circ \varphi_t \circ f$는 $F_t \circ f$로 generate된다. $F_t \circ f = H$라 하면, $X_H = f^* X_F = (df)^{-1} X_F \circ f$이다. 지금까지와 마찬가지로 $f^{-1} \circ \varphi_t \circ f$를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f^{-1} \circ \varphi_t \circ f) &= (df)^{-1} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_t \circ f) = (df)^{-1}(X_F \circ \varphi_t) \circ f \\ &= (df)^{-1}(X_F \circ f)(f^{-1} \circ \varphi_t \circ f) = X_H(f^{-1} \circ \varphi_t \circ f)\end{aligned}$$

따라서 원하는 것이 모두 증명되었다. □

6 예고

다음 글에서는 symplectic manifold의 특별한 submanifold들에 대해서 알아볼 것이다. Symplectic vector space의 Lagrangian subspace나 isotropic subspace들이 중요한 역할을 한 것과 같이, symplectic manifold에서도 이에 대응되는 개념들이 존재한다. 또한 submanifold에서의 isotopy를 확장하는 방법인 Moser trick에 대해서도 알아보고, 이를 통해 Darboux의 정리를 증명해보려 한다.