Day 1. Hamiltonian Mechanics

JJM Math

February 17, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이 글에서는 symplectic manifold의 motivation이 되는 Hamiltonian mechanics를 소개한다. Hamiltonian, 그리고 그와 관련된 개념들이 어떤 맥락에서 어떻게 정의되는지, 그리고 $\mathbb{R}^{2n}$에서 symplectic structure를 이용하여 Hamiltonian mechanics를 어떻게 formulate할 수 있는 지에 대해 알아보자.

1 Lagrangian Mechanics

Remark 1. 필자는 분명 고전역학을 공부해본 적은 있으나 깊게 공부해본 적은 없다. 따라서 이 절의 물리학 관련 내용에는 틀린 서술이 있을 수도 있다. 독자 여러분들의 양해 및 피드백을 부탁드린다.

고전역학의 가장 기초적인 개념 중 하나는, 주어진 입자를 공간 $\mathbb{R}^n$ 안의 점으로 보고, 시간에 따라 그 입자가 그리는 경로(trajectory)를 $\mathbb{R}^n$ 안의 (smooth) curve로 보는 것이다. 이 trajectory를 $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$이라 할 수 있겠다. ($I$는 적당한 closed interval이다.) 그러나 이 입자는 아무 경로나 따를 수는 없다. 주어진 공간의 '역학'은 이 입자가 따를 수 있는 경로를 정의하게 된다. 이를 보통 **equation of motion**이라고 한다. 예컨대, 뉴턴의 제 2법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F = m\ddot{x} \tag{1}$$

여기서 F는 시간 t, 위치 x, 속도 $\dot{x}$, 가속도 $\ddot{x}$ 등을 변수로 가지는 벡터장이고, 보통 **force**라고 부른다. 만약 $F = F(x)$라면, (1)은 2nd order ODE라 생각할 수 있고, F가 적당히 좋은 조건을 만족한다면 초기조건 $x(0), \dot{x}(0)$을 통해 유일한 해가 결정된다. 편의를 위해 $F = F(x)$ 내지는 $F = F(t, x)$인 경우만을 고려하도록 하자. 고전역학 수업의 어렴풋한 기억에 따르면 이런 경우를 보존력(conservative force)이라 부르는 것 같다.

적당한 공간과 equation of motion이 주어졌다면 이것을 **system**이라고 부르기로 하자. 뉴턴 역학은 주어진 system에 대해 많은 것을 설명할 수 있는 좋은 formulation이지만, 상황이 복잡해질수록 계산이 복잡해진다는 단점이 있다. (사실 고작 이런 이유 때문인지는 잘 모르겠다. 고전역학에 대한 조예가 깊은 독자 분들이 라그랑주 역학을 도입해야 하는 더 좋은 motivation을 알려준다면 매우 감사할 것이다.) 뭐 어쨌든 그런 연유로 물리학자들은 **Lagrangian**이라는 것을 도입하기 시작했다. 가장 단순한 경우, Lagrangian은 다음과 같이 정의된다.

$$L(t, x, v) = \frac{|v|^2}{2} - V(t, x) = K - V \tag{2}$$

여기서 K는 흔히 말하는 kinetic energy이고, $V(t, x)$는 potential energy이다. 뉴턴 역학의 맥락에서 V는 force F의 적분으로 주어지게 된다. $v = \dot{x}$는 속도이고, 그 때문에 물리학자들은 $L(t, x, \dot{x})$라는, 수학자들이 보면 기절초풍할 표기를 사용하기도 한다. 그러려니 하도록 하자. 뉴턴 역학에서 라그랑주 역학으로 넘어올 때는 위와 같은 Lagrangian을 사용하는 것이 일반적이나, 더 일반적인 함수를 사용하는 것 물론 역시 가능하다. L은 위치와 속도를 input으로 받는 함수이고, 따라서 다음과 같은 함수라고 생각할 수 있겠다.

$$L : \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

서로 다른 L의 선택은 다른 종류의 라그랑주 역학을 유도하게 될 것이다.

공간 상의 두 점 x_0, x_1을 고정하고, 이 둘을 이어주는 curve $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$을 생각하자. 이런 curve들은 $x(0) = x_0, x(1) = x_1$을 만족시켜야 할 것이다. 이러한 curve x에 대하여 **action**을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{3}$$

Curve x가 **minimal**이라는 것은 $\mathcal{A}(x)$가 local minimum이라는 것이다. 라그랑주 역학의 철학은, 어떤 점이 x_0부터 x_1까지 이동할 때는 minimal path를 따라 움직인다는 것이다.

Theorem 2 (Euler-Lagrange Equation)**.** Minimal path x는 다음의 방정식을 만족한다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{4}$$

Proof. **Calculus of variation**(physicists' form)을 사용하자. $\xi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$을 variation이라 하자. 즉, $\xi(0) = 0 = \xi(1)$이다. 우리가 원하는 것은 $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(x + \varepsilon\xi)$ for any ξ이고, 이는 ε으로

$\mathcal{A}(x+\varepsilon\xi)$를 미분했을 때 $\varepsilon = 0$이 극소값이라는 것과 동치이다. 이는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}(x+\varepsilon\xi)\bigg|_0 \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_0 L(t, x+\varepsilon\xi, \dot{x}+\varepsilon\dot{\xi})dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j}\xi_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_j}\dot{\xi}_j\right) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j}\right)\xi_j dt
\end{aligned}$$

마지막 등식은 부분적분과 $\xi(0) = 0 = \xi(1)$로부터 유도된다. 이 식이 모든 ξ에 대해 성립해야 하므로, (4)를 얻는다. $\square$

만약 L을 (2)로 잡는다면, Euler-Lagrange equation으로부터 뉴턴의 제2법칙이 유도된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 라그랑주 역학은 뉴턴 역학의 다른 표현이 된다.

2 Legendre Transformation and Hamiltonian

물리학자들은 이에 만족하지 못하고 또다른 formulation을 만들기 시작하는데, Hamiltonian mechanics가 바로 그것이다. 먼저 Euler-Lagrange equation을 변형하기 위한 또다른 변수를 도입하자.

$$y_j = \frac{\partial L}{\partial v_j},\ \dot{y}_j = \frac{\partial L}{\partial x_j}$$

만약 L이 (2)였다면, $y_k = m\dot{x}_k$가 될 것이다. 즉 y_k는 *momentum coordinate*라고 할 수 있겠다. 이 맥락에서 y_k를 generalized momentum이라고 불렀던 것 같기도 하다.

주어진 Lagrangian이 **Legendre condition**을 만족한다는 것은 다음과 같다.

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k}\right) \neq 0. \tag{5}$$

만약 (5)이 만족된다면, implicit function을 사용해 $v_j = v_j(t,x,y)$로 표현할 수 있겠다. 이를 이용하여 **Hamiltonian**을 정의하자. 여기서 중요한 부분은, 더이상 v를 variable로 간주하지 않고, H를 t,x,y에 대한 함수로 간주한다는 것이다.

$$H = H(t,x,y) = \sum_{j=1}^n y_j v_j - L \tag{6}$$

이와 같은 변환을 **Legendre transformation**이라 한다. 특히, L이 (2)였다면 $H = K + V$임을 확인할 수 있다. 즉, H는 일종의 *total energy*라고 간주할 수 있다. 위의 식들을 이용하면 다음을 쉽게 증명할 수 있다.

Theorem 3 (Hamilton's Equation)**.** x가 Euler-Lagrange equation을 만족한다는 것은, 위와 같이 정의한 H와 y가 다음 방정식을 만족한다는 것과 동치이다.

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j},\ \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{7}$$

Hamiltonian mechanics에서는 주어진 입자 x의 움직임을 서술하기 위해 curve x만을 보는 것이 아니고, $v = \dot{x}$를 통해 정의된 curve y까지 도입하게 된다. 그를 통해 변수는 $2n$개로 2배 늘어나지만, 대신 미분방정식의 order는 1로 줄어들게 된다.

Lagrangian이 $L : \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이었던 것과 같이, Hamiltonian은 $H : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$로 간주할 수 있다. $\mathbb{R}^n$에서는 $T\mathbb{R}^n$이나 $T^*\mathbb{R}^n$이나 모두 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$으로 간주할 수 있기 때문에 차이가 없어 보이지만, 곧 (아마도 다음 또는 다다음 글에서) 임의의 manifold M에 대해 T^*M 위에는 항상 자연스러운 symplectic structure가 존재한다는 것을 알게 될 것이다. 물리학자들은 T^*M을 *phase space*라고 부르곤 한다. Lagrangian과 마찬가지로, Hamiltonian 역시 어떠한 함수로도 주어질 수 있고, 서로 다른 H는 서로 다른 mechanics를 정의하게 될 것이다.

Example 4 (Harmonic Oscillator)**.** 단순한 예시를 지금까지 설명한 3가지 방법으로 다뤄보도록 하자. Harmonic oscillator란 $F(x) = -kx$ $(k > 0)$와 같은 꼴로 주어진 상황을 의미한다. 이는 예컨대 용수철에 메달린 물체의 운동을 서술할 때 사용된다. (Hooke's law) 먼저 Newton의 방법으로 이를 분석해보자. Newton의 제 2법칙에 따라 우리는 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$m\ddot{x}_j = -kx_j$$

이 방정식의 general solution은 $x_j(t) = C_1 \cos(\sqrt{k/mt}) + C_2 \sin(\sqrt{k/mt})$가 될 것이고, x의 초기 조건에 따라 유일하게 해가 결정될 것이다.

$F(x)$와 연관된 potential energy는 다음과 같이 주어진다.

$$V(x) = \frac{k|x|^2}{2}.$$

따라서 이 상황에서는 다음과 같은 Lagrangian을 정의할 수 있다.

$$L(x, v) = \frac{m|v|^2}{2} - \frac{k|x|^2}{2}.$$

이를 Euler-Lagrange equation에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{d}{dt}(mv_j) = m\ddot{x}_j = -kx_j$$

이는 뉴턴 역학에서 얻은 방정식과 동일하다.

마지막으로 Hamiltonian은 다음과 같이 주어진다.

$$H(x,y) = \frac{|y|^2}{2m} + \frac{k|x|^2}{2}.$$

이를 Hamilton's equation에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j} = \frac{y_j}{m},\ \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -kx_j$$

이 둘을 연립하면 $m\ddot{x}_j = -kx_j$를 얻을 수 있고, 이는 위에서 얻은 두 방정식과 동일하다.

3 Symplectic Action, Hamiltonian Vector Fields

앞서 언급하였듯, Hamiltonian formalism에서 다루는 curve는 $x = x(t)$가 아닌, $z = z(t) = (x(t), y(t))$이다. 그렇다면 Lagrangian formalism에서 했던 것과 비슷하게 어떠한 action functional이 존재하여 우리의 trajectory z가 그 action functional의 minimal path가 되도록 할 수 있지 않을까..?라는 기대를 품게 된다. 이 기대감을 충족시키기 위해 우리는 **symplectic action**을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{A}_H(z) = \int_0^1 \left(\langle y, \dot{x}\rangle - H(t,x,y)\right) dt \tag{8}$$

이는 **symplectic action form** $\lambda_H = \sum y_j dx_j - H dt$를 curve z를 따라 적분한 것이라 생각할 수 있겠다.

Proposition 5. $z : [0,1] \to \mathbb{R}^{2n}$이 $\mathcal{A}_H$의 critical path라는 것은 z가 Hamilton's equation의 solution이라는 것과 동치이다.

Proof. z의 variation $z_s = (x_s, y_s)$를 생각하자. 즉, $z_s(t) = z(s,t)$는 path 사이의 homotopy이고, $z_0 = z$이다. 이를 이용해 calculus of variation을 사용해보자. 편의상 $\dot{x} = \partial x/\partial t$, $x' = \partial x/\partial s$와 같은 표기를 사용하자. Euler-Lagrange equation을 유도했던 것과 같은 방식으로 다음과 같이 식을

유도해낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{A}_H(z)\bigg|_{s=0} \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_0 \left(\langle y_s(t), \dot{x}_s(t)\rangle - H(t, x_s(t), y_s(t))\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\langle y', \dot{x}\rangle + \langle y, \dot{x}'\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, x'\right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial y}, y'\right\rangle\right) dt \\
&= \int_0^1 \left\langle y', \dot{x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle x', \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle dt
\end{aligned}$$

마찬가지로, 마지막 등식은 부분적분과 $x_s(0) = x_0, x_s(1) = x_1$을 통해 얻은 것이다. 모든 variation z에 대해 이것이 성립해야 한다는 점으로부터 Hamilton's equation을 얻을 수 있다. $\square$

Hamilton's equation을 보다 간략한 형태로 쓰기 위해 다음과 같은 $(2n \times 2n)$-matrix를 정의하자.

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

이를 이용하면 우리의 Hamilton's equation은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\dot{z} = -J_0 \nabla H(z)$$

여기서 ∇H는 H의 gradient이다. 이렇게 정의된 vector field $X_H = -J_0\nabla H$를 **Hamiltonian vector field**라고 부른다.

Vector field X가 있으면, 그것의 integral flow 역시 존재한다. X의 integral flow Fl_X^t는 다음 미분방정식의 해로 주어진다.

$$\frac{d\mathrm{Fl}_X^t}{dt} = X,\ \mathrm{Fl}_X^0(x_0) = x_0$$

즉, $\mathrm{Fl}_X^-(x_0)$은 X를 따라 시간 t만큼 x_0을 흘려보내는 것이고, $\mathrm{Fl}_X^t(-) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$으로 본다면 이는 diffeomorphism이다. 만약 $X = X_H$인 경우 $\mathrm{Fl}_{X_H}^t$를 **Hamiltonian flow**라고 부른다. 혼동의 여지가 없다면 우리는 편의상 $\mathrm{Fl}_{X_H}^t = \varphi^t$로 쓰기도 한다. 즉, $\varphi^t(z_0)$은 초기조건 $z_0 = (x_0, y_0)$에 대한 Hamilton's equation의 solution의 trajectory이다.

이 시점에서 유명한 '에너지 보존 법칙'를 확인해보자. 에너지가 보존된다는 것은 주어진 system이 시간에 따라 변화하더라도 그 system의 total energy는 변하지 않는다는 뜻이다. 우리는 H가 일종의 total energy로 이해될 수 있음을 보았고, system의 변화는 Hamilton's equation의 solution curve로 주어짐을 확인한 바 있다. 따라서 에너지 보존 법칙은 다음과 같이 서술될 수 있다.

Theorem 6 (Energy Conservation Law)**.** $H_t = H$, 즉 H가 time-independent라고 하자. z가 H로 주어진 Hamilton's equation의 해라면, H는 z의 trajectory 위에서 constant이다.

Proof.

$$\frac{dH(z(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0.$$

여기서 $\partial H/\partial x$는 $(\partial H/\partial x_1, \cdots, \partial H/\partial x_n)$을 간략히 쓴 것이고, 곱셈은 내적이다. □

4 Symplectomorphisms

지금까지의 이야기를 다시 생각해보자. 우리의 1차적인 목적은 mechanics를 서술하는 것이고, 그 중에서도 Hamiltonian mechanics를 서술하는 것이다. 즉, 어떤 물리적인 system이 주어졌을 때 이 system이 시간에 따라 어떻게 변화하는지를 보고 싶다는 것이다. 이를 위해 필요한 것은 다음과 같다.

- 초기조건 $z_0 = (x_0, y_0)$.
- Hamiltonian $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.
- *Equation of Motion* $\dot{z} = X_H(z) = -J_0 \nabla H(z)$.

초기조건은 그냥 점이고, Hamiltonian은 (지금 당장은) 그냥 smooth function이다. 우리가 아직 주목하지 않은 것은 equation of motion이 주어지는 방식이다. ∇H는 단순히 H의 미분으로부터 튀어나오는 것이고, equation of motion을 정의하는 데에 핵심적인 역할을 하는 것은 matrix J_0이다. 즉, 우리는 J_0이라는 *additional structure*가 주어진 $\mathbb{R}^{2n}$에 대해 생각하고 있는 것이다. J_0는 ∇H에 act하고 있고, 다시 말해 J_0은 $\mathbb{R}^{2n}$이 아닌, 함수들의 $p \in \mathbb{R}^{2n}$에서의 derivative들의 공간 $T_p\mathbb{R}^n$에 act하고 있다고 간주하는 것이 적절하겠다. 수학에서 새로운 structure가 나온다면 그 structure를 보존하는 map들에 대해 먼저 알아보는 것은 자연스러운 수순이다. $\psi : (\mathbb{R}^{2n}, J_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, J_0)$이 모든 structure를 보존하려면 우선 ψ는 diffeomorphism이어야 할 것이고, 무엇보다도 J_0를 보존해야 할 것이다. 이는 다음과 같은 방식으로 표현될 수 있다.

$$d\psi(p)^t J_0 d\psi(p) = J_0 \tag{9}$$

이를 만족시키는 diffeomorphism ψ를 **symplectomorphism**이라 하고, 물리학자들은 이를 **canonical transformation**이라고 부른다. 이 조건이 어떻게 우리의 Hamiltonian mechanics의 '보존'으로 이어질 수 있는지 확인해보자.

Proposition 7. ψ가 symplectomorphism이라 하자. 만약 z가 $H \circ \psi$로 주어지는 Hamilton's equation의 solution이라면, $\psi \circ z$는 H로 주어지는 Hamilton's equation의 solution이다.

Proof. 먼저 z가 만족시키는 방정식에 대해 알아보자.

$$\nabla(H \circ \psi) = \left(\frac{\partial (H \circ \psi)}{\partial x_j}(p) \right) = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_k}(\psi(p)) \right) = d\psi(p)^t \nabla H(\psi(p))$$

이므로, z가 만족시켜야 하는 방정식 $\dot{z} = X_{H \circ \psi}(z)$는 다음과 같다.

$$\dot{z} = -J_0 d\psi(p)^t \nabla H(z)$$

이제 $z' = \psi \circ z$라고 하면, 위와 비슷하게 $\dot{z}' = d\psi(p)\dot{z}$임을 확인할 수 있다. 위의 식의 양변에 $d\psi(p)$를 곱한 뒤 ψ가 symplectomorphism임을 이용하면 결과를 얻는다. □

즉, symplectomorphism은 $(\mathbb{R}^{2n}, J_0, H)$로 주어진 system을 $(\mathbb{R}^{2n}, J_0, H \circ \psi)$에 대응시켜주며, 각 system의 trajectory끼리도 1대1 대응을 시켜주는 것이다. 이런 관점에서 symplectomorphism으로 일치하는 2개의 system은 사실상 동일한 system이라고 보아도 무방할 것이다.

쉬운 symplectomorphism으로는 Hamiltonian flow가 있다. $\mathbb{R}^{2n}$을 Hamiltonian flow를 이용해 시간 t만큼 변화시켰다고 해보자. 이는 분명 $\mathbb{R}^{2n}$을 변화시킨 것이지만, 실상 어떤 일이 벌어졌는지를 생각해보면 H와 J_0에 의해 지배되고 있는 system의 시간을 t만큼 뒤로 돌린 것에 불과하다. 시간이 흐른다고 해서 J_0이 변화하지는 않을 것이므로 우리는 φ^t가 symplectomorphism일 것이라 예상할 수 있다.

Proposition 8. $\varphi^t = \mathrm{Fl}^t_{X_H}$는 항상 symplectomorphism이다.

Proof. 이를 위해서는 $\Phi(t) = d\varphi^t(p)$를 계산해 보아야 한다. $\xi(t) = \Phi(t)\xi_0$이라면 이것은 정의상 다음과 같은 Hamiltonian equation의 linearization의 solution이 될 것이다.

$$\dot{\xi} = dX_H(p)\xi$$

왜 그런지를 살펴보도록 하자. z가 $\dot{z} = X(z)$라는 방정식의 solution이라고 하자. 이를 linearize 시킨다는 것은 (local chart 위에서) $z' = z + \xi$ 역시 이 방정식의 solution이 되도록 만들겠다는 뜻이다. $\xi = z' - z$의 양변을 미분하면,

$$\dot{\xi} = \dot{z}' - \dot{z} = X(z') - X(z) = dX(z)\xi$$

라는 식을 얻는다. 우리의 Φ는 실제 solution의 미분이기 때문에 이 setting을 더 잘 표현할 것이라 볼 수 있겠다.

$\Phi(0) = \mathrm{Id}$라고 두자. 먼저 $\xi(t) = \Phi(t)\xi_0$을 미분해서 $\dot{\xi}(t) = \dot{\Phi}(t)\xi_0$를 얻을 수 있다. $J_0 X_H = \nabla H$의 양변을 한번 더 미분하면 $J_0 dX_H = \mathrm{Hess} H$가 되고, 이를 처음의 방정식에 넣으면 다음을

얻는다.

$$\dot{\Phi}(t) = -J_0 \mathrm{Hess} H \Phi(t)$$

여기서 Hess$H$는 H의 Hessian이고, symmetric이다. $\Phi(0) = \mathrm{Id}$이므로 $\Phi(0)^t J_0 \Phi(0) = J_0$은 자명하다. 이제 $\Phi(t)^t J_0 \Phi(0)$의 미분을 계산해보면,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi^t J_0 \Phi &= \dot{\Phi}^t J_0 \Phi + \Phi^t J_0 \dot{\Phi} \\
&= -(J_0 \mathrm{Hess} H \Phi)^t J_0 \Phi + \Phi^t J_0(-J_0 \mathrm{Hess} H \Phi) \\
&= \Phi^t \mathrm{Hess} H (J_0)^2 \Phi - \Phi^t (J_0)^2 \mathrm{Hess} H \Phi = 0
\end{aligned}$$

따라서 φ^t는 symplectomorphism이다. □

Symplectomorphism의 local version은 *linear symplectic map*이 될 것이다. 어떤 matrix A가 **symplectic**이라는 것은, (9)이 만족된다는 것과 같다.

$$A^t J_0 A = J_0 \tag{10}$$

Symplectic matrix들이 group을 이룬다는 것은 쉽게 확인할 수 있다. 이는 특별히 Lie group을 이루게 되는데, 이를 **symplectic group**이라고 부르고 $Sp(2n)$이라 표기한다.

$$Sp(2n) = \left\{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : A^t J_0 A = J_0\right\}$$

이 group은 우리가 local symplectic geometry를 하는 데에 있어 중요하게 사용될 것이다.

Lemma 9. $Sp(2n)$의 Lie algebra는 다음과 같다.

$$\mathfrak{sp}(2n) = \left\{X \in \mathfrak{gl}(2n) : J_0 X^t + X J_0 = 0\right\}$$

Proof. Lie algebra의 원소를 구하기 위해서는 $Sp(2n)$ 안의 path A such that $A(0) = \mathrm{Id}$를 잡고, 이들이 만족해야 하는 식을 미분하면 된다. 이 경우에는 $A^t J_0 A = J_0$이 될 것이다.

$$0 = \frac{d}{dt} J_0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 A(t)^t J_0 A(t) = \dot{A}^t J_0 + J_0 \dot{A}$$

이 조건은 $J_0 A$가 symmetric이라는 것과도 같은데, $(J_0 A)^t = A^t(-J_0)$이기 때문이다. □

5 예고

다음 글에서는 symplectic linear algebra를 다룰 것이다. Symplectic linear algebra란 symplectic structure가 주어진 vector space에 대해 알아보는 것이고, 이것은 symplectic manifold의 local model이 된다. 또한 local하게 정의할 수 있는 다양한 개념들은 symplectic manifold 위로 이식하는 것이 가능하므로, symplecic linear algebra는 이후 공부할 symplectic manifold를 다루는 데에 기초가 된다고 볼 수 있겠다.