# Day 6. Symplectic Manifolds

JJM Math

March 3, 2021

* 이 글의 거의 모든 내용은 Dusa McDuff와 Dietmar Salamon의 책 [Introduction to Symplectic Topology]의 요약이다.

이번 글에서는 vector bundle 위에 symplectic 구조와 complex 구조를 주는 법에 대해 알아본다. 또한 oriented surface 위에서 이들을 up to isomorphism 분류해주는 불변량인 first Chern class에 대해서도 알아본다. 이 글의 내용을 이해하기 위해서는 smooth manifold와 그 위의 vector bundle에 대한 기초적인 지식이 필요할 것이다.

## 1 Symplectic Vector Bundle

지난 글까지는 vector space 위의 symplectic structure에 대해서 공부했다. Vector space의 inner product를 vector bundle 위로 올려 Riemannian vector bundle을 다룰 수 있었듯이, symplectic structure를 vector bundle 위로 올려 symplectic vector bundle에 대해서도 이야기할 수 있을 것이다. Vector bundle을 vector space의 smooth family로 이해한다면, 이러한 추가적인 structure는 각각의 vector space 위의 구조들의 smooth family 정도라고 이해할 수 있을 것이다.

Smooth manifold $M$ 위의 vector bundle $E$가 주어졌다고 하자. $E$ 위의 **symlectic form** $\omega$은 $E^* \wedge E^*$의 nondegenerate smooth section이다. 이는 다시 말해 각 $q \in M$에 대하여 fiber $E_q$ 위에 symplectic form $\omega_q$가 주어져 있고, 이것이 $q$에 대해 smooth하다는 뜻이다.

$$\omega_q : E_q \times E_q \to \mathbb{R}.$$

$\omega$이 symplectic form인 경우 $(E, \omega)$을 **symplectic vector bundle**, 또는 간단히 **symplectic bundle**이라고 부른다. ($\omega$은 $E$ 위에 추가로 주어진 구조이기 때문에 정의에 포함된다는 점을 잊어선 안된다. 즉, 같은 vector bundle $E$ 위에 여러 개의 symplectic structure가 주어질 수 있다.) Symplectic form은 짝수 차원에서만 존재하므로 $E$가 symplectic bundle이 되려면 $E$의 rank는 짝수여야 할 것이다. Symplectic bundle 사이의 isomorphism은 symplectic form을 보존하는 vector bundle isomorphism으로 정의하는 것이 자연스러울 것이다.

**Example 1.** **Day 2.**에서 우리는 임의의 vector space $E$에 대하여 $E \oplus E^*$ 위에 항상 canonical한 symplectic structure가 있음을 보았다. 이는 vector bundle의 경우에도 마찬가지로 적용된다. 임의의 vector bundle $E \to M$가 주어졌을 때, $E \oplus E^*$ 위에 다음과 같은 2-form을 정의하자.

$$\Omega_{can}(v_0 \oplus v_1^*, w_0 \oplus w_1^*) = w_1^*(v_0) - v_1^*(w_0)$$

그렇다면 $\Omega_{can}$은 symplectic form이 된다. 특별히, $TT^*M = TM \oplus T^*M$임을 떠올려본다면 이는 cotangent bundle의 tangent bundle 위에는 항상 canonical symplectic structure가 존재한다는 뜻이 된다.

Symplectic vector space와 마찬가지로 compatible complex structure 역시 생각할 수 있겠다. Vector bundle $E$ 위의 **complex structure**란 bundle map $J : E \to E$ 중 $J^2 = -\mathrm{Id}$인 것을 의미한다. 이 경우 $(E, J)$를 **complex vector bundle**, 또는 간단히 **complex bundle**이라 부른다. $E$가 symplectic인 경우, $J$가 $\omega$과 **compatible**이라는 것은 다음과 같이 정의한 $g_J$가 metric이라는 것을 의미한다.

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw)$$

마찬가지로 $(\omega, J, g)$를 **compatible triple**이라 부른다. 이 경우 $(E, \omega, J, g)$를 **Hermitian vector bundle**이라고 부른다. 또한, 이전과 비슷하게 $J$가 $\omega$-**tame**이라는 것도 정의할 수 있겠다. 이러한 정의들은 vector space에서 했던 정의와 사실상 동일하다.

이제 symplectic bundle의 classification에 대해 알아보자. Rank $2n$의 vector bundle $E \to M$은 $GL_{2n}(\mathbb{R})$-bundle로 간주할 수 있겠다. Metric을 정의하는 것은 structure group $GL_{2n}(\mathbb{R})$을 $O(2n)$으로 reduce하는 것과 동치였고, $GL_{2n}(\mathbb{R})$은 $O(2n)$을 deformation retraction으로 가지기 때문에 이는 항상 가능했다. 마찬가지로 symplectic structure를 정의하는 것은 $GL_{2n}(\mathbb{R})$을 $Sp(2n)$으로 reduce하는 것과 같고, 다시 말해 $M$ 위의 principal $Sp(2n)$-bundle을 생각하는 것과 같다. Classifying space의 관점으로 생각해 본다면, 다음과 같은 1대1 대응 관계가 있는 것이다.

$$[M, BSp(2n)] \simeq [\text{Symplectic vector bundles over } M \text{ of rank } 2n]$$

좌변의 괄호는 homotopy class를, 우변의 괄호는 isomorphism class를 의미한다. 그런데 $Sp(2n)$은 $U(n)$을 deformation retraction으로 가진다는 것을 본 바 있고, 따라서 $BSp(2n)$은 $BU(n)$과 homotopy equivalent하다. 따라서 $E$ 위에 symplectic structure를 준다는 것은 $E$ 위에 complex structure를 준다는 것과 같은 말이 된다. 이 결과는 다음과 같이 요약할 수 있겠다.

**Theorem 2.** $j = 1, 2$에 대하여 $(E_j, \omega_j)$가 symplectic bundle over $M$이고, $J_j$가 $\omega_j$-compatible complex structure라고 하자. 그러면 $(E_j, \omega_j)$가 symplectic bundle로서 isomorphic하다는 것은 $(E_j, J_j)$가 complex bundle로서 isomorphic하다는 것과 동치이다.

물론 위에서 말한 classifying space를 통한 증명은 elegant하지만, 실제로 무슨 일이 벌어지는지는 알 수 없다는 단점이 있다. (수학을 공부하다 보면 이와 비슷한 일들을 자주 겪게 된다. 대부분의 경우, 증명이 elegant한 정도와 증명을 마음으로 이해할 수 있는 정도는 반비례한다.) 이에 대한 보다 '구체적인' 증명에 대해서 알아보자. 먼저 **Day 5.**에서 알아본 $\Omega(V), \mathcal{J}(V), \mathrm{Sym}^+(V)$ 사이의 관계를 vector bundle 위로 확장시킬 수 있다.

**Proposition 3.** $E \to M$을 rank $2n$의 vector bundle이라 하자.

1. $\omega$이 $E$ 위의 symplectic form이라 하자. $\omega$-compatible complex structure들의 공간 $\mathcal{J}(E, \omega)$은 nonempty contractible이다.

2. $J$가 $E$ 위의 complex structure라 하자. $J$-compatible symplectic structure들의 공간은 nonempty contractible이다.

3. $E$ 위의 metric $g$가 주어졌다고 하자. **Day 5.**에서와 같이 $\omega \mapsto J_{g,\omega}$을 정의하면, 이는 $E$ 위의 symplectic form들의 공간과 $\mathcal{J}(E)$ 사이의 homotopy equivalence가 된다.

이 정리의 증명은 vector space의 경우와 사실상 동일하다. 중요하게 쓰이는 사실은 $E$ 위의 metric들의 공간 $\mathrm{Sym}^+(E)$가 nonempty convex라는 것이다.

*Proof.* 먼저 $\omega$이 주어졌다고 하자. **Day 5.**의 뒷부분에서 얻은 결과에 따라 $J \mapsto g_J$는 $\mathcal{J}(E, \omega)$에서 $\mathrm{Sym}^+(E)$로 가는 homotopy equivalence라는 것을 알 수 있고, $\mathrm{Sym}^+(E)$는 nonempty convex이라는 것으로부터 결과를 얻는다.

이제 $J$가 주어졌다고 하면, 아무 metric $g$에 대해서 $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g + J^*g)$는 $J$와 compatible하다. 따라서 $J$-compatible metric $g$는 항상 존재하고, 이에 따라 $J$-compatible $\omega$ 역시 항상 존재한다. 그 외의 결과는 **Day 5.**의 Section 4에서 알아본 것과 동일한 방식으로 보일 수 있다. □

이제 Theorem 2.의 증명을 알아보자.

*proof of Theorem 2.* 먼저 $\Psi : (E_1, \omega_1) \to (E_2, \omega_2)$가 symplectomorphism이라 하자. 즉, $\Psi^*\omega_2 = \omega_1$이라는 것이다. 다음 식으로부터 $\Psi^*J_2$가 $\omega_1$-compatible이라는 것을 알 수 있다.

$$\omega_1(v, \Psi^*J_2 w) = \Psi^*\omega_2(v, \Psi^*J_2 w) = \omega_2(\Psi v, \Psi(\Psi^{-1}J_2\Psi)w) = \omega_2(\Psi v, J_2\Psi w)$$

$\mathcal{J}(E_1, \omega_1)$은 contractible이므로 $J_1$과 $\Psi^*J_2$를 이어주는 homotopy $J_t : [0,1] \to \mathcal{J}(E_1, \omega_1)$이 존재한다. (여기서 $J_0 = \Psi^*J_2$로 쓰고 있다.) 이로부터 complex bundle isomorphism $\Phi_t : (E_1, J_1) \to (E_1, J_t)$가 존재한다는 것을 보일 수 있다. 다시 말해 $\Phi_t^*J_t = J_1$이다. (이는 **Day 5.**의 Proposition 2.의 bundle 버젼이다.) 즉, 다음과 같은 map은 complex bundle isomorphism이 된다.

$$\Psi \circ \Phi_0 : (E_1, J_1) \to (E_2, J_2)$$

반대의 경우에도 마찬가지인데, 이 경우에는 구체적인 homotopy로 $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\Psi^*\omega_2$를 잡을 수 있겠다. $\square$

## 2 Unitary Trivializations

주어진 vector bundle $E$의 **trivialization**이란 $E$와 trivial vector bundle 사이의 isomorphism 이다. 만약 $E$ 위에 추가적인 구조가 있다면, 그 구조를 보존하는 trivialization을 생각하는 것이 좋을 것이다. 우리는 앞선 글들에서 standard symplectic vector space와 complex vector space를 생각한 바 있는데, 이는 각각 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$이었다. 당연히 모든 symplectic bundle이 trivializable한 것은 아니다. 만약 그랬다면, 우리는 symplectic linear algebra만 공부해도 충분했을 것이다. 그러나 symplectic vector bundle의 trivialization은 이후 생각보다 중요한 역할을 하게 된다.

**Remark 4.** 예를 들어 base manifold $M$ 안의 loop $x : S^1 \to M$을 생각해 보자. $M$이 symplectic 이라면, 즉 $TM$이 symplectic bundle이라면 $x^*TM$은 $S^1$ 위의 symplectic vector bundle일 것이다. 그런데 clutching construction을 생각해보면 $Sp(2n)$이 connected이므로 $x^*TM$은 항상 trivial bundle이 된다. 따라서 $x^*TM$은 별로 흥미롭지 않은 대상이라 생각할 수 있지만, $x^*TM$이 어떻게 $S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$과 identify되는지는 Floer theory에서 매우 중요한 역할을 한다. 이 경우 서로 다른 trivialization은 구체적으로 $[S^1, Sp(2n)] = \pi_1(Sp(2n)) \simeq \mathbb{Z}$과 identify될 수 있고, 이것은 **Day 3.**에서 알아본 Maslov index로 표현된다.

$(E, \omega)$이 trivial symplectic bundle이라 하자. 앞 절의 내용에 따라 이는 어떤 $\omega$-compatible $J$에 대해 $(E, J)$가 trivial complex bundle이라는 것과 동치이다. 따라서 우리는 $\omega$만 생각하는 대신, $\omega$-compatible $J$까지 고려해서 $E$를 Hermitian vector bundle로 간주한 뒤 더 좋은 trivialization을 만드는 것이 좋을 것이다.

$E$를 Hermitian bundle이라 하자. Bundle map $\Phi : M \times \mathbb{R}^{2n} \to E$가 **unitary trivialization** 이라는 것은 $\Phi^*J = J_0$, $\Psi^*\omega = \omega_0$, $\Psi^*g = g_0$임을 의미한다. 여기서 $g_0$은 standard inner product 이다. 만약 path $\gamma : [0,1] \to M$이 주어졌다면, $\gamma^*E$의 unitary trivialization을 생각할 수 있다. 이를 **unitary trivialization along a curve** $\gamma$라고 부른다.

우리가 관심있는 대상은 일단 간단한 공간 위에서의 unitary trivialization들이다.

**Lemma 5.** $(E, \omega, J, g)$가 $M$ 위의 Hermitian bundle이고, $\gamma : [0,1] \to M$가 주어졌다고 하자. 또한 양 끝점에서 unitary isomorphism $\Phi_0 : \mathbb{R}^{2n} \to E_{\gamma(0)}$, $\Phi^1 : \mathbb{R}^{2n} \to E_{\gamma(1)}$이 주어졌다고 하자. 그렇다면 다음과 같은 $\gamma^*E$의 unitary trivialization이 존재한다.

$$\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \gamma^*E, \ \Phi(0) = \Phi_0, \ \Phi(1) = \Phi_1.$$

위의 Lemma에서 $\Phi_0, \Phi_1$과 같은 map은 항상 존재하고, 따라서 이로부터 $\gamma^*E$는 항상 unitary trivialization을 가진다는 결론을 얻을 수 있겠다. 물론 어찌저찌 topology만 갖고 증명할 수도 있겠으나, 구체적인 증명을 알아보자.

*Proof.* Bundle map은 linear map의 family라 볼 수 있고, linear map은 basis를 갖고 정의하는 것이 여러모로 편하다. $E$의 section들 $s_j$들을 잘 잡아서, $(s_j)_p$가 각각 $E_p$의 unitary basis가 되도록 한다면, 이것이 우리가 원하는 trivialization을 정의해줄 것이다.

먼저 $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$에 대해 다음이 성립하는 $s_j(0) \in E_{\gamma(0)}$을 잡을 수 있다.

$$\Phi_0(\xi) = \sum \xi_j s_j(0)$$

여기서 $\xi_j$는 $\xi$의 $\mathbb{R}^{2n}$에서의 좌표이다. 만약 이 $s_j(0)$들을 작은 interval $[0, \varepsilon)$ 위에서 unitary basis $s_j(t) \in E_{\gamma(t)}$로 확장시킬 수 있다면 원하는 것을 보일 수 있다. 즉, 우리는 다음과 같은 $s_j$들을 만들어야 한다.

$$g(s_j, s_k) = \delta_{jk},\ \omega(s_j, s_{j+n}) = 1,\ \omega(s_j, s_k) = 0 \text{ if } k \neq j \pm n.$$

이를 만드는 과정은 어렵지 않은데, 먼저 Riemannian connection $\nabla$를 하나 잡은 뒤 $s_j(0)$들을 parallel transport시켜 $\tilde{s}_j$를 만든 뒤, Gram-Schmidt process (over $\mathbb{C}$)를 통해 원하는 basis를 잡으면 된다.

이와 같은 방식으로 $[0, \varepsilon)$ 위에서 trivialization을 잡을 수 있고, 이를 반복해서 trivialization을 $[0, 1]$까지 확장시킬 수 있다. 마지막으로 이를 $t = 1$일 때 $\Phi_1$과 같게 만들어야 한다. 주어진 $\Phi_0, \Phi_1$에 대하여 $\Psi : [0, 1] \to U(n)$이 $\Psi(t) = \mathrm{Id}$ for $0 \leq t < \varepsilon$, $\Psi(t) = \Phi_0(t)^{-1}\Psi_1(t)$ for $1 - \varepsilon < t \leq 1$을 만족시킨다고 하자. $U(n)$이 connected이므로 이러한 $\Psi$는 항상 존재한다. $\Phi(t) = \Phi_1(t)\Psi(t)$로 정의하면 원하는 $\Phi$를 얻는다. □

이제 곡면 위의 symplectic vector bundle에 대해서도 알아보자. 예컨대 $S^2$ 위의 symplectic vector bundle은 clutching construction에 의하여 $\pi_1(Sp(2n))$으로 분류될 것인데, 이는 $\mathbb{Z}$이므로 trivial하지 않은 symplectic bundle이 여러 개 존재하게 된다. 그러나 다음 정리는 별로 강하지 않은 조건 아래에서도 surface 위의 symplectic bundle이 항상 trivial해짐을 말해준다.

**Proposition 6.** $\Sigma$가 compact orientable하고 $\partial\Sigma \neq \emptyset$이라 하자. 그렇다면 Hermitian bundle $E \to \Sigma$는 항상 unitary trivialization을 가진다.

Surface의 classification에 따라, $\Sigma$는 genus $g$ surface에서 disc $l$개를 뺀 것이 될 것이다. 정리의 조건은 $l \geq 1$이라 쓸 수 있겠다.

*Proof.* 수 $k(\Sigma) = 2g(\Sigma) + l(\Sigma)$를 정의하자. $g(\Sigma)$는 $\Sigma$의 genus, $l(\Sigma)$는 boundary component의 개수를 의미한다. 증명은 $k = k(\Sigma)$에 대한 induction으로 진행될 것이다. 만약 $k = 1$이라면 $\Sigma$는

disc이고, 이는 앞선 정리의 parametrized version이다. 즉, 원점으로부터의 ray를 따라 trivialize하면 된다.

$m > 1$에 대하여 $k \leq m$인 경우까지 증명이 되었다고 가정하고, $k(\Sigma) = m + 1$이라 하자. 이 경우 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$로 decompose될 수 있는데, 여기서 $k(\Sigma_1) = m$이고 $\Sigma_2$는 pair of pants, 즉 disc with 2 holes와 diffeomorphic하게 잡을 수 있다. 더 구체적으로 말하자면 다음과 같다. Figure 1을 참조하라.

1. $k = 2g + l$이므로 $g(\Sigma_1) = g(\Sigma)$이고 $l(\Sigma_1) = l(\Sigma) - 1$인 경우, 또는 $g(\Sigma_1) = g(\Sigma) - 1$이고 $l(\Sigma_1) = l(\Sigma) + 1$인 경우를 생각하면 되겠다.

2. $l(\Sigma) \geq 2$라면 전자의 상황이 적용될 수 있다. Boundary component $l_1, l_2$를 고른 뒤, $l_1, l_2$를 둘러싸는 loop $l$을 생각하자. 이 때 $l$은 $l_1, l_2$에 disc를 붙였다면 contractible해지는 녀석으로 잡자. 이 $l$을 따라서 $\Sigma$를 잘라주면 원하는 $\Sigma_1$과 함께 boundary가 $l_1, l_2, l$인 pair of pants를 얻는다.

3. $l(\Sigma) = 1$이라면 후자를 적용하자. Boundary component $l$ 근처에 있는 genus를 찾자. 이 genus의 vertical disc 2개를 $l_1, l_2$라 하면, 이를 따라 $\Sigma$를 자를 수 있겠다. 잘라내면 원하는 $\Sigma_1$과 함께 $l, l_1, l_2$를 boundary로 가지는 pair of pants를 얻는다.

Induction hypothesis에 의해 $\Sigma_1$ 위에서의 trivialization이 존재한다. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = C$라고 하자. $\partial\Sigma_2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$라 하면, 전자의 경우 $C = C_1$, 후자의 경우 $C = C_1 \cup C_2$라 쓸 수 있겠다.

이후의 과정은 Figure 2에 간략하게 설명되어 있다. Figure 2의 마지막 그림과 같이 $C_1, C_2, C_3$를 생각하자. $C = C_1$인 경우, 이미 $C_1$ 위의 trivialization은 주어져 있으니 $C_2$ 위의 trivialization을 하나 고정하자. Lemma 5.에 의하여 $C_1, C_2$ 사이의 segment $S$를 따라 trivialization을 확장할 수 있고, 그 뒤 ray들을 따라 trivialization을 $\Sigma_2$ 전체로 확장할 수 있다. $C = C_1 \cup C_2$인 경우에는 위에서 $C_2$의 trivialization까지 고정된 경우와 같고, 다른 과정은 동일하게 이뤄질 수 있다. □

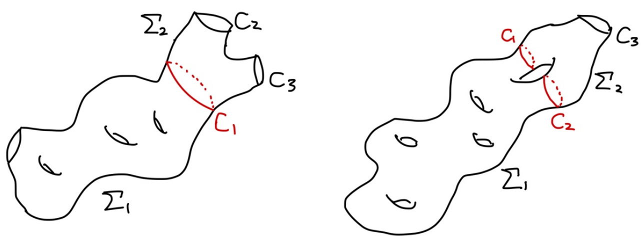


Figure 1: Decomposition of Surfaces

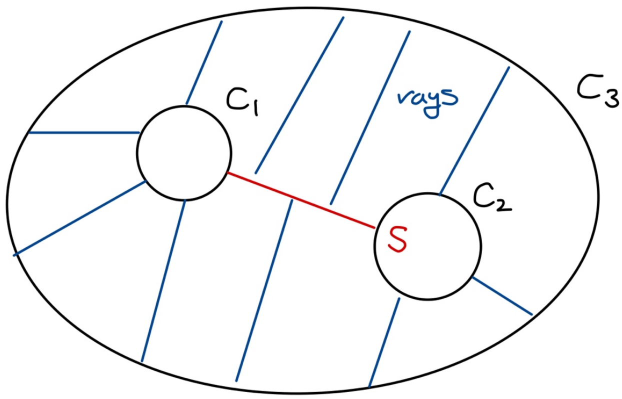


Figure 2: Pair of Pants

# 3 First Chern Class

구체적으로 주어진 symplectic bundle의 isomorphism class를 찾기 위한 불변량에 대해서 알아보자. 위에서 이는 complex bundle의 isomorphism class와 같다는 것을 본 바 있고, complex bundle을 classify할 수 있는 좋은 불변량으로는 Chern class가 있다. Classifying space를 통해 Chern class를 정의하는 방법은 Milnor, Stasheff의 [Characteristic Classes] 또는 Bott, Tu의 [Differential Forms in Algebraic Topology]의 Chapter 4.를 참조하도록 하자.

이 절에서는 first Chern class에 대해서만 알아보도록 하겠다. $\Sigma$를 closed oriented surface라 하고, $E \to \Sigma$를 symplectic bundle이라 하자. (Closed는 compact without boundary의 줄임말이다.) $E$의 **first Chern number**는 $E$에 integer $c_1(E)$를 대응시키는 functor이며, 다음의 4가지 성질로 결정된다.

1. (Naturality) $E, E'$ are isomorphic iff $\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(E')$ and $c_1(E) = c_1(E')$
2. (Functoriality) $c_1(\varphi^* E) = \deg \varphi \cdot c_1(E)$ for $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$.
3. (Additivity) $c_1(E \oplus E') = c_1(E) + c_1(E')$
4. (Normalization) $c_1(T\Sigma) = 2 - 2g(\Sigma)$

**Theorem 7.** 위의 4가지 성질을 만족하는 $c_1(E)$는 유일하게 잘 정의된다.

이에 대한 증명은 잠깐 미뤄두고, 이 성질들의 의미, 그리고 이들로부터 바로 도출될 수 있는 결과들을 몇 가지 알아보자. 먼저 $\Sigma$ 위의 trivial bundle $E$가 주어졌다고 해보자. 임의의 $\Sigma'$,

그리고 $\Sigma$와 rank가 같은 임의의 bundle $E' \to \Sigma'$에 대하여 constant map $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$를 생각하면, 정의상 $\varphi^* E'$는 $\Sigma$ 위의 trivial bundle이 될 것이다. (Pullback의 정의상 $\varphi^* E'$의 $p$에서의 fiber가 $\varphi(p)$ 위의 $E'$의 fiber와 같음을 생각하면 이는 거의 자명하다.) Constant map의 degree는 0이므로, (Funtoriality)에 따라 이는 곧 trivial bundle $E$에 대해서 $c_1(E) = 0$이라는 뜻이 된다. 또한 (Naturality)에 따라 $E$가 trivial하다는 것과 $c_1(E) = 0$이라는 것이 동치라는 것을 알 수 있다. 즉, $c_1(E)$는 symplectic trivialization의 존재의 obstruction으로 이해될 수 있다.

(Naturality)는 $c_1(E)$가 사실상 $E$의 isomorphism class를 결정해주는 역할을 한다는 것을 알려준다. $E, E' \to \Sigma$가 주어졌을 때, $c_1(E) = c_1(E')$이고 $\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(E') + k$라 하자. $\Sigma$ 위의 rank $k$ trivial bundle $\Sigma \times \mathbb{R}^k$를 $\mathbb{R}^k$라 쓰자. 그렇다면 (Additivity)에 의하여 $c_1(E \oplus \mathbb{R}^k) = c_1(E) + c_1(\mathbb{R}^k)$인데, 앞서 알아본 바에 의하여 $c_1(\mathbb{R}^k) = 0$이므로 $c_1(E \oplus \mathbb{R}^k) = c_1(E) = c_1(E')$이다. 이제 $E \oplus \mathbb{R}^k$와 $E'$은 같은 rank와 first Chern number를 갖고 있으므로 (Naturality)에 의해 서로 isomorphic하다. 즉, 같은 Chern number를 가진 bundle은 서로 $\mathbb{R}^k$만큼만 차이난다는 것이다.

마지막으로 (Normalization)에 대해 간단하게 짚고 넘어가자. 만약 (Normalization) 외의 3가지 조건을 만족하는 $c_1$이 정의되었다면, 그러한 $c_1$의 정수배는 모두 위의 3가지 조건을 만족하게 될 것이다. (Normalization)은 이 중 단 하나의 $c_1$만을 사용할 수 있도록 제한하는 역할을 한다. 왜 하필 저러한 convention을 쓰는지에 대해서는 다양한 이유를 생각해볼 수 있는데, 대표적으로는 $\mathrm{rank}(E) = 2$인 경우, 즉 $E \to \Sigma$가 complex *line* bundle인 경우 $c_1(E)$가 $E$의 *Euler number*와 일치하게 된다는 부분을 들 수 있겠다. 실제로 (Normalization)에서 등장하는 $2 - 2g$는 $\Sigma$의 Euler characteristic인데, 이는 $T\Sigma$의 Euler number이며 $\Sigma$의 매우 중요한 위상적 불변량이다.

Theorem 7.의 증명은 $c_1(E)$를 explicit하게 정의하는 방향으로 이뤄질 것이다. 보통 이런 방식의 증명을 택하지는 않지만, 우리의 경우 base manifold가 다루기 쉬운 closed oriented surface, 즉 genus $g$ surface이기 때문에 구체적으로 정의하는 것이 가능하다. Classifying space를 사용하는 것에 비해 이 방향이 가지는 장점이라면, 역시 구체적으로 어떤 일이 벌어지는지를 보다 잘 이해할 수 있다는 점을 들 수 있겠다. 이 construction은 왜 $c_1(E)$가 $E$의 trivialization의 obstruction인지를 잘 드러내주고, 실제로 obstruction class를 만드는 과정과 같다고 볼 수 있다.

먼저 $\Sigma$를 2개의 surface with boundary로 split하자. 즉, $\Sigma = \Sigma_1 \cup_C \Sigma_2$이고, $C$는 $S^1$들의 disjointed union이다. (아예 $C = S^1$으로 잡을 수도 있겠다.) 앞 절에서 $\Sigma_1, \Sigma_2$ 위의 symplectic bundle은 trivializable하다는 것을 알아보았기 때문에 $\Sigma$ 위의 symplectic bundle은 $C$에서의 정보로 정의될 수 있을 것이다. 이는 $S^n$ 위에서의 clutching construction과 굉장히 유사하다. $C$는 $\Sigma_1$의 boundary로서의 자연스러운 orientation이 존재하는데, 구체적으로는 다음과 같다. $\nu_p \in T_p\Sigma_1$을 $C$의 outward normal vector라고 하자. 그러면 $v \in T_pC$가 positively oriented라는 것을 $\{\nu_p, v\}$가 $T_p\Sigma_1$에서 positively oriented라는 것으로 정의하면 되겠다. (물론 반대의 정의도 있지만, 1개의 convention을 정하면 문제가 되지 않는다.)

이제 $\Phi_k : \Sigma_k \times \mathbb{R}^{2n} \to E$를 $E|_{\Sigma_k}$의 trivialization이라 하자. 이는 base manifold에서는 identity 여야 하므로 fiber들 사이의 map으로 결정된다. 그리고 이는 fiber로 제한했을 때는 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to$

$(E_p, \omega_p)$인 symplectomorphism이다. $\Sigma_1, \Sigma_2$는 각각 trivialize되어있으므로, 이들의 교집합인 $C$에서 이 trivialization들이 어떻게 행동하는지를 보면 될 것이다. 이 정보는 다음과 같은 **overlap map**으로 정의할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} \Psi : C &\to Sp(2n) \\ q &\mapsto \Phi_1(q)^{-1}\Phi_2(q) \end{aligned} \tag{1}$$

Vector bundle의 classification은 그 structure map의 homotopy class로 정의되므로, 우리가 원하는 것은 $\Psi$의 homotopy class이다. 그런데 우리는 **Day 3.**에서 $Sp(2n)$의 fundamental group을 표현하는 map인 $\rho : Sp(2n) \to S^1$을 정의한 바 있다. 이는 $Sp(2n)$의 subgroup인 $U(n)$에서의 complex determinant를 $Sp(2n)$으로 확장한 것이었다. 이제 first Chern number를 다음과 같이 정의하자.

$$c_1(E) = \deg(\rho \circ \Psi) = \sum_{j=1}^{l} \mu(\Psi \circ \gamma_j) \tag{2}$$

여기서 $\mu$는 Maslov index이고, $\gamma_j$는 $C$의 각각의 component를 loop로 parametrize한 것이다. (여기서 $\dot{\gamma}_j$가 positively oriented라는 조건을 줘야 잘 정의된다.) 만약 $C$가 1개의 component만 가지도록 했다면 $c_1(E) = \mu(\Psi \circ \gamma)$였을 것이다. 이제 이렇게 정의한 $c_1(E)$가 원하는 성질을 갖는다는 것을 보이자. 먼저 다음의 Lemma를 보이자.

**Lemma 8.** $\Sigma$가 compact connected oriented surface이고, $\partial\Sigma \neq \emptyset$이라 하자. $\Psi : \partial\Sigma \to Sp(2n)$이 $\Sigma$로 extend된다는 것은 $\deg(\rho \circ \Psi) = 0$이라는 것과 동치이다. 다르게 말하자면, $\Sigma$의 boundary에서의 trivialization이 $\Sigma$ 전체로 확장될 수 있다는 것은 $\deg(\rho \circ \Psi) = 0$이라는 것과 동치이다.

*Proof.* 만약 $\Psi$가 $\Sigma$로 extend된다면 $\rho \circ \Psi$ 역시 $\Sigma \to S^1$으로 extend될 것이다. 이는 $\deg(\rho \circ \Psi) = 0$이라는 것을 함의하는데, 이는 $\Sigma$의 cell structure를 생각해보면 $\Sigma$로의 확장을 $D^2$로의 확장으로 간주할 수 있기 때문이다. 따라서 $\deg(\rho \circ \Psi) = 0$이라 가정하고 $\Psi$의 확장이 존재한다는 것을 보이면 충분하겠다.

먼저 $\partial\Sigma = C_0 \cup C_1$이고, $C_0, C_1 \neq \emptyset$이라 가정하자. Proposition 6.과 같은 과정을 통해 $\Psi : C_0 \to Sp(2n)$이 주어졌다면 이것이 항상 $\Sigma$ 전체로 확장된다는 것을 보일 수 있다. (Cylinder와 pair of pants의 경우를 보이고, 나머지는 induction으로 해결하면 된다.)

이제 $\deg(\rho \circ \Psi) = 0$이라 하자. 방금 말한 내용에 따라서 $\Psi$는 적당한 embedded closed disc $D^2$에 대해 $\Sigma \setminus \mathrm{int}(D^2)$까지 확장될 수 있다. 이는 $\Psi : \partial D^2 \to Sp(2n)$이 $\Psi : \Sigma \setminus \mathrm{int}(D^2) \to Sp(2n)$으로 확장되는 것이라 생각할 수 있고, 처음 보인 내용에 따라 $\deg(\rho \circ \Psi|_{\partial D^2}) = 0$이다. 따라서 이는 contractible이고, $\Psi$를 $D^2$까지 마저 확장하는 것이 가능하다. □

*Proof of Theorem 7.* 우리는 (2)와 같이 정의한 $c_1$이 실제로 first Chern number라는 것을 보이려 한다. 먼저 $c_1$이 잘 정의되었다는 것을 보이자. 이를 위해서는 $c_1$이 trivialization의 선택과 splitting의 선택에 무관하다는 것을 보여야 한다.

만약 $\Phi_1'$이 $\Sigma_1$ 위의 다른 trivialization이었다고 하자. 그렇다면 이는 새로운 overlap map $\Psi' : C \to Sp(2n)$을 정의하게 될 것이다. 이제 다음과 같은 map을 생각하자.

$$\tilde{\Psi}(q) = \Psi(q)\Psi'(q)^{-1} = \Phi_1(q)\Phi_2(q)^{-1}\Phi_2(q)\Phi_1'(q)^{-1} = \Phi_1(q)\Phi_1'(q)^{-1}$$

여기서 $\tilde{\Psi}$는 $\partial\Sigma_1 \to Sp(2n)$으로 간주할 수 있고, 이는 $\Sigma_1$ 위의 map $\Phi_1(q)\Phi_1'(q)^{-1}$를 boundary로 제한시킨 것이므로 당연히 $\Sigma_1$ 전체로 확장된다. 이제 Lemma 8.에 의하여 $\deg(\rho \circ \tilde{\Psi}) = 0$인데, 이것은 $\deg(\rho\circ\Psi) = \deg(\rho\circ\Psi')$라는 것과 같다. 즉, $c_1$의 정의는 $\Phi_1$의 선택과 무관하고, 마찬가지로 $\Phi_2$의 선택과 무관하다는 것도 보일 수 있겠다.

이제 $c_1$의 정의가 splitting의 선택에 무관하다는 것을 보이자. $C_1, C_2$가 서로 다른 2개의 disjointed splitting이라 하자. 이를 따라 $\Sigma$를 다음과 같이 3조각으로 쪼갰다고 하고, 다음과 같은 submanifold $\Sigma_{31}, \Sigma_{20}$을 생각하자.

$$\begin{aligned} \Sigma =& \Sigma_{32} \cup_{C_2} \Sigma_{21} \cup_{C_1} \Sigma_{10}, \\ \Sigma_{31} =& \Sigma_{32} \cup_{C_2} \Sigma_{21},\ \Sigma_{20} = \Sigma_{21} \cup_{C_1} \Sigma_{10} \end{aligned}$$

Proposition 6.에 따라 $\Sigma_{31}, \Sigma_{20}$ 위에서 $E$는 trivializable하다. 이를 각각 $\Phi_{31}, \Phi_{20}$이라 하자. $\Sigma_{21}$ 위에서 이들은 overlap되고, 따라서 overlap map을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Psi_{21}(q) = \Phi_{31}(q)^{-1}\Phi_{20}(q)$$

이를 $C_1$으로 제한하면 $\Sigma = \Sigma_{31} \cup_{C_1} \Sigma_{10}$의 overlap map $\Psi_1$이 되고, $C_2$로 제한하면 $\Sigma = \Sigma_{32} \cup_{C_2} \Sigma_{20}$의 overlap map $\Psi_2$가 된다. 즉, 다음과 같은 map을 생각할 수 있다.

$$\Psi_1 \coprod \Psi_2 : C_1 \cup C_2 = \partial\Sigma_{21} \to Sp(2n)$$

그런데 이는 $\Psi_{21}$을 boundary로 제한한 것이고, 따라서 degree 0을 가진다. 이는 다시 말해 $\deg(\rho \circ \Psi_1) = \deg(\rho \circ \Psi_2)$라는 것이고, 따라서 이 경우 $c_1$의 정의는 splitting에 의존하지 않는다. 일반적으로 $C_1, C_2$는 intersection을 가질 수도 있는데, 이 경우 둘 모두와 disjointed인 splitting $C_3$를 잡아서 둘 모두가 $\deg(\rho \circ \Psi_3)$와 같다는 것을 보이면 해결된다.

이제 $c_1$이 가지는 4가지 성질을 증명해 보자.

1. (Naturality) $E, E'$이 isomorphic하다면 $c_1(E) = c_1(E')$인 것은 이제 거의 자명하다. 이제 $E, E'$의 rank와 $c_1$이 같다고 하자. 1개의 circle $C$를 splitting으로 삼아 $\Sigma = \Sigma_1 \cup_C \Sigma_2$를 잡고, $E$와 $E'$에 해당하는 overlap map $\Psi, \Psi'$을 잡자. $\Psi, \Psi' : C \to Sp(2n)$은 같은 Maslov index를 갖고, 따라서 $\Psi'\Psi^{-1} : C \to Sp(2n)$은 $C$를 boundary로 갖는 surface 위로 확장될 수 있다. 즉 각각의 $\Sigma_k$ 위로 $\Psi'\Psi^{-1}$를 확장시킬 수 있고, 이것이 원하는 isomorphism을 정의해준다.

2. (Functoriality) $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$의 regular value $q \in \Sigma$를 잡자. $q$의 작은 neighborhood $B \subset \Sigma$에 대해, $\varphi^{-1}(B)$는 $d = \deg(\varphi)$개의 disc들의 disjointed union이 된다. 이들을 각각 $B_1', \cdots, B_d'$ 라고 하자. $\partial B$에서 $E$의 trivialization을 $\Psi$라 하면, $\partial B_j'$ 위에서 $\varphi^* E$의 trivialization들은 $\Psi_j' = \Psi \circ \varphi$로 주어질 것이다. 이들은 각각 같은 Maslov index를 갖게 된다. 즉, $\deg(\rho \circ \Psi_j') = \deg(\rho \circ \Psi)$이다. 그런데 여기서 $\Psi, \Psi'$는 각각 splitting $\partial B, \cup \partial B_j'$에 대한 $E \to \Sigma$, $\varphi^* E \to \Sigma'$의 overlap map이라 생각할 수 있고, 따라서 $c_1(\varphi^* E) = dc_1(E)$이다.

3. (Additivity) 이는 Maslov index의 additivity로부터 따라온다.

4. (Normalization) 이는 Chern number가 Euler number와 같다는 사실, 또는 간단한 복소기하학을 통해 알 수 있는데, 자세한 증명은 생략하도록 하자. 복소기하학을 통한 증명은 (아마도) 다음과 같이 이뤄질 것이다. $c_1(TS^2) = 2$라는 사실은 $\mathbb{S}^2$를 $\mathbb{CP}^1$이라 간주했을 때 $\mathbb{CP}^1$의 transition map을 보면 알 수 있다. $c_1(T\mathbb{T}^2) = 0$이라는 사실은 $\mathbb{T}^2$가 parallelizable이라는 것으로부터 알 수 있다. 이제 genus $g$ surface를 $\Sigma_g$라고 하자. 그리고 $c_1(T\Sigma_2) = -2$라는 것을 보였다고 해보자. 그렇다면 $\Sigma_g$는 $\Sigma_2$의 $g-1$-sheeted covering space가 될 것이고 (그림을 잘 그려보면 알 수 있다. Figure 3을 참조하라.) covering map은 local diffeomorphism이기 때문에 tangent bundle을 보존하게 되며, degree는 $(g-1)$이다. 즉, $c_1(T\Sigma_g) = -2(g-1) = 2-2g$이다.

$c_1$이 유일하다는 사실에 대해서는 아이디어만 간단히 소개하고 넘어가도록 하겠다. 우리의 base manifold는 2차원이고, complex manifold로 본다면 1차원이다. 이 경우 $E \to \Sigma$는 항상 (complex) line bundle의 합으로 표현될 수 있다. (이를 **splitting principle**이라 한다.) 그런데 (Functoriality)와 (Additivity)에 의하여, $c_1$은 사실 line bundle에서의 값만으로도 결정될 수 있다는 사실을 알 수 있다. 그리고 (Normalization)에 의하여 $c_1$의 값이 하나로 결정되고, 이로써 유일성을 증명할 수 있다. □

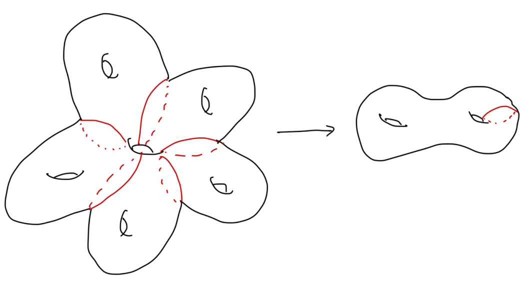

Figure 3: Covering map from $\Sigma_6$ to $\Sigma_2$

Chern number의 몇 가지 성질을 알아보고 글을 마치도록 하자. Splitting principle을 이용하면 Chern number의 다양한 성질들을 쉽게 증명할 수 있다.

**Proposition 9.** $\operatorname{rank}(E) = n$, $\operatorname{rank}(E') = n'$이라 하자. 그렇다면 다음이 성립한다.

$$c_1(E \otimes E') = n'c_1(E) + nc_1(E')$$

특히 line bundle에 대해서는 $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$이다.

*Proof.* 먼저 line bundle에 대해 증명하자. Chern number의 정의에 등장하는 $\Psi$는 일종의 transition map으로 간주될 수 있고, $L \otimes L'$의 transition map은 각각의 transition map의 ($Sp(2n)$에서의) 곱으로 표현된다. 그런데 Maslov index는 이 곱을 합으로 바꿔주고, 따라서 line bundle에 대해서 이 성질은 Maslov index의 product rule에서부터 따라온다.

이제 $E = \oplus_{j=1}^{n} L_j, E' = \oplus_{k=1}^{n'} L'_k$로 split했다고 하자. 그렇다면 $c_1(E) = \sum c_1(L_j)$, $c_1(E') = \sum c_1(L'_k)$이고, 다음이 성립한다.

$$E \otimes E' = \bigoplus_{j,k} L_j \oplus L'_k$$

양변에 $c_1$을 씌우면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
c_1(E \otimes E') &= \sum_{j,k} (c_1(L_j) + c_1(L'_k)) \\
&= \sum_{k} \sum_{j} c_1(L_j) + \sum_{j} \sum_{k} c_1(L'_k) \\
&= n' \sum_{j} c_1(L_j) + n \sum_{k} c_1(L'_k) = n'c_1(E) + nc_1(E')
\end{aligned}$$

□

**Proposition 10.** $c_1(\det_{\mathbb{C}} E) = c_1(E)$

*Proof.* $E$를 line bundle $L_1, \cdots, L_k$로 쪼갰다고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\det_{\mathbb{C}} E = \wedge^n E = \wedge^n (\oplus_j L_j) = \otimes_j \wedge^1 L_j$$

$\wedge^1 L_j = L_j$이므로 $c_1(\wedge^1 L_j) = c_1(L_j)$이다. 즉, 위의 식에 $c_1$을 씌우면 다음을 얻는다.

$$c_1(\det_{\mathbb{C}} E) = \sum_j c_1(L_j) = c_1(E).$$

□

이로부터 $\det_{\mathbb{C}} E$가 trivializable하다는 것은 $E$가 trivializable하다는 것과 동치라는 사실을 알 수 있다.

**Proposition 11.** $E$의 **conjugate bundle**을 $\bar{E}$라 하자. 즉, $E$ 위의 complex structure $J$가 주어졌을 때 이와 반대의 orientation을 유도하는 $J'$을 준 것이 $\bar{E}$이다. 그렇다면 $c_1(\bar{E}) = -c_1(E)$이다.

*Proof.* 마찬가지로 line bundle을 생각하자. 각각의 fiber마다 complex conjugate을 취해주는 map은 orientation을 뒤집고, 따라서 Chern number의 정의에서 등장한 $C$의 parametrization을 반대로 바꿔준다. 이는 $\Psi$의 방향을 반대로 바꾸는 것과 같고, 따라서 $c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$이다. 이제 splitting principle을 사용해서 결과를 얻을 수 있다. □

**Note 12.** 만약 $E$의 complex rank가 $k$였다면, complex conjugation은 $k$가 홀수라면 orientation을 뒤집지만 $k$가 짝수라면 orientation을 보존하게 된다. 이는 더 높은 Chern class에서 $c_k(\bar{E}) = (-1)^k c_k(E)$라는 사실로 나타나게 되는데, 이에 대해서는 기회가 된다면 다뤄보도록 하자.

이를 이용해서 Lagrangian subbundle에 대한 재밌는 사실을 증명할 수 있다. Symplectic bundle $E$의 **Lagrangian subbundle**이란 $L_p \subset E_p$가 Lagrangian subspace가 되는 subbundle $L \subset E$를 뜻한다. Unitary trivialization 아래에서 $L_p$는 $\mathbb{C}^k$ 안의 $\mathbb{R}^k$에 해당되고, 따라서 $E$를 $L$의 **complexification** $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} := L_{\mathbb{C}}$로 간주할 수 있겠다.

**Proposition 13.** Closed oriented surface $\Sigma$에 대해 $E \to \Sigma$가 Lagrangian subbundle을 가진다면 $E$는 trivializable하다.

*Proof.* 위에서 언급하였듯 이 경우 $E = L_{\mathbb{C}}$이다. 이는 $\bar{E} = E$라는 말이 되고, Proposition 11.에 의하여 $c_1(E) = -c_1(\bar{E}) = -c_1(E)$이다. 즉 $c_1(E) = 0$이고, $E$는 symplectic trivialization을 가진다. □

# 4 예고

다음 글에서는 symplectic manifold를 정의하고, 그에 대한 다양한 예시들을 알아볼 것이다. Symplectic manifold는 당연히 우리의 가장 중요한 관심 대상이다. Symplectic manifold란 tangent bundle $TM$이 symplectic bundle이 되는 manifold $M$을 뜻하고, 따라서 이 경우 symplectic form은 differential 2-form $\omega \in \Omega^2(M)$으로 주어질 것이다. 이 경우에는 특별히 $d\omega = 0$이라는 조건도 붙이게 되는데, 그 이유에 대해서는 다음 글에서 알아보도록 하자.