§7.2 标准正交基

一、 基本定义

定义1: (R^n的标准正交基)

若R^n中的n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足两个条件：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一个正交向量组;

(2) $\|\alpha_i\|=1, i=1,2,\cdots,n.$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^n$的一组标准正交基.

显然, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$R^n$的一组标准正交基.

定义1 也可以等价地描述为：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^n$的标准正交基$\Leftrightarrow$

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0,当i\neq j时,\\1,当i=j时,\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

例1：证明向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
是 R^3 的一组标准正交基

证明：　先证这组向量两两正交，再证它们是单位向量.

$$(\alpha_1,\alpha_2)=1\times 0+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0,$$

$$(\alpha_1,\alpha_3)=1\times 0+0\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0,$$

$$(\alpha_2,\alpha_3)=0\times 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0,$$

故 α_1，α_2，α_3 是正交向量组， 从而线性无关.

又因为 $$||\alpha_1|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$||\alpha_2|| = \sqrt{0^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

$$||\alpha_3|| = \sqrt{0^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的正交单位向量组， 故是R^3的标准正交基.

例2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$R^3$的一组标准正交基.

$$若\beta_1=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,$$

$$\beta_2=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3,$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3,$$

证明:β_1,β_2,β_3也是R^3的一组标准正交基.

证明：先证明$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 是正交向量组

$$(\beta_1, \beta_2) = \left(\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3,\ \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3\right)$$

$$= \frac{4}{9}(\alpha_1, \alpha_1) - \frac{2}{9}(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{4}{9}(\alpha_1, \alpha_3) + \frac{4}{9}(\alpha_2, \alpha_1)$$

$$-\frac{2}{9}(\alpha_2, \alpha_2) + \frac{4}{9}(\alpha_2, \alpha_3) - \frac{2}{9}(\alpha_3, \alpha_1) + \frac{1}{9}(\alpha_3, \alpha_2)$$

$$-\frac{2}{9}(\alpha_3, \alpha_3)$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

同理可证 对于任意的 $i \neq j$，$(\beta_i, \beta_j) = 0$

下证 $\beta_i, i = 1,2,3$ 是单位向量.

$$||\beta_1|| = ||\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3||$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3,\ \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3\right)} = 1$$

同理$\left||\beta_2|\right| = 1$, $\left||\beta_3|\right| = 1$.

故 $\beta_i, i = 1,2,3$ 是单位向量组, 从而是标准正交基.

定理1： 设 W 是R^n 的子空间，γ_1，γ_2，γ_3 $\cdots$ γ_s，是W的一组标准正交基，则向量$\beta \in W$在这组基下的坐标可以由β 与这组基向量的内积给出，即β 在γ_1，γ_2，γ_3 $\cdots$ γ_s下的坐标为：

$$((\beta \cdot \gamma_1), (\beta \cdot \gamma_2), (\beta \cdot \gamma_3), \cdots (\beta \cdot \gamma_s))$$

证明： 既然γ_1，γ_2，γ_3 $\cdots$ γ_s 是 W 的一组基，则 β 可由这组基线性表出：

$$\beta = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + k_3\gamma_3 + \cdots + k_s\gamma_s$$

所以 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma_i}=\boldsymbol{k_1\gamma_1\cdot\gamma_i}+\boldsymbol{k_2\gamma_2\cdot\gamma_i}+\cdots\boldsymbol{k_i\,\gamma_i\cdot\gamma_i}+$

$$\cdots+\boldsymbol{k_s\,\gamma_s\cdot\gamma_i}$$

$$=\boldsymbol{k_i},\quad \boldsymbol{i}=\mathbf{1,2,}\ \cdots\boldsymbol{n}$$

故 β 在基 $\boldsymbol{\gamma_1}$，$\boldsymbol{\gamma_2}$，$\boldsymbol{\gamma_3}$ $\cdots$ $\boldsymbol{\gamma_s}$ 下的第 i 个坐标就是 $\boldsymbol{\beta\cdot\gamma_i}$.

例3.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$R^3$的一组标准正交基.

若α和β在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标分别为$(x_1,x_2,x_3)$和$(y_1,y_2,y_3)$,证明:$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

证明:

$$设:\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta)=\alpha^T\beta = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \alpha_1^T\alpha_3\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \alpha_2^T\alpha_3\\ \alpha_3^T\alpha_1 & \alpha_3^T\alpha_2 & \alpha_3^T\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

定理2：设 W 是R^n 的子空间，$\boldsymbol{\gamma_1}$，$\boldsymbol{\gamma_2}$，$\boldsymbol{\gamma_3}$ $\cdots$ $\boldsymbol{\gamma_s}$，是W的一组标准正交基，如果向量$\alpha, \beta \in W$ 在这组基下的坐标分别为$(x_1, x_2, \cdots, x_s)^T$ 和$(y_1, y_2, \cdots, y_s)^T$，则

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots x_s y_s}$$

证明同例3.

二、 正交矩阵

定义2：设A是$m\times n$矩阵，其列向量组为$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$， $\cdots$ $\boldsymbol{\alpha_n}$ 如果$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$， $\cdots$ $\boldsymbol{\alpha_n}$ 是R^m的一组标准正交向量组，则称矩阵A为列正交矩阵.

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是列正交矩阵.

定理3：设A是$m \times n$矩阵， 则A是列正交矩阵的充分必要条件是$A^T A = E_n$.

证明: 设 $A = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots \boldsymbol{\alpha_n})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots \boldsymbol{\alpha_n} \in \boldsymbol{R^m}$,

则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots \boldsymbol{\alpha_n}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{E}$$

定理4：设A是$m \times n$的列正交矩阵,α和β是 R^n 中的两个向量，则

（1） $||A\alpha|| = ||\alpha||$（保持向量长度不变）；

（2）$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$ （保持向量的正交性）。

证明：（1）因为A 是列正交矩阵，则 $A^T A = E$，故

$$||A\alpha|| = \sqrt{(A\alpha, A\alpha)} = \sqrt{(A\alpha)^T A\alpha} = \sqrt{\alpha^T A^T A\alpha}$$

$$= \sqrt{\alpha^T \alpha} = ||\alpha||$$

（2）$(\mathrm{A}\alpha,\ A\beta) = (A\alpha)^T A\beta = \alpha^T A^T A\beta = \alpha^T \beta = (\alpha, \beta)$

定义3：设 A 是n阶方阵， 如果 $A^TA=E$, 则称A为正交矩阵。

根据定理4， 若 A为正交矩阵，则R^n 中线性变换

φ： $\alpha \to A\alpha$ 把R^n 中的标准正交基变为标准正交基.

若 $(\alpha_i,\alpha_j)=0, i\neq j$, $||\alpha_i||=1$

则 $(A\alpha_i,A\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)=0$ ， $i\neq j$

且 $||A\alpha_i||=||\alpha_i||=1$

例4： 已知两个正交的单位向量$q_1=\left(\frac{1}{9},-\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right)^T$，$q_2=\left(-\frac{8}{9}, \frac{1}{9},-\frac{4}{9}\right)^T$，试求列向量$q_3$使得以$q_1$，$q_2$，$q_3$为列向量构成的矩阵Q是正交矩阵。

解： 由于正交矩阵的列向量是两两正交的单位向量，故所求的q_3应满足

$$(q_1, q_3)=0, \quad (q_2, q_3)=0, \quad ||q_3||=1$$

设$q_3 =（x_1, x_2, x_3,)^T$，则有

$$\begin{cases} -\frac{1}{9}x_1 - \frac{8}{9}\ x_2 - \frac{4}{9}x_3 = 0 \\ -\frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}\ x_2 - \frac{4}{9}x_3 = 0 \end{cases}$$

解得： $x_1 = -\frac{4}{7}x_3$， $x_2 = -\frac{4}{7}x_3$

又因为$||q_3|| = x_1^2 + x_2^2 +\ x_3^2$， 解得$x_3 = \pm\frac{7}{9}$

故$q_3 = \left(-\frac{4}{9},\ -\frac{4}{9},\ \frac{7}{9}\right)^T$ 或$q_3 = \left(\frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ -\frac{7}{9}\right)^T$

所以正交矩阵为

$$Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

或 $Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

定理5：若A是n阶方阵，则下列命题等价：

（1）A是n阶正交方阵；（2）A可逆，且$A^{-1}=A^T$；

(3) A的行向量组和列向量组都是R^n的标准正交基；

证明：（1）$\Leftrightarrow$ (2) 显然

而（1）$\Leftrightarrow$ (3) 也显然，故(1)，(2)，(3)等价。

定理6：　正交矩阵具有的性质：

（1）　$|A| = 1$ 或 $|A| = -1$;

（2）　A^T 和A^{-1} 也是正交矩阵;

(3)　　若A, B 是正交矩阵，则AB 也是正交矩阵.

证明：　（1）正交矩阵定义 $A^T A = E$ 知（1）（2）显然。

（3）　若 A, B 是正交矩阵，　则

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T B = E$$

故AB 也是正交矩阵。

例5： 设A,B为n阶正交矩阵，且 $|A| \neq |B|$,

证明 $A+B$ 为不可逆矩阵。

证明：因为矩阵A,B都是正交矩阵，故$|A| = \pm 1, |B| = \pm 1$,

但是$|A| \neq |B|$， 故有 $|A| = -|B|$.

所以 $|A+B| = |E|\ |A+B|\ |E| = |AA^T|\ \ |A+B|\ \ |B^TB|$

$$= |A|\,|A^T|\,|A+B|\,|B^T|\,|B| = -|B|^2|A^T(A+B)B^T|$$

$$= -|A^T + B^T| = -|(A+B)^T| = -|A+B|$$

$|A+B| = 0$， 说明$A+B$ 是不可逆矩阵

定理7： 在 n维线性空间V中，由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反之，若两组基之间的过渡矩阵是正交矩阵，且其中一组基是标准正交基，则另一组基也是标准正交基.

证明：设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots \boldsymbol{\alpha}_n$ 和$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots \boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两组标准正交基，且过渡矩阵为$A$，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots \boldsymbol{\alpha}_n)\ A$$

即 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\ (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)$

即 $A^TA=\ (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)^T{(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}}^T$

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}\ (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)$

$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)^T[(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)^T(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)]^{-1}$

$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)$

$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)^T\ \mathrm{E}\ (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)$

$=E$

例6： 设 α_1，α_2, α_3 是 V 的 标准正交基， 证明

$$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)，\beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)，$$

$\beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)$也是$V$ 的一组标准正交基.

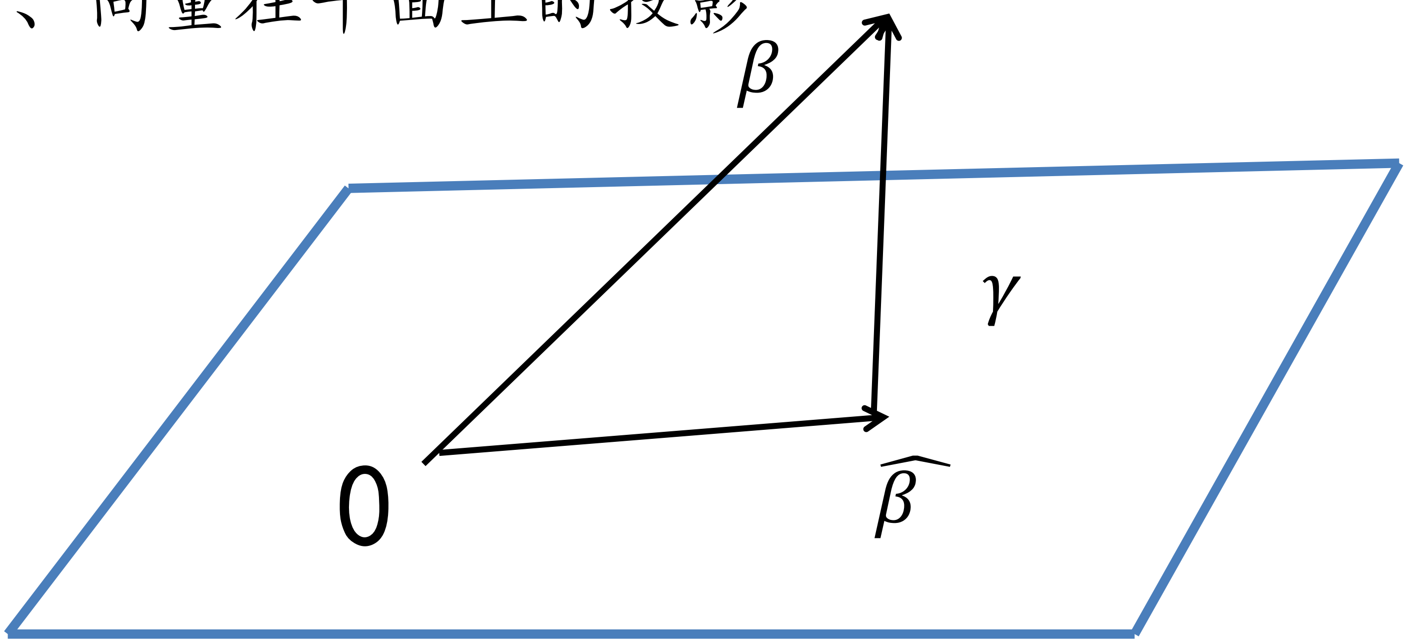
证明： 由于 $(\beta_1，\beta_2, \beta_3) =$（$\alpha_1$，$\alpha_2, \alpha_3$）$A$， 其中

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

因为 $A^T A = E$, 故A是正交矩阵， 从而β_1，β_2, β_3 是一组正交基.

§7.3　　正交投影

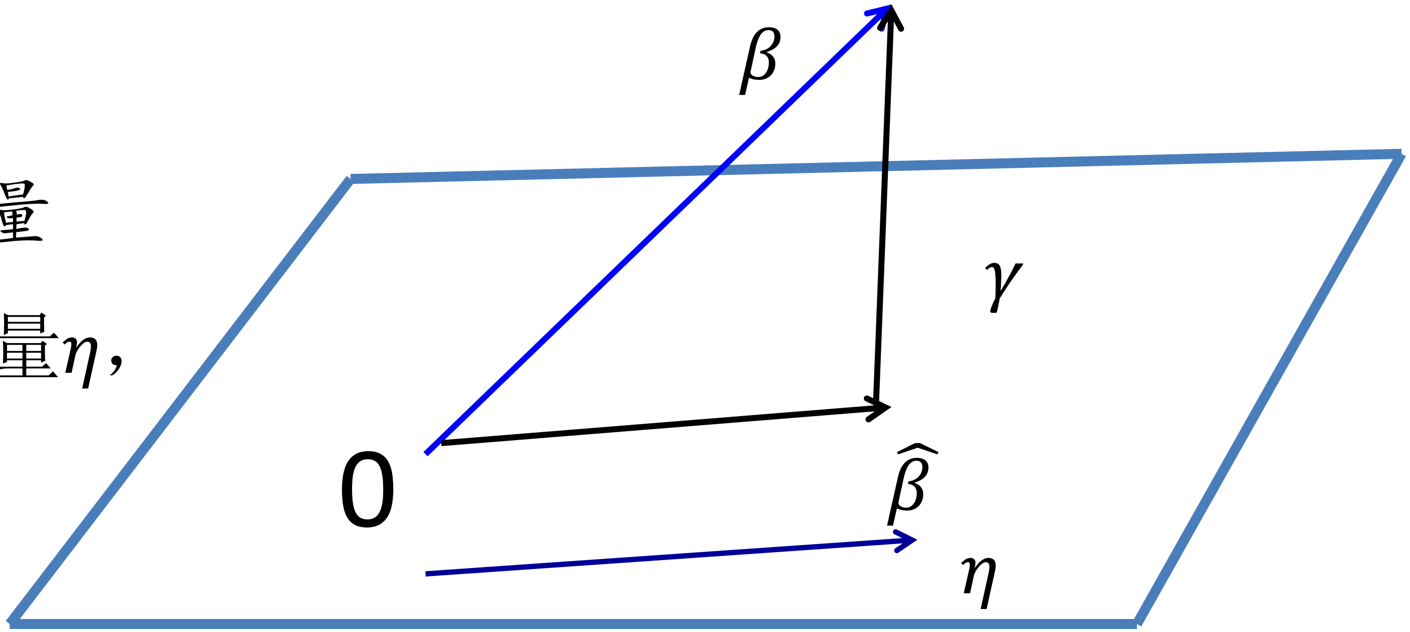
一、向量在平面上的投影



向量 β 在平面上的投影是 $\hat{\beta}$，$\beta = \hat{\beta} + \gamma$。

对于给定的向量

β和平面上的向量η，



如何将向量β 分解成向量$\beta = \hat{\beta} + \gamma$， 使得

$$\hat{\beta} = k\eta, \quad \gamma \perp \eta \quad ?$$

因为 $\gamma = \beta - k\eta$， 所以 $\gamma \perp \eta = (\beta - k\eta) \perp \eta$

故 $0=(\beta-k\eta)\cdot\eta=\beta\cdot\eta-k\eta\cdot\eta \quad\Rightarrow\quad k=\frac{\beta\cdot\eta}{\eta\cdot\eta}$

所以 $\widehat{\beta}=\frac{\beta\cdot\eta}{\eta\cdot\eta}\eta$，， $\gamma=\beta-\frac{\beta\cdot\eta}{\eta\cdot\eta}\eta$

称$\hat{\beta}$为β在向量η上的正交投影，γ为β 对η 的正交分量

如果用与 η 平行的直 线$l\eta$（$l\neq 0$）代替η，则有

$\hat{\beta}=\frac{\beta\cdot l\eta}{l\eta\cdot l\eta}l\eta$ 说明 β 在η 上的正交投影与β 在$l\eta$ 上的正交投影相同。

若记过原点的向量η 所在的直线为L, 则记β 在η 上的正交投影为$P_L\beta$， 即

$$\hat{\beta} = P_L\beta = \frac{\beta \cdot \eta}{\eta \cdot \eta}\eta$$

把向量 $\beta - \hat{\beta}$ 的长度$\|\beta - \hat{\beta}\|$ 称为β 到直线L的距离。

如果 η 是单位向量，则 $\eta \cdot \eta = 1$, 此时β在在直线上的正交投影$\hat{\beta}$及$\hat{\beta}$的长度分别为：

$$\hat{\beta} = (\beta \cdot \eta)\eta, \quad \left\|\hat{\beta}\right\| = |\beta \cdot \eta|$$

这说明一个向量β与单位向量η的内积的绝对值就是向量β在η上的正交投影的长度， 当内积为正时，正交投影与η同向， 内积为负时， 正交投影与η反向。

例1：设 $\beta=(3,8)^T, \eta=(2,4)^T, L$ 是过原点与η的直线，求β 对直线L的分解式以及β 到直线L的距离。

解：正交投影：$\widehat{\beta}=\dfrac{\beta\cdot\eta}{\eta\cdot\eta}\eta=\dfrac{3\cdot2+8\cdot4}{2\cdot2+4\cdot4}(2,4)^T$

$$=\frac{38}{20}(2,4)^T$$

$$=\left(\frac{19}{5},\ \frac{38}{5}\right)^T$$

正交分量：$\beta-\hat{\beta}=(3,8)^T-\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{38}{5}\right)^T=(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5})^T$

所以 β 的分解式为： $\beta=\left(\frac{19}{5}, \quad \frac{38}{5}\right)^T+(-\frac{4}{5}, \ \frac{2}{5})^T.$

β 到直线L的距离$\left\|\beta-\hat{\beta}\right\|=\sqrt{(-\frac{4}{5}\ )^2+(\frac{2}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、 向量在子空间上的正交投影

考虑线性空间R^n,W 是R^n 的子空间， $\beta\in R^n$ 是任意给定的向量，则

1） 是否存在向量$\hat{\beta}\in W$，使得$\beta-\hat{\beta}\perp W$?

2） 如果存在这样的$\hat{\beta}$， $\hat{\beta}$ 是否唯一?