第四次习题课讲义

2018/5/13

知识点巩固

一、关于最小二乘法：

设 A 是$m \times n$ 矩阵，矩阵A 的列空间（也称像空间）

$R(A) = \{Ax:\ x \in R^n\}$， 所以对于方程组

$A x = \beta$ ，由如下两种情形：

（1） 如果$\beta \in R(A)$, 则方程组$A x = \beta$ 有解，

此时最小二乘解就是方程组$A x = \beta$ 的解。

（ 2） 若$\beta \notin R(A)$，这时方程组$A x = \beta$ 的最小二乘解

就是寻找$\hat{x}$ 使得$A\hat{x} \in R(A)$, 且 $A\hat{x}$在$R(A)$中最接近于 β。

回忆$R(A)$，将矩阵A按列写成分块形式：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,那么$R(A) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,令$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$，则：

$$Ax = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \qquad (1)$$

这意味着一旦$\beta \in R(A)$,一定存在$x \in \mathbb{R}^n$，使得$Ax = \beta$。

如此$\beta \notin R(A)$，那么就要找到$\hat{x} \in\in \mathbb{R}^n$使得$(\beta - Ax)\cdot(\beta - Ax)$最小。

得到的规范方程为：$-2A^T\beta + 2A^TA\hat{x} = 0$

因此$\hat{x}$有唯一解的充要条件是A列满秩（$r(A) = n$，此时A^TA可逆）。

（2） $\hat{x}$ 是方程组$Ax = \beta$ 的唯一最小二乘解的充分

必要条件是$r(A) = n.$

二、关于矩阵多项式与特征值多项式

对于$f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$，如果$f(A) = O$，那么$f(\lambda) = 0$

证明：

$$f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n = O$$

设$\alpha \neq 0$为矩阵A的特征向量，那么

$$f(A)\alpha = (a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n)\alpha = 0$$

$$a_0\alpha + a_1A\alpha + a_2A^2\alpha + \cdots + a_nA^n\alpha = 0$$

$$a_0\alpha + a_1(\lambda\alpha) + a_2(\lambda^2\alpha) + \cdots + a_n(\lambda^n\alpha) = (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)\alpha = 0$$

由于$\alpha \neq 0$，因此$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n = f(\lambda) = 0$

习题攻坚

P218,1

证明向量组$\eta_1=(2,-2,0)^T,\eta_2=(3,3,1)^T,\eta_3=(1,1,-6)^T$ 是$\mathbb{R}^3$的一组正交基，并求$\alpha=(5,3,1)^T$在这组基下的坐标。

解答：

只求坐标x。

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)x$$

$$x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}\alpha=\left(\frac{1}{2},\frac{25}{19},\frac{1}{19}\right)^T$$

P223,10

设A是$m\times n$矩阵。证明：对任意向量$\beta\in\mathbb{R}^n$,存在唯一的$\alpha\in R(A^T)$和$\gamma\in N(A)$，使得$\beta=\alpha+\gamma$。

解答：

本题和下一题的套路：先证明存在性，再证明唯一性。

存在性：

设A^T的行向量组为$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\dots,\alpha_m^T$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\in\mathbb{R}^n$，此时$A^T=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$。且有$R(A^T)=L(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\dots,\alpha_m^T)$

又因为$\gamma\in N(A)$的充要条件是$A\gamma=0$。这等价于

$$\alpha_i\cdot\gamma=\alpha_i^T\gamma=0,i=1,2,\dots,m$$

因此对于任意$\alpha\in R(A^T)$，均有$\alpha\cdot\gamma=0$。所以$N(A)^\perp=R(A^T)$

取β在子空间$R(A^T)$上的投影为α，构造$\gamma=\beta-\alpha$,则$\gamma\in N(A)$。存在性得证。

唯一性：

假设分解不唯一，那么有

$$\beta=\alpha_1+\gamma_1$$
$$\beta=\alpha_2+\gamma_2$$

于是有$(\alpha_1-\alpha_2)+(\gamma_1-\gamma_2)=0$。因为$0\in R(A^T)\cap N(A)=\{0\}$。

因此$(\alpha_1-\alpha_2)\in R(A^T)\cap N(A)=\{0\}$,$\alpha_1=\alpha_2$,同理$\gamma_1=\gamma_2$.分解是唯一的。

P223,11

设 A 是$m\times n$矩阵，β是$\mathbb{R}^m$中的向量，且线性方程组$Ax=\beta$有解。证明：存在唯一的$\alpha\in R(A^T)\subset\mathbb{R}^n$，使得$A\alpha=\beta$。

解答：

存在性：

因为线性方程组$Ax=\beta$有解，于是存在$\gamma\in\mathbb{R}^n$，使得$A\gamma=\beta$.

利用正交分解定理，对γ存在唯一的分解：

$$\gamma=\alpha+\delta$$

其中$\alpha\in R(A^T),\delta\in N(A)$。需要提前证明$N(A)^\perp=R(A^T)$.

于是$A\gamma=A(\alpha+\delta)=A\alpha+A\delta=A\alpha+0=A\alpha$

于是存在$\alpha\in R(A^T)\subset\mathbb{R}^n$，使得$A\alpha=\beta$。

唯一性：

若还存在$\alpha_1\in R(A^T)\subset\mathbb{R}^n$，使得$A\alpha_1=\beta$。易知$\alpha-\alpha_1\in R(A^T)$

那么$A(\alpha-\alpha_1)=0$，即$\alpha-\alpha_1\in N(A)$

因此$\alpha-\alpha_1\in R(A^T)\cap N(A)=\{0\}$

因此$\alpha-\alpha_1=0$，$\alpha=\alpha_1$,唯一性得证。

P227,1（2）

Schmidt 正交化的计算实在是太麻烦了，而且出错率还很高。此处推荐一个有条理的算法，希望可以让计算过程减少错误，尽快得到答案。

求矩阵列空间$R(A)$的标准正交基：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&-2\\2&-1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

解答：

$R(A)$是由$\alpha_1=(1,-1,2,-1)^T,\alpha_2=(1,0,-1,1)^T,\alpha_3=(0,-2,0,-1)^T$生成的子空间。且这三个向量是该空间的一组基。下面进行 Schmidt 正交化：

$$\eta_1^*=(1,-1,2,-1)^T$$

$$\eta_1^*\cdot\eta_1^*=\left\|\eta_1^*\right\|^2=7$$

注：上面是顺便算出来$\eta_1^*\cdot\eta_1^*$的。

由于$\eta_2^*=\alpha_2-\frac{\alpha_2\cdot\eta_1^*}{\eta_1^*\cdot\eta_1^*}\cdot\eta_1^*$,为了减少计算中犯错误的可能，现对该式中每一项单独计算再汇总：

$$\alpha_2\cdot\eta_1^*=(1,0,-1,1)^T\cdot(1,-1,2,-1)^T=-2$$

因此

$$\eta_2^*=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}-\frac{-2}{7}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}9\\-2\\-3\\5\end{bmatrix},$$

$$\eta_2^*\cdot\eta_2^*=\left\|\eta_2^*\right\|^2=\frac{17}{7}$$

此处有个小技巧：η_2^*中的元素最好写成互质的整数，方便最后求标准正交基。因为化为单位向量的时候，可以写成$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{9^2+(-2)^2+(-3)^2+5^2}}(9,-2,-2,5)^{\mathrm{T}}$，结果与前面的分数$\frac{1}{7}$无关，因此写成整数的形式可以减少计算量。

由于$\eta_3^*=\alpha_3-\frac{\alpha_3\cdot\eta_1^*}{\eta_1^*\cdot\eta_1^*}\cdot\eta_1^*-\frac{\alpha_3\cdot\eta_2^*}{\eta_2^*\cdot\eta_2^*}\cdot\eta_2^*$，同样

$$\alpha_3\cdot\eta_1^*=(0,-2,0,-1)^T\cdot(1,-1,2,-1)^T=3$$

$$\alpha_3\cdot\eta_2^*=(0,-2,0,-1)^T\cdot\frac{1}{7}(9,-2,-3,5)^T=-\frac{1}{7}$$

$$\eta_1^*\cdot\eta_1^*=\left\|\eta_1^*\right\|^2=7$$

$$\eta_2^*\cdot\eta_2^*=\left\|\eta_2^*\right\|^2=\frac{17}{7}$$

因此

$$\eta_3^*=\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}-\frac{-\frac{1}{7}}{\frac{17}{7}}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}9\\-2\\-3\\5\end{bmatrix}=-\frac{3}{17}\begin{bmatrix}2\\9\\5\\3\end{bmatrix}$$

最后单位化：

$$\eta_1=\frac{1}{\|\eta_1^*\|}\cdot\eta_1^*=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2+(-1)^2}}\cdot(1,-1,2,-1)^T$$

$$\eta_2=\frac{1}{\|\eta_2^*\|}\cdot\eta_2^*=\frac{1}{\sqrt{9^2+(-2)^2+(-3)^2+5^2}}\cdot(9,-2,-3,5)^T$$

$$\eta_3=\frac{1}{\|\eta_3^*\|}\cdot\eta_3^*=\frac{1}{\sqrt{2^2+9^2+5^2+3^2}}\cdot(2,9,5,3)^T$$

P228,5

证明 QR 分解是唯一的。

解答：

注意：QR 分解的前提是矩阵 A 是列满秩的！

假设存在两种 QR 分解:

$$A = Q_1R_1 = Q_2R_2$$

那么

$$A^TA = (Q_1R_1)^TQ_1R_1 = R_1^T(Q_1^TQ_1)R_1 = R_1^TR_1$$

同理可得$A^TA = R_2^TR_2$

注意：此处不能用AA^T，因为 A 是列满秩，此时A^TA可逆，但是AA^T不一定可逆。且一定要注意的是$Q_1^TQ_1 = E$但是$Q_1Q_1^T \neq E$

因此$A^TA = R_1^TR_1 = R_2^TR_2$

因为R_1和R_2都是对角元为正的上三角矩阵，所以都可逆，因此$R_1 = R_2$，于是得到$Q_1 = Q_2$

第六章、第七章综合习题

1、n阶矩阵A满足$(A - aE)(A - bE) = 0$，其中$a \neq b$，则A可对角化。

解答：

思路：证明$r(A - aE) + r(A - bE) = n$。

2、A和B是两个n阶矩阵，如果$A \sim B$，那么$A^* \sim B^*$。

解答：

因为$A \sim B$，那么存在可逆矩阵 P，使得$B = P^{-1}AP$。

$$\begin{aligned} B^* &= (P^{-1}AP)^* = |P^{-1}AP|(P^{-1}AP)^{-1} = |P^{-1}||A||P|(P^{-1}A^{-1}P) \\ &= (|P|P^{-1})(|A|A^{-1})(|P^{-1}|P) = P^*A^*(P^{-1})^* = P^*A^*(P^*)^{-1} \end{aligned}$$

因此$A^* \sim B^*$。

3、设A表示元素全为 1 的n矩阵$(n \geq 2)$，设$f(x) = 1 + x$是有理数域上的二元多项式，令$B = f(A)$.

(1)求B的特征值与特征向量

(2)B是否可以对角化?

解答：

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$$

因此A的特征值为 0（$n-1$重）和n。$B = f(A) = E + A$，因此它的特征值为 1（$n-1$重）和$n+1$。

计算$(E - B)x = -Ax = 0$，得到$n-1$个线性无关的特征向量：

$$\xi_1 = (1,-1,0,\dots,0)^T, \xi_2 = (1,0,-1,\dots,0)^T, \dots, \xi_{n-1} = (1,0,0,\dots,-1)^T$$

属于 1 的全部特征向量为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}$,$k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$不全为零。

计算$\big((n+1)E - B\big)x = (nE - A)x = 0$，得到特征向量为：

$$\xi_n = (1,1,\dots,1)^T$$

(2)

B可以对角化。令

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{bmatrix}$$

P可逆，$B=P\begin{bmatrix}0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & n+1\end{bmatrix}P^{-1}$

4、证明正交矩阵的实特征值只能为±1。（是否为充要条件？）

解答：

设Q是n阶正交矩阵，λ是它的任意一个特征值，设α是属于λ的特征向量。

$$Q\alpha=\lambda\alpha$$

$$(Q\alpha)\cdot(Q\alpha)=(\lambda\alpha)\cdot(\lambda\alpha)=\lambda^2(\alpha\cdot\alpha)$$

$$(Q\alpha)\cdot(Q\alpha)=(Q\alpha)^T(Q\alpha)=\alpha^TQ^TQ\alpha=\alpha^T\alpha=(\alpha\cdot\alpha)$$

因此$\lambda^2(\alpha\cdot\alpha)=(\alpha\cdot\alpha)$，$\alpha\neq0\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1$。

如果λ是复数，那么正交矩阵的复特征值为$\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in\mathbb{R}$

5、A 是实反对称矩阵$A^T=-A$，证明$E+A$可逆，并且$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交阵。

解答：

任意$0\neq x\in\mathbb{R}^n$,有$x^Tx>0$。

$$\begin{aligned}x^T(E+A)^T(E+A)x&=x^T(E-A)(E+A)x=x^T(E-A^2)x\\&=x^Tx-x^TA^2x=x^Tx+x^TA^TAx>0\end{aligned}$$

因此，$0\neq x\in\mathbb{R}^n$，$(E+A)x\neq0$。

方程$(E+A)x=0$只有零解，于是$E+A$可逆。

设$Q=(E-A)(E+A)^{-1}$，证明$Q^TQ=E$即可。

6、如果W是下列方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+2x_2\qquad-2x_4=0\\3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间，求W和$W^\perp$，并求出各自的标准正交基。

解答：

$$\alpha_1=(-6,9,1,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,1)^T,\beta_1=\left(\frac{1}{6},0,1,0\right)^T,\beta_2=\left(-\frac{3}{2}.-1.0,1\right)^T$$

$$W=L(\alpha_1,\alpha_2),W^\perp=L(\beta_1,\beta_2)^T$$

W的一组标准正交基为$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T,\frac{1}{\sqrt{310}}(-12,9,2,-9)^T$

$W^\perp$的一组标准正交基为$\frac{1}{\sqrt{37}}(1,0,6,0)^T,\frac{1}{\sqrt{20729}}(-108,-56,0,77)^T$

7、证明 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$x\cdot y\leq||x||\cdot||y||$$

解答：

任取$\lambda\in\mathbb{R}$,

$$0 \le (x-\lambda y)\cdot(x-\lambda y) = \left||x|\right|^2 - 2\lambda(x\cdot y) + \lambda^2\left||y|\right|^2$$

取$\lambda = \frac{x\cdot y}{\left||y|\right|^2}$，那么上面不等式可以化为

$$0 \le \left||x|\right|^2 - \frac{(x\cdot y)^2}{\left||y|\right|^2}$$

移项可以证明。

8、设$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$是$n$维欧氏空间$V$中一组两两正交的单位向量组，证明$\forall \alpha \in V$

$$\sum_{i=1}^{s} (\alpha, \xi_i)^2 \le \left||\alpha|\right|^2$$

解答：

将$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$扩展为$V$的一组标准正交基$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \dots, \xi_n$由教材 P216 的定理 7.5

$$\alpha = (\alpha, \xi_1)\cdot\xi_1 + (\alpha, \xi_2)\cdot\xi_2 + \cdots + (\alpha, \xi_n)\cdot\xi_n$$

$$\left||\alpha|\right|^2 = (\alpha, \xi_1)^2 + (\alpha, \xi_2)^2 + \cdots + (\alpha, \xi_n)^2$$

$$\sum_{i=1}^{s} (\alpha, \xi_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (\alpha, \xi_i)^2 = \left||\alpha|\right|^2$$

9、设V是一n维欧氏空间，$\alpha \ne 0$是V中一固定向量。

(1)证明$V_1 = \{x | x\cdot\alpha = 0, x \in V\}$是$V$的一个子空间；

(2)证明V_1的维数是$n-1$。

解答：

(1)

对于任意$x, y \in V_1$，和实数$a, b \in \mathbb{R}$.

$$(ax+by)\cdot\alpha = a(x\cdot\alpha) + b(y\cdot\alpha) = 0$$

因此$ax+by \in V_1$，V_1是 V 的一个子空间。

(2)

因为 V 是一 n 维欧氏空间，于是可以构造 V 的一组标准正交基为

$$\frac{\alpha}{\left||\alpha|\right|}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

易知$V_1 = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$,因此$\dim(V_1) = n-1$。