第七章　正交性与最小二乘法

一、　向量的内积

定义1：　设R^n中的 向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots\ a_n)^T$， $\beta = (b_1, b_2, \cdots\ b_n)^T$, 则 α 与 β 的内积定义为：

$$\alpha^T\beta = (a_1, a_2, \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n$$

内积也称为数量积或点积，记作$\alpha \cdot \beta$ 或（α， β）.

例如 $\alpha = (2, 4, -1, 3)^T, \quad \beta = (0, 2, 1, 0)^T$

则 $\alpha \cdot \beta = 2 \times 0 + 4 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times 0 = 7$

显然 $\beta \cdot \alpha = 2 \times 0 + 4 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times 0 = 7$

而$\alpha \cdot \alpha = 2 \times 2 + 4 \times 4 + (-1) \times (-1) + 3 \times 3 = 30$

而$\beta \cdot \beta = 0^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5$

由矩阵的乘法性质知内积具有下述性质：

1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

2. $(k\alpha,\beta)=k(\beta,\alpha)$;

3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

4. $(\alpha,\alpha)\ \geq 0,(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$;

推广： $(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ \beta)=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta)$;

(其中$\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\alpha_2 \in R^n,k,k_1,k_2 \in R$)

定义2: (向量的长度)

设$\alpha \in R^n$,则称$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量α的长度(或模),

记作:$\|\alpha\|$.

如果$\|\alpha\| = 1$,则称α为单位向量.

例如:$\alpha = (1,0)^T, \beta = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$都是$R^2$中

的单位向量.

$\boldsymbol{R^n}$ 中的距离：

定义2：设R^n 中的向量$\alpha =（a_1, a_2, \cdots\ a_n)^T$，
$\beta = (b_1, b_2, \cdots\ b_n)^T$，则 $\alpha - \beta$ 的长度称为α与β的距离，
记作：$d(\alpha, \beta)$。

$$d\,(\alpha, \beta) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \cdots + (a_{n-}b_n)^2}$$

距离 显然有如下性质：

1) $d\,(\alpha,\beta) \geq 0$，$d\,(\alpha,\beta) = 0$ 充分必要条件是$\alpha = \beta$.

（非负性）

2） $d\,(\alpha,\beta) = d\,(\beta,\alpha)$;　　（对称性）

3） $d\,(\alpha,\gamma) \leq d\,(\alpha,\beta) + d\,(\gamma,\beta)$　　（三角形法则）

例1：已知 R^3 中的三个点 $\alpha = (1,3,0)^T$，$\beta = (0,2,1)^T$，$\gamma = (-2,1,4)^T$，求每两个点之间的距离，并验证三角形法则.

解：

$$d\,(\alpha,\beta) = \sqrt{(1-0)^2 \quad + (3-2)^2 \ \cdots + (0-1)^2} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$d\,(\alpha,\gamma) = \sqrt{(1+2)^2 \quad + (3-1)^2 \ \cdots + (0-4)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$$

$$d\,(\gamma,\beta) = \sqrt{(-2-0)^2 \quad + (1-2)^2 \ \cdots + (4-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3.741$$

满足三角形法则

向量长度的性质:(与内积的性质对应)

(1) $\|\alpha\| \geq 0$, 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = O$;

(2) $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$;

(3)(柯西－许瓦兹不等式) $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,

且 $|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \Leftrightarrow \alpha, \beta$ 线性相关.

证明：（1）$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}\geq 0$ 显然成立。

（2）$\|k\alpha\|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=|k|\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|k|\ \|\alpha\|$

由（2）可以得到将非零向量“单位化”的方法：

$\alpha\neq 0$，令 $u=\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$，则 $\|u\|=\left\|\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\|=1$,

故u为单位向量,

例如$:\alpha=(1,2)^T\Rightarrow\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$为单位向量.

证明(3):显然,$|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$当且仅当

$(\alpha,\beta)^2\le\|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2=(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$.故只需证$(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$

1)如果α与β线性无关,则对任意实数x,必有

$x\alpha+\beta\neq O$.由内积的性质推出:

$$(x\alpha+\beta,x\alpha+\beta)=x^2(\alpha,\alpha)+2x(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)>0,$$

$\Rightarrow$ 方程$f(x)=x^2(\alpha,\alpha)+2x(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=0$无实根. 因此其判别式

$$\nabla=[2(\alpha,\beta)]^2-4(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)<0,$$

即$(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$

从而$|(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

2)如果α,β线性相关，若$\alpha=O$或$\beta=O$，则

显然都有$\left|(\alpha,\beta)\right|=0=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

若$\beta=k\alpha$，则$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,k\alpha)^2=k^2(\alpha,\alpha)^2$

$$=(\alpha,\alpha)\cdot(k\alpha,k\alpha)=(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta),$$

即：$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)\Leftrightarrow\left|(\alpha,\beta)\right|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

定义向量夹角余弦

由$|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$,当$\alpha\ne O,\beta\ne O$时,$\|\alpha\|\ne 0,\|\beta\|\ne 0$，故有:

$\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\le 1,$ 由此可定义α与β夹角θ的余弦:

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|},(0\le\theta\le\pi) \quad \text{或}\ \theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,$\cos\dfrac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow(\alpha,\beta)=0$.于是有:

定义3: (两个向量正交)

设$\alpha,\beta\in R^n$,如果$(\alpha,\beta)=0$,则称α与β正交,记作:$\alpha\perp\beta$.

例如向量 $\alpha=(1,\ -1,\ 0)^T$, $\beta=(0,\ 0,\ 4)^T$, 则

$$\alpha\beta=1\times 0+(-1)\times 0+0\times 1=0$$

所以 α 与 β 正交。 事实上与 α 正交的向量不唯一，例如

$\gamma=(1,1,2)^T$， $\omega=(2,2,4)^T$等都与 α 正交.

注意： 零向量与任意向量正交. 且只有零向量与自身正交

定义4：（正交向量组） 如果一个非零向量组（**每个向量都是非零向量**） $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 中的向量两两正交， 则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为一个正交向量组.

进一步，如果一个正交向量组中的向量都是单位向量，则称这个向量组为一个正交单位向量组.

例2： 在 R^4 中找两个单位向量，使他们同时与下面每一个向量正交： $\alpha=(2，1，4，0)$，

$\beta=(-1，-1，2，2)$，$\gamma=$（3，2，5，4）

解： 设满足这样条件的向量为坐标为(x_1, x_2, x_3, x_4)，

因为要与α，β，γ中每个都正交，故有：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=0$$

解方程组得到基础解系为 $\delta = (10, -12, -2,\ 1)$，

$\left||\delta|\right| = \sqrt{249}.$ 故所求的单位向量为

$$\pm\frac{\delta}{\sqrt{249}} = \pm\frac{1}{\sqrt{249}}(10, \quad -12, \quad -2, \quad 1)$$

定理1：（勾股定理）向量$\alpha \perp \beta$ 的充分必要条件是

$$\left\|\alpha+\beta\right\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2 .$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 是一个正交向量组， 则

$$\|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\|^2=\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2+\cdots\|\alpha_n\|^2$$

证明： $\left\|\alpha+\beta\right\|^2=(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

定理2： 设 α_1，α_2，$\cdots\alpha_s$ 是 R^n 中的一个正交向量组， 则 α_1，α_2，$\cdots\alpha_s$ 线性无关.

证明思路：设有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=O.$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$两两正交，故依次用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与上式两边做内积，可依次推出$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0.\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

正交补：

定义5：（正交补）设 W 是 R^n 的一个子空间，如果向量 α 与 W 中任意向量都正交，则称向量 α 与 W 正交. 记作 $\alpha \perp W$， 所有与W正交的向量的全体称为W的正交补空间，记作 $W^{\perp}$， 即

$$W^{\perp} = \{ \alpha \in R^n \mid \alpha \perp W \}$$

例如 在 R^2 中， 取 $W = \{(x,y) | y = 0\}$, 则 W的正交补为

$$W^{\perp} = \{(x,y) \mid x = 0\}$$

进一步，如果 $V = W^{\perp}$ ，则 $W = V^{\perp}$，二者互为正交补.

定理3：设 W 是 R^n 的一个子空间，如果

β_1，β_2，$\cdots\beta_s$ 是 W 的一组生成元，则 W 的

正交补空间 $W^{\perp}=\{\alpha\in R^n|\ \alpha\perp\beta_i,\ i=1,2,\cdots s\}$。

即 $\alpha\in W^{\perp}$ 的充分必要条件是 α 与 W 的每个生成元正交.

证明： 必要性显然.

（充分性），如果设 β 是W中任意向量，则有

$$\beta=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$$

因为 α 与 W 的每个生成元 β_i 正交，故

$$(\alpha,\beta)=k_1(\alpha,\beta_1)+k_2(\alpha,\beta_2)+\cdots+k_s(\alpha,\beta_s)=0$$

例 3：设 $m \times n$ 矩阵$A = ({\alpha_1}^T, {\alpha_2}^T, \cdots {\alpha_m}^T)^T, \alpha_i \in R^n$，

${\alpha_i}^T$ 是矩阵A的第i 行向量. 证明：$\mathrm{N(A)}^{\perp} = R(A^T)$。

证明：因为$A = ({\alpha_1}^T, {\alpha_2}^T, \cdots {\alpha_m}^T)^T$，故$A^T = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m)$

又因 $N(A) = \{ \gamma \in R^n | \ A\gamma = ({\alpha_1}^T\gamma, {\alpha_2}^T\gamma, \cdots {\alpha_m}^T\gamma)^T = 0\}$

即 $\alpha_i \cdot \gamma = {\alpha_i}^T\gamma = 0, i = 1,2, \cdots m$

说明 $\gamma \in \mathrm{N(A)}$当且仅当γ 与 每个向量α_i正交, 而$\alpha_i \in R(A^T)$

故 $\mathrm{N(A)}^{\perp} = R(A^T)$, 同理$R(\mathrm{A})^{\perp} = \mathrm{N}(A^T)$,

例4：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间S，并求S在R^4 中的补空间$S^{\perp}$。

解： 解齐次方程组得到基础解系：

$\alpha_1 =（-3,0,1,0)^T$，$\alpha_2 =（2, -1, 0,1）^T$，

故$S = L(\alpha_1, \alpha_2)$。

设 $\beta = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$，则 β 要与α_1, α_2 都正交，故有

$$\beta \cdot \alpha_1 = -3y_1 + y_3 = 0$$

$$\beta \cdot \alpha_2 = 2y_1 - y_2 + y_4 = 0$$

求解上面的齐次方程组得到基础解系为：

$\beta_1 =$（$1, 0, 3, -2)^T$, $\beta_2 =$（$0, 1, 0, 1$）^{T}

故 $S^{\perp} = L(\beta_1, \beta_2)$

例5：设 γ_1，γ_2，γ_3，γ_4 是 R^4 的一组标准正交基，子空间 $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 其中 $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_2$，$\alpha_2 = \gamma_1, + \gamma_2 - \gamma_3$, 求 $W^{\perp}$.

解：取 $\alpha \in W^{\perp} \subset R^4$, 则 α 可由基 γ_1，γ_2，γ_3，γ_4 线性表出，设为：$\alpha = x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 + x_4\gamma_4$

故 $(\alpha, \alpha_1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$

$(\alpha, \alpha_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$

解上面的方程组得到基础解系为:

$$\beta_1 = (-1, 1, 0\ , 0)^T, \qquad \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

故$W^{\perp} = L(\alpha_3,\ \alpha_4)$,其中 $\alpha_3 = -\gamma_1 + \gamma_2$， $\alpha_4 = \gamma_4$.