特征值的性质及应用

设矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$,那么有：

①$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A) = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

②$\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$

③A^{-1}的特征值为$\frac{1}{\lambda}$，$A^* = |A|A^{-1}$的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$，$f(A)$的特征值为$f(\lambda)$。

④不同特征值对应的特征向量正交。

证明：

设A为N阶矩阵，有n个互不相同的特征值。这道题最好的办法是对n作数学归纳法。

当$n=2$时，设λ_1,λ_2是A两个不同的特征值 α_1,α_2是对应的特征向量。

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$$

采用反证法。若α_1,α_2线性相关，那么存在$b\neq 0$使得$\alpha_1=b\alpha_2$。

那么$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\Rightarrow A(b\alpha_2)=\lambda_1(b\alpha_2)$是有$A\alpha_2=\lambda_1\alpha_2\Rightarrow\lambda_1\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2=0$

由于$\alpha_2\neq 0$，$\lambda_1=\lambda_2$。矛盾，因此α_1,α_2线性无关。

假设当$n=k$时，设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$是$A$的$k$个不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$是对应的线性无关的特征向量。那么当 $n=k+1$ 时，

设λ_{k+1}是第$k+1$ 个不同的特征值，α_{k+1}是属于λ_{k+1}的特征向量, $A\alpha_{k+1}=\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}$

采用反证法，假设存在不全为零的一组实数$b_1,b_2,\dots,b_k$使得

$$\alpha_{k+1}=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_k\alpha_k$$

$$A\alpha_{k+1}=A(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_k\alpha_k)=b_1\lambda_1\alpha_1+b_2\lambda_2\alpha_2+\cdots+b_k\lambda_k\alpha_k$$

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}&=\lambda_{k+1}(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_k\alpha_k)\\&=b_1\lambda_{k+1}\alpha_1+b_2\lambda_{k+1}\alpha_2+\cdots+b_k\lambda_{k+1}\alpha_k\end{aligned}$$

因此$b_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\alpha_1+b_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\alpha_2+\cdots+b_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\alpha_k=0$

因为$b_1,b_2,\dots,b_k$不全为 0，假设$b_i\neq 0$由于$\alpha_j\neq 0(j=1,2,\ \cdots\ ,k)$ ，于是有$\lambda_{k+1}=\lambda_j$,矛盾，因此对于 $n=k+1$ 结论也成立。

例题：3 阶矩阵A的特征值分别为 1,2,3，求$|A^*+E|$

解答：

A的特征值分别为 1,2,3，$|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$

A^*特征值分别为$6,3,2$, $A^* + E$特征值分别为 7,4,3

$$\therefore |A^* + E| = 7 \times 4 \times 3 = 84$$

秩为 1 的矩阵

①$A = \alpha\beta^T, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$

设$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,$a_i$是$n$维列向量。由于$r(A) = 1$，不妨设$a_1 \neq 0$,那么一定存在$k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$,使得矩阵可以表示为

$$A = (a_1, k_2a_1, k_3a_1, \dots, k_na_1) = a_1(1, k_2, k_3, \dots, k_n)$$

令$\alpha = a_1, \beta = (1, k_2, k_3, \dots, k_n)^T$。

②特征值为$\alpha^T\beta(\beta^T\alpha), 0,0, \dots, 0$

由于$r(A) = 1$，方程组$Ax = 0$解空间的维数为$n - 1$，设该空间的一组基为$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.又因为$Ax_i = 0 \cdot x_i, i = 1,2, \dots, n - 1$，因此 0 至少是$A$的$n - 1$重特征值。$A$可以写成如下形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & k_2a_{11} & \cdots & k_na_{11} \\ a_{21} & k_2a_{21} & \cdots & k_na_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & k_2a_{n1} & \cdots & k_na_{n1} \end{bmatrix}$$

设它的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n$.利用特征值的性质：

$$\lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} + \cdots + k_na_{n1} = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha$$

③$tr(A) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

④这种矩阵不一定可以对角化，需要分情况讨论：

当$\alpha^T\beta = \beta^T\alpha \neq 0$，时可以对角化，否则不可以对角化。

当$\alpha^T\beta = 0$时，0 是n重特征值，而特征子空间$\{x: (0 \cdot E - A)x = 0\}$的维数是$n - 1$，特征值 0 的 几何重数不等于代数重数，因此不可以对角化，否则可以对角化。

例题：

1、矩阵A的秩为 1，求A^n

解答：

$$A = \alpha\beta^T,$$

$$\therefore A^n = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\dots(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\dots(\beta^T\alpha)\beta^T = (\beta^T\alpha)^{n-1}A$$

2、矩阵A不满秩，求A^*的特征值。

解答：

当$r(A) < n-1, A^* = O$,此时特征值全为 0。

当 $r(A) = n-1, r(A^*) = 1$， 应 用 以 上 的 结 论 即 可 知 道 A^* 的 特 征 值 为 $0,0,\dots,0,tr(A^*)$。

3、证明：当$r(A) = n-1, r(A^*) = 1$.

解答：

$$AA^* = |A|E$$

当$r(A) = n-1, AA^* = O$,因此$r(A) + r(A^*) \le n$

$$r(A^*) \le n - r(A) = 1$$

由于$A^* \ne 0$,因此$r(A^*) = 1$.

幂等矩阵

①幂等矩阵的特征值只能是 0 或者 1.

$$A^2 = A$$

$$\because A\alpha = \lambda\alpha$$

$$A^2\alpha = A(A\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$$

$$A^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\therefore \lambda^2\alpha = \lambda\alpha$$

$$\lambda = 0\ or\ 1$$

②幂等矩阵一定可以对角化。

$$A^2 = A \Rightarrow A(A-E) = O$$

矩阵A的特征子空间只能是$\{x:(E-A)x = 0\}$、$\{x:(0\cdot E-A)x = 0\}$,其维数分别

为$n-r(E-A)$、$n-r(A)$，下证$[n-r(E-A)]+[n-r(A)] = n$，即需证

$$r(E-A) + r(A) = n$$

由于$A(A-E) = O$，$\therefore r(E-A) + r(A) \le n$

又因为$r(E-A)+r(A)\geq r(E-A+A)=r(E)=n$，因此$r(E-A)+r(A)=n$

所以幂等矩阵一定可以对角化。

特征值 1 的几何重数为$n-r(E-A)=r(A)=r$,特征值 0 的的几何重数为$n-r(A)$，因此

$$A\sim\begin{bmatrix}E_r & \\ & O\end{bmatrix}$$

注意，当$r(A)=n$时，此时幂等矩阵A的特征值只有 1.

幂幺矩阵

$A^k=E$称为k次幂幺矩阵。当$k=2$时，有个漂亮的名字叫对合矩阵。

①对合矩阵的一个充要条件是：

$$(A+E)(A-E)=O$$

②对合矩阵可以对角化，并且

$$A\sim\begin{bmatrix}E_r & \\ & -E_{n-r}\end{bmatrix}$$

其中$r=r(A+E)$

证明：

$$\because A\alpha=\lambda\alpha$$

$$\therefore \alpha=A^2\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$$

$$\lambda=1\ or-1$$

很容易证明$[n-r(A+E)]+[n-r(A-E)]=n$，因此可以对角化。

特征值 1 的特征子空间维数为$n-r(A-E)=r(A+E)=r$，特征值-1 的特征子空间维数为$n-r(A+E)=n-r$.因此

$$A\sim\begin{bmatrix}E_r & \\ & -E_{n-r}\end{bmatrix}$$

幂零矩阵

$A^k=O$称为幂零矩阵，k叫幂零指数。$|A^k|=|A|^k=0\Rightarrow|A|=0$

①幂零矩阵的充要条件是特征值全为 0.

证明：

$$A^k = O，A\alpha = \lambda\alpha$$

$$0 \cdot \alpha = A^k\alpha = \lambda^k\alpha \Rightarrow \lambda = 0(k重)$$

同理不难得到$0 \cdot \alpha = A^n\alpha = \lambda^n\alpha \Rightarrow \lambda = 0(n重, n \geq k)$,因此幂零矩阵的特征值全为 0。

②$A^T, -A, A^n(n \in \mathbb{N}^+), mA(m \in \mathbb{R}), A^*$都是幂零矩阵。

③$E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$是线性无关的。

证明：

设存在$l_0, l_1, \ldots, l_{k-1}$，使得

$$l_0E + l_1A + \cdots + l_{k-1}A^{k-1} = O$$

两边左乘A^{k-1}

$$l_0A^{k-1} = O \Rightarrow l_0 = 0$$

两边左乘A^{k-2}

$$l_0A^{k-2} + l_1A^{k-1} = l_1A^{k-1} = O$$

同理求出$l_0 = l_1 = \cdots = l_{k-1} = 0, E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$是线性无关的。

④若$A + E$是幂零矩阵，那么A非退化。

注意：非奇异的意思是行列式不等于 0,矩阵一定是方阵；非退化是矩阵是满秩的,矩阵不一定是方阵。

证明：

设$(A + E)^k = O$,

$$(A + E)^k = A^k + C_k^1A^{k-1} + \cdots + C_k^{k-1}A + E = O$$

因此

可交换矩阵

结论 1：AB和BA有相同的特征值。

证明：

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ O & \lambda E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \lambda E - B \\ \lambda E & \lambda B \end{bmatrix}$$

两边取行列式

$$\lambda^n\begin{vmatrix}A & \lambda E\\ E & B\end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^n|\lambda E-AB|$$

同理：

$$\begin{bmatrix}E & O\\ -B & \lambda E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & \lambda E\\ E & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & \lambda E\\ \lambda E-BA & O\end{bmatrix}$$

$$\lambda^n\begin{vmatrix}A & \lambda E\\ E & B\end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^n|\lambda E-BA|$$

$$\therefore |\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$$

①可交换的条件：

1）某一矩阵为单位（数量）矩阵；

2）两个矩阵都是对角矩阵；

3）两个矩阵都是准对角矩阵（分块对角阵）；

4）一个为另一个的伴随矩阵；

5）一个为另一个的逆矩阵。（或者$AB=kE,k\in\mathbb{R}$）

②可交换矩阵的性质

1）$AB=BA$;

2）$Af(B)=f(B)A$;

3）$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$

$$=(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})(A-B)$$

4）$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-i}$

可交换矩阵拥有类似于实数的性质。

例题：若A,B是实对称矩阵，当且仅当$AB=BA$时，AB是实对称矩阵。

证明：

充分性：$\because AB=BA$

$$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$$

必要性：A,B,AB是实对称矩阵,

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$$

实对称矩阵与实反对称矩阵

A是实对称矩阵$\Leftrightarrow\overline{A}=A$

①如果λ是A的特征值，α是属于λ的特征向量，那么$\overline{\lambda}$也是A的特征值，$\overline{\alpha}$是属于λ的特征向量。

证明：

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\overline{A\alpha} = \overline{A}\overline{\alpha} = A\overline{\alpha}, \qquad \overline{\lambda\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\alpha}$$

$$\therefore A\overline{\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\alpha}$$

②实对称矩阵的特征值都是实数，实反对称矩阵的特征值只能是 0 或者纯虚数。

证明：

1） 若A是实对称矩阵，$A\alpha = \lambda\alpha$

两边左乘α的共轭转置：

$$\overline{\alpha}^T A\alpha = \lambda\overline{\alpha}^T\alpha$$

两边取共轭转置：

$$\overline{\alpha}^T\overline{A}^T\alpha = \overline{\alpha}^T A\alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha$$

$$\therefore \lambda\overline{\alpha}^T\alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha \Longrightarrow \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\overline{\alpha}^T\alpha = 0$$

由于特征向量都是非零向量，因此$\overline{\alpha}^T\alpha > 0, \therefore \lambda = \overline{\lambda}, \lambda$是实数。

②若A是实反对称矩阵，$A\alpha = \lambda\alpha$

两边左乘α的共轭转置：

$$\overline{\alpha}^T A\alpha = \lambda\overline{\alpha}^T\alpha$$

两边取共轭转置：

$$\overline{\alpha}^T\overline{A}^T\alpha = -\overline{\alpha}^T A\alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha$$

$$\therefore \lambda + \overline{\lambda} = 0$$

因此λ只能是 0 或者纯虚数。

③ A是实对称矩阵，λ_0是k重特征值，那么属于λ_0的线性无关的特征向量有k个。

证明：

④实对称矩阵必定可以对角化。

证明：根据③很容易证明。

矩阵的三种分解

（一）QR 分解

（二）谱分解

（三）SVD 分解