# 第五次习题课讲义

2018/05/27

## 习题攻坚

P228，6

设矩阵A的QR分解是，证明：存在m阶正交矩阵，使得

解答：

通过向矩阵添加适当的列，将其扩展为m阶正交矩阵。

这样做的可能性：根据QR分解的特点，矩阵Q的列向量构成一组n维标准正交基，故其可以扩展为m阶正交矩阵。

易知，根据分块矩阵乘法的特点，

P228，7

设矩阵A的QR分解是，并设，其中是矩阵，试给出的QR分解，证明你的结论。

解答：

分别将矩阵Q和R进行分块：

其中是矩阵，其中是矩阵；是矩阵，是矩阵，是矩阵，是零矩阵。

，下面证明这是的QR分解。

因为是正交矩阵，而是对列分块得到的矩阵，因此也是正交矩阵。

是上三角矩阵，根据的分块特点，容易知道也是上三角矩阵，因此是的QR分解。

课件例题3

求最小二乘问题的全部解，其中

解答：

因此无解。构造正规方程

，不可逆，

因此的一个特解为。又因为

因此齐次线性方程组的通解为。

因此的通解为

## 练习题

1 有二阶矩阵,试问是否存在可逆矩阵使得？

解答：

因此

2 设均为阶对称矩阵，如果对于任意都有,证明。

解答：

条件给出对于任意……，那么就取一些特殊的情况，本题的取法是一种很常见的方法。

设

分别取,代入上面的式子，可以得到

再取, 代入上面的式子，可以得到

由于均为阶对称矩阵，，因此

所以。

3 已知二次型的秩为2,

(1)求参数；

(2)将二次型化为标准型后写出其规范形式，并求出符号差。

解答 ：

(1)

因此。

(2)

将对角化，,

对应的特征向量为;

对应的特征向量为;

对应的特征向量为;

将正交化后再单位化，得到

构造

因此作替换，可以将二次型化为标准型

再做替换，可以化为规范性。

符号差为2.

4 设矩阵与合同，与合同，证明与合同。

解答：

因为与合同，与合同，则存在可逆矩阵使得

构造,则

5 求二次型

的矩阵。

解答：

构造矩阵,

6 将下面的二次型化为标准型

解答：

作如下替换：

替换矩阵为：

7 将下面的二次型化为标注型

解答：

本题采用配方法：

作如下替换：

求法小tip:从最后一行开始作行变换求逆矩阵比较容易。

8 证明：秩为的对称矩阵可以表示为个秩为1的对称矩阵之和。

解答：

设为阶对称矩阵，。则存在可逆矩阵使得

设为主对角线上第个元素为,其余元素为0的对角矩阵，显然

，因此秩为的对称矩阵可以表示为个秩为1的对称矩阵之和。

9 设为阶实对称矩阵。证明：存在正实数，对任意维向量都有

解答：

因为为阶实对称矩阵，故存在正交矩阵使得

其中是的全部特征值，并且都是实数。

非齐次线性方程组有唯一的解，设解为,于是

这里