# 第一次习题课讲义

### 解题步骤规范化

以第三题为例，“三步走”。

3（1）

第一步：根据特征行列式的方程求出特征值。

解得.

第二步：分别求解特征向量。

从而是A属于 的全部特征向量； A属于 的全部特征向量。

### 计算小技巧的使用

3（2）

对行做线性变换的时候，不一定非要以第一行为变换的基准，观察第二行第一个元素是4的一半，同时可以消去第一行i-3这个元素中的“-3”。

2(7)

这题一点不难，就是一点太难算！！！！！四阶以上的行列式算得上是“高阶”的了，据我的不可靠的考试经验，四阶以上的矩阵在出题的时候一般都是对称矩阵。下面的套路仅适用于对称矩阵！

这个行列式的特点就是每一行（列）所有元素求和都相等（），利用这个特点有个简便方法：

最后一步利用代数余子式也可以稍微减轻一下运算的难度。

### 迷之第十题

10

其中,\*表示任意数，又设是A的一个特征值，证明的几何重数是1.

**解答：**

证明的几何重数是1，等价于证明方程的基础解系中只有一个非零解。由于方程的基础解系中解得个数等于,所以本题实际上是在证明

由于是A的一个特征值，所以方程也就是说

又因为，可以得到，所以证明了。

### 考研题目拓展

1. 已知n阶矩阵A和B，证明：AB与BA有相同的特征值。

解答：

本题的关键之处是证明。

回忆分块矩阵的行（列）变换：

应用这个，如何分别构造出。

两边取行列式，得到

继续构造：

两边取行列式，得到

注意到，所以，所以得到了。

1. 已知3阶矩阵A的特征值分别为1,2,3，求。

解答：

知识点回忆：

1. 若A的特征值为,那么的特征值为,的特征值为。
2. A的所有特征值求积为。

本题可以尝试求得所有的特征值。

由于A的特征值分别为1,2,3，那么, 的特征值为，的特征值为6,3,2，的特征值为5,2,1.所以

1. 已知A是秩为1的矩阵，求出A的全部特征向量。

解答：

回忆：秩为1的矩阵有如下的良好性质：

因为,将A按列写成分块矩阵的形式

一定存在某个是这组向量的基向量，不妨设为,从而存在使得

于是A可以表示为

其中是列向量，是行向量，所以秩为1的矩阵可以写成一个列向量与一个行向量的乘积。令,,所以

因为，所以方程的基础解系有n-1个线性无关的解，记为，所以

所以是A的n-1个特征向量。又因为这些特征向量是线性无关的，所以0是A的n-1重特征根。根据特征根的性质：

所以.

所以A的特征根为,0,0,…,0。