# 第三次习题课讲义

## 2018/04/15

P170，例题18

设A为三阶实对称矩阵，且满足,已知，求A的全部特征值。

解答：

因为

易证明。（需要写出证明过程哦）

因为，所以,0是A的一个特征值。

0所对应的齐次线性方程为，其几何重数因此为, 参见教材P241-P242定理8.3，所有的实对称矩阵均可以对角化。于是0的代数重数一定也为1，因此0是一重根。

因为，所以,-2是A的一个特征值。

0所对应的齐次线性方程为，其几何重数因此为,由于实对称矩阵一定可以对角化，因此-2是二重根。

P171,例题22

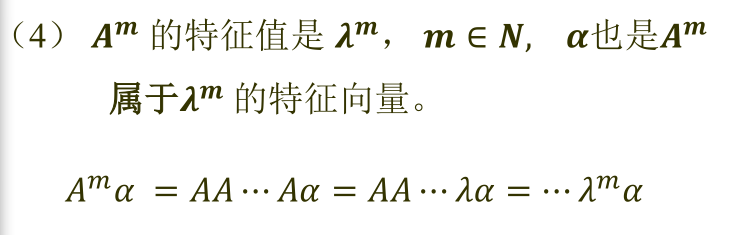
设A,B是两个特征值都是正数的阶实矩阵，证明如果，那么A=B。

解答：

设是A的特征值，是对应的特征向量，于是有

于是是的特征值，是对应的特征向量。

根据特征值的性质，是的特征值，且B的特征值都是正的，所以是B的特征值，是对应的特征向量。可参考PPT6.1第29页



因此A和B有相同的特征值，从而有相同的特征多项式，设为。根据凯莱-哈密尔顿定理，有.

再把拆为奇次幂项和偶次幂项两部分，其中和都是只含的偶次幂项的多项式。

那么。

因为，所以，也就是，.

可以得到。

下面只需证明可逆，便能得到A=B。证明可逆，等价于证明对于A的任何特征值,有。

采用反证法，假设，于是，此时可以得到。于是，这说明也是A的特征值，与A只有正特征值矛盾，因此。可逆。

例题3

列向量和是空间的两组基，线性变换在和下的矩阵分别为A和B，证明A与B是相似的。

解答：

设是到的过渡矩阵，

因为,

所以

# 第五次作业

重点：解题步骤、线性空间知识的回顾

P194,3

设是四维线性空间V的一组基，已知线性变换在这组基下的矩阵为

1. 求在基下的矩阵；
2. 求的核与值域
3. 在的核中选一组基，把它扩充为V的一组基，并求在这组基下的矩阵
4. 在的值域中选一组基，把它扩充为V的一组基，并求在这组基下的矩阵

解答：

(1)

记线性变换在下的矩阵为。

易知到的过渡矩阵为

设线性变换在下的矩阵为

等式左边

等式右边

因此

(2)

设，因为

因此的维数为，

的维数等于2，因此

(3)

因此扩充成V的基为

根据第一问的结果，在这组基下的矩阵为

(4)

因此扩充成V的基为

根据第一问的结果，在这组基下的矩阵为

P195,6

设V是三阶实反对称矩阵空间，

求V上的线性变换的特征值与特征向量

解答：

第一步：写出V的一组基

第二步：写出这组基在线性变换下变换

第三步：写出在下的矩阵：

在实数域只有一个特征值,对应的特征向量为

# 第六次作业

P214,10

设W是的子空间，证明：存在矩阵A，使得

解答：

设是的一组基（与都是的子空间，因此它们的基向量都是维的。本题要求矩阵A，所以构造的基有*m*个），令,对，由于,

于是有

P214,11

设W是的子空间，证明：

解答：

设是的一组基,记,所以。根据上一题的结论有

# 第六章综合习题

1、设为3阶矩阵，是的三个特征值，相应的特征向量依次为，若矩阵，求.

解答：

容易知道

2、设矩阵:

1. 判断是否可以对角化？若可以对角化，试求可逆矩阵和对角矩阵，使。
2. 设向量,求。

解答：

(1)

分别解出-2的特征向量为，6的特征向量为和。所以可以对角化，

(2)容易计算出

3、设3阶矩阵*A*的各行元之和均为 3 ，向量, 是齐次线性方程组*A x* = 0 的两个解，求矩阵*A*的全部特征值与特征向量。

解答：

3是一个特征值，是一个特征向量。

0是一个特征值，是对应的特征向量。

4、可以对角化，, 是矩阵 *A*的二重特征值，求参数 *x* 和 *y* 的值.

解答：

因为A可以对角化，所以的几何重数等于代数重数，即方程是基础解系中应该有2个解，

解出

5、设矩阵可逆，向量 是矩阵 *A* 的逆矩阵 *A*−1 的一个特征向量，是所属的特征值，试求 *a* 、*b* 和 *λ* 的值。

解答：

解得或者。

6、矩阵的一个特征值为 −3，且*A*的三个特征值之积为 −12，确定 *x* 和 *y*的值.

解答：

易知

解出来.

7、设 *A* 为3阶矩阵，为矩阵*A* 的分别属于特征值 −1和1 的特征向量，满足，证明线性无关.

解答：

由已知条件

不同特征值的特征向量是线性无关的，因此线性无关。

方法一：反证法

假设线性相关，即存在不全为0的,

两边式子同时左乘A

又因为

因此,

由于,而此时与线性无关矛盾。

因此线性无关.

方法二:

设

两边同时左乘矩阵A，得到

根据已知条件,,

因为线性无关，

得到

因此线性无关.

8、设矩阵,讨论：

(1) 当为何值时, 相似于对角矩阵;

(2) 当为何值时, 不相似于对角矩阵

解答：

所以矩阵A的特征值分别为。

1. 当,即时，,1是A的二重特征值。

注意到,A不可以对角化。

1. 当,即时，,2是A的二重特征值。

注意到,A不可以对角化。

1. 当时，A有三个不同的特征值，因此可以对角化。

9、若,求。

解答：

设,其中,O为2阶零矩阵，

由分块矩阵的乘法公式不难得到：

的特征值为5，-1，对应的特征向量分别为，可以对角化。

是的特征值为1（二重），特征向量为（1,0），不可以对角化。

的对角化形式为。

求解需要使用凯莱哈密尔顿定理。

将代入上面，解得。

因此

所以