# 第二次习题课讲义

## 作业题讲评

P184,7

已知相似，求与。

解答：

A与B相似，说明A的特征值为。

根据特征值求和与求积的性质

解得

P185,8

已知有特征值，问A是否可以对角化？

解答：

解得,,A还有一个特征值为-2.

分别求得的特征向量为,的特征向量为,的特征向量为,可以对角化。

P185,10

取何值时，可对角化？

解答：

要的几何重数等于其代数重数（也就是2），必须有.

要的几何重数等于其代数重数（也就是2），必须有.

易知的选取是任意的。

P185，15

设A是n阶对合矩阵，即，证明

其中。

解答：

本题实际上是要证明A可以对角化。首先求出A的特征值,设为，属于该特征值的特征向量设为,根据定义有

因为，，所以。

所以A有两个特征值1和-1。

1的特征子空间为,它的维数为.

-1的特征子空间为,它的维数为.

下面证明,即证明。

显然.又因为

所以.

因此A可以对角化。特征值1的几何重数（特征子空间维数）为

.

P190，4

已知,求.

解答：

分别将代入，得到

再求导，

将代入，得到.联立以上三式，得到

P191,8

设,求

解答：

因此有

分别将特征值得到

根据凯莱-哈密尔顿定理，(不必算出具体的数值)

## 遗留的问题

例题8

设证明,其中.

解答：

于是A有特征值0或者1。

根据定理6.6（教材P182）,只需证明,其中

这说明,只需证明,也就是

由于，所以.又因为.所以.

于是.矩阵A可以对角化

例题9

设n阶矩阵A的秩为1，求A的全部特征值，并判断A是否可以对角化。

解答：

1. 因为,将A按列写成分块矩阵的形式

一定存在某个是这组向量的基向量，不妨设为,从而存在使得

于是A可以表示为

其中是列向量，是行向量，所以秩为1的矩阵可以写成一个列向量与一个行向量的乘积。令,,所以

因为，所以方程的基础解系有n-1个线性无关的解，记为，所以

所以是A的n-1个特征向量。又因为这些特征向量是线性无关的，所以0是A的n-1重特征值。根据特征值的性质：

所以.

所以A的特征根为,0,0,…,0。

1. A不一定可以对角化。

的代数重数.

若，由于，所以的基础解系中有n-1个线性无关的向量，的几何重数等于代数重数，此时A可以对角化。

若，的代数重数为n，显然不能对角化。

例题 n阶方阵A不满秩，求的特征值。

解答：

仅考虑的情形，已知。

当，,此时的特征值全为0。

当,,

根据上题结论，有n-1个为0的特征值，另一个特征值为

练习3

设,且,求。

解答：

设,

求得矩阵A的特征值为-1和2.对应的特征向量分别为.于是构造

## 拓展习题

例题1

2阶方阵A各行的元素之和为2，满足方程,求A的特征值与特征向量，并求出矩阵A.

解答：

因为2阶方阵A各行的元素之和为2，所以

因此2是A的一个特征值，是A的一个特征向量。

又因为,所以，0是A的一个特征值，是A的一个特征向量。

构造矩阵

例题2

2阶方阵A满足,,求A的全部特征值。

解答：

因为,所以,0是A的一个特征值。

因为,,所以-2是A的一个特征值。

## 比较对角化和凯莱-哈密尔顿定理两种方法的优劣

,求.

方法1：使用对角化的办法。

构造出,,

所以

方法2：使用凯莱-哈密尔顿定理。

于是有

又因为

结论：凯莱-哈密尔顿定理处理步骤更为复杂，但是根据前面可以知道这个方法可以直接处理高次幂多项式问题。不到万不得已不用凯莱-哈密尔顿定理！

## 本章的知识脉络

1解决问题。

求出A的所有特征值和特征向量（若线性无关），那么有

于是便可以计算

2解决问题。

1. 可以对角化的矩阵

根据,求出所有特征值和特征向量。构造和对角阵,于是

1. 不可以对角化的矩阵

使用凯莱-哈密尔顿定理。设A为k阶矩阵，.于是可以构造

通过代入所有特征根（若是s重根，则可求s-1次导再代入）解方程

得到了所有的待定系数。最后求出。

数量（单位）矩阵的相似矩阵只能是数量（单位）矩阵