# 第五次习题课讲义

2018/05/27

## 习题攻坚

P228，6

设矩阵A的QR分解是，证明：存在m阶正交矩阵，使得

解答：

通过向矩阵添加适当的列，将其扩展为m阶正交矩阵。

这样做的可能性：根据QR分解的特点，矩阵Q的列向量构成一组n维标准正交基，故其可以扩展为m阶正交矩阵。

易知，根据分块矩阵乘法的特点，

P228，7

设矩阵A的QR分解是，并设，其中是矩阵，试给出的QR分解，证明你的结论。

解答：

分别将矩阵Q和R进行分块：

其中是矩阵，其中是矩阵；是矩阵，是矩阵，是矩阵，是零矩阵。

，下面证明这是的QR分解。

因为是正交矩阵，而是对列分块得到的矩阵，因此也是正交矩阵。

是上三角矩阵，根据的分块特点，容易知道也是上三角矩阵，因此是的QR分解。

课件例题3

求最小二乘问题的全部解，其中

解答：

因此无解。构造正规方程

，不可逆，

因此的一个特解为。又因为

因此齐次线性方程组的通解为。

因此的通解为

## 练习题

1 设是的子空间，，证明：的充要条件是

解答；

充分性显然，下面证明必要性。

已知，取的一组标准正交基为,并将其扩展为的一组标准正交基,设

因为当且仅当

因此。

2 设是欧氏空间的线性变换，则对任意，的充要条件是

解答：

必要性：

已知,取

充分性：

已知,，

即

因此

3 设是的最小二乘解，,是在上的正交投影，证明：

解答：

本题的关键在于证明.

最小二乘解的定义是

设的一组标准正交基为,将其扩展为n维欧氏空间的一组标准正交基(n为的维数)，设

正交投影的定义是

因此

由正交投影的唯一性，

因为且，因此

4 设都是维欧氏空间的线性子空间，且的维数小于的维数，证明必有一个非零向量与中一切向量都正交。

解答：

本题可以证明

设,则

移项可得。证毕

5 有二阶矩阵,试问是否存在可逆矩阵使得？

解答：

因此

6 是一个维欧氏空间，是的一个标准正交基，是的一个线性变换，是在这组基下矩阵，证明

解答：

由于是的一个标准正交基，

7 设4阶实对称矩阵的特征值是,已知属于特征值1的特征向量是

求矩阵.

解答：

设属于特征值-3的特征向量是，易知

得到

构造矩阵那么

8 设均为阶对称矩阵，如果对于任意都有,证明。

解答：

条件给出对于任意……，那么就取一些特殊的情况，本题的取法是一种很常见的方法。

设

分别取,代入上面的式子，可以得到

再取, 代入上面的式子，可以得到

由于均为阶对称矩阵，，因此

所以。

9 已知二次型的秩为2,

(1)求参数；

(2)将二次型化为标准型后写出其规范形式，并求出符号差。

解答 ：

(1)

因此。

(2)

将对角化，,

对应的特征向量为;

对应的特征向量为;

对应的特征向量为;

将正交化后再单位化，得到

构造

因此作替换，可以将二次型化为标准型

再做替换，可以化为规范性。

符号差为2.

10 设矩阵与合同，与合同，证明与合同。

解答：

因为与合同，与合同，则存在可逆矩阵使得

构造,则