# 第六次习题讲义

2018/06/10

注意：正定性是对称矩阵的性质！

证明正定的方法：

①具体形式的矩阵，可以先对角化（化为标准型），或许计算顺序主子式；

②没有具体形式的矩阵，用定义，或者用特征值判断，或者找到可逆矩阵，使得

1、设为矩阵，已知，证明：当时，矩阵为正定矩阵。

解答：对于

因为，，因此

2、设二次型

问取何值时，为正定二次型。

解答：

的矩阵为

的各阶主子式为

解得时，二次型是正定的。

3、判断二次型

的正定性

解答：

的矩阵为

的各阶主子式为

既不是正定的，也不是负定的，它是不定二次型。

4、判断二次型

是否正定。

解答：

的矩阵为

根据，可以计算出的任意阶顺序主子式，所以是正定二次型。

5、证明：若矩阵为正定矩阵，则的一切主子式都大于0.

解答：（本题采用反证法）

设是正定矩阵，，若存在阶主子矩阵(注意与顺序主子式的区别)

因为是实对称矩阵，因此可以对角化，存在阶正交矩阵使得

其中是的特征值。

由于,因此的特征值至少有一个为负，不失一般性，设。令

令，采用如下方法构造：

当时，，否则，则

这与是正定矩阵的假设矛盾。

本题说明正定矩阵的任意主子矩阵也是正定矩阵。

6、对任意可逆矩阵，都有是正定矩阵，证明是正定矩阵。

解答：

与合同，而合同不改变正定性。

7、对任意的实对阵矩阵，一定存在，使得是正定矩阵。

解答：

可以对角化，存在正交矩阵，使得。

实对阵矩阵的特征值都是实数，设绝对值最大的特征值为，取。

根据的定义，是正定矩阵。

8、设二次型

当满足什么条件时，是正定二次型？

解答：

①当是偶数的时候，设，的矩阵为

于是

,解得

②当是奇数的时候，设，的矩阵为

于是

,解得

综上所述，时，是正定二次型。

9、设是阶实反对称矩阵，证明它的特征值只有零和纯虚数。

解答：

,设是的特征值，是属于的特征向量。

两边同时左乘的共轭转置

上式两边取共轭转置，

上面两式求和

因为,因此, 只能是零和纯虚数。

10、设是阶正定矩阵，证明：存在唯一的正定矩阵，使得。

解答：

因为是实对称正定矩阵，则存在正交矩阵使得

这里，，令

是正定矩阵，并且.

下面证明唯一性。

设存在正定矩阵,使得.

定义

是实反对称矩阵，用上一题的结论，因此它的特征值只有零和纯虚数。

易知是正定矩阵，由刚刚证明的结论，存在正定矩阵(也是对称矩阵)，使得

于是

是实对称矩阵，因此它的特征值都是实数。又因为与相似，因此它们有相同的特征值，因此的特征值只能是实数。结合前面，的特征值只能是0,因此。

注意到可逆，因此.。唯一性得证。

1. 列正交矩阵与正交矩阵
2. 正定矩阵，看绝对值最大元所在的位置