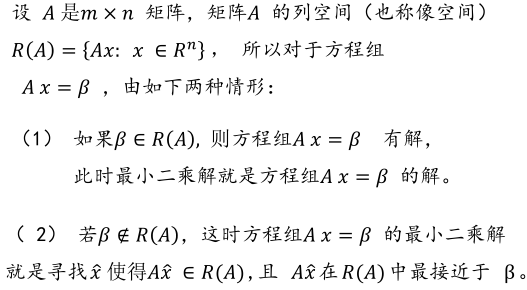
# 第四次习题课讲义

### 2018/5/13

## 知识点巩固

### 一、关于最小二乘法：



回忆，将矩阵按列写成分块形式：,那么,令，则：

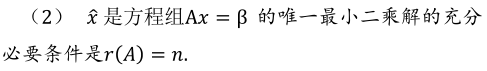
（1）

这意味着一旦,一定存在，使得。

如此，那么就要找到使得最小。

得到的规范方程为：

因此有唯一解的充要条件是列满秩（，此时可逆）。



### 二、关于矩阵多项式与特征值多项式

对于，如果，那么

证明：

设为矩阵的特征向量，那么

由于，因此

## 习题攻坚

P218,1

证明向量组 是的一组正交基，并求在这组基下的坐标。

解答：

只求坐标。

P223,10

设是矩阵。证明：对任意向量,存在唯一的和，使得。

解答：

本题和下一题的套路：先证明存在性，再证明唯一性。

存在性：

设的行向量组为，其中，此时。且有

又因为的充要条件是。这等价于

因此对于任意，均有。所以

取在子空间上的投影为，构造,则。存在性得证。

唯一性：

假设分解不唯一，那么有

于是有。因为。

因此,,同理.分解是唯一的。

P223,11

设A是矩阵，是中的向量，且线性方程组有解。证明：存在唯一的，使得。

解答：

存在性：

因为线性方程组有解，于是存在，使得.

利用正交分解定理，对存在唯一的分解：

其中。需要提前证明.

于是

于是存在，使得。

唯一性：

若还存在，使得。易知

那么，即

因此

因此，,唯一性得证。

P227,1（2）

Schmidt正交化的计算实在是太麻烦了，而且出错率还很高。此处推荐一个有条理的算法，希望可以让计算过程减少错误，尽快得到答案。

求矩阵列空间的标准正交基：

解答：

是由生成的子空间。且这三个向量是该空间的一组基。下面进行Schmidt正交化：

注：上面是顺便算出来的。

由于,为了减少计算中犯错误的可能，现对该式中每一项单独计算再汇总：

因此

*,*

此处有个小技巧：中的元素最好写成互质的整数，方便最后求标准正交基。因为化为单位向量的时候，可以写成，结果与前面的分数无关，因此写成整数的形式可以减少计算量。

由于，同样

因此

最后单位化：

P228,5

证明QR分解是唯一的。

解答：

注意：QR分解的前提是矩阵A是列满秩的！

假设存在两种QR分解:

那么

同理可得

注意：此处不能用，因为A是列满秩，此时可逆，但是不一定可逆。且一定要注意的是但是

因此

因为和都是对角元为正的上三角矩阵，所以都可逆，因此，于是得到

## 第六章、第七章综合习题

1、阶矩阵满足，其中，则可对角化。

解答：

思路：证明。

2、和是两个阶矩阵，如果，那么。

解答：

因为，那么存在可逆矩阵P，使得。

因此。

3、设表示元素全为1的矩阵()，设是有理数域上的二元多项式，令.

(1)求的特征值与特征向量

(2)是否可以对角化?

解答：

(1)

因此的特征值为0（重）和。，因此它的特征值为1（重）和。

计算，得到个线性无关的特征向量：

属于1的全部特征向量为,不全为零。

计算，得到特征向量为：

(2)

可以对角化。令

可逆，

4、证明正交矩阵的实特征值只能为。（是否为充要条件？）

解答：

设是阶正交矩阵，是它的任意一个特征值，设是属于的特征向量。

因此，。

如果是复数，那么正交矩阵的复特征值为

5、A是实反对称矩阵，证明可逆，并且是正交阵。

解答：

任意,有。

因此，，。

方程只有零解，于是可逆。

设，证明即可。

6、如果是下列方程组

的解空间，求和，并求出各自的标准正交基。

解答：

的一组标准正交基为

的一组标准正交基为

7、证明Cauchy-Schwarz不等式：

解答：

任取,

取，那么上面不等式可以化为

移项可以证明。

8、设是维欧氏空间中一组两两正交的单位向量组，证明

解答：

将扩展为的一组标准正交基由教材P216的定理7.5

9、设是一维欧氏空间，是中一固定向量。

(1)证明是的一个子空间；

(2)证明的维数是。

解答：

(1)

对于任意，和实数.

因此，是V的一个子空间。

(2)

因为V是一n维欧氏空间，于是可以构造V的一组标准正交基为

易知,因此