第 2 章、无限时期模型与世代交替模型

Infinite Horizon and Overlapping-Generations Models

注意：两个模型储蓄内生化但不是内生增长模型，后者指技术进步内生化。

A 部分: Ramsey-Cass-Koopmans 模型

2.1 假设

1) 厂商

✧ 生产函数: $Y(t)=F(K(t), A(t)L(t))$. 关于 F 的假设与第一章相同。

- ✧ 要素市场和产出市场都是竞争性的。
- ✧ 厂商利润最大化。家庭拥有厂商（企业）。

2) 家庭

家庭效用最大化

$$\max \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} dt$$

此处，

C(t): 家庭中每个成员的消费,

u(.): 瞬时效用函数,

L(t): 经济的总人口, dL(t)/dt = nL(t)

H: 家庭的数量,

u(C(t))L(t)/H: 家庭的总瞬时效用,

ρ: 贴现率

K(0): 初始资本

瞬时效用函数为：

$$u(C(t)) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \qquad \theta > 0, \qquad \rho - n - (1-\theta)g > 0.$$

【后面将定义 $\beta \equiv \rho - n - (1-\theta)g.$，而β的含义是确保总效用收敛，故为正的假设是合理的】

- 常数相对风险厌恶效用函数（Constant-relative-risk-aversion (CRRA) utility function）：相对风险厌恶系数为-Cu”(C)/u’(C)= θ
- RRA 系数: θ
- 跨期替代弹性（Elasticity of substitution）: 1/ θ

———————————————————

补充材料：

严格定义：

- Constantinides（1990）和Weil（1989）按照投资者的值函数来定义投资者的RRA系数，$\mathrm{RRA} \equiv -\frac{WJ_{WW}}{J_W}$，将RRA系数进一步表示为投资者的值函数关于财富的弹性，得到：$\mathrm{RRA} = -\frac{dJ_W / J_W}{dW / W}$。因此，投资者的RRA系数的含义是投资者的财富变动1个百分点，投资者的边际效用变动多少个百分点。RRA系数刻画了投资者关于风险

的态度。

- 投资者的IES系数则定义为当股票的溢价 $\mu - r$ 保持不变时，经济中利率水平增加1个单位，投资者的最优消费增长率增加的幅度，即如下偏微分：$\text{IES} \equiv \dfrac{\partial[E(dC/C)/dt]}{\partial r}\bigg|_{\mu - r}$
- 当投资者的效用函数为CRRA时，投资者的RRA系数和IES系数互为倒数：RRA×IES＝1。当投资者的效用函数不再是CRRA时，以上关系式就不再成立。

相对风险规避系数的含义：

假设某个投资者获得一笔奖金，并且必须在两种支付方法之间选择一种支付方法。

第一种支付方法是确定的：投资者得到数量确定的 $C - \rho$ 。

第二种支付方法是不确定的：投资者以 50％的概率得到较多的 $C+y$，以 50％的概率得到较少的 $C-y$。

那么，多大的ρ可以使得投资者对于这两种支付方式是无差异的？投资者对于两种支付方式是无差异的，因而ρ的选择使得如下方程成立，

$$u[C-\rho(C,y)]=0.5u(C+y)+0.5u(C-y)$$

其中 $\rho(C,y)$ 表示ρ是 C 和 y 的函数，$u(\cdot)$ 是严格增加的、严格凹的效用函数。

将 $u[C-\rho(C,y)]$ 在 C 点处泰勒展开，得到

$$u[C-\rho(C,y)]\approx u(C)-\rho u'(C)$$

将 $u(C+y)$ 在C点处泰勒展开，得到

$$u(C+y)\approx u(C)+yu'(C)+0.5y^2u''(C)$$

将 $u(C-y)$ 在C点处泰勒展开，得到

$$u(C-y) \approx u(C) - yu'(C) + 0.5y^2u''(C)$$

合并，得到

$$\rho(C,y) \approx \frac{1}{2}\frac{y^2}{C}\left[-\frac{Cu''(C)}{u'(C)}\right]$$

因此，只要投资者是风险规避型的投资者，即 $u''<0$，那么 $\rho(C,y)$ 就会大于 0。也就是说，不确定性将会降低投资者的效用水平，风险规避型的投资者需要一定数量的补偿。

下面给出 CRRA 效用函数中的 RRA 系数的含义。将 CRRA 型效用函数代入方程（8.5）右边，得到

$$\frac{\rho}{y} \approx \frac{\alpha}{2}\frac{y}{C}$$

对于给定的 C 和 y，ρ越大，α就越大。而更大的ρ意味着投资者在面临同样的不确定性时，宁愿选择更小的确定性支付数量。参数α越大，投

资者就惧怕风险。因此，参数α确实刻画了投资者惧怕风险的程度。

通过设定假定的情景（给定 C 和 y），可以调查投资者的ρ是多少。然后就可以估计投资者的相对风险规避系数。大量的统计调查表明一般的美国投资者的α是小于 2 的。

————————————————————————

2.2 家庭与厂商的行为

1) 厂商

假设资本没有折旧。厂商最优使用资本和劳动以最大化利润

$$\pi(K, L) = F(K, AL) - rK - wAL$$

w 是单位有效劳动的实际工资。

此规划问题的关于资本的一阶条件为

$$F_K = r = f'(k)$$

关于有效劳动 AL 的一阶条件为

$$F_{AL} = w = f(k) - kf'(k)$$

Hint: Y=F=ALf(K/AL)

因此，人均工资为 W(t)=A(t)w(t)

2) 家庭的预算约束

家庭将 r 和 w 视为给定。

定义 $R(t)=\int_{s=0}^{t} r(s)ds$ 。

问题： 0 时刻投资一单位产出，在 t 时获得的回报为 $e^{R(t)}$ 。[why?]

解答： 将[0,t]分为 n 个Δt。0 时投资 1 单位产出 t 时回报为

$$X=(1+r_1\Delta t)\ldots(1+r_n\Delta t)$$

取对数，$\ln X=\sum\ln(1+r_i\Delta t)=\sum r_i\Delta t=\int_0^t r(\tau)d\tau$ 。 因此， $X=e^{\int_0^t r(\tau)d\tau}$

家庭的预算约束方程为

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}C(t)\frac{L(t)}{H}dt \le \frac{K(0)}{H}+\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}W(t)\frac{L(t)}{H}dt$$

【家庭的预算约束方程：左边是生命期内消费的总现值；右边是初始财

富+工资性收入的总现值，右边本来还有一项——拥有企业所获得的利润，但是产品市场竞争性假设和生产函数规模报酬不变假设，导致利润等于 0】

变形得到

$$\frac{K(0)}{H}+\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}[W(t)-C(t)]\frac{L(t)}{H}dt \geq 0$$

可以记为

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{K(0)}{H}+\int_{t=0}^{s} e^{-R(t)}[W(t)-C(t)]\frac{L(t)}{H}dt\right\} \geq 0$$

家庭在 s 时刻的资本持有数量为

$$\frac{K(s)}{H}=e^{R(s)}\frac{K(0)}{H}+\int_{t=0}^{s} e^{R(s)-R(t)}[W(t)-C(t)]\frac{L(t)}{H}dt$$

因此，家庭的预算约束方程可以记为

$$\lim_{s\to\infty}\left\{e^{-R(s)}\frac{K(s)}{H}\right\}\geq 0$$

含义：极限中家庭所持有资产的现值不能为负。此为非 No-Ponzi-game Condition。禁止庞氏博弈条件

3) 家庭的最大化问题

定义 $c(t)=C(t)/A(t)$，那么家庭的效用函数可以记为

$$\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{[A(t)c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$= \frac{[A(0)e^{gt}]^{1-\theta}c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$= A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

由于 $L(t) = L(0)e^{nt}$，所以

$$
\begin{aligned}
U &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(t)}{H}\, dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \left[A(0)^{1-\theta} e^{(1-\theta)gt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \right] \frac{L(0)e^{nt}}{H}\, dt \\
&= A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} e^{(1-\theta)gt} e^{nt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt \\
&\equiv B \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt,
\end{aligned}
$$

此处，

$$
B \equiv A(0)^{1-\theta} L(0)/H \text{ and } \beta \equiv \rho - n - (1-\theta)g
$$

下面把预算约束方程也改写为单位有效劳动的形式。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} \, dt \le \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} W(t) \frac{L(t)}{H} \, dt.$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) \frac{A(t)L(t)}{H} \, dt \le k(0) \frac{A(0)L(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) \frac{A(t)L(t)}{H} \, dt.$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(n+g)t} \, dt \le k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) e^{(n+g)t} \, dt.$$

此处使用了 $A(t)L(t)$ equals $A(0)L(0)e^{(n+g)t}$.

可以将预算约束的 No-Ponzi-game Condition 改写为：

$$\lim_{s \to \infty} e^{-R(s)} e^{(n+g)s} k(s) \ge 0.$$

4) 家庭行为（家庭的规划问题以及离散化求解方法）

家庭的效用最大化问题可以表示为如下规划问题：

$$\max\left\{B\int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt\right\}$$

s.t.

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}c(t)e^{(n+g)t}dt \le k(0)+\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}w(t)e^{(n+g)t}dt$$

如何求解?

此规划问题的目标函数和预算约束方程都是连续时间表达形式。我们采用离散化目标函数和预算约束方程的求解方法。因此，得到如下新的规划问题

$$\max\left\{\sum_i Be^{-\beta t_i}\frac{c(t_i)^{1-\theta}}{1-\theta}\Delta t_i\right\}$$

s.t.

$$\sum_i e^{-R(t_i)}c(t_i)e^{(n+g)t_i}\Delta t_i \le k(0)+\sum_i e^{-R(t_i)}w(t_i)e^{(n+g)t_i}\Delta t_i$$

从黎曼可积的角度来看，上述新规划问题等价于老规划问题。而新规划问题是典型的离散时间规划问题，因此可以采用拉格朗日方法进行求解。构造拉格朗日方程为

$$\max_{c(t_i)}\sum_i Be^{-\beta t_i}\frac{c(t_i)^{1-\theta}}{1-\theta}\Delta t_i+$$
$$\lambda(-\sum_i e^{-R(t_i)}c(t_i)e^{(n+g)t_i}\Delta t_i+k(0)+\sum_i e^{-R(t_i)}w(t_i)e^{(n+g)t_i}\Delta t_i)$$

其中λ为预算约束方程所对应的拉格朗日乘子。拉格朗日函数关于消费$c(t_i)$的一阶条件为

$$Be^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta}\Delta t_i = \lambda e^{-R(t_i)}e^{(n+g)t_i}\Delta t_i$$

消掉时间微分，得到

$$Be^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta} = \lambda e^{-R(t_i)}e^{(n+g)t_i}$$

考虑到时间的任意性，得到

$$Be^{-\beta t}c(t)^{-\theta} = \lambda e^{-R(t)}e^{(n+g)t}$$

变形得到

$$c(t)^{-\theta} = \frac{\lambda}{B}e^{\beta t-R(t)+(n+g)t}$$

方程两边对时间求导，得到

$$-\theta c(t)^{-\theta-1}\dot{c}(t) = \frac{\lambda}{B}e^{\beta t-R(t)+(n+g)t}(\beta - r(t)+n+g)$$

上面两个方程相除，得到如下连续时间形式的欧拉方程（Euler equation）

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-\beta-n-g}{\theta}=\frac{r(t)-\rho-\theta g}{\theta}$$

第二个等号使用了定义$\beta=\rho-n-(1-\theta)g$

还可以计算人均消费 C 的增长率

$$\begin{aligned}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}&=\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\\&=g+\frac{r(t)-\rho-\theta g}{\theta}\\&=\frac{r(t)-\rho}{\theta},\end{aligned}$$

【注意：以上公式可以用来定义跨期替代弹性。】

还可以使用扰动法求得上述欧拉方程。家庭减少 Δc 所损失的效用

为 $Be^{-\beta t}c(t)^{-\theta}\Delta c$ 。 $t+\Delta t$ 时刻的 c 可以增加 $e^{[r(t)-n-g]\Delta t}\Delta c$ ［注意是 c 而不是家庭消费增加这么多］，并且 $c(t+\Delta t)\approx c(t)e^{[\dot{c}(t)/c(t)]\Delta t}$ 。因此，可以得到

$$Be^{-\beta t}c(t)^{-\theta}\Delta c = Be^{-\beta(t+\Delta t)}\left(c(t)e^{[\dot{c}(t)/c(t)]\Delta t}\right)^{-\theta}e^{[r(t)-n-g]\Delta t}\Delta c$$

化简、变形得到

$$\beta\Delta t+\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t=\left(r(t)-n-g\right)\Delta t$$

消去时间微分并变形就得到上述欧拉方程。

2.3 经济的动力系统

1) c 的动力系统

将 $r(t)=f'(k(t))$ 代入到欧拉方程，得到消费的动力系统为

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\rho-\theta g}{\theta}$$

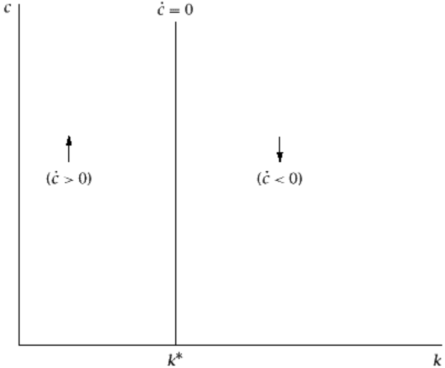


FIGURE 2.1 The dynamics of c

注意：如何理解 k 较小时，消费增长率增加？

答：k 较小，r 就越大，从家庭欧拉方程的直观含义来看，资本的跨期期望收益就越高，因此消费增加就越高。

2) k 的动力系统

而资本的动态方程为

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)$$

资本不变时，有 $c=f(k)-(n+g)k$, $c(0)=f(0)-0=0$, and $d^2c/dk^2<0$.

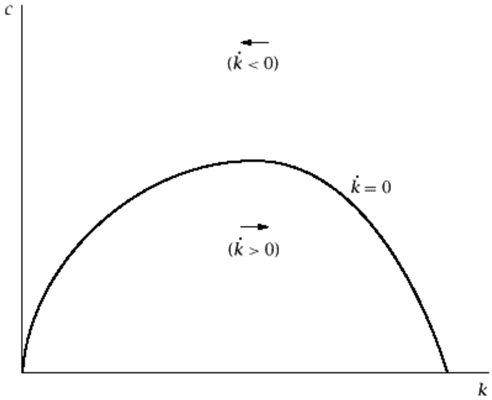


FIGURE 2.2 The dynamics of *k*

3) 相图

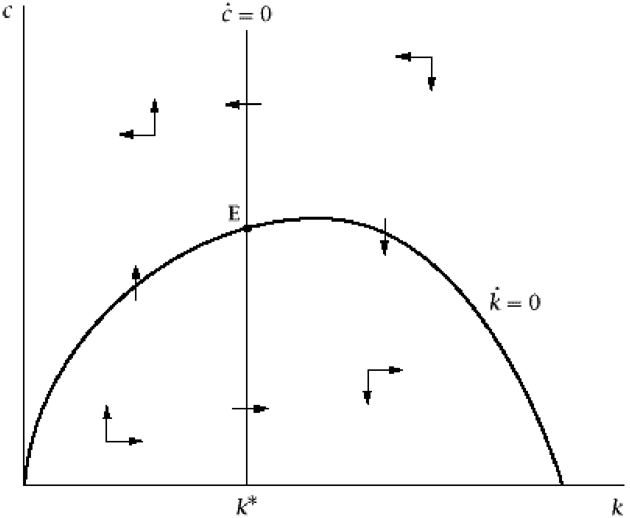


FIGURE 2.3 The dynamics of c and k

问题：为什么有 $k^* < k_{GR}$？

稳态资本为

$$\frac{f'(k(t))-\rho-\theta g}{\theta}=0$$

因此，

$$f'(k^*)=\rho+\theta g$$

而黄金规则水平的资本由如下方式得到

$$\max\ c=f(k)-(n+g)k$$

得到

$$f'(k_{GR})=n+g$$

我们已经假设了$\beta=\rho-n-(1-\theta)g>0$，所以$\rho+\theta g>n+g$

而 $f''<0$，因此，$k^*<k_{GR}$

4) c 的初始值

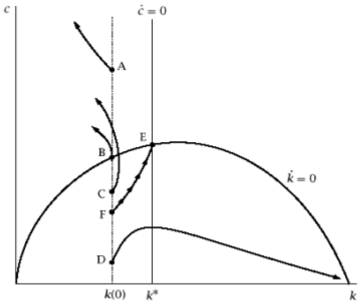


FIGURE 2.4 The behavior of c and k for various initial values of c

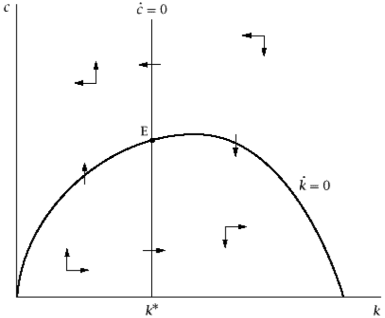


FIGURE 2.3 The dynamics of c and k

$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\rho-\theta g}{\theta}$， $\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)$. 假设 k(0)<k*。

- A 点：c(0)太高，$\dot{c}>0,\dot{k}<0$。
- B 点：c(0)处在$\dot{k}=0$上，所以$\dot{c}>0$，而$\dot{k}$初始为 0，经济体先向上移动，然后$\dot{c}>0,\dot{k}<0$。
- C 点：c(0)过高，所以$\dot{k}$虽然为正但是数值较小，而$\dot{c}>0$，因此，经

济体初始向右上方向移动但 k 右移幅度有限而无法到达 E 点，当同 $\dot{k}=0$ 轨迹相交后，$\dot{c}>0,\dot{k}<0$。

- D 点：c(0)过低。$\dot{c},\dot{k}$ 初始均为正。由于 $\dot{c}$ 与 c 成比例，当 c 较小时，$\dot{c}$ 也较小，c 太低因而上升幅度有限，当与 $\dot{c}=0$ 相交后，$\dot{c}<0,\dot{k}>0$，经济向右下移动。
- F 点：只有这一点才能到达均衡点 E

特别要注意的是，以上这些轨迹都满足两个一阶条件，但是我们还没有施加预算约束和资本不为负约束。

- 如果经济体开始于高于 F 点，k 最终为负，因此可以排除这种情形。
- 如果经济体开始于低于 F 点，如 D 点。最终 k 会超过 k_{GR}，那么过

了此时，利率 $r=f'(k)<n+g$，因此 $e^{-R(s)}e^{(n+g)s}$ 随 s 上升，因而 $e^{-R(s)}e^{(n+g)s}k(s)$ 发散。按照预算约束 $\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)}e^{(n+g)s}k(s)\geq 0.$ 的含义，这说明：相对于家庭的终身消费的贴现值，其终身收入的贴现值是无穷大的，因此，在每一个时点，家庭可以增加消费从而获得更高的效用，这意味着家庭之前没有最大化其效用。因此，这不是均衡路径。

- 如果经济体开始于 F 点。k 收敛于 k*，而 r 收敛于 $f'(k^*)=\rho+\theta g$，因此，$e^{-R(s)}e^{(n+g)s}=e^{-rs}e^{(n+g)s}=e^{-(\rho+\theta g)s+(n+g)s}=e^{-(\rho-n-(1-\theta)g)s}=e^{-\beta s}$，其中 $\beta=\rho-n-(1-\theta)g>0$，$e^{-R(s)}e^{(n+g)s}$ 以 β 的速度下降，$\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)}e^{(n+g)s}k(s)$ 为 0。因此，由 F 点开始的路径是唯一可行的路径。

5）鞍点路径

鞍点路径：对于 k 的任何初始值，存在一个唯一的 c 的初始值。

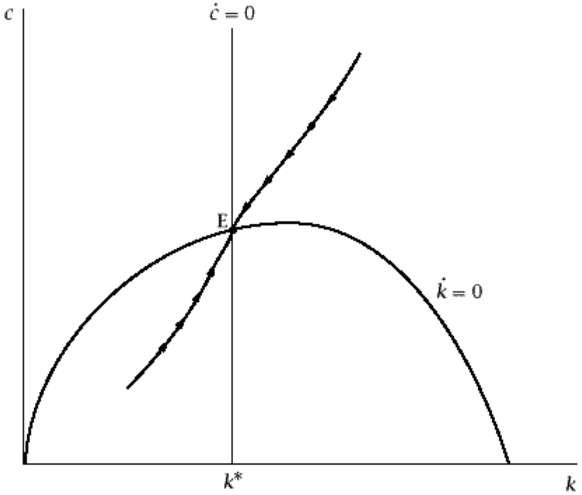


FIGURE 2.5 The saddle path

2.4 福利

- **福利经济学第一定理**：如果市场是竞争性的、完全的，并且不存在外部性（以及如果行为者的人数是有限的），那么分散化的均衡是帕雷图最优的，也即不可能在不使某些人情境况变坏的前提下使某些人的境况变好。
- 拉姆齐模型满足福利经济学第一定理的条件，因此均衡必定是帕雷图最优的。下面用中央计划者的规划问题来说明这一点。将会发现中央计划者的规划问题的最优解与分散的竞争性最优解，即拉姆齐模型的最优解，是相同的。

中央计划者的目标是最大化家庭的福利水平，

$$\max\left\{B\int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt\right\}$$

s.t.

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)$$

将此连续时间规划问题离散化后，然后可以采用拉格朗日方法或者以资本作为状态变量的贝尔曼方程方法来进行求解。

方法 1：拉格朗日方法

将中央计划者的规划问题离散化，得到

$$\max\left\{\sum_i Be^{-\beta t_i}\frac{c(t_i)^{1-\theta}}{1-\theta}\Delta t_i\right\}$$

预算约束方程为

$$k(t_{i+1})-k(t_i)=\left[f(k(t_i))-c(t_i)-(n+g)k(t_i)\right]\Delta t_i$$

构造如下拉格朗日方程，

$$\max\sum_i Be^{-\beta t_i}\frac{c(t_i)^{1-\theta}}{1-\theta}\Delta t_i+$$

$$\lambda_i\{-k(t_{i+1})+k(t_i)+[f(k(t_i))-c(t_i)-(n+g)k(t_i)]\Delta t_i\}$$

此处λ_i是预算约束方程所对应的拉格朗日乘子。

拉格朗日方程关于控制变量消费的一阶条件为

$$Be^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta}\Delta t_i=\lambda_i\Delta t_i$$

关于资本的一阶条件为

$$\lambda_i=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}\lambda_{i+1}$$

将两个一阶条件合并，得到

$$Be^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta}=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}Be^{-\beta t_{i+1}}c(t_{i+1})^{-\theta}$$

变形得到

$$1=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}e^{-\beta\Delta t_{i+1}}\left(\frac{c(t_{i+1})}{c(t_i)}\right)^{-\theta}$$

其中 $\Delta t_{i+1}\equiv t_{i+1}-t_i$ 。变形，得到

$$1=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}e^{-\beta\Delta t_{i+1}}\left(1+\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{c(t_i)}\right)^{-\theta}$$

变形，得到

$$1=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}e^{-\beta\Delta t_{i+1}}\left(1+\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{\Delta t_{i+1}}\frac{\Delta t_{i+1}}{c(t_i)}\right)^{-\theta}$$

那么，有

$$1=\{1+[f'(k(t_{i+1}))-n-g]\Delta t_{i+1}\}e^{-\beta\Delta t_{i+1}}\times$$

$$\left\{\left(1+\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{c(t_i)}\right)^{\frac{c(t_i)}{c(t_{i+1})-c(t_i)}}\right\}^{-\theta\left(\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{\Delta t_{i+1}}\frac{\Delta t_{i+1}}{c(t_i)}\right)}$$

使用指数函数的性质，并考虑到时间的任意性，那么得到

$$1=e^{[f'(k(t))-n-g]\Delta t}e^{-\beta\Delta t}e^{-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}$$

两边取对数，消去时间微分，得到

$$0=f'(k(t))-n-g-\beta-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

变形就得到了欧拉方程

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\beta-n-g}{\theta}$$

此欧拉方程与竞争性均衡中的欧拉方程是相同的。由于两个模型中的第二个方程，即预算约束方程，是相同的。因此，中央计划者的最优解和竞争性均衡的解是完全相同的。这就是拉姆齐增长模型中所展示的福利经济学第一定理。

方法 2：贝尔曼方程方法

将中央计划者的规划问题离散化，并构造如下贝尔曼方程

$$V(k(t_i)) = \max\left\{u(c(t_i)) + V(k(t_{i+1}))\right\}$$

预算约束方程为

$$k(t_{i+1}) - k(t_i) = \left[f(k(t_i)) - c(t_i) - (n+g)k(t_i)\right]\Delta t_i$$

其中

$$u(c(t_i)) = Be^{-\beta t_i}\frac{c(t_i)^{1-\theta}}{1-\theta}\Delta t_i$$

以上动态规划问题的控制变量是当期消费和下一期的资本存量，状态变量是当期的资本存量。此规划问题的特点是资本既是下一期的状态变量，也是当期的控制变量。使用预算约束方程将消费解出来，并代入效用函数，得到如下无约束的贝尔曼方程，

$$V(k(t_i)) = \max_{k(t_{i+1})} \left\{ u\left(f(k(t_i)) - (n+g)k(t_i) - \frac{k(t_{i+1}) - k(t_i)}{\Delta t_i} \right) + V(k(t_{i+1})) \right\}$$

显然，此规划问题的状态变量是当前资本，控制变量是下一期的资本。对控制变量求一阶条件，得到

$$u'(c(t_i)) \frac{1}{\Delta t_i} = V'(k(t_{i+1}))$$

对状态变量使用包络定理，得到

$$V'(k(t_i)) = u'(c(t_i))\left(f'(k(t_{i+1})) - (n+g) + \frac{1}{\Delta t_i}\right)$$

上述两个方程合并，得到

$$u'(c(t_i))\frac{1}{\Delta t_i} = u'(c(t_{i+1}))\frac{1}{\Delta t_{i+1}}\left(f'(k(t_{i+1}))\Delta t_{i+1} - (n+g)\Delta t_{i+1} + 1\right)$$

而

$$u'(c(t_i))\frac{1}{\Delta t_i} = Be^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta}$$

因此，

$$e^{-\beta t_i}c(t_i)^{-\theta} = e^{-\beta t_{i+1}}c(t_{i+1})^{-\theta}\left(1 + f'(k(t_{i+1}))\Delta t_{i+1} - (n+g)\Delta t_{i+1}\right)$$

我们在前面已经证明了上面的方程可以推出所要求取的欧拉方程。因此，使用贝尔曼方程方法和拉格朗日方法求得的结果是相同的。

【含义：1、计划和市场理论上是等价的。2、现实中市场失灵需要政府干预，但计划者也没有足够聪明还有信息收集问题和腐败问题】

2.5 平衡增长路径

- 储蓄率为(y-c)/y 是内生的，但是不变的。［见 P46 更加详细的计算］

  ［ $\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)=0 \Rightarrow$ 储蓄$=f-c=(n+g)k(t)$ ］
- 人均资本、人均产出、人均消费的增长率为 g。
- 即使储蓄率是内生的，劳动效率的增长仍然是人均产出持续增长的唯一源泉。
- 由于 $\underline{k^* < k_{GR}}$，所以被称为“修正的黄金规则资本存量”

2.6 贴现率下降的效应

假设ρ下降。变化与索洛模型中储蓄率上升十分相似。

1) 定性效应

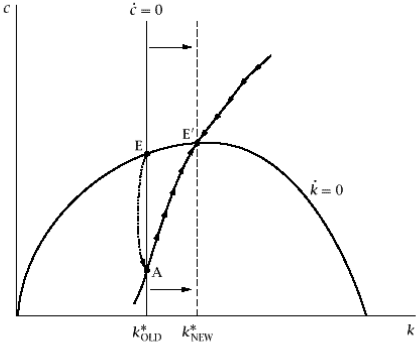


FIGURE 2.6 The effects of a fall in the discount rate

$$
\begin{cases}
\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \dfrac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta} \\
\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t)
\end{cases}
$$

- 由第一个方程，如果ρ降低，那么 k*增加才能确保新均衡时 dc/dt=0。
- ρ变动时，k 不能跳跃，但是 c 必须向下跳跃至新的鞍点路径才能收敛至平衡增长路径。

2) 调整速度和鞍点路径的斜率

对两个一阶条件

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta}，\quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t)$$

在 k=k*和 c=c*附近，取一阶泰勒近似，得到

$$\dot{c} \simeq \frac{\partial \dot{c}}{\partial k}[k-k^*] + \frac{\partial \dot{c}}{\partial c}[c-c^*],$$

$$\dot{k} \simeq \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}[k-k^*] + \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}[c-c^*],$$

$$c-\dot{c}^* \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}(k-k^*)$$

$$\begin{aligned} k-\dot{k}^* &\approx [f'(k^*)-n-g](k-k^*)-(c-c^*) \\ &= [\rho+\theta g-n-g](k-k^*)-(c-c^*) \\ &= \beta(k-k^*)-(c-c^*) \end{aligned}$$

变形，得到：

$$\frac{\dot{c}-c^*}{c-c^*} \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{k-k^*}{c-c^*}$$ （取决于斜率）

$$\frac{\dot{k}-k^*}{k-k^*} \approx \beta - \frac{c-c^*}{k-k^*}$$

因为是在 k=k*和 c=c*附近进行分析，所以可以考虑一种线性的情形：经济体沿着一条直线移向(k*,c*)。在这种情形下：

- 按照以上两个方程，消费和资本的运动速度是不变的。
- 经济体与(k*,c*)的距离减少的速度不变，这样才能保证沿着直线移动。

总结一下：一阶近似取直线➔斜率 $\frac{k-k^*}{c-c^*}$ 是常数➔两者移动速度都是常

数➔两者速度相等才能保证沿着直线移动

因此，设定：$\frac{\dot{c}-c^*}{c-c^*}=\frac{\dot{k}-k^*}{k-k^*}\equiv\mu$，那么，

$$\mu=\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{k-k^*}{c-c^*},\text{and } \mu=\beta-\frac{c-c^*}{k-k^*}\Rightarrow$$

$$\mu=\beta-\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{1}{\mu}$$

$$\mu^2-\beta\mu+\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}=0.$$

求解此方程，得到：$\mu=\frac{\beta\pm[\beta^2-4f''(k^*)c^*/\theta]^{1/2}}{2}$

μ 为负才能确保距离减少，即走向(k*,c*)，因此

$$\mu_1=\{\beta-[\beta^2-4f''(k^*)c^*/\theta]^{1/2}\}/2$$

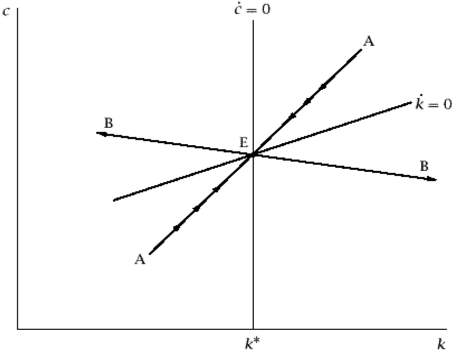


FIGURE 2.7 The linearized phase diagram

c 和 k 的线性化动力系统：

由于

$$\mu_1 = \frac{\overset{\bullet}{c - c^*}}{c - c^*} \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{k - k^*}{c - c^*}$$

变形得到，

$$c = c^* + \frac{f''(k^*)c^*}{\theta\mu_1}(k - k^*)$$

因此，在 0 时刻，c 会跳跃至上述方程刻画的路径。然后，c 和 k 均会以速度 μ_1 收敛至平衡增长路径，即

$$k(t) = k^* + e^{\mu_1 t}[k(0) - k^*]，\quad c(t) = c^* + e^{\mu_1 t}[c(0) - c^*]$$

3) 调整速度

由于

$$\frac{c - \dot{c}^*}{c - c^*} = \frac{k - \dot{k}^*}{k - k^*} \equiv \mu_1,$$

那么，

$$c(t)-c^*=e^{\mu_1 t}[c(0)-c^*],$$

$$k(t)-k^*=e^{\mu_1 t}[k(0)-k^*].$$

考虑 C-D 生产函数，$f(k)=k^{\alpha}$。可以计算得到：

$$f''(k^*)=\alpha(\alpha-1)\,k^{*\alpha-2}=[(\alpha-1)/\alpha]r^{*2}/f(k^*)$$

此处 $r^*=\alpha k^{*\alpha-1}$ 是平衡增长路径上的实际利率。因此，

$$\mu_1=\frac{1}{2}\left\{\beta-\sqrt{\beta^2+\frac{4}{\theta}\frac{1-\alpha}{\alpha}r^{*2}(1-s^*)}\right\}$$

此处 $s^*=1-c^*/f(k^*)$是储蓄率。

在平衡增长路径上，储蓄为$(n+g)k^*$（回忆预算约束方程均衡时有 $\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)=0$ => 储蓄$=f-c=(n+g)k(t)$），因此

$$s^*=(n+g)k^*/k^{*\alpha}=\alpha(n+g)/r^*.$$

由 $\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\dfrac{f'(k(t))-\rho-\theta g}{\theta}$，有 $r^*=\rho+\theta g$。将以上事实代入μ_1 表达式，得到

$$\mu_1=\frac{1}{2}\left\{\beta-\sqrt{\beta^2+\frac{4}{\theta}\frac{1-\alpha}{\alpha}(\rho+\theta g)(\rho+\theta g-\alpha(n+g))}\right\}$$

参数校准：

取：α=1/3, ρ=4%, n=2%, g=1%, θ=1.

得到：r*=5%, s*=20%, β=2%, μ_1=-5.4%.

$$c(t)-c^*=e^{\mu_1 t}[c(0)-c^*],$$

$$k(t)-k^*=e^{\mu_1 t}[k(0)-k^*].$$

以上结果与索洛模型相比,

$$k(t)-k^{*}=e^{-[1-\alpha_K(k^{*})](n+g+\delta)t}\left(k(0)-k^{*}\right)$$

$$k(t)-k^*=e^{-2\%t}[k(0)-k^*].$$

【注意：此处模型没有折旧】

问题： 之所以 RCK 模型收敛速度更快，是因为：当 k<k*时，s>s*；当 k>k*时，s<s*，而索洛模型中使用了常数的储蓄率。

解答：

$$\frac{c-c^*}{k-k^*}=\beta-\mu_1$$

$$\Rightarrow c=c^*+(\beta-\mu_1)(k-k^*)$$

因此，储蓄率为

$$s = \frac{f(k) - c}{f(k)}$$

$$= \frac{f(k) - c^* - (\beta - \mu_1)(k - k^*)}{f(k)}$$

$$= \frac{f(k^*) + f'(k^*)(k - k^*) - c^* - (\beta - \mu_1)(k - k^*)}{f(k)}$$

$$\ldots > s^*, \text{when } k < k^*$$

2.7 政府购买的效应

1) 将政府纳入模型中

假定政府在每单位时间以每单位有效劳动 G(t)的速度购买产出。假设政府购买不影响家庭效用。政府购买由总量税（lump-sum taxes）来融资，因此政府维持平衡预算。

资本的动力系统为：

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-G(t)-(n+g)k(t)$$

家庭最大化：

$$B\int_{t=0}^{\infty}e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt,$$

s.t.

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(n+g)t}\, dt \le k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} [w(t) - G(t)] e^{(n+g)t}\, dt.$$

得到的欧拉方程不变。而资本动力系统发生变化。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta}$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - G(t) - (n+g)k(t)$$

2) 政府购买的永久性和暂时性变动的效应

(a) 政府购买永久性增加

假设 $G(t)=G_L$，现在 G 未预期的、永久性的增加到 G_H。由于不影响欧拉方程，所以 $\dot{c}(t)=0$ 轨迹不变。$\dot{k}(t)=0$ 的轨迹向下移动的数量等于 G 的增加数量。如下图。

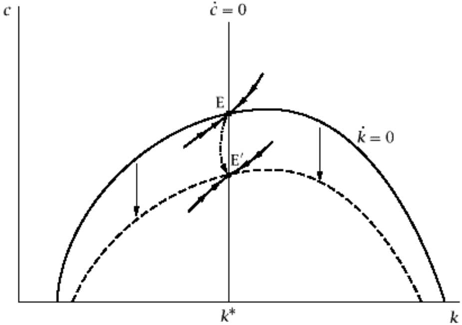


FIGURE 2.8 The effects of a permanent increase in government purchases

c 如何跳跃？

c 下降的数量正好等于 G 增加的数量，并且资本存量与实际利率不变。

(b) 暂时性增加

- 假设 G 的增加是暂时性的：t_0 时刻 G 增加，t_1 时刻 G 恢复到 G_L。
- c 不会下降 G_H-G_L，家庭的效用函数为凹函数（concave utility function），更喜欢相对平滑的消费流。（回忆 Jensen's inequality）
- 由 $\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-G(t)-(n+g)k(t)$，而 $\Delta c+\Delta G>0$，所以 dk/dt<0. 而 r=f'(k)。因此，见下面的图（a）（b）。
- 图（a）中 G 的增加相对持久。图（c）中 G 的增加相对短期。

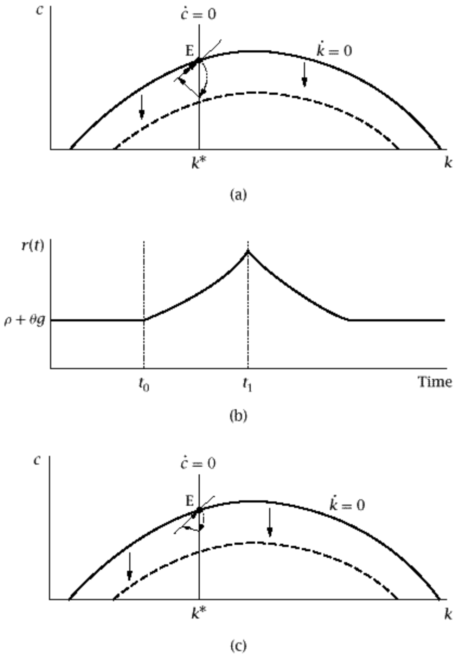


FIGURE 2.9 The effects of a temporary increase in government purchases

3) 经验应用：战争与实际利率

- 前面表明：暂时性的政府购买增加导致实际利率上升。
- 暂时性政府购买增加的一个自然例子是战争。

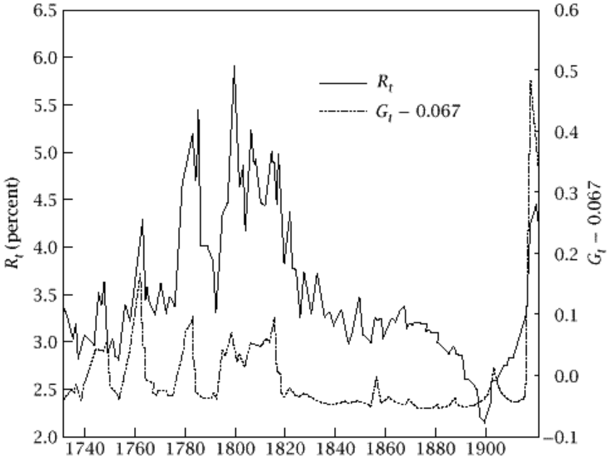


FIGURE 2.10 Temporary military spending and the long-term interest rate in the United Kingdom (from Barro, 1987; used with permission)

Barro（1987）的估计结果：

$$R_t = \underset{(0.27)}{3.54} + \underset{(0.7)}{2.6}\ \tilde{G}_t, \qquad \underset{(0.03)}{\lambda = 0.91}$$

$$R^2 = 0.89, \qquad \text{s.e.e.} = 0.248, \qquad \text{D.W.} = 2.1.$$

其中 R_t 长期名义利率（没有短期实际利率数据，而且样本期内预期通胀率没有发生系统性变动），$\tilde{G}_t$ 是暂时性军事支出增加占 GNP 比重，λ 是残差的一阶自回归模型的系数。

$$R_t=a+bG_t+u_t,\ u_t=\rho u_{t-1}+v_t$$

Cochrane－Orcutt:

Step1: OLS: $R_t = a + b\tilde{G}_t + \hat{u}_t$

Step2: ARMA: $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + v_t$ and get $\hat{\rho}$

Step3: OLS: $R_t - \hat{\rho}R_{t-1} = a(1-\hat{\rho}) + b(\tilde{G}_t - \hat{\rho}\tilde{G}_{t-1}) + v_t$ to get a and b.

思考题：如何在 S＝I(r)的框架下理解以上结论？

S 是公共储蓄＋私人储蓄

Gt 增加，公共储蓄……

Part B:世代交替模型（OLG model，Diamond model)

2.10 假设

- ✧ 时间是离散的: t=0, 1, 2, …
- ✧ 每一个个体只存活两期，只在年轻时候工作
- ✧ 在 t 期，有 L_t 年轻个体。$L_t=(1+n) L_{t-1}$.
- ✧ 偏好为

$$U_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}, \qquad \theta > 0, \qquad \rho > -1$$

- ✧ 有许多厂商，生产函数均为 $Y_t=F(K_t, A_tL_t)$. $A_t=(1+g) A_{t-1}$.
- ✧ 市场是竞争性的。资本没有折旧。$r_t=f'(k_t)$, $w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t)$
- ✧ 初始资本 K_0 由所有老人拥有。
- ✧ 在 t 期，年轻人把劳动收入 w_tA_t 在消费和储蓄之间分配。因此，t+1 时期的资本存量是 t 时期年轻人的储蓄量：$K_{t+1}=L_t(w_tA_t -C_{1t})$。【注

意：资本与储蓄是不同的。年轻人的的储蓄就是资本品，到了下一期还是这么多（还要减去折旧，但本模型中假设折旧为 0）。而家庭进行储蓄是通过持有资本，获得资本的边际产出，从而可以得到收益。因此，方程（2.57）和方程（2.44）都是成立的：$K_{t+1}=L_t(w_tA_t - C_{1t})$， $C_{2t+1}=(1+r_{t+1})(w_tA_t-C_{1t}).$】

————————————————

贴现率与朝三暮四的猴子

朝三暮四，源于庄周《庄子·齐物论》：宋有狙公者，爱狙。养之成群，能解狙之意；狙亦得公之心。损其家口，充狙之欲。俄而匮焉。将限其食。恐众狙之不驯于己也，先诳之曰："与若芧，朝三而暮四，足乎？"众狙皆起怒。俄而曰："与若芧，朝四而暮三，足乎？"众狙皆伏而喜。

数学表述：

$$u(3)+\frac{1}{1+\rho}u(4)<u(4)+\frac{1}{1+\rho}u(3)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho}{1+\rho}u(3)<\frac{\rho}{1+\rho}u(4)\Leftrightarrow\rho>0$$

千百年来都嘲笑猴子，其实猴子是懂经济学的。

————————————————

2.11 家庭行为

第 t 期出生的个体的第二期的消费为：

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t A_t - C_{1t}).$$

也可以写出预算约束方程的形式：

$$C_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} C_{2t+1} = A_t w_t$$

第 t 期出生的个体的效用最大化问题为（Utility Maximization Problem，**UMP**)：

$$\text{Max} \quad U_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta},$$

s.t.

$$C_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} C_{2t+1} = A_t w_t$$

如何求解：

构造拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda\left[A_t w_t - \left(C_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}}C_{2t+1}\right)\right]$$

关于第一期消费和第二期消费的一阶条件分别为：

$$C_{1t}^{-\theta} = \lambda,$$

$$\frac{1}{1+\rho}C_{2t+1}^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}}\lambda.$$

合并，得到欧拉方程：

$$\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\theta}.$$

1/θ的含义：跨期替代弹性（Elasticity of Substitution）

$$\log\left(\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}}\right)=\frac{1}{\theta}\left(\log(1+r_{t+1})-\log(1+\rho)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{C_{2t+1}-C_{1t}}{C_{1t}}=\frac{1}{\theta}\left(r_{t+1}-\rho\right)$$

回忆：IES $\equiv \frac{\partial[E(dC/C)/dt]}{\partial r}\Big|_{\mu-r}$ 和拉姆齐模型中

$$\begin{aligned}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}&=\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\\&=g+\frac{r(t)-\rho-\theta g}{\theta}\\&=\frac{r(t)-\rho}{\theta},\end{aligned}$$

收入效应与替代效应： r 的增加具有收入效应和替代效应

$$C_{1t} + \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}} C_{1t} = A_t w_t.$$

➔

$$C_{1t} = \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} A_t w_t = [1 - s(r_{t+1})] A_t w_t$$

此处

$$s(r_{t+1}) \equiv 1 - \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}$$

$$= 1 - (1+\rho)^{1/\theta} \left((1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta} \right)^{-1}$$

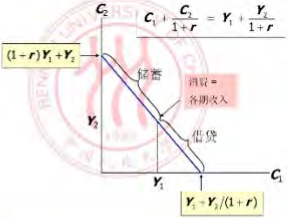
得到：

$$\frac{ds(r_{t+1})}{dr_{t+1}} = (1+\rho)^{1/\theta} \left((1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta} \right)^{-2} \left((1-\theta)/\theta \right) (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta - 1}$$

- 当 $\theta<1$，s 关于 r 是递增的。
- 当 $\theta>1$，s 关于 r 是递减的。
- r 增加的收入效应：增加两期的消费，减少第一期的储蓄。
- r 增加的替代效应：增加第二期的消费，减少第一期的消费，增加第一期的储蓄。
- 当 θ 很低的时候，替代效应占优。当 θ 很高的时候，收入效应占优。当 $\theta=1$ 的时候，两种效应抵消。

跨期预算约束

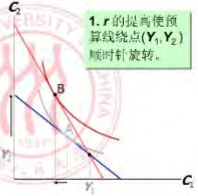
$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$



实际利率的变动如何影响消费

2. 如本图所示，
C_1 减少而 C_2 增加。

然而，有可能产生不同的结果…



实际利率的变动如何影响消费

- 收入效应（income effect）：如果消费者是储蓄者，r 上升使其境况变好，倾向于增加两个时期里消费者的消费。
- 替代效应（substitution effect）：r 的上升使当期消费的机会成本升高，倾向于减少 C_1 而增加 C_2。
- 两种效应 ⇒ ↑C_2；
  C_1 的净效应则取决于替代效应与收入效应的相对大小。

2.12 经济体的动力系统

1) k 的运动方程

t+1 时期的资本存量等于 t 时期年轻人的储蓄量：

$$K_{t+1} = L_t\left[s(r_{t+1})A_t w_t\right]$$

➔

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s(r_{t+1}) w_t.$$

把利率和工资率代入，得到

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - k_t f'(k_t)].$$

k_{t+1} 不是 k_t 的显示性函数。

2) 对数效用与 C-D 生产函数 (θ=1, f=k$^{\alpha}$.)

w=f(k)-kf'(k)= k$^{\alpha}$- kαk$^{\alpha-1}$=(1-α) k$^{\alpha}$.

$$
\begin{aligned}
s(r_{t+1}) &\equiv 1-\frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} \\
&= 1-\frac{1+\rho}{(1+\rho)+1} \\
&= \frac{1}{2+\rho}
\end{aligned}
$$

➔

$$
k_{t+1}=\frac{1}{(1+n)(1+g)}\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)k_t^{\alpha}.
$$

注意有α<1.

- k*是全局稳定的（globally stable）：当 k 开始演化时，最终收敛于 k*。
- 一旦经济收敛于平衡增长路径，其性质与索洛模型和拉姆齐模型类似：储蓄率不变，人均产出增长率为 g，资本—产出比不变，等等。

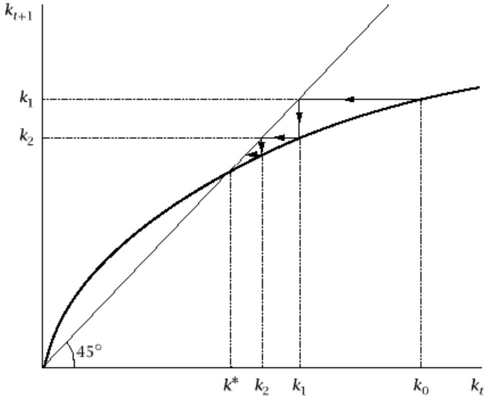


FIGURE 2.11 The dynamics of *k*

- 贴现率下降的效应：年轻人将其收入的更大部分进行储蓄。

- 此模型与拉姆齐模型类似，也与索洛模型中储蓄率上升效应类似：变动使人均资本永久增加，暂时性增加了人均资本的增长率。

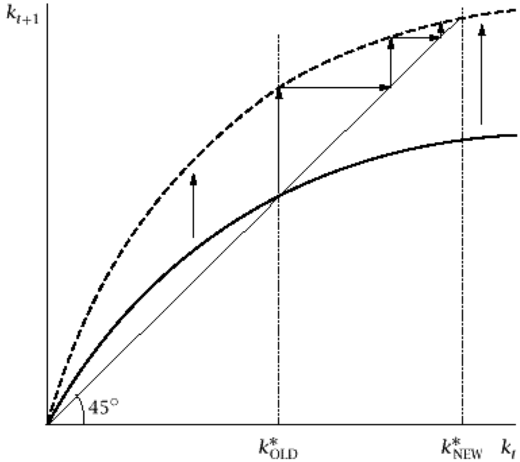


FIGURE 2.12 The effects of a fall in the discount rate

3) 收敛速度

先求解均衡资本：

$$k^* = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)k^{*\alpha}.$$

➔

$$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{1/(1-\alpha)}$$

和

$$y^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

在 k*附近取一阶泰勒近似，得到

$$k_{t+1} \simeq k^* + \left(\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=k^*}\right)(k_t - k^*).$$

由于 $k_{t+1} = Dk_t^{\alpha}$，所以 $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = D\alpha(k^*)^{\alpha-1}$。而均衡时有 $k_{t+1} = Dk_t^{\alpha} = k_t$，

这意味着$(k^*)^{1-\alpha} = D$。合并，得到

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \alpha$$

因此，

$$k_{t+1} - k^* = \alpha(k_t - k^*) = \alpha^t (k_0 - k^*)$$

收敛比索洛模型要快：

- 回忆：在索洛模型中，k 每年走完剩下距离的 4%（k(t)-k*）：
  $k(t)-k^{*}=e^{-\lambda t}(k(0)-k^{*})$，其中$\lambda=(1-\alpha_K)(n+g+\delta)=4\%$/每年。
- 现在：$\alpha=1/3$。每期走完剩下距离的 2/3。
- 原因：经济中的总储蓄分为年轻人的储蓄和老年人的储蓄两个部分。年轻人的储蓄率等于年轻人的储蓄占其收入比重 s(r)，再乘以其收入占总收入的比重 Aw/F，这两个比值都是常数。老年人的负储蓄（注意是之前一期年轻人持有的资本）为 $K_t/F(K_t,A_tL_t)$或 $k_t/f(k_t)$，此比值是 k 的递增函数：$(k/f(k))'=(f-kf')f^{-2}>0$。故，储蓄率是递减函数。因此，当 k<k*时，总储蓄率高于其平衡增长路径值；当 k>k*时，总储蓄率低于其平衡增长路径值。

【注意：现在一个人只能活 2 期，所以每一期对应 30 多年，所以，不

能这么简单对比索洛模型】

4) 一般情形

$$k_{t+1}=\frac{1}{(1+n)(1+g)}s(f'(k_{t+1}))[f(k_t)-k_t f'(k_t)].$$

➔

$$k_{t+1}=\frac{1}{(1+n)(1+g)}s(f'(k_{t+1}))\frac{f(k_t)-k_t f'(k_t)}{f(k_t)}f(k_t).$$

k_{t+1}:的四个部分

- Output per unit of effective labor at t, $f(k_t)$
- The fraction of that output that is paid to labor, $[f(k_t)-k_t f'(k_t)]/f(k_t)$
- The fraction of that labor income that is saved, $s(r_{t+1})$
- The ratio of the amount of effective labor in period t to the amount in period t+1.

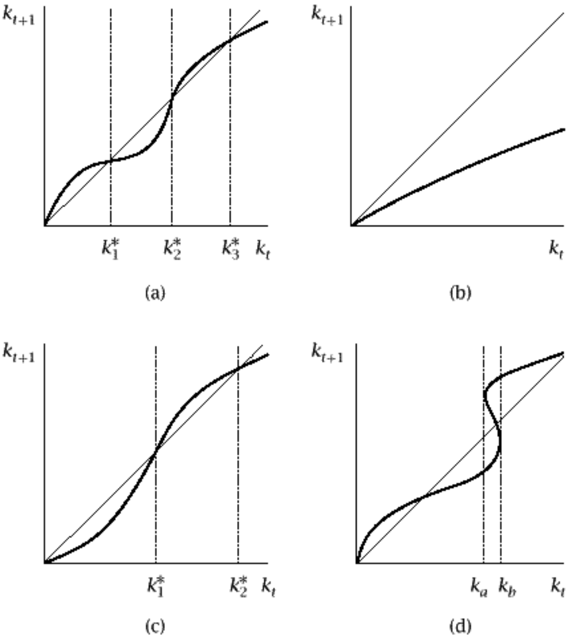


FIGURE 2.13 Various possibilities for the relationship between k_t and k_{t+1}

2.13 动态无效率的可能性

（1）世代交替模型中的分散性均衡不是帕雷图有效的。平衡增长路径上的资本存量可以超过黄金规则水平，从而可能永久增加消费。

为方便，取对数效用函数，CD 生产函数，g=0。从而，

$$k^* = \left[\frac{1}{1+n}\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)\right]^{1/(1-\alpha)}$$

平衡增长路径上的资本的边际产出 $\alpha k^{*\alpha-1}$ 为

$$f'(k^*) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(1+n)(2+\rho).$$

而黄金规则资本存量由 $f'(k_{GR}) = n$ 定义。

取 α 充分小时的情形【这对应着资本收益率很低的情形】, 此时有：$f'(k^*) < f'(k_{GR})$，从而平衡增长路径上的资本存量 k^* 会大于黄金规则水平 k_{GR}。

（2）下面解释，k^*大于k_{GR}是无效的：有可能永久增加消费。

- 引入一个社会计划者。
- 图中×表示维持k^*资本，因此人均消费为产出$f(k^*)$减去把 k 维持在 k*水平需要的新投资数量nk^*。【dk/dt=sf-(n+g+δ)k=0, sf=f-c=(n+g+δ)k, c=f-(n+g+δ)k= f-nk，因为 g= δ =0】

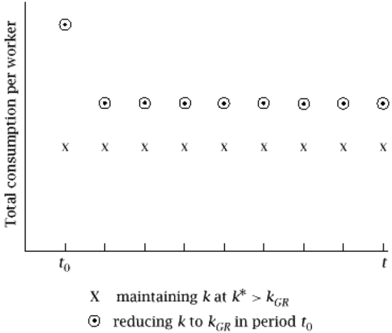


FIGURE 2.14 How reducing k to the golden-rule level affects the path of consumption per worker

- 图中⊙表示，社会计划者在 t_0 时刻增加消费，减少储蓄，使得下一期的人均资本为 k_{GR} 并维持在这一水平。这一操作使得，t_0 时期的消费为：$f(k^*)+(k^*-k_{GR})-nk_{GR}$。【注意：第二部分是减少资本而增加的消费，第三部分是为了维持 k_{GR} 所需要的新投资】【为什么？这样定义的消费导致的新增加消费为 $f(k^*)+(k^*-k_{GR})-nk_{GR}$ —($f(k^*)$ - nk^*)=(1+n)(k^*-k_{GR})。计划者将每个年轻人的 1 单位劳动收入转移给老年人，特别要注意对每个老年人存在 n+1 个年轻人，因此这会给每个老年人增加 n+1 单位的消费】。之后时期的人均消费为 $f(k_{GR})-nk_{GR}$。
- $f(k_{GR})-nk_{GR}>f(k^*)-nk^*$：这是因为 $k_{GR}=\arg\max f(k)-nk$
- $f(k^*)+(k^*-k_{GR})-nk_{GR}>f(k_{GR})-nk_{GR}$：这是因为 $k^*>k_{GR}$
- 这说明，社会计划者通过在年轻人和老年人之间进行配置，会使得

每一代人得到改善。

（3）为什么世代交替模型中的分散性均衡不是帕雷图有效的。

- 为什么福利经济学第一定理会失效？答案是不符合假设。不但要假设竞争性均衡和不存在外部性，**还需要假设有限个家庭**。
- 因为人口是无限的，所以赋予了计划者一个独特的非市场工具。而市场化环境中只有通过持有低收益率的资本才能增加老年时的消费。
- **计划者将每个年轻人的 1 单位劳动收入转移给老年人，特别要注意对每个老年人存在 n+1 个年轻人，因此这会给每个老年人增加 n+1 单位的消费。**计划者要求年轻的下一代也去做同样的事情。这种将资源在代际之间进行转移的方法比储蓄更加有效。【宇宙宾馆的故事】
- 这种无效率称为动态无效率：竞争性市场的结果是无效率的，但中央计划者可以提高效率。

（4）经验性应用：现代经济是动态有效的吗？

政策含义：

- Diamond 模型表明，分散化经济所积累的资本有可能高于黄金率水平，从而会出现帕累图无效的配置。【书译有误】
- 由于【美国】现实中的资本积累不是由中央计划者决定的，所以现实经济是动态无效的吗？
- 如果是动态无效的，那么这对公共政策有重要意义：美国低储蓄可能被误导了。

Abel et al. (1989)

- 表面上，美国经济是动态无效率的，因为实际收益率 $f'(k^*)-\delta$ 小于经济增长率【注意：$f'(k_{GR})=n+g+\delta \Rightarrow f'(k_{GR})-\delta=n+g$，因此，若实际收益率小于经济增长率 n+g，则说明现实中(均衡)资本高于

黄金规则水平资本】。用短期政府债券的实际利率度量实际利率，美国 1926~1986 年间大约为 0.1%，远小于经济的平均增长率。 但是，Abel et al. (1989)指出统计口径的问题。如果资本获得其边际产出，那么净边际产出可以估计为总资本收入减去总折旧与资本存量的比率。在美国，这个比率大约是 10%，远大于经济增长率。结论是矛盾的和模糊的。

- Abel et al. (1989)指出正确的计算方法应该是：在不确定性情形中，动态有效的充分条件是净资本收入大于投资。
- Abel et al. (1989)用国民收入减去薪酬与自我雇佣者的部分劳动收入来测度资本收入。【书译有误】投资直接取自国民收入账户。他们发现，在美国等 7 个主要工业国，资本收入都高于投资。因此，虽然在理论上，分散性经济可能动态无效率，但是在实践中并没有出现。
- 思考：中国呢？

2.14 OLG 模型中的政府

（1）永久性增加政府购买

假定政府通过总量税融资其支出 G_t，k 的运动方程为：

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \frac{1}{2+\rho} [(1-\alpha)k_t^{\alpha} - G_t].$$

更高的 G 对于给定的 k_t 减少了 k_{t+1}。

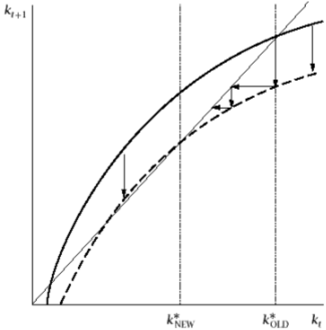


FIGURE 2.15 The effects of a permanent increase in government purchases

- 与 RCK 模型不同：k 减少，r 增加。
- 解释：个体存活两期，但只对年轻时候课税。因此，会减少第一期和第二期的消费。因此，储蓄减少了。

（2）暂时性增加政府购买

- 注意每一个人只存活两期。
- 因此，当政府购买较高时，k 逐渐下降、r 逐渐增加；而一旦政府购买回到较低水平，k 逐渐增加、r 逐渐减少。