政治经济学前沿方法论与量化分析

第七讲 质量型变量的建模

上课地点: 善斋306C 上课时间:周二第六大节

龙治铭 善斋307C zhiminglong@tsinghua.edu.cn







质量型变量的描述性统计



Logit和Probit模型的理论基础



Logit和Probit模型在Stata中的实现



参考文献

1

质量型变量 (Qualitative variable) 的描述性统计

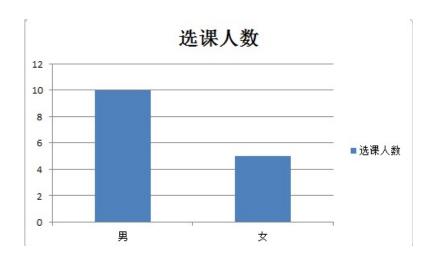
Qualitative variable的定义



*前面讲的随机变量都是数量型变量(quantitative variable),他们的随机试验结果本身是一个数,如股价、分数、身高等等。数量型变量的取值可以是连续变化和连续记录的,如温度,也可以是离散变化和离散记录的,如股价(A股市场股价最小变动单位为分)和成交量(最低成交单位为100股,不存在0.76股一类连续值)。

*一种随机变量的试验结果不是数,但为了研究方便,以数字记录,如颜色、性别、级别等等,我们称为质量型变量(qualitative variable,有的统计学教材也称为Categorical Variables或者nominal variable)。质量型变量的取值可以是连续变化和连续记录的,如光谱的颜色(有无穷多种红色,只不过人类语言无法完全描述),也可以是离散变化和离散记录的,后者是常见的情况。

*质量型变量的取值可以只有两个,通常用0,1表示,这种情况叫做二元变量(binary variable),在回归分析中经常用作指示变量(indicator variable)或者哑变量(Dummy variable),也可以有多个取值如"本科生年级"这个变量取值可以为{一年级,二年级,三年级,四年级},可以用数值{1,2,3,4}表示。



选课同学的性别是一个典型的 qualitative variable

Qualitative variable的特点



*质量型变量的取值尽管用数字表示,但**数字本身没有任何意义。因此数量型变量的数字特征一般不适用于质量变量**(二元变量的平均值有一定的意义,可以表示比例或者频率)。

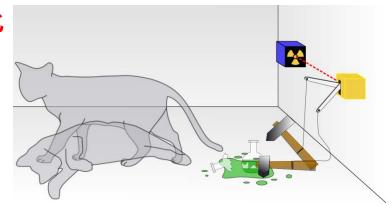
例如:班上15名同学,其中5名女生。对于"性别"这个变量,如果用0表示女生,1表示男生,平均值为0.33;反过来如果用1表示女生,0表示男生,平均值为0.66。0.33和0.66表示什么性别?

又如,我院有助理教授3人,副教授18人,教授36人(包含退休),如果变量"职称"采取以下赋值:

助理教授为0, 副教授为1, 教授为2, 那么均值为1.58, 方差为0.36, 此时的数字特征意义是什么?1.58是什么职称?标准差0.6还有没有意 义?

如果改变赋值,助理教授为10,副教授为20,教授为40,均值为32,方差为113,此时的数字特征意义是什么?

*例子表明质量型变量的数字特征有其特殊性,需要专门的分析指标。



质量型随机变量均值的典型 悖论——薛定谔猫:由于事 件的随机性,猫会处于生存 与死亡的叠加态,随机实验 结果的空间并不存在这样的 状态。

Qualitative variable的数字特征:分布情况



*二元变量的均值有一定的意义(尽管会出现一定的困惑),可以表示某一随机试验结果的出现频率。但如果质量型变量的取值(Modality)为三个以上,均值失去了直观的涵义,没有使用的意义。

* 列联表(Contingency tables)用于显示变量的频率分布,适用于质量型变量的统计描述。大量的关于质量型变量的统计检验都基于列联表。

Handed- ness Sex	Right handed	Left handed	Total
Male	43	9	52
Female	44	4	48
Total	87	13	100

tab rank

rank	Freq.	Percent	Cum.	
1 2 3 4	61 151 121 67	15. 25 37. 75 30. 25 16. 75	15. 25 53. 00 83. 25 100. 00	
Total	400	100.00		

Wiki上的二元列联表例子

Stata自带数据库中的例子

Qualitative variable的数字特征:离散度



*质量型变量的方差和标准差没有任何意义,标准差反映的本质是离散度(Dispersion),对于二元变量,例如掷硬币,掷50次和掷100次,理论上离散程度都是一样的,然而一个方差为0.2551,后者为0.1096。此外,均值±标准差反映了随机变量取值的分布区间,负的取值区间显然没有意义也没有必要。

大量经济学论文(甚至是等级较高的国际学术期刊)都对质量型变量运用了数量型变量的统计描述 方法,这些论文都是错的!

* Variation Ratio是一种较为简单和常用的,用于描述质量型变量离散程度的统计量。

VR = I - (proportion of cases in the mode)

数值越大, 表明分布越分散

理论上,掷硬币的VR=0.5

选课同学性别的VR=0.66或0.33

局限性:需要指明是哪种modality

Wilcox's indexes: $M = \sum_{i=1}^{K} (f_m - f_i)$

*其他衡量方法:非常多,见. Kader(2007),Variability for Categorical Variables,Journal of Statistics Education Volume 15, Number 2.

Qualitative variable的数字特征:相关性1



*我们知道,在简单线性回归中,OLS估计量本质上就是简单线性相关系数(Pearson's r),因此在做回归分析之前,我们会计算变量之间的相关系数来探索变量之间可能的关系。 然而两个质量型变量的之间皮尔逊相关系数没有任何意义(二元变量除外)。 想想为什么没有意义?计算皮尔逊相关系数需要使用标准差,质量型变量的标准差没有意义。

*参考文献: Pottier(1994), Mesures de la liaison entre deux variables qualitatives : relation entre un coefficient de corrélation généralisé et le χ 2, Revue de Statistique Appliquée, Tome 42 no. 1, p. 41-61

*Phi coefficient:基于列联表,用于检验两个质量变量的相关性。二元变量的Phi coefficient与

Pearson coefficient相等。

	y = 1	y = 0	总计
x = 1	n_{11}	n_{10}	$n_{1\bullet}$
x = 0	n_{01}	n_{00}	$n_{0\bullet}$
总计	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 0}$	n

$$\phi = \frac{n_{11}n_{00} - n_{10}n_{01}}{\sqrt{n_{1\bullet}n_{0\bullet}n_{\bullet0}n_{\bullet1}}}$$

*卡方检验:

H0:质量变量X与Y无关。 H1:质量变量X与Y相关 可以证明统计检验量x2渐进服从自由度为 (k-1)卡方分布(证明从略,见Pearson, 1990)

Qualitative variable的数字特征:相关性2



*Cramér 's V (Cramér, 1946) 基于卡方检验和Phi coefficient检验两个质量变量之间的相关性

$$V = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\min(k-1,r-1)}} = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{\min(k-1,r-1)}}$$

- *质量变量的相关系数在回归分析中的应用:
- 1) 当被解释变量为数量型,而解释变量既有数量型又有质量型时:
- 二元变量的Phi coefficient与Pearson coefficient相同,因此二元变量可以直接用于OLS。但是如果质量变量有N个modality,需要设计N-1个二元变量,会引起多重共线性。

这时需要使用logit regreesion 或者probit regression.

2) 当被解释变量为质量型变量时,我们无法按照通常的OLS估计量解释, "当自变量提高1%, 应变量提高百分之多少", 此时必须使用logit regreesion 或者probit regression, 并使用odds ratio进行解释(稍后详细解释)。

2

Logit和Probit模型的理论 基础

Logit的适用范围



*目的:基于样本容量N的一组自变量*X1, X2,..., Xp* 解释质量型变量Y。 Y:质量型变量。数量型变量可以通过分组的办法转变为质量型变量。 *X1, X2,..., Xp:*可以是质量型变量也可以是数量型变量。

*分类:

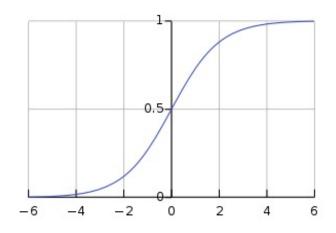
如果Y是二元变量,模型是简单Logit 或Probit模型。

如果Y有两个以上的取值,模型可以分为: unordered polytomic model (Y的各个取值没有排序,例如颜色) ordered polytomic model (Y的各个取值有排序,例如弱、中等、强)

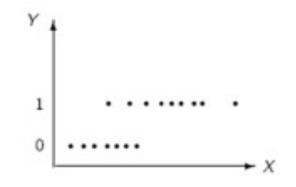
如果截去一部分信息,模型是Tobit 模型

*Probit model。Probit和Logit类似,只是使用的函数不同,Logit使用逻辑函数,Probit使用累积分布函数,Logit的推导更加简单,统计教材一般使用Logit作为推导示例。都使用最大似然估计。

最小二乘法不再适用, 残差值通常不具备良好的性质(尤其是正态性和异方差性)



逻辑函数和累积分布函数是两个很好的,取值范围在0,1之间平滑变动的S型曲线,因此被发展出Logit 和Probit模型



简单Logit和Probit的表达式



*如何将连续变化的数值和0,1二分取值相联系?需要引入潜在变量(variable inobservable)的概念:

$$Y_i^* = a + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \ldots + b_p X_{pi} + u_i = X_i \beta + u_i$$

$$\begin{cases} Y_i = 1 \text{ si } Y_i^* \ge 0 \\ Y_i = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

由于仅仅有变量Y可以观察到, $Y_i^* = X_i \beta + u_i$ 不能被直接估计。于是我们做这样的变换:

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i^* \ge 0) = P(X_i\beta + u_i \ge 0) = P(u_i \ge -X_i\beta)$$

= $P(u_i < X_i\beta) = F(X_i\beta)$

如果F是逻辑函数,那么模型是Logit 如果F是正态累积分布函数,那么模型是Probit

巧妙的将0,1取值和一个S型曲线联系起来了,这样可以使用参数估计。

*估计方法:最大似然估计(具体推导过程从略)

简单Logit的解释



*将 $X_i\beta$ 代入逻辑函数:

$$F(X_i\beta) = \frac{1}{1 + \exp(-X_i\beta)} = \frac{\exp(X_i\beta)}{1 + \exp(X_i\beta)}$$

解反函数:

$$X_i\beta = F^{-1}[P(Y_i = 1)] = \log \frac{P(Y_i = 1)}{1 - P(Y_i = 1)} = \log \frac{P(Y_i = 1)}{P(Y_i = 0)}$$

因此我们得到了odds ratio 比值比:

油砌双亦具/丽佑竿工1扣对工丽佑竿工0的程度 (椰家) 基于解释变量

$$OR = \frac{\frac{P(Y_i=1|X_i')}{P(Y_i=0|X_i')}}{\frac{P(Y_i=1|X_i)}{P(Y_i=0|X_i)}} = \exp\left[\log\frac{\frac{P(Y_i=1|X_i')}{P(Y_i=0|X_i')}}{\frac{P(Y_i=1|X_i)}{P(Y_i=0|X_i)}}\right]$$

$$= \exp\left[\log\frac{P(Y_i=1|X_i')}{P(Y_i=0|X_i')} - \log\frac{P(Y_i=1|X_i)}{P(Y_i=0|X_i)}\right] = \exp\left[X_i'\beta - X_i\beta\right]$$

显然,如果X也是一个二元变量,那么 $\log \frac{P(Y_i=1)}{P(Y_i=0)} = a + bx_i$ OR的解释为:当X=1时,相对于X=0,Y=1的概率是Y=0 的exp(b) $P(Y_i=0)$

$$\log \frac{P(Y_i = 1)}{P(Y_i = 0)} = a + bx_i$$

这样如果逻辑回归的系数是显著的(Wald Test),我们有了不同于OLS的解释

polytomic model的解释和模型的估计质量



※一般情况:X有多个取值。

OR需要注明相对于X的哪一个的取值,意义是:

当X=k时,相对于X=reference,Y=1的概率是Y=0的exp(b)倍

*特殊情况:X是数量型变量

OR 的解释:X每增加一单位的效应

*估计质量:如何判断Logit模型估计得很好?

- 1) 信息准则:AIC,SIC,HQ, log likelihood (判断标准与前面介绍使用MLE的模型一致)
- 2) log likelihood ratio test (见VAR模型中对P的选择的介绍)
- 3) 伪R2。使用MLE不存在R2,但可以计算一个Pseudo R2
- 4) The number of matching pairs。模型可以预测(样本内预测),看Y的0,1取值是否符合观测值,正确的比例反映了模型的拟合能力。

unordered polytomic model的估



$$\begin{cases} Y_i = 1 \\ Y_i = 2 \\ \vdots \\ Y_i = K \end{cases}$$

*如果Y有K个取值
$$\begin{cases} Y_i = 1 \\ Y_i = 2 \\ \vdots \\ Y_i = K \end{cases}$$
 只需要K-1个概率
$$\begin{cases} p_{i1} = P(Y_i = 1) \\ p_{i2} = P(Y_i = 2) \\ \vdots \\ p_{iK-1} = P(Y_i = K - 1) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$Y_{ik}^* = \beta_i' X_i + u_{i1}$$

$$\vdots$$

$$Y_{ik}^* = \beta_k' X_i + u_{ik}$$

$$\vdots$$

因此,可以选择某一个例如第K个取值作为reference,对于每一个latent variable $Y_{iK-1}^* = \beta'_{K-1}X_i + u_{iK-1}$

类似地推导过程我们得到了 其中假定 $\beta_K = 0$

$$\log \frac{P(Y_i = k)}{P(Y_i = K)} = \log \frac{\exp(\beta'_k X_i)}{\exp(\beta'_K X_i)} = \beta'_k X_i$$

系数可以解释为,Y=k相对于Y=K的概率

*优点:此时模型暗含的假设为Y=k相对于Y=K的概率只与Y=K相关,与其他取值无关,相当于分解 为K-1个simple Logit.

否则需要Independance of Irrelevant Alternative假设, Logit模型中的每个取值都是独立的不相关的。 后者是一个很强的假设,在Probit中更加难以估计。

ordered polytomic model和Tobit的估计



*ordered polytomic model如果Y的取值有排序,例如我们希望知道,相对于弱,强的概率是多少

Latent variable 定义方式为:

$$\log \frac{Pr(Y > k)}{Pr(Y \le k)}$$

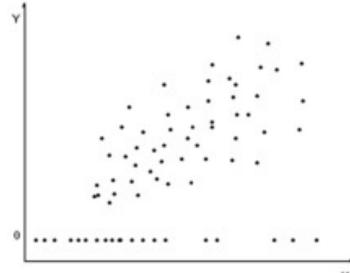
*Tobit model的适用情景:Y是数量型变量但取值经常为0,这时对 所有的观测值都应用线性回归是不合适的。于是我们把它分为两部分

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^* & \text{si } Y_i^* \ge 0\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad Y_i^* = X_i \beta + u_i$$

其余推导过程类似(证明从略),使用MLE。

或者
$$Y_i = \begin{cases} Y_{1i}^* & \text{si} & Y_{2i}^* > 0 \\ 0 & \text{si} & Y_{2i}^* \leq 0 \end{cases}$$
 $Y_{1i}^* = X_i'\beta_1 + u_{1i}$ $Y_{2i}^* = X_i'\beta_2 + u_{2i}$

使用MLE或者Heckman 两步法(类似于工具变量)



3

Logit和Probit模型在Stata中的 实现

问题:研究龙治铭老师的给分规律



*GPA对清华同学非常重要,马原课作为4个学分的必修课,对GDP(x, GPA)具有重要的影响。那么龙治铭老师的给分是否存在规律,是科学还是艺术?

*假设1:龙老师是男老师,女同学是否更容易获得高分或者相反是否存在性别歧视? 美貌经济学:

Hamermesh (1994) The American Economic Review Persico et. Al (2004). Journal of Political Economy 颜值难以量化,机器学习可能能够解决这个问题(我记得JPE2014年似乎有一篇用机器学习判断颜值对工作的影响(中国数据),没有找到原文)。

- *假设2&3:龙老师是经济学博士,经管学院的同学是否更容易获得高分?龙老师是留学回国人员,外语系的同学是否更容易获得高分?
- *假设4:龙老师教4个班,同样的内容需要重复四次(人类的本质是不是复读机?),更早的班级讲课更加有激情,课程安排在星期几对分数是否有显著影响?前八周后八周是否有影响?
- *假设5:下午昏昏欲睡,上午起不了床,课程安排在上午和下午是否对分数有显著影响?
- *模型的选择:GPA虽然是数字,但本质是等级制成绩,是qualitative variable且有排序,因此应该使用ordered polytomic logit model

描述性统计



*数据来源:教务处&网络学堂

*微观数据的脱敏处理:删去一切可以识别个人特征的信息, 保证同学们隐私

*数据的导入和描述:

- . import excel "C:\Users\zhiminglong\Desktop\成绩单.xls", sheet("Sheet1") firstrow
- . Describe 列出性别的列联表:

tabulate 总成绩 性别

*计算所有可能的列联表及其 _ 卡方检验、Cramer's V tab2 性别 院系 总成绩 绩点成 _ 绩 年级 星期 大节 前后, chi2 V

这个相当于系数矩阵,除了研究分布的情况,还可以发现各年级、各院系男女比例是否平衡

. tabulate 总成绩 性别

Î	性别			
总成绩	女	男	Total	
A	25	29	54	
A+	9	8	17	
A-	22	64	86	
В	2	9	11	
B+	52	156	208	
C+	0	2	2	
F	0	2	2	
W	1	1	2	
Total	111	271	382	

-> tabulation of 性别 by 总成绩

3.64.2				总成绩	总成绩				
性别	A	A+	A-	В	B+	C+	F	W	Total
女	25	9	22	2	52	0	0	1	111
女 男	29	8	64	9	156	2	2	1	271
Total	54	17	86	11	208	2	2	2	382

Pearson chi2(7) = 17.3492 Pr = 0.013 Cramér's V = 0.2131

成绩和性别是否相关,介于显著和不显著之间,在5%水平上显著,在1%水平上不显著

Logit model1



*数据清洗:需要将汉字表述的变量取值赋予数值 note: 大节 omitted because of collinearity generate sex= 0 replace sex = 1 if 性别 =="女 " destring 绩点成绩, replace force

destring 年级, replace force

generate grade= 2019-年级

generate week= 0

replace week = 1 if 前后 =="后"

院系较多,可以考虑设为group variable

※ 不考虑专业的ordered polytomic logit model meoprobit 绩点成绩 sex grade week 星期 大节

结果解释: 1) 因共线性大节被删掉了

- 2) 模型具有整体显著性
- 3) 在控制年级、星期几、前八周后八周等因素情况下, 性别 是一个显著变量, 女同学学习成绩更好。
- 4) /cut1 表示绩点成绩=0的系数(相对于绩点成绩=4.0),以 此类推/cut2:2.3;/cut3:3.0;/cut4:3.3;/cut5:3.7.

. meoprobit 绩点成绩 sex grade week 星期 大节

log likelihood = -432.18358log likelihood = -424.32647Iteration 2: log likelihood = -424.31991log likelihood = -424.31991Iteration 3:

Ordered probit regression

Wald chi2(4) 15.61

Number of obs

Log likelihood = -424.31991Prob > chi2 0.0036

绩点成绩	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf.	Interval]
sex	. 4581722	.1284159	3.57	0.000	.2064816	.7098628
grade	2137731	.1562472	-1.37	0.171	520012	.0924657
week	1402222	.2313388	-0.61	0.544	5936378	.3131935
星期	0810244	.0765938	-1.06	0.290	2311456	.0690968
大节	0	(omitted)				
/cutl	-3.287253	.5474979			-4.360329	-2.214177
/cut2	-3.018003	.5169628			-4.031231	-2.004774
/cut3	-2.443779	.489131			-3.402458	-1.485099
/cut4	4264538	.4719919			-1.351541	.4986333
/cut5	.2619271	.4726879			6645241	1.188378

Logit model2



* 考虑专业的Rank-ordered logistic regression rologit 绩点成绩 grade 星期 大节 sex, group(院系) ties(exactm)

*结果解释:在考虑院系专业的情况下,女同学也无法显著地获得高分,只跟年级有关。

院系跟性别显著相关,因此需要考虑IIA假设, 将院系设为group variable 更简单

当然把院系作为解释变量,以经管学院或者外文系作为reference可以得出检验假设2&3的结论

这里院系较多,进行了简单处理。

. rologit 绩点成绩 grade 星期 大节 sex, group(院系) ties(exactm)

Iteration 0: log likelihood = -274.52102
Iteration 1: log likelihood = -271.34526
Iteration 2: log likelihood = -271.26734
Iteration 3: log likelihood = -271.26723
Refining estimates:

Iteration 0: log likelihood = -271.26723

Rank-ordered logistic regression Number of obs = 380 Group variable: 院系 Number of groups = 33

Ties handled via the exactm method Obs per group:

min = 1 avg = 11.52 max = 34

LR chi2(4) = 6.51Log likelihood = -271.2672 Prob > chi2 = 0.1643

绩点成绩 Coef. Std. Err. P>|z| [95% Conf. Interval] grade -.457965 .2223229 -2.060.039 -.8937099 -.0222202 星期 -.0176456 .0637353 -0.280.782 -.1425645.1072733 大节 .0257066 .1181271 0.22 0.828 -.2058182 .2572314 .2145116 .1908052 1.12 0.261 -.1594597.588483 sex

Logit model3



Log likelihood = -415.65031

Pseudo Ra

0.0383

*更加细化的以4.0为目标的Multinomial logistic regression mlogit 绩点成绩 week grade sex 大节 星期, baseoutcome(4.0)

- *结果解释:
- 1) 年级、性别、大节、排课都无法解释有的同学为什么会挂科,只有年级有微弱的显著性(容易理解)
- 2) 刚刚及格的同学,所有变量都不显著,只有年级有微弱的显著性
- 3) 中等的同学,所有变量都不显著,只有性别有微弱的显著性
- 4) 成绩良好的同学, 性别变量显著
- 5) 成绩优秀的同学,性别变量显著 *结论:成绩越差,越跟年级有关,成绩越好越跟性 别相关(女生成绩更好)

	绩点成绩	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf.	<pre>Interval]</pre>
0							
	week	-32.38069	2789.263	-0.01	0.991	-5499.236	5434.474
	grade	2.481189	1.511226	1.64	0.101	4807598	5.443137
	sex	-17.8171	3158.016	-0.01	0.995	-6207.416	6171.781
	大节	15.8463	1719.248	0.01	0.993	-3353.818	3385.51
	星期	0	(omitted)				
	_cons	-54.50526	5157.746	-0.01	0.992	-10163.5	10054.49
2.3							
	week	-17.24242	2602.286	-0.01	0.995	-5117.628	5083.143
	grade	2.196043	1.13449	1.94	0.053	0275164	4.419602
	sex	-17.22395	3329.937	-0.01	0.996	-6543.78	6509.332
	大节	.1873423	1.467253	0.13	0.898	-2.688421	3.063105
	星期	0	(omitted)				
	_cons	-7.518809	4.686046	-1.60	0.109	-16.70329	1.665673
3							
	week	237104	.6910406	-0.34	0.732	-1.591519	1.117311
	grade	.2614545	.9005158	0.29	0.772	-1.503524	2.026433
	sex	-1.440956	.8204906	-1.76	0.079	-3.049088	.1671758
	大节	.203641	.423839	0.48	0.631	6270682	1.03435
	星期	0	(omitted)				
	_cons	-2.385844	2.188347	-1.09	0.276	-6.674925	1.903238
3.3							
	week	2409701	.290869	-0.83	0.407	8110627	.3291226
	grade	.3187792	.4191986	0.76	0.447	502835	1.140393
	sex	-1.02235	.2887241	-3.54	0.000	-1.588239	4564614
	大节	.1036316	.1804444	0.57	0.566	2500329	. 4572961
	星期	0	(omitted)				
	_cons	.6155557	.9863005	0.62	0.533	-1.317558	2.548669
3.7							
	week	5462942	.341579	-1.60	0.110	-1.215777	.1231883
	grade	.2167663	.4895865	0.44	0.658	7428057	1.176338
	sex	9515023	.3458085	-2.75	0.006	-1.629275	2737302

研究的局限性



- *没有其他影响成绩的根本变量:平时是否回答问题、考勤是否缺席、自评和他评相互影响效应、是否交加分作业等
- *没有考虑刘震老师的慕课影响
- * Stata官方示例学习简单logit model: https://stats.idre.ucla.edu/stata/dae/logistic-regression/

 4

 参考文献



参考文献&数学基础知识&样本数据



见网络学堂附件

下节课见

马克思主义学院 龙治铭

