第六章
多部门最优增长

内容

- 1、冯·诺依曼的平衡增长
- 2、动态列昂惕夫体系的效率路径
- 3、大道定理

冯·诺依曼的平衡增长

背景

- 冯•诺依曼1937年的经典文献“一般均衡模型”可以毫无争议地被列入数理经济学的典范，而围绕该模型的解释所存在的广泛争议也成为经济理论史上的一个事件。
  - 冯•诺依曼的论文最初以德文出版，在卡尔多的极力推崇与帮助下，由摩根斯特恩（G. Morgenstern）翻译，配以钱珀努恩（D.G. Champernowne）的解释，发表在1945年的《经济研究评论》上。
  - 新古典学者则不满意钱珀努恩等人对冯•诺依曼理论的解释。包括麦肯齐（Lionel Mckenzie）、阿罗（Kenneth Arrow）等人认为冯•诺依曼模型（von Neumann growth model）只不过是对卡塞尔模型在联合生产上的一种扩展。
  - 这种争论背后反映的是古典与新古典分析传统之间性质上的差异。
  - J.v. Neumann(1937), A model of general economic equilibrium, translated in Review of Economic Studies， XIII， 1945， 1-9.

- 尽管看起来冯•诺依曼的模型存在很多的局限性，包括技术不变假定、没有考虑消费、比例增长等，但是被认为开启了三个方面理论的先河：
  - 生产的经济活动分析（activity analysis model of production）、
  - 竞争均衡（model of competitive equilibrium）、
  - 与非总量的资本理论（model in non-aggregative capital theory）。
- 冯•诺依曼模型被认为是对扩展的多部门经济模型的第一个现代分析。该模型基本思想是证明了它所假定的经济系统中存在一个最大增长率的平衡增长路径，且伴随一个相应的固定价格与利息率。

模型的含义

- 冯•诺依曼模型在两个方向上扩展了投入产出模型。一是从单一生产到联合生产，二是从每个产业只存在一个技术，到存在多个可选择的技术。
- 联合生产在斯拉法的体系中被用于解决资本理论问题，而这里更多出于对生产周期不同步问题的现实考虑。

以向量(x,y)表示的生产过程中，x表示投入，y表示产出，都以正数来表示。用$A=[a_{ij}]$表示单位活动水平的投入集，而$B=[b_{ij}]$表示单位活动水平的产出集。A 与 B 都是$n\times m$的非负实数矩阵。A 矩阵的第j列表示第j个单位水平的生产过程中的投入，而 B 矩阵中的第j列b^j表示第j个单位活动水平的生产过程中的产出。

用$z(t)$表示t期的活动水平，$z_j(t)\geq 0$。那么所有生产过程不同投入品的合计可以表示为：

$$x(t)=\sum_{j=1}^{m}a^j z_j(t)$$

类似地，所有生产过程不同产出品的合计可以表示为：

$$y(t)=\sum_{j=1}^{m}b^j z_j(t)$$

如此，对于一个存在 m 个活动，n 种产品的经济，我们假设第 j 个活动，单位活动水平上的投入为 $(a_{1j},\cdots a_{nj})$，产出为 $(b_{1j},\cdots b_{nj})$。冯•诺依曼技术集 T 被定义为：

$$T=\{(x,y)\mid x\geq Az,y\leq Bz,z\geq 0,z=(z_1,\cdots,z_m)\}$$

这一投入到产出转换集是所有技术上可行的投入产出对 (x,y) 的集合。对于投入 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，产出 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 在技术上是可行的，当且仅当 (x,y) 属于 T。上述技术集中技术系数 A、B 为常系数，表明技术不随时间变化。

冯•诺依曼的技术假定为：

（1） $a_{ij} \geq 0$， $b_{ij} \geq 0$ （$i = 1, \cdots, n$， $j = 1, \cdots, m$）；

（2）任何活动中投入是必须的，即对于任何一个 j，至少存在一个正的$a_{ij} > 0$；

（3）任何产品能够被某个活动所生产，即对于任何一个i，至少存在一个 j，使得$b_{ij} > 0$

在上述假定条件下，冯•诺依曼定理表明存在一个活动水平 z^*，以及一个价格水平 p^*，使得：

$$z^* \geq 0，\quad p^* \geq 0，\quad Bz^* \geq \lambda^* A z^*$$

$$p^* B \leq \lambda^* p^* A$$

进一步，如果：

$$b^i z^* > \lambda^* a^i z^*，\text{那么}\ p_i^* = 0$$

$$p^* b^j < \lambda^* p^* a^j，\text{那么}\ z_j^* = 0$$

且

$$p^* B z^* > 0$$

其中，$\lambda^* - 1$为最大平衡增长率，在均衡条件下也等于利息率。

上述定理表明，该系统存在一个均衡的活动水平和价格水平，使得各产品产出能够以最大平衡增长率增长。这就是冯•诺依曼系统中最大平衡增长的存在性。剩下的结论则表明，该系统中没有活动能够获得正利润，对于过渡供给的商品，价格降为 0，而负利润的活动将不被采用。此外，一定的价值将被生产出来。

- 下面我们以库普曼斯的一个两部门商品例子对此进行说明。
- 表6-1 单位活动水平下的基本活动

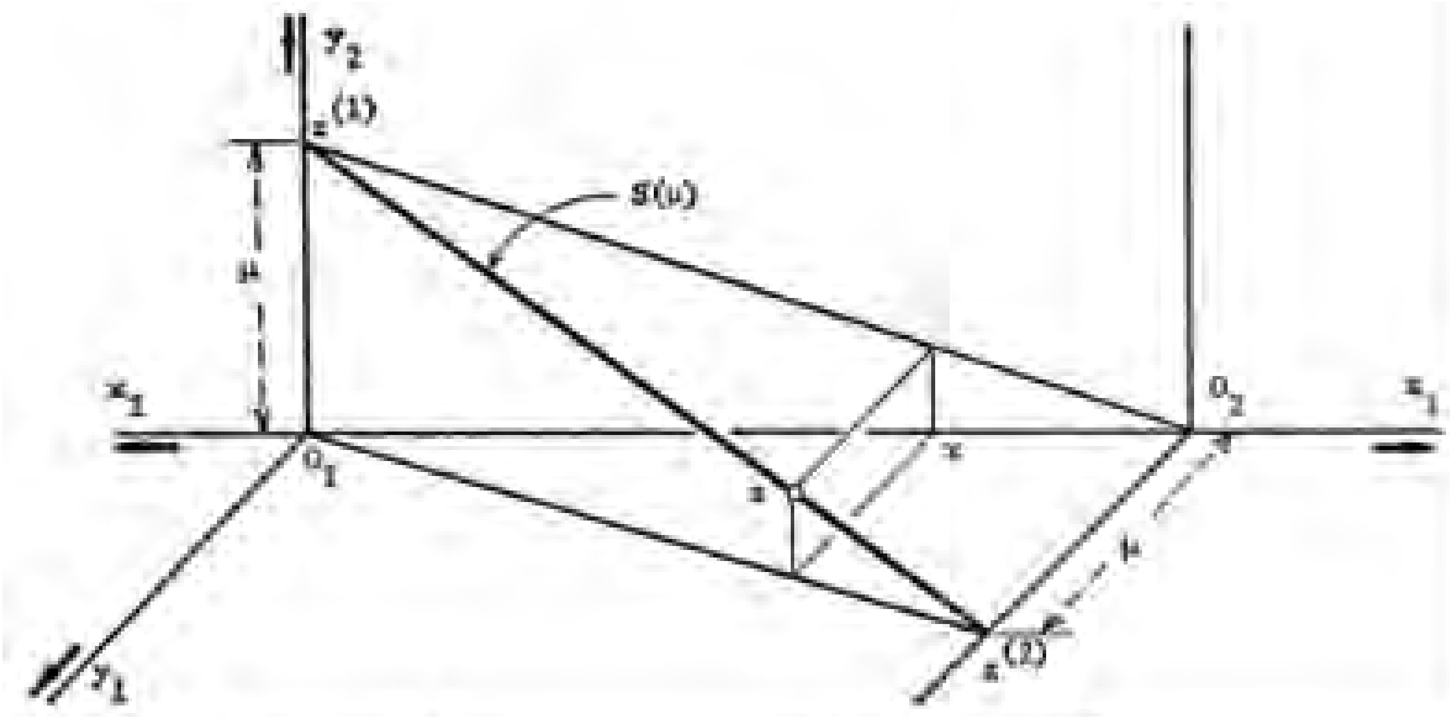
	Producing Food				Producing Tools	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Outputs						
1. Tools		.1	.3	.5	.5	.6
2. Food	1	1.3	1.5	1.55		
Inputs						
1. Tools		.2	.5	.8		.1
2. Food = labor	1	.8	.5	.2	1	.9

- 注：本表引自Koopmans, (1964)Economic Growth at a Maximal Rate, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 78, No. 3第366页

- 表示方法

为用图形表示定理的含义，我们必须把变量限制在三个以内，但是例如两种商品的情况下，$(x,y)=(x_1,x_2,y_1,y_2)$ 却有四个变量。库普曼斯的处理方式是把投入合计限制为 1，将投入用一个比例数来表示。一般地可以表示为 $z=(x_1,y_1,y_2)$。

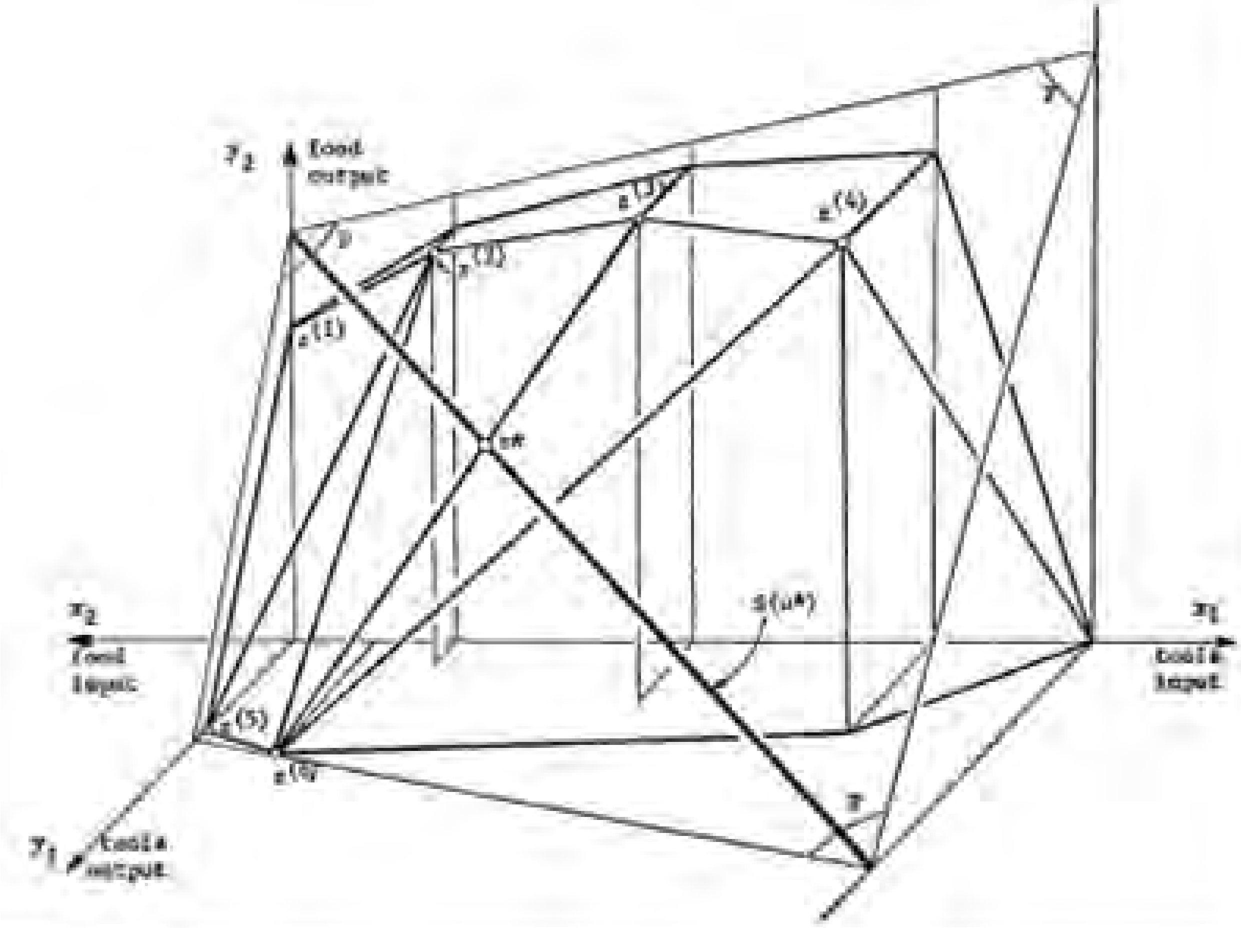
比例增长



首先从原点来看，对于o_1点的投入$(0,1)$，如果按μ比例增长，则产出为$(0,\mu)$，因此该活动的点为$z^{(1)}=(0,0,\mu)$。类似地，o_2投入对应的点为$z^{(2)}=(1,\mu,0)$。对于o_1与o_2之间的任何一种投入组合$x=(x_1,x_2)$，产出为$y=(\mu x_1,\mu x_2)$，相应的活动的点为$(x_1,\mu x_1,\mu x_2)$。以$s(\mu)$来表示这条满足平衡增长率始终为μ的所有点的集合。

冯·诺依曼活动

- 在一定的技术假定下，上表中技术的活动集合构成可行集，同时附加上比例增长，可以用图形表示如下：



从上面的图中我们可以看到，满足可行集 Z ，同时与平衡增长线段 $S(\mu)$ 相切的点可能有多个，而每一个都对应某个增长率 μ 。在所有这些满足条件的增长率 μ 中我们能够找到一个最大的，记为 μ^* ，相应的切点记为 z^* 。 z^* 被称为冯•诺依曼点（von Neumann point），相应的活动被称为冯•诺依曼活动（von Neumann activity）。冯•诺依曼活动获得最大比率 μ^* 的平衡增长率。使用活动 z^* 表示的这一技术的所有活动被称为冯•诺依曼过程（von Neumann process）。同一冯•诺依曼过程的所有活动构成的平衡增长路径，被称为冯•诺依曼路径（von Neumann path）。从图形上看，如果可行集 Z 为严格凸的，那么这一具有最大平衡增长率的冯•诺依曼点将是唯一的。

进一步，我们将说明在集合 $S(\mu^*)$ 与 Z 之间存在一个超平面 P ，而该平面的法线构成我们的价格向量。由此来说明，对应于平衡增长路径，存在一个相应的价格体系。

我们以(q_1, p_1, p_2)作为超平面的法线。由此超平面的P的方程可以表示如下：

$$qx_1 + p_1 y_1 + p_2 y_2 = q_2$$

因为$z^{(1)*} = (0, 0, \mu^*)$与$z^{(2)*} = (1, \mu^*, 0)$在超平面上，代入方程，得到：

$$\mu^* p_2 = q_2，\ q_1 + \mu^* p_1 = q_2$$

把上述关系代入到P的方程，同时考虑到$x_2 = 1 - x_1$，得到如下超平面P的方程：

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 - \mu^*(p_1 x_1 + p_2 x_2) = 0$$

定义函数$\pi(x, y) = p_1 y_1 + p_2 y_2 - \mu^*(p_1 x_1 + p_2 x_2)$，可见把$p_1, p_2$理解为两种商品的价格，而$\mu^* - 1 = r$则可理解为利息率，那么上述函数正好定义了活动$(x, y)$的利润函数。超平面上所有点的利润正好等于 0，如果我们定义价格是非负的，那么超平面之下点利润将为负，之上的点则利润为正。

如此，表明了存在一个不变的价格体系p_1, p_2, r支持冯•诺依曼的最优平衡增长。

针对具体的数值例子，我们假设可行集 Z 中与比例增长线 $S(u^*)$ 相交的是 $z^{(3)}z^{(6)}$ 。那么交点 z^* 的坐标为：

$$z^* = (x_1^*, y_1^*, y_2^*) = \lambda z^3 + (1-\lambda) z^6$$

且该点满足比例增长的条件，就有：

工具的生产：$0.3\lambda + 0.6(1-\lambda) = u^*(0.5\lambda + 0.1(1-\lambda))$

食品的生产：$1.5\lambda = u^*(0.5\lambda + 0.9(1-\lambda))$

解得 $u^* = 1.292$， $\lambda = 0.577$

表明平衡增长的最大增长率为 29.2%，而平衡增长技术为 $0.577z^3 + 0.423z^6$ 组合技术，进而冯•诺依曼活动为：

$$(x^*, y^*) = ((0.331, 0.669), (0.427, 0.865))$$

相应的均衡价格为：

$$(p_1, p_2) = (2.48, 1)$$

技术假定及定理证明

- 冯•诺依曼模型提出后，很多学者对该定理进行了证明
  - 例如凯梅尼、摩根斯特恩和汤普森（Kemeny, J.G., O.Morgenstern and G. L. Thompson）利用对策论的证明
  - 豪（Howe, C.W.）,利用线性规划和对偶定理的证明
  - 卡林（Karlin, S.）利用集合论的证明
  - 森岛通夫（Morishima, M.）利用弗洛贝尼乌斯定理的证明
- 其中，卡林的证明被认为具有最为广义的形式（the most general formulation）。通过把技术定义为一个具有某些特定性质的生产集，把任何一个满足这些技术性质的投入产出生产活动看作是该生产集中的一个元素。

冯•诺依曼技术集T 满足如下假定：

（A-1）T 是$2n$维实数空间R^{2n}中非负象限Ω^{2n}中的闭的凸锥；

闭的含义是边界点是可行的，凸集的含义是任意两个可行活动的线性组合也是可行的；锥的性质表明规模收益不变。如果 T 是一个闭的凸锥，那么它满足三个条件：T 是闭集，可加性，规模报酬不变。可加性指的是如果$(x,y)\in T$，$(x',y')\in T$，那么$(x+x',y+y')\in T$，

而规模报酬不变指的是如果$(x,y)\in T$，$\alpha\geq 0$，那么$\alpha(x,y)\in T$。

（A-2）免费处置（free disposal），即$(x,y)\in T$，$x'\geq x$，$0\leq y'\leq y$，则$(x',y')\in T$；

所谓免费处置指的是多余的投入与产出都可以毫无成本地处理掉。用生产集的概念可以定义为：如果$y\in Y$是一可行的生产计划，且$y'\leq y$，那么$y'\in Y$。

（A-3）没有免费午餐，没有投入就没有产出，即$(0,y)\in T$，必然$y=0$；

（A-4）对任何i，存在一个$(x,y)\in T$，满足$y_i>0$，表明任何产品可以生产出来。

由（A-1）和（A-4）将等价地得到：

（A-4’）存在一个$(x,y)\in T$，满足$y>0$。

定义：扩展率（coefficient of expansion）

对于一个非零的投入产出关系$(x, y) \in T$，扩展率$\lambda(x, y)$被定义如下：

$$\lambda(x, y) = \max\{c \mid y \geq cx)\}$$

这实际上定义了一个实值函数，随着过程(x, y)不同，扩展率$\lambda(x, y)$也发生改变。在这些假定下，冯•诺依曼定理可叙述如下：

定理：卡林（Karlin）

（1）存在一对技术 $(x^*, y^*) \in T$，使得

$y^* = \lambda^* x^*$，$\lambda^* = \lambda(x^*, y^*)$，$x^* \geq 0$

且

对于每个 $(x, y) \in T$，$x \geq 0$，有 $\lambda^* \geq \lambda(x, y)$

向量 (x^*, y^*) 描述的是平衡增长路径，在这一路径上经济获得最大的增长率 $\lambda^* - 1$。与这一平衡增长路径相应的，存在如下的一个均衡价格系统。

（2）存在一个向量 p^* 使得 $p^* \geq 0$，且

$$p^{*\prime} y \leq \lambda^* p^{*\prime} x, \quad (x, y) \in T$$

对于 (x^*, y^*)，上式为等式，并且意味着在完全竞争假定下，没有技术能够带来正的利润。

定理：冯•诺依曼

冯•诺依曼技术下的投入 A 与产出矩阵 B，在假设 A-1 至 A-4 下，存在 $\lambda^* > 0$，$z^* \geqq 0$，$p^* \geqq 0$，其中 $\lambda^* \in R$，$z^* \in R^m$，$p^* \in R^n$，使得：

（1）$(B - \lambda^* A)z^* \geqq 0$

（2）$p^*(B - \lambda^* A) \leqq 0$

（3）$p^*(B - \lambda^* A)z^* = 0$

证明：

（1）设 (x^*, y^*) 为 Karlin 定理中具有最大扩张率 λ^* 的过程，必然存在一个 $x^* \geqq 0$，使得 $y^* = \lambda^* x^*$，代入关系式 $y^* \leqq Bz^*$，$x^* \geqq Az^*$，就有 $Bz^* \geqq \lambda^* Az^*$，因此 $(B - \lambda^* A)x^* \geqq 0$。

（2）对于所有的 $z \geqq 0$，有 $p^*(B - \lambda^* A)z \leqq 0$，以及 $p^* \geqq 0$，因此 $p^*(B - \lambda^* A) \leqq 0$，且 $p^* \geqq 0$。

（3）由于 $p^* \geqq 0$，从（1）的证明中我们得到 $p^*(B - \lambda^* A)z^* \geqq 0$，而从（2）的证明中我们又有 $p^*(B - \lambda^* A)z^* \leqq 0$。因此有 $p^*(B - \lambda^* A)z^* = 0$。

定理由此得证。

实际上，冯•诺依曼定理首先提供了对竞争均衡经济的一个描述。在这样一个状态下，净产出大于 0，而利润小于等于 0，而第三个条件结论表明的是，如果某个活动的利润为负，则相应的活动水平为 0，如果某种商品的扩张率大于 λ^*，出现供给过剩，那么它的价格为 0。

其次，这样一种经济将以最大的扩张率 λ^* 增长，从而上述结论也表达了竞争均衡经济的一种最优状态。

动态列昂惕夫体系的效率路径

- 冯•诺依曼模型的最优增长路径要求所有商品按相同的增长率增长，对于现实经济而言，如果产品的比例不符合最优增长的路径，显然最优增长的结论就失去了意义。
- 但是，朵夫曼、萨缪尔逊和索洛在《线性规划与经济分析》中提出了大道定理，指出不管初始的商品存量如何，只要在大部分时间里足够接近冯•诺依曼路径，成为经济增长的最优路径。
- 大道定理的提出在于朵夫曼等人把线性规划的思想引入到投入产出模型中，源于对动态列昂惕夫体系效率路径（efficient path）的讨论。

- 正如多夫曼等人所评价的那样，列昂惕夫体系具有“锁定的”（lock）性质。任何特定的商品都只有一种生产方法，也不存在求极大的问题。如果这种“锁定”的性质在静态体系中还可以维持的话，那么在列昂惕夫的动态模型中，“引入了时间因素和资本存量，便不可避免打开了模型的锁。将不可避免面临明确的选择和求最优行为。”这样一种开锁后的列昂惕夫动态模型成为一种随时间变化进行最优规划分析框架的一个特例。
- Dorfman, Samuelson, Solow, *Linear programming and economic analysis*, p266。

- 列昂惕夫产出假定了不存在存在过剩生产能力，但这并不是现实经济的常态。
- 当我们一旦取消这一假定时，特别是在动态过程中，就为最优资本积累的确定带来了可能。索洛由此分析了动态列昂惕夫体系的动态最优路径问题

一般动态投入产出模型式写成矩阵形式有：

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + C_t$$

表示每期总产出用于中间投入，最终需求和下期生产的净资本形成。如果资本存量用向量 S_t 表示，净投资 $\Delta S_t = S_{t+1} - S_t$。上述动态投入产出模型可表示为：

$$x_t = Ax_t + \Delta S_t + C_t$$

其中 $S_t = Bx_t$

这表明了资本存量随产出的变化而改变。同时它假定了现有资本存量所代表的生产能力的充分利用。如果考虑到生产能力的未被充分利用，就有：

$$S_t \geq Bx_t$$

这样使得资本存量的改变与产出变化之间不再具有联系。正是在不等式的情况下，我们面临如何最优选择，并达到效率轨迹。

对于不等式的情形，考虑只存在两种产品的情形，我们可以把等式的列昂惕夫体系转换为一个最优化问题：

$$X_1 \geq a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \Delta S_1 + C_1$$

$$X_2 \geq a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \Delta S_2 + C_2$$

$$S_1 \geq b_{11}X_1 + b_{12}X_2$$

$$S_2 \geq b_{21}X_1 + b_{22}X_2$$

$\Delta S_1, \Delta S_2, X_1, X_2$均$\geq 0$

把时间因素考虑进来，则是在如下的约束下：

$$\Delta S_1 + C_1 - (1 - a_{11}) X_1(t) + a_{12} X_2(t) \leq 0$$

$$\Delta S_2 + C_2 - (1 - a_{22}) X_2(t) + a_{21} X_1(t) \leq 0$$

$$b_{11} X_1(t) + b_{12} X_2(t) \leq S_1(t)$$

$$b_{21} X_1(t) + b_{22} X_2(t) \leq S_2(t)$$

求 $K_1(\Delta S_1 + C_1) + K_2(\Delta S_2 + C_2)$ 极大。并得到关于 $X_1, X_2, \Delta S_1 + C_1, \Delta S_2 + C_2$ 的解。

- 在这里，系数K起着对最终产品估价的作用。整个的目标函数表明，我们最终达到最终产品总量最大化目标，同时我们为不同部门最终产品给以相应的权数，随着权数的改变，也就是评价标准或人们偏好的改变，最大化问题给我们提供的正是在既定技术下的生产前沿面（production possibility frontier），也称为转换轨迹（transformation locus）或效率轨迹（efficient locus）。

生产可能性前沿

- 利用投入产出的完全消耗系数把所有的中间产品都还原为初始要素，或者这里的资本存量。用矩阵形式分析这一过程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \Delta S_1 + C_1 \\ \Delta S_2 + C_2 \end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \Delta S_1 + C_1 \\ \Delta S_2 + C_2 \end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

令 $\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，来表示列昂惕夫逆阵，有：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta S_1 + C_1 \\ \Delta S_2 + C_2 \end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

把上述关系带入到资本存量的约束条件中，得到：

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta S_1 + C_1 \\ \Delta S_2 + C_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

进一步令$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，得到：

$$S_1 \ge B_{11}(\Delta S_1 + C_1) + B_{12}(\Delta S_2 + C_2)$$

$$S_2 \ge B_{21}(\Delta S_1 + C_1) + B_{22}(\Delta S_2 + C_2)$$

- 利用列昂惕夫逆阵把资本存量对总产出的限制转换为资本存量对最终产品的限制。用图形表示为：

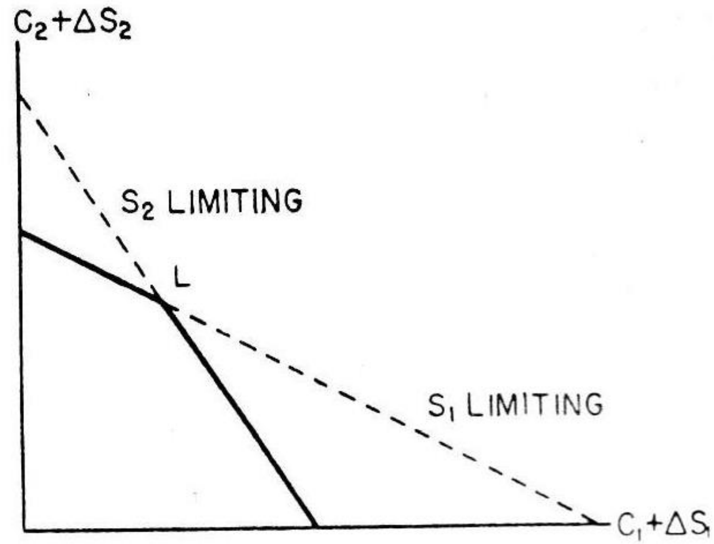


图 6-3 一个时期内的生产前沿面

- 投入产出原模型中，所有的条件都是以等式形式出现，因此模型的唯一解为L点
- 但是，在改变为不等式约束的情况下，图中折线上，以及折线内的区域都成为可行解
- 这些可行解中哪一个是最优解，则取决于目标函数。在我们的模型中，则取决于对两种最终产品估价的比率K_1/K_2。

与上述最大化模型形成对偶关系的是一个成本最小化模型：

$$\min[r_1 S_1(t) + r_2 S_2(t)]$$

约束条件：

$$p_1 \geq K_1$$

$$p_2 \geq K_2$$

$$-(1-a_{11})p_1 + a_{21}p_2 + b_{11}r_1 + b_{21}r_2 \geq 0$$

$$a_{12}p_1 - (1-a_{22})p_2 + +b_{12}r_1 + b_{22}r_2 \geq 0$$

前两个约束条件表明产品的影子价格至少等于相应的最终需求的估价。如果最终需求为正，就有 $p_i = K_i$ 。对于后两条约束，变形可以得到：

$$p_1 \leq r_1 B_{11} + r_2 B_{21}$$

$$p_2 \leq r_1 B_{12} + r_2 B_{22}$$

如果产品的产量 X_1， X_1 为正，那么上两式将为等式。这两条约束条件表明的是产品的价格将不超过其要素成本。

列昂惕夫体系的跨期效率

- 上述分析框架形式上仍是静态体系。虽然引入了时间因素，但是资本品并未与不同时期的产出联系起来。
- 下一步，把资本品还原为资本存量，而不同时期的资本存量之前作为生产的一个结果，而现在则要同时成为生产的条件，并与产出相联系。
- 资本品的生产与对未来生产的影响，决定了不同时期优化分析之间的联系，进而构成资本积累与增长的最优路径（path）。

如果我们考虑初期存货$[S_1(0), S_2(0)]$是事先确定的，那么在$[C_1(1), C_2(1)]$给定的条件下，第二期结束时$S_2(2)+C_2(2)$能够达到的最大值是多少呢？以及能否进一步获得各个时期的最大值，从而让我们能够获得跨时期有效率的增长路径呢？当我们在考虑这类问题的时候，我们知道一旦确定约束为不等式，那么在每个阶段的最优选择将有很多，其效率水平也存在着差异。例如在我们的问题中，提供$[C_1(1), C_2(1)]$的每一种方法，所带来的资本存量$[S_1(1), S_2(1)]$的结构都存在不同。这些资本存量结构中，有很多可能并不符合未来对于$C_1(2)$和$C_2(2)$的生产所需。因此，我们需要在使最终存量达到最大的目标下，选择一条跨期效率（intertemporal efficiency）路径。

之前我们得到了存量约束的条件：

$$S_1 \geq B_{11}(\Delta S_1 + C_1) + B_{12}(\Delta S_2 + C_2)$$

$$S_2 \geq B_{21}(\Delta S_1 + C_1) + B_{22}(\Delta S_2 + C_2)$$

现在，我们对上述存量约束方程加以变形，引入时间因素，并代入 $\Delta S_1 = S_1(t+1) - S_1(t)$

$\Delta S_2 = S_2(t+1) - S_2(t)$，得到：

$$B_{11}[S_1(t+1) + C_1(t)] + B_{12}[S_2(t+1) + C_2(t)] \leq (1 + B_{11})S_1(t) + B_{12}S_2(t)$$

$$B_{21}[S_1(t+1) + C_1(t)] + B_{22}[S_2(t+1) + C_2(t)] \leq B_{21}S_1(t) + (1 + B_{22})S_2(t)$$

表示为实现本期消费与下期存量水平所受到的本期资本存量的限制。可以看到，在消费外生给定的情况下，未来存量水平与本期存量之间的转换关系。

进一步可变形为：

$$B_{11}S_1(t+1)+B_{12}S_2(t+1)\le(1+B_{11})S_1(t)+B_{12}S_2(t)-B_{11}C_1(t)-B_{12}C_2(t)$$

$$B_{21}S_1(t+1)+B_{22}S_2(t+1)\le B_{21}S_1(t)+(1+B_{22})S_2(t)-B_{21}C_1(t)-B_{22}C_2(t)$$

该式可图形表示

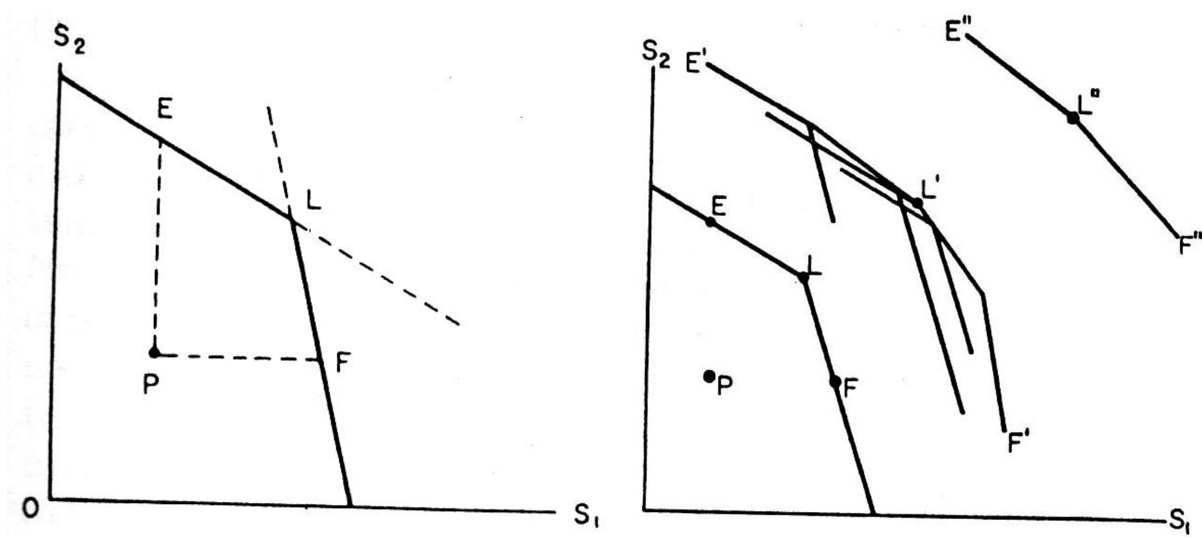


图 6-4 列昂惕夫体系的跨期效率

P 点是从原点扣除消费而达到。这样，以 P 点所表示的一个初始存量$[S_1(t), S_2(t)]$为起点，ELF 轨迹上的任意点都是一个有效率的计划，进而也成为$t+2$期生产的起点。因此，对于 ELF 中的任一点开始，应用上述约束条件，也就是用$t+2$和$t+1$来代替$t+1$和t，原约束中$[S_1(t), S_2(t)]$则 ELF 上新的$[S_1(t+1), S_2(t+1)]$所替代，就能够获得对应于 ELF 上该点的一个新的效率转换曲线。例如，对于 ELF 中的 E，得到效率轨迹 E’，L 得到效率轨迹 L’，F 得到效率轨迹 F’。E’，L’，F’，以及更多的效率轨迹形成的包络曲线 E’L’F’，构成第二期的最优轨迹。依次类推，得到第三期的效率轨迹 E’’L’’F’’，等等。从 P 点出发，经由这些不同时期效率轨迹的所有可能路径构成资本跨期效率的资本积累路径。

上述过程从公式的角度看，就是把上面的最优问题扩展到 T 期，用矩阵形式可以表示为：

$$\text{Max}\quad 0\cdot S_1(1)+0\cdot S_2(1)+\cdots+K_1S_1(T)+K_2S_2(T)$$

Subject to

$$\begin{pmatrix} B & & & & \\ -(I+B) & B & & & \\ & -(I+B) & B & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & -(I+B) & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ \cdots \\ S(T) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} (I+B)S(0)-BC(0) \\ -BC(1) \\ -BC(2) \\ \cdots \\ -BC(T-1) \end{pmatrix}$$

$S(t)\ge 0$， $t=1,2,\cdots T$

在上面所讨论的两部门情况下，其中：

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},\quad S(t)=\begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix},\quad C(t)=\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix}$$

与上述模型相应的存在一个求极小的对偶模型，表示产品与资本存量的影子价格。这一对偶模型可以表示如下：

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & u_1(1)[(I+B_{11})S_1(0)+B_{12}S_2(0)]+u_2(1)[B_{21}S_1(0)+(I+B_{22})S_2(0)] \\
& -u_1(1)[B_{11}C_1(1)+B_{12}C_2(1)]-u_2(1)[B_{21}C_1(1)+B_{22}C_2(1)] \\
& -u_1(2)[B_{11}C_1(2)+B_{12}C_2(2)]-u_2(2)[B_{21}C_1(2)+B_{22}C_2(2)] \\
& -\cdots \\
& -u_1(T)[B_{11}C_1(T)+B_{12}C_2(T)]-u_2(T)[B_{21}C_1(T)+B_{22}C_2(T)]
\end{aligned}
$$

Subject to

$$
\begin{pmatrix}
B' & -(I+B)' & & & & \\
 & B' & -(I+B)' & & & \\
 & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & B' & -(I+B)' \\
 & & & & B'
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \cdots \\ u(T-1) \\ u(T) \end{pmatrix}
\geq
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ K \end{pmatrix}
$$

$u(t)\geq 0$， $t=1,2,\cdots T$

- 这里的目标函数，是从期初存量的应有价值中，扣除生产消费品所需资本的影子价值，使得期初资本存量净值的影子价值最小。
- 对偶定理告诉我们的是，这一最小价值正好等于期末资本存量的最大价值。其含义在于期初资本存量的价值正好等于在今后时期内对于最终产品生产的全部贡献。
- 在无效率的路径上，最终这一期初价值将会高于期末存量的价值。同时，如果某一资本存量在某一阶段内供给过剩，那么在该阶段其影子价值将为0。

列昂惕夫路径

- 与上述优化模型不同的是，传统的投入产出动态模型仍坚持采用等式约束的形式，这意味着所有资源和资产存量的充分利用，而不存在过剩的资源，进而也导致了最优选择只会在效率转换曲线的顶点达到。
- 例如，在下图中列昂惕夫的经济只会会沿着从P到L，到L′再到L″的跨期路径变化。多夫曼等人把这条路径称之为列昂惕夫路径（Leontief Trajectories，或path）。

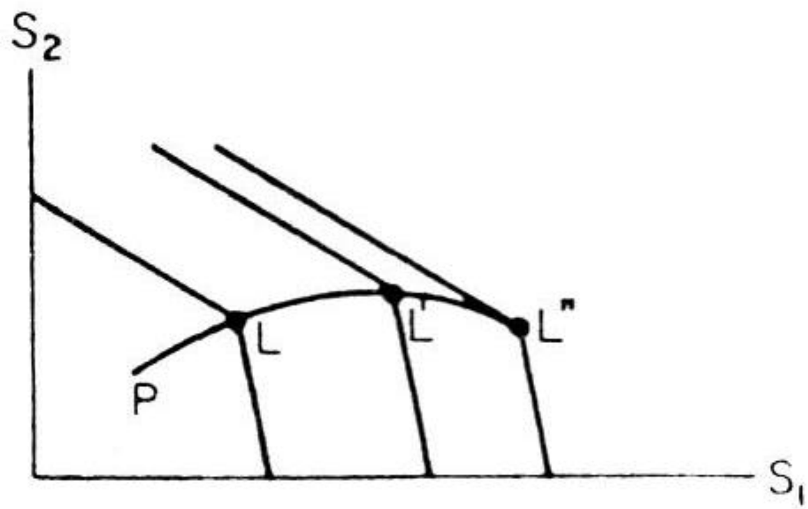


图 6-5 列昂惕夫路径

但是，这样的路径可能面临动态投入产出模型的“因果不确定性”问题，而在现实中并不存在。例如在刚才的图中，随着 L’变换到 L”，资本存量 S_2 的绝对量是下降的，即 $S_2(3) < S_2(2)$。

进一步朵夫曼等人还证明了，如果列昂惕夫路径是可行的，那么它必然是有效率的。

由此，考虑列昂惕夫路径与冯•诺依曼的平衡增长之间的关系。对于一个闭模型，消费为 0。在这样的条件下，冯•诺依曼的平衡增长表现为从原点出发的一条射线。在这条射线上，资本与产出都保持一个固定的比率。因此，当列昂惕夫路径保持平衡增长时，列昂惕夫路径同时也是冯•诺依曼路径。因为在冯•诺依曼的模型中，我们已经证明了这一路径具有最大的增长率，因此这时候的列昂惕夫路径或者是冯•诺依曼路径不仅是有效率的路径，而且也是具有最大增长率的路径。

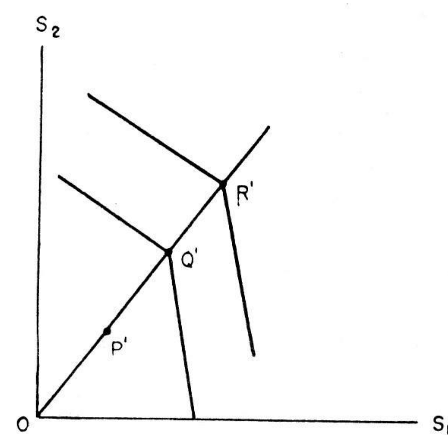


图 6-6 列昂惕夫路径与平衡增长

- 我们在下面将要讨论的大道定理指出，长期的经济增长即使由于初始存量资本结构的差异，不能处于最快的平衡增长路径上，如果能够在很长时间内接近这一路径，那么也将获得最优长期增长。

大道定理（Turnpike Theorem）

教材中的一段概述

- 在动态投入产出模型中，我们提出了相对稳定性概念。提出这一概念的原因是因为在动态投入产出系统中，给定技术系数和相应的假定下，存在一个有经济意义的平衡增长路径。但是，这样的平衡增长路径要求部门产出结构始终保持一个固定的比例，甚至对于初始的产出向量也是如此，而相对稳定性概念讨论了在不同于平衡增长起始条件的情况下，能够足够接近这一可行路径，从而避免因果不确定性。但是，在那样的框架下，并不涉及不同路径的比较，因而也不存在最优效率路径的问题。现在，在跨期最优决策的研究中，存在着多个可行路径，进而就会存在一个最优效率的跨期路径。本来对于给定的初始条件，存在一个平衡增长的冯•·诺依曼路径为最优路径，但是由于主观预设的最优目标往往与冯·诺依曼平衡增长路径的目标并不一致，平衡增长路径似乎变得没有意义。但是，可以证明的是对于这些不符合平衡增长路径起点与目标的任务来说，跨期最优路径具有一个很重要的性质，那就是在大部分时间内足够接近平衡增长路径，并在接近终点处离开进而转向预先设定的最优目标。这就是大道定理（turnpike theorem）所要表明的含义。

跨期效率路径与冯•诺依曼路径

- 在对大道定理证明之前，我们有必要对我们在动态技术效率分析上的概念间的关系作进一步的探讨，对可行路径、效率路径、平衡增长路径等概念做进一步的澄清。
- 第一节冯•诺依曼的平衡增长，主要讨论一个时期的经济增长，而现在则讨论跨期，即多个时期、长期的增长路径

如冯•诺依曼模型，考虑n种商品的经济，用x和y分别表示投入和产出向量，则(x_t, y_t)表示时期t的生产过程。设 T 为可行的生产集。在一个可行的生产集内，当前期的所有产出成为下期的投入，那么前后联系的向量序列构成一个增长路径。

可行的增长路径定义如下：

定义：可行路径（feasible path）

对于给定计划期间N，序列(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n)被称为期界为 N，以$x_0 = \overline{x}_0$为起点的可行路径，如果其中的活动技术上是可行的，且前期的产出全部成为下期的投入，即$(x_i, y_i) \in T$，且$x_{i+1} = y_i$。记该可行路径为$(x_1, y_N) \in T$或$\{x_t\}_{n=0}^{N} \in T$。

对于不同路径的效率比较，通常针对期末的存量的多少。在可行路径中，从同一初始存量出发的所有其他路径，在 N 期末都无法得到比该路径更大的存量，那么该路径称为有效率的路径。跨期效率路径可以定义如下：

定义：有效率的路径（efficient path）

从初始向量 $\overline{x}_0$ 开始的所有可行路径 $\{x_t\}$（$t = 0, 1, \cdots, N$）中，如果没有其他可行路径 $(x_1, \hat{y}_N) \in T$，使得能够得到 $\hat{y}_N \geq y_N$，则称该路径为有效率的路径。也就是说，最大化 x_N 的路径被称为有效率路径。

很显然，平衡增长路径是可行路径，只不过在所考察的期间内，所有部门投入与产出之间保持一个不变的增长率 λ，即 $b^{(t)} = \lambda a^{(t-1)}$。在一定的假定下，冯•诺依曼路径不仅是唯一，也是有效率的。

在前面冯•诺依曼平衡增长路径存在性的证明中，我们得到其存在所需要的条件，复述如下：

（A-1） T 是 $2n$ 维实数空间 R^{2n} 中的非负象限内的闭的凸锥；

（A-2） 自由处置，即 $(x, y) \in T$， $x' \geq x$， $0 \leq y' \leq y$，则 $(x', y') \in T$；

（A-3）无投入即无产出，即 $(0, y) \in T$，意味着 $y = 0$；

（A-4）存在一个 $(x, y) \in T$，满足 $y > 0$。

在上述条件下，冯•诺依曼定理证明了冯•诺依曼路径的存在性。在此，进一步定义冯•诺依曼路径如下：

定义：冯•诺依曼路径（von Neumann path）

对于向量$(\hat{x}, p, \lambda)$，其中$\hat{x}$和p为R^n中非负象限的非零元素，$\lambda \in R$，且$\lambda > 0$，如果：

（1）$(\hat{x}, \lambda\hat{x}) \in T$

（2）对所有的$(x, y) \in T$，$p(y - \lambda x) \leq 0$

称向量$(\hat{x}, p, \lambda)$为冯•诺依曼向量或冯•诺依曼均衡。称过程$(\hat{x}, \lambda\hat{x})$为一个冯•诺依曼过程。过原点和$\hat{x}$的射线$\{X \mid X \in R^n, X = \alpha\hat{x}, \alpha \geq 0, \alpha \in R\}$称为关于$\hat{x}$冯•诺依曼射线（von Neumann ray）或冯•诺依曼路径。λ称为增长因子（growth factor）。$p(y - \lambda x)$表示的是冯•诺依曼利润，因此λ也称为利息因子（interest factor）。对于冯•诺依曼平衡增长路径$\hat{y} = \lambda\hat{x}$ $p(y - \lambda x) = 0$。

在满足超强可加性的条件下，冯•诺依曼路径是唯一的。超可加性是可加性与非递减规模报酬的结合，其定义为一个凸锥。强超可加性则意味着严格的凸锥。

定义：超可加性（ superadditivity）

如果$(a^1,b^1)\in T$且$(a^2,b^2)\in T$，存在$(\alpha_1 a^1+\alpha_2 a^2,b)\in T$，满足$b\geq \alpha_1 a^1+\alpha_2 a^2$，其中$\alpha_1\geq 0$，$\alpha_2\geq 0$，且$\alpha_1+\alpha_2=1$。

定义：强超可加性（strongly superadditivity）

设 $a^{(1)}\neq 0$， $a^{(2)}\neq 0$，且对于任何正的 $a^{(1)}\neq \alpha a^{(2)}$。如果 $(a^{(1)},b^{(1)})\in T$ 且 $(a^{(2)},b^{(2)})\in T$，存在$(a^{(1)}+a^{(2)},b^*)\in T$，满足$b^*\geq a^{(1)}+a^{(2)}$。

在这些附加性质的基础上，首先我们证明，最大增长率的路径必为平衡增长路径。

定理：

如果$(\bar{a},\bar{b})\in T$是具有最大增长率λ_0的过程，那么它有平衡增长路径，即$\bar{b}=\lambda_0\bar{a}$。

证明：

根据定义，$\bar{b}\geqq\lambda_0\bar{a}$。假设$\bar{b}\geq\lambda_0\bar{a}$，可以表示为$\bar{b}=\lambda_0\bar{a}+a^*$，其中$a^*\geq 0$。对于投入$\bar{a}$，经过 S 个期间的增长，有$(\bar{a},\bar{b}^{(s)})\in T^{(s)}$，且$\bar{b}^{(s)}\geq\lambda_0^s\bar{a}$。同时，对于一定的投入$a^*$，也必有一正的产出，即$(a^*,b^{(s)})\in T^{(s)}$，且$b^{(s)}>0$。在可加性的条件下，存在过程$(\lambda_0 a+a^*,b)\in T^{(s)}$，满足$b\geqq\lambda_0\bar{b}^{(s)}+b^{(s)}$。因此，$(\bar{a},b)\in T^{(s+1)}$。

因为$b\geqq\lambda_0\bar{b}^{(s)}+b^{(s)}>\lambda_0\bar{b}^{(s)}\geq\lambda_0^{s+1}\bar{a}$，可以选择$\theta>0$，满足$b\geqq(\lambda_0+\theta)^{s+1}\bar{a}$。如此，存在一个过程其增长率不小于$\lambda_0+\theta$。这与$\lambda_0$为最大增长率相矛盾。，所以$\bar{b}=\lambda_0\bar{a}$。

定理由此得证。

进一步再证明冯•诺依曼路径的唯一性。

定理：

如果 T 是强超可加的，那么冯•诺依曼路径是唯一的。

证明：

假设对应于最大增长率 λ_0 存在两个过程 $(\overline{a}^{(1)},\overline{b}^{(1)})$ 与 $(\overline{a}^{(2)},\overline{b}^{(2)})$，其中 $\overline{a}^{(1)} \neq \alpha\overline{a}^{(2)}$。根据强超可加性假定，存在一个过程 $(\overline{a}^{(1)}+\overline{a}^{(2)},b^*)\in T$，满足 $b^* \geq \overline{b}^{(1)}+\overline{b}^{(2)}=\lambda_0(\overline{a}^{(1)}+\overline{a}^{(2)})$。这与上述定理相矛盾。

由此定理得证。

最后，我们可以说明具有最大增长率的平衡增长路径是有效率的。

定理：

任何期间 m 内最大增长率的平衡增长路径是有效率的。

证明：

假设平衡增长路径 $(\bar{a},\bar{b}^{(m)})=(\bar{a},\lambda_0^m\bar{a})\in T^{(m)}$ 是无效率的。那么存在一个可行的路径 $(\bar{a},b^{(m)})\in T^{(m)}$，满足 $b^{(m)}\geq\bar{b}^{(m)}=\lambda_0^m\bar{a}$。因此，我们能得到一个过程 $(a^*,b^*)\in T$，满足 $b^*\geq\lambda_0 a^*$。这同样与之前的定理相矛盾。

由此定理得证。

大道定理的证明

- 大道定理最初的提出是在朵夫曼、萨缪尔逊和索洛在《线性规划与经济分析》一书中提出的，但并没有提出明确的证明。之后大量学者的研究进而提出了很多证明。Stephen J. Turnovsky根据证明方法的不同分为三种类型：
  - 一是雷德纳（R. Radner）型，主要利用集合论方法，得到对冯•诺依曼路径的收敛，并用两个向量之间的距离来定义这种收敛；
  - 二是森岛通夫型，首先得到价格射线对于冯•诺依曼价格射线的收敛，然后利用这一结论得到产出射线对于冯•诺依曼产出射线的收敛，并利用了索洛和萨缪尔逊在相对稳定性定理中使用的收敛概念；
  - 三是萨缪尔逊型，处理的是平滑的一次齐次生产函数，定理的证明使用了变分法，但是依赖线性近似而只能在最大增长路径的一个邻域内成立。
- 这里我们给出的是雷德纳大道定理及其证明。他的证明被认为是所有这些证明中最精彩的。

雷德纳考虑的是一个闭模型，并延续了大部分冯•诺依曼模型的基本假定和定义。

用投入产出对(x,y)的集合来表示技术集 T。对于可行路径$\{x_t\}_{t=0}^N$，如果$(x,\rho x)\in T$，ρ为实数，$\{x_t\}_{t=0}^N$描述的将是一个平衡增长路径，ρ为增长因子。扩张率则被定义为：$\lambda(x,y)=\max\{c\mid y\geqq cx\}$。冯•诺依曼定理告诉我们，对于$(x,y)\in T$，最大的扩张率将等于冯•诺依曼平衡增长因子，即$\rho=\max\limits_{(x,y)\in T}\lambda(x,y)$。

在冯•诺依曼技术下，A 表示投入系数，B 表示产出系数，那么冯•诺依曼的技术集为：

$T=\{(x,y)\mid y=Ba,x=Aa,a\geqq 0\}$。

其中，a为生产过程的水平（levels）或密度（intensities）。这样定义的冯•诺依曼技术集 T 将是一个多面锥。雷德纳对大道定理的证明在技术集的假定上只是强调了如下两个条件：

A1 T 是R^{2n}空间中非负象限内的一个闭的锥（closed cone）；

A2 如果$(0,y)\in T$，那么$y=0$，无投入即无产出。

关于目标函数，要在给定的期间 N 和初始条件 x_0 下，在所有可行序列 $\{x_t\}_{t=0}^{N}$ 中寻找最大化 $u(x_N)$ 的路径。这里的目标函数为关于期末或最终状态产出 x_N 的一个函数，也称为关于 x_N 的一个偏好函数。如果是一个中央计划经济的话，它体现了计划者对于不同最终状态的一种偏好。雷德纳所讨论的大道定理的最优目标只是关注于最终状态，因此这类大道理论也称为最终状态大道理论（final-state turnpike theory）。

雷德纳关于该偏好函数的假定如下：

A3 u 为连续、非负的，且存在 x，使得 $u(x)>0$；

A4 u 是“拟齐次的（quasi-homogeneous）”，含义是：对于所有非负向量 x' 和 x''，以及所有的数 $k>0$，当且仅当 $u(kx')\geqq u(kx'')$， $u(x')\geqq u(x'')$ 。

不失一般性，可以取 u 为一次齐次。这样定义的目标函数，例如 $u(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ ，如果 w_i 是产品 i 的价格，那么目标函数就是所有产出价值的合计。

因此，大道定理的问题将是，在给定的初始条件 x_0 和规划时期 N 内，寻找能够最大化 $u(x_N)$ 的序列或者说路径。这一序列称为最优路径（u -optimal）。

雷德纳对大道定理的证明利用了影子价格，最优增长路径相比于可行路径，存在着“影子利润（shadow profit）”。可以定义利润函数为：

$$p(y-\mu x)$$

其中 p 为产品价格向量，μ 为利息因子。

在投入产出对(x, y)之外，存在一个均衡的价格-利息对(p, μ)，且满足如下条件：

1）对于所有的$(x, y) \in T$，$p(y - \mu x) \leqq 0$；

2）$p \geq 0$，$\mu > 0$。

对于技术集 T 中的冯•诺依曼平衡增长路径进$\hat{x}$，即$(\hat{x}, \rho\hat{x}) \in T$，$\rho$为增长因子，而$(p, \rho)$为一个均衡的价格-利息对。过$\hat{x}$的射线也称为冯•诺依曼射线。从而获得一个由$(\hat{x}, p, \rho)$所表示的冯•诺依曼均衡。

在保证冯•诺依曼路径存在性的假设条件之外，雷德纳引入冯•诺依曼路径唯一性的一条新的假定：

A5 设 $(\hat{x}, p, \lambda)$ 为冯•诺依曼向量，则对 T 中所有满足 $p(y-\lambda x)<0$ 的 (x, y)，与 $(\hat{x}, \lambda\hat{x})$ 不成比例。

对于这条假定，在前面的分析中给出了另一形式，即 T 有非空的内部，且是一个严格的凸锥。雷德纳认为这一严格的假定下，唯一性自然能够得到保证。

为证明大道定理，首先定义距离的概念。

定义：雷德纳

两个向量x，z之间的距离定义为：

$$d(x,z)=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{z}{\|z\|}\right\|$$

其中$\|z\|=\sqrt{<z\cdot z>}$。

为证明大道定理，雷德纳提出了一个重要的引理。当过程$(x, y) \in T$到冯•诺依曼路径的距离超过某个给定的ε，与冯•诺依曼路径的$py = \lambda px$相比，比如存在一定的价值损失。

引理：雷德纳

设$(\hat{x}, p, \rho)$为一个冯•诺依曼向量，且冯•诺依曼路径是唯一性的假定。在假设条件 A1、A2 的情况下，则对任意$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$，使得对于任意的$(x, y) \in T$，且$d(x, \hat{x}) \geqq \varepsilon$，有$py \leqq (\rho - \delta) px$。

定理：雷德纳大道定理

设$(\hat{x}, p, \rho)$为一个冯•诺依曼向量，并满足冯•诺依曼路径唯一性的假定。在假设条件A1-A5 之下，如果：

1）存在一个实数$K > 0$，满足对所有商品向量x有$u(x) \leqq Kpx$；

2）一个初始商品向量x_0给定，对于某个数$L > 0$，满足$(x_0, L\hat{x}) \in T$；

3）$u(\hat{x}) > 0$。

那么,对于任何的$\varepsilon > 0$,存在一个数S,对于任何的 N 和最优序列$\{x_t\}_{t=0}^{N}$,其中$d(x_t, \hat{x}) \geqq \varepsilon$的时期数不超过$S$。

- 对定理条件含义的说明

定理中的条件 1 是有关大道最优目标的偏好函数的一个限定。由于可行路径的评价完全取决于最终状态，因此，偏好函数就是要反映最终状态的优劣。从这一假定的具体形式上来看，如果我们考虑偏好函数为 $u(x) = q'x$，其中 q 为单位单形，即 $q \geqq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$。在 $p > 0$ 的情况下，取 $K = \max(\frac{1}{p_i})$，$i = 1, \cdots, n$。就有：$q_i \leqq 1 \leqq Kp_i$，进一步则有对于 q 与 x 的任一种情形，$q'x \leqq Kp'x$ 成立。

从另一方面来看，平衡增长由于比例不变，平衡增长的产出可以直接用总量进行衡量，但是对于不平衡增长却必须借助于偏好函数来衡量。在冯•诺依曼均衡的背后都有一个冯•诺依曼价格，这一价格可以提供对不平衡增长中产出的一个很好度量。用冯•诺依曼价格来度量的商品价值，即 $p'x_N$，被库普曼斯称为商品的冯•诺依曼价值。因此，偏好函数不管如何设计，都应该受冯•诺依曼价值的控制或主导。同时，我们看到如果用 μ^* 表示均衡的利息率，那么任何可行的活动应该满足如下条件：

$$p'y \leqq \mu^* p'x$$

对于最优平衡增长将无利润，而非平衡增长则利润为负。因此，当我们考虑大道定理问题时，在沿大道路线增长时，将是 $p'y = \mu^* p'x$，而非大道路径增长时，则是 $p'y < \mu^* p'x$。因此，关于产出的偏好函数应该受到 $p'x$ 主导。

假设条件 2 与 3 只不过是要让证明过程简单化。定理中的条件 2 是要确保从一个初始商品向量 x_0 开始，能够进入到大道路径上。例如如果初始向量 x_0 中不包含大道路径中的某种商品，那么就无法进入到大道路径上。进一步在证明中，雷德纳所给出的参考路径假设了从初始阶段开始，紧接着的下一个阶段就进入到大道的平衡增长路径，这一点显然可以放松为经过若干阶段再进入平衡增长路径，而不影响定理的证明。

例如，从给定的初始向量 x_0，存在某个正数 $L>0$，和某个正数 $N_0\geq 1$，存在一个可行序列从 x_0，经过 N_0 到达 $L\hat{x}$。另外，假设条件 3 也可以放松为存在一个可行路径，从 $\hat{x}$ 经过 $N_1\geq 0$ 的阶段，到达 y，而 $u(y)>0$。只不过在上述两种情形下，证明中最后所得到的 S 将修正为如下的形式：

$$S=\max[N_0+N_1,\frac{\log C}{\log(\frac{\rho}{\rho-\delta})}]$$

- 雷纳德定理的扩展
  - 雷德纳大道定理被认为存在很多需要完善的地方。其中一个方面就是它只是证明了不在大道上的阶段数不超过S，并不能保证有效率的路径在其中间阶段能够连续而不间断地在大道路径某个领域内前行。也就是，可能会出现在中途偏离冯•诺依曼路径某个领域之外，或者多次进入和离开冯•诺依曼路径的某个领域。
  - 后来的研究者为此提出了排除这一情形的定理。其中Nikaido通过提出附加的假定，证明了处于冯•诺依曼路径某个领域之外的路径的阶段，只出现在路径的开始和结束阶段的大道性质。通常把排除这一情形的大道定理称为强大道定理，而把之前的大道定理称为弱大道定理。

– 另一个不足就是它基于一个封闭的体系。大道定理中的偏好函数被定义为最终状态的产品的函数，而与中间时期的产品无关。在大道定理早期研究的基础上，六十年代中期以后的研究开始讨论开系统中的最优增长，这时劳动被看作是来自外部的流入，而消费则被看作从系统中流出。在这一方面的研究同样很多，例如Hiroshi Atsumi(1965)，盖尔，筑井甚吉等人在闭系统大道定理基础上进行的讨论

为了对消费的研究，首先引入劳动投入，生产过程则从原来的(x, y)转而用一个有序三元组(l, x, y)来表示。其中，劳动的投入l为一个实数，x与y仍表示投入与产出n维的向量。

所有可行活动过程构成技术集 T。劳动力以外生给定的一个既定的增长率增长，即$l(t) = \lambda^t l_0$

其中，$l_0 > 0$为期初阶段 0 的工人数。效用函数定义为关于消费的函数$u(c)$，且满足连续的、凹的和严格递增的假定。在这样一个生产系统中，如果牺牲当期的消费，进而减少了当期的效用，就可以增加未来的消费，从而增加未来的效用。为了最大化整个阶段的效用，就面临着最优储蓄的决定这样一个优化问题。

从优化问题的数学结构来看，如果所有可行的人均消费流是一个非空的子集，同时效用函数 $u(c)$ 是连续的，那么如果一个可行的人均消费流能够使整个阶段的效用合计达到最大，那么相应的可行路径将是一个最优路径。与闭系统类似，在一个含消费的开系统中，如果投入、产出与消费之间保持一个固定的比例，从而构成一个平衡增长路径，而这样的平衡增长路径是否也是最优路径呢？

在关于技术集 T 为一闭的凸锥，具有免费处置，以及满足投入与产出严格凸性的假定等条件下，可以证明最大化效用函数的三元组构成了平衡增长路径 $\{\lambda^t\hat{x},\lambda^t\hat{y},\lambda^t\hat{c}\}_0^\infty$ 。在平衡增长路径上，经济中人均国民收入 $\hat{y}$ 中人均消费量为 $\hat{c}$ ，而储蓄 $\hat{x}$ 则转化为投资，与所有其他增长率为 λ^t 的平衡增长路径相比，达到人均消费效用水平的最大值。类似于增长理论中黄金积累法则，这一三元组 $(\hat{x},\hat{y},\hat{c})$ 也称为黄金三元组，而由它所产生的射线和路经，则称为黄金射线和黄金路经。与此同时，关于这一黄金路径，大道定理成立。也就是说，对于一个事先给定的初始存量 y^0 ，尽管不在黄金路径上，但是却可以在一个有限的阶段内进入到黄金路径。

投入产出模型与大道定理

- 基于冯·诺依曼模型的大道定理的讨论显然适用于投入产出模型，因为投入产出模型本身就是冯·诺依曼模型的一个特例。通过引入多种技术选择，以及联合生产的假定，在广义列昂惕夫体系下对大道定理的讨论与冯•诺依曼模型并没有本质区别。
- 但是，动态投入产出模型中把现期投入品与资本品区别开来，在模型形式上将带来差别。基于投入产出模型的理论分析则有助于把这一抽象的理论性质将来用于经验分析。
- 以下对投入产出模型下大道定理的简要说明主要参考自筑井甚吉（Jinkichi Tsukui）的文献。在这方面，筑井甚吉不仅在理论上进行分析，甚至对日本经济开展了大道性质的经验研究。高山晟在他的《数理经济学》一书中也特别提到他在这一领域的贡献

假设有 n 个部门，产品数也是 n，对于其中的第 j 个部门，存在 m_j 种可能的生产过程，而整个经济将有 m 种生产过程，$\sum_{j=1}^{n} m_j = m$。这一广义投入产出模型的投入系数可以表示为：

$$A=[a_1(1),\cdots,a_1(m_1),a_2(1),\cdots,a_2(m_2),\cdots,a_n(1),\cdots,a_n(m_1)]$$
$$=[a_{i1}(1),\cdots,a_{i1}(m_1),a_{i2}(1),\cdots,a_{i2}(m_2),\cdots,a_{in}(1),\cdots,a_{in}(m_1)]$$

$$i=1,\cdots,n$$

可以简记为：

$$A=[a_{ij}(q_j)]$$

其中，$i,j=1,\cdots,n$，$\sum_{j=1}^{n} m_j = m$，$1 \le q_j \le m_j$

按相同产品部门排序的资本系数可以表示为：

$$B=[b_{ij}(q_j)]=[b_1(1),\cdots,b_1(m_1),b_2(1),\cdots,b_2(m_2),\cdots,b_n(1),\cdots,b_n(m_1)]$$

以上，$a_{ij}(q_j) \ge 0, b_{ij}(q_j) \ge 0$

如果时间期间为 1 到 T 期。$x(t)$ 表示阶段 t 的产出水平。那么有如下投入产出闭模型：

$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)]$$

$$(I - A + B)x(t) = Bx(t+1)$$

其含义为：本期的存量资本加上本期的新增流量等于下期的存量资本。

由此扩展为优化模型，把上述条件转化为不等式，并作为约束条件，即：

$$(I - A + B)x(t) - Bx(t+1) \geq 0$$

表示 $t+1$ 期开始的资本存量 $Bx(t+1)$ 必须以该期期初可获得的存量资本 $(I - A + B)x(t)$ 为限。如果考虑一个阶段的存量资本可以无成本地转化为下一个阶段的存量资本，资本存量参与的生产相当于一种联合生产，那么上面的约束可以写成等式的形式。

基于此的优化模型原模型为：

$$\max \, pBx(T)$$

S.t.

$$(I-A+B)x(t)-Bx(t+1)=0 \qquad (t=0,\cdots,T-1)$$

$$x(t)\geq 0 \qquad (t=0,\cdots,T)$$

与原模型相对应的对偶问题为：

$$\min u(1)(A+B)x(0)$$

S.t.

$$u(t+1)(A+B)-u(t)B\leq 0$$

$$pB-u(T)B\leq 0$$

$$u(t)\geq 0$$

模型中 $u(t)$ 的含义是资本存量的影子价格，或者是利息率。因此，目标函数的含义是要让期初的成本最小，第一个约束条件是所有活动的利润是小于等于 0 的，而第二个约束的含义则是期初投入价值要小于期末资产收益。

对于给定的初始存量，以及未来计划时期希望达到的存量结构，上述线性规划模型提供了跨期最优决策形成的最优增长路径。大道定理的性质则表明，在一个较长的时期内，最优增长路径会改变存量结构，沿冯•诺依曼平衡增长路径的方向，以最大的增长率增长，并在接近计划期末改变存量结构，达到预定的目标。在上述模型中，平衡增长路径主要取决于动态投入产出模型 $(I-A+B)x(t)-Bx(t+1)=0$，而规划期末的最终目标则取决于目标函数的外在偏好。

对于上述动态投入产出模型的解的情形，我们在平衡增长与相对稳定性的讨论中已经熟知了。现在对于跨期最优决策的线性规划模型，基于此将获得一个具有最大增值率的平衡增长路径。

具体而言，在非负的投入系数 $I-A$ 与资本系数 B 中选择一组投入技术 $I-A_\sigma$，以及相应的资本系数 B_σ，如果假定 $I-A_\sigma$ 非奇异，且 $(I-A_\sigma)^{-1}\geq 0$，设 ρ_1^σ 为非负矩阵 $(I-A_\sigma)^{-1}B_\sigma$ 的弗罗贝尼乌斯根。在所有的技术矩阵的弗罗贝尼乌斯根中，设 ρ_1^1 是其中最小的单根。在 $(I-A_1)^{-1}>0$ 且 B_1 非奇异的条件下，$I+(I-A_1)B_1^{-1}$ 也是非奇异的，且其最大的特征根为 $\eta_1^1=1+\dfrac{1}{\rho_1^1}$，且是单根。

在上述条件下，存在原问题与对偶问题的唯一正的向量 z_1^* 与 u_1^*，使得：

$$(I - A_1 + B_1 - \eta_1^1 B_1) z_1^* = 0$$

$$u^*(I - A_1 + B_1 - \eta_1^1 B_1) = 0$$

$$u^*(I - \bar{A}_1 + \bar{B}_1 - \eta_1^1 \bar{B}_1) \leq -\alpha e < 0$$，对于 $\alpha > 0$

也就是说，获得一个具有最大增长率的技术 $(I - A_1)$、B_1，满足投入与产出间转换的约束条件，且具有零利润，而任何其他的技术只能获得负的利润。据此得到沿 z_1^* 方向的冯·诺依曼路径，也就是具有最大增长率 $\eta_1^1 - 1 = \dfrac{1}{\rho_1^1}$ 的平衡增长的大道。与之对应的存在一个冯·诺依曼价格向量 u_1^*，在这样一个价格下，$\eta_1^1 - 1 = \dfrac{1}{\rho_1^1}$ 成为这一最优技术所带来的最大利润率。

- 围绕这一最大增长率的平衡增长的大道性质表明，在一个相当长的时期内，最优产出在大部分时期内非常接近平衡增长的大道，即存在一个小于T的N，至少在T-N的时期内，最优解与相应时期的冯•诺依曼路径之间的距离小于某个任意给定的正数。
- 如果处于冯•诺依曼路径某个领域之外的路径的阶段，只出现在路径的开始和结束阶段，那么强的大道性质亦将成立。

End of Chapter 6