第九章
投入产出对称分析

- 引言
  - 基于分配系数的模型区别于列昂惕夫型的需求拉动模型，而称之为供给驱动模型。
  - 由印度学者戈什（A. Ghosh）在他1958年的一篇文献中最先提出，因此也称为戈什模型。
  - 我国投入产出学者刘起运对于分配系数模型给出了较为完整的分析，并称之为对称模型。这一称谓的意义在于从理论上把分配系数的模型看作是一个与投入系数模型对称的分析系统。这不仅扩展了投入产出模型的应用领域，更重要的是把投入产出模型上升到经济系统分析的更高层次，使得我们对投入产出方法的性质有了更深入的认识。
  - 尽管对于分配系数模型在理论上至今仍然存在着一些争论未决的话题，但是包括争论本身在内的这些内容为我们深入理解投入产出方法提供了很好的路径。这就是为什么我们将这部分内容作为单独的一章进行介绍的原因。

投入产出对称模型

投入产出行向关系

$$x = Ax + y$$

$$x = (I - A)^{-1} y$$

- $L = (I - A)^{-1}$ 被称为列昂惕夫逆阵或完全需求系数。表示最终需求 作为经济系统的一个外生的拉动力，在它的影响下带来各部门产出的增长。这一需求拉动模型是建立在直接消耗系数之下的列昂惕夫数量模型（Leontief quantity model）

- 直接系数与完全系数之间的关系

$$B = (I - A)^{-1} - I$$

$$B = A(I - A)^{-1}$$

$$B = A + A^2 + \cdots + A^p$$

$$A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1} A = A + A^2 + \cdots + A^{p+1}$$

$$B_v = A_v (I - A)^{-1}$$

投入产出的列向关系

$$x' = i'Z + v$$

$$x' = x'R + v$$

$$x' = v(I - R)^{-1}$$

- $G = (I - R)^{-1}$ 称为戈什逆阵（Ghosh inverse matrix）或完全供给系数矩阵（Total supply matrix）。表示在外生的初始投入 的供给推动之下，各部门产出的增长。这一供给推动模型是建立在分配系数基础上的戈什数量模型（Ghoshian quantity model）。

- 分配系数与完全分配系数的关系

$$D=(I-R)^{-1}-I$$

$$D=(I-R)^{-1}R$$

$$D=R+R^2+\cdots+R^p$$

$$R(I-R)^{-1}=(I-R)^{-1}R=R+R^2+\cdots+R^{p+1}$$

可以从直接的最终产出系数 R_y 定义完全的最终产出系数 D_y ：

$$D_y=(I-R)^{-1}R_y$$

$$(I-R)^{-1}(I-R)i = i$$

$$(I-R)i = R_y$$

$$(I-R)^{-1}R_y = i$$

- 也就是说，与所有直接分配系数与最终产出系数行向合计为1相对应，完全的最终产出系数的行向合计为1。

对偶

- A系数下的数量模型和价格模型

$$p\hat{x} = pZ + p_v V \qquad p = pZ\hat{x}^{-1} + p_v V\hat{x}^{-1}$$

$$p = pA + p_v A_v \qquad p = p_v A_v (I - A)^{-1}$$

- 表示初始投入价格的变化首先会按照初始投入系数直接推动单位成本的变化，并影响到该部门产出价格的变化。
- 其次，该产品价格的变化会影响到所有以该产品为中间投入的产品的成本，并进一步影响其价格。这些产品价格的改变又会进一步改变相关的中间投入，并推动产品成本以及价格的进一步改变。
- 因此，这种由于初始投入要素价格变化直接和间接推动产品价格变化，形成与列昂惕夫需求拉动数量模型相对应的一种成本推动的投入产出价格模型。

- 仿照列昂惕夫数量模型与价格模型的关系，有研究者提出了与戈什供给推动模型相对应的价格模型

$$\hat{x}p = Zp + Yp_y$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1h} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Y_{nh} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{y1} \\ p_{y2} \\ \cdots \\ p_{yh} \end{pmatrix}$$

其中，Y 为 h 个类别的最终产品矩阵，p_y 为不同类别最终产品价格向量。

- 在成本推动的价格模型中，同一种产品具有相同的价格，但是在需求拉动的价格模型中，同一种产品具有不同的价格，也就是说同一种产品以不同的价格销售给不同的购买者，而同一部门的不同投入却具有相同的价格。类似地，成本推动的价格模型中初始投入在行向上是同质的，而需求拉动的价格模型中，最终需求在列向上是同质的。

引入分配系数后，有：

$$p = \hat{x}^{-1}Zp + \hat{x}^{-1}Yp_y$$

$$p = Rp + R_y p_y$$

$$p = (I - R)^{-1} R_y p_y \tag{9.10}$$

其中，R_y 为最终产品需求系数。

- 模型的经济含义为最终需求价格的变化如何直接，以及间接地拉动各种产品价格的变化。因此，这一价格模型被称为需求拉动的投入产出价格模型。
- 这时，每一行应该更好理解为这一部门的收入。最终产品价格的外生改变，首先直接影响该部门的收入，这些收入的增长或下降就会相应推高或降低这一部门所有投入品的价格变化。这些投入品的价格变化，又会进一步影响生产这些产品的部门的投入价格的变化。
- 需求拉动价格模型利用完全供给系数，模拟了所有直接和间接的需求拉动价格变化的传递过程。这种情况下，假定了投入产出表每一列所有中间投入价格保持了与总投入价格相同的幅度的改变。

原模型与对称模型的关系

- 由于直接消耗系数 与直接分配系数 都源于投入产出表的中间流量，因此由同一张投入产出表所计算的这两个系数之间将存在相互转化的关系

由 $A = Z\hat{x}^{-1}$，得到 $A\hat{x} = Z$，代入 $R = \hat{x}^{-1}Z$，得到：

$$R = \hat{x}^{-1}A\hat{x} \qquad (9.11)$$

同时，也就有 $A = \hat{x}R\hat{x}^{-1}$

其次来看完全系数之间的关系：

由 $G=(I-R)^{-1}$，得到：

$$(I-R)G=I$$

把直接系数之间的关系 $R=\hat{x}^{-1}A\hat{x}$ 代入，得到：

$$(I-\hat{x}^{-1}A\hat{x})G=I$$

$$(\hat{x}-A\hat{x})G=\hat{x}$$

$$(I-A)\hat{x}G=\hat{x}$$

得到：

$$(I-A)^{-1}=L=\hat{x}G\hat{x}^{-1}$$

进而同样有：

$$G=\hat{x}^{-1}L\hat{x}$$

完全消耗系数与完全分配系数

从 $L = \hat{x}G\hat{x}^{-1}$ 出发，两边左乘 A，得到：

$$B = AL = A\hat{x}G\hat{x}^{-1}$$

因此，有

$$B = \hat{x}\hat{x}^{-1}A\hat{x}G\hat{x}^{-1} = \hat{x}RG\hat{x}^{-1} = \hat{x}D\hat{x}^{-1}$$

变形同样可以得到：

$$D = \hat{x}^{-1}B\hat{x}$$

初始投入系数 与产出系数

$A_v = v\hat{x}^{-1}$

又 $v = x'(I-R)$

所以 $A_v = x'(I-R)\hat{x}^{-1}$　　　　（9.14）

产出系数中的最终产出系数 R_y 与投入系数的关系：

$R_y = \hat{x}^{-1}y$

又 $y = (I-A)x$

所以 $R_y = \hat{x}^{-1}(I-A)x$　　　　（9.15）

表明投入系数与产出系数的转换关系，受到社会总产品 x 的规模和结构的影响。

- 上面所有分析的投入系数与产出系数之间的等价关系或替换关系，都是以同一张投入产出表为前提的。
- 但是，我们在经济规划或者是分析时，利用两个模型得出的结论则几乎不可能一致。因为对于需求拉动模型与供给推动模型：

$$x = (I - A)^{-1} y$$

$$x' = v(I - R)^{-1}$$

- 当我们利用投入系数的需求拉动模型，研究外生的最终需求y对产出的影响时，实际上是假定了投入系数的稳定性，而至于分配系数并没有做出任何规定；同样，当我们利用产出系数的供给推动模型，研究外生的初始投入v对产出的影响，实际上是假定了分配系数的稳定性，而对于投入系数则没有任何的规定。

- 根据两类系数之间的关系

$A=\hat{x}R\hat{x}^{-1}$， $R=\hat{x}^{-1}A\hat{x}$

$B=\hat{x}D\hat{x}^{-1}$， $D=\hat{x}^{-1}B\hat{x}$

可以看到，如果分配系数比较稳定，假定 $R_{t+1}=R_t$，那么有 $A_{t+1}=\hat{e}A_t\hat{e}^{-1}$；其中 $\hat{e}=\hat{x}_{t+1}\hat{x}_t^{-1}$，即产出增长率。如果直接消耗系数比较稳定，假定 $A_{t+1}=A_t$，那么有 $R_{t+1}=\hat{e}^{-1}R_t\hat{e}$。只有当各部门产出增长率完全相同的情况下，$R_{t+1}=R_t$ 时有 $A_{t+1}=A_t$，或者 $A_{t+1}=A_t$ 时有 $R_{t+1}=R_t$

- 从上述结论推广开来，要同时保证直接消耗系数与分配系数之间的等价性，实际上最终需求结构、初始投入结构、总产出结构都保持不变，经济只是不同规模的变化，而无任何的结构变化。显然这并无现实意义。
- 因此，在分析应用中我们需要在这两者间做出选择。这显然取决于现实经济更倾向于何种假定。
- 但是，在分配模型取得应有进展之前，必须对它所面对的理论质疑做出解答。这将是我们下面将要说明的问题。

关于对称模型的争论

- 与列昂惕夫投入系数的需求拉动模型的广泛应用相比，戈什50年代末提出分配系数模型以来，很长时间内并没有引起研究者的广泛注意。
- 但是，分配模型却受到了理论上的巨大挑战。最有代表性的是从1988年欧斯特哈芬（Jan Oosterhaven）在《区域科学杂志》上发表关于供给驱动投入产出模型的质疑开始，以及随后在该杂志上掀起的关于这一问题的争论。

- 在外部冲击之下，外生变量改变的情况下，如果要维持投入系数不变，则分配系数往往要做出改变；相反，如果要维持分配系数不变，则投入系数要做出改变。
- 在列昂惕夫需求拉动模型中，技术稳定从而投入系数不变，而分配系数改变，一般来说问题并不大。但是，在戈什的供给驱动模型中，假定分配系数不变而投入系数改变，就会与人们的一般认识形成较大的出入。

- 正如欧斯特哈芬所指出的：“戈什模型认为需求是能够保证的，也就是说，需求是完全弹性的。对于最终需求来说，这意味着消费与投资会完全随供给而改变，这种购买将会是买汽车而没有汽油、买工厂而没有机器。对于中间需求者意味着投入比率将会随供给的改变而随意变换。所以，生产的本质概念，例如生产函数实际上就被弃之不用了。”

- 两个特例
  - 在需求拉动型的数量模型中，假定了固定比例的生产函数，投入之间完全不存在替代关系，表现为完全互补的生产函数，供给对于最终需求的变化具有完全的弹性（需要什么就生产什么）。
  - 与之相反，在供给驱动型的数量模型中，供求关系被严格固定下来，而投入之间的比例关系则被放松了，表现为完全替代的生产函数，需求对于供给的反应具有完全的弹性（供给什么就需求什么）。
  - 这两者都可以看作是一般均衡模型的特例。

- 两种生产函数
  - 对于列昂惕夫模型而言，产出在各部门之间没有差异，可以完全替代，而投入之间存在差异，完全不可替代。因此对于上述模型，是不同的投入，只存在唯一的产出 。
  - 对于戈什模型，情况正好相反。产出在各部门之间存在差异，而投入却完全可替代。因此，对于上述模型，面对的是唯一的投入 ，以及不同的产出。

- 两种优化结构
  - 对于需求拉动模型，在单一的产出与投入价格外生给定的条件下，利润的最大化转化为成本最小化。
  - 对于供给驱动模型，在单一的投入和产出价格给定的条件下，利润最大化转化为收入最大化。

需求驱动的投入产出模型	供给驱动的投入产出模型
对单个企业 单一同质的产出，即产出间完全替代 给定的需求 多个投入 固定投入比例，即投入间完全互补 给定投入价格 成本最小化 对投入的引致需求，即后向联系	单一同质的投入，即投入间完全替代 给定的供给 多个产出 固定产出比例，即联合产出 给定产出价格 收入最大化 引致的产出供给，即前向联系
对区域或整体经济 对每一部门外生的最终需求 对每一部门内生的中间需求 每一投入完全弹性供给，即无联合生产，无生产能力瓶颈	对每一部门外生的初始投入供给 对每一部门内生的中间产品供给 每一产出完全弹性需求，即无消费互补性，无收入约束

- 供给驱动模型的极端假定带来了更多的质疑。但是，这些争论不管结论如何，都极大的推动了对投入产出体系的理解。
- 对戈什供给驱动模型的质疑也同样带来我们对于列昂惕夫需求拉动模型种种假定及模型性质的思考。
- 实际上，需求拉动模型与供给驱动模型的假定都是对现实的极端假定，需要根据现实经济的不同，以及研究问题的不同来决定哪种假定更合理。

Dietzenbacher的折衷解释

- 给定初始投入的变化，分配系数不变
- 基期表　　　　　　　　　　　报告期表

X_0	f_0	x_0
v_0		$v_0 e$
x_0'	$e' f_0$	

$X_1 = \hat{x}_1 R_0$	$f_1 = \hat{x}_1 (I - R_0) e$	x_1
v_1		$v_1 e$
x_1'	$e' f_1$	

$$x'_1 = v_1 (I - R_0)^{-1}$$

- 列昂惕夫模型的解释：利用新的价格比率进行调整，保持行列平衡

$$\pi = vA_v(I-A_0)^{-1} = v_1\hat{v}_0^{-1}\hat{v}_0\hat{x}_0^{-1}(I-A_0)^{-1} = v_1\hat{x}_0^{-1}(I-A_0)^{-1}$$

$\hat{\pi}X_0 = \hat{\pi}A_0\hat{x}_0$	$\hat{\pi}f_0$	$\hat{\pi}x_0$
v_1		v_1e
$\hat{\pi}A_0\hat{x}_0 + v_1$	πf_0	

$$v_1 = \pi(I-A_0)\hat{x}_0$$

$$\pi A_0\hat{x}_0 + v_1 = \pi\hat{x}_0$$

- 这种解释的核心是把供给驱动模型解释为一种价格模型。
- 正如我们在投入产出价格影响模型中所看到的，初始投入要素的增长会带来所有产品价格改变，原先的投入产出表成为一张全新的投入产出表，但是在剔除要素引起的价格上涨因素之后，仍然是原先的投入产出表，也就是说，实体经济没有发生任何改变，而仅仅是相对价格的改变。
- 对于戈什的供给驱动模型，在初始投入的冲击之下，分配系数不变而投入系数改变，但是这种改变仅仅是价格的变化，而实际的投入结构及背后的技术关系仍然得以保持。
- 迪森巴赫把供给驱动模型解释为价格模型之后，证明了与列昂惕夫数量模型处于对偶关系的价格影响模型之间的一致性。

- 从迪森巴赫的观点看，投入产出的两种模型正好构成了一般均衡模型的两个极端。作为市场经济中存在着的对外生冲击的两种反应模式：数量调节与价格调整。
- 在需求拉动模型中，表现为最终需求的影响完全表现为产出的改变，而没有任何价格的调整，而供给推动模型则相反，完全表现为价格调整，而无任何数量的调整。
- 迪森巴赫把供给驱动模型解释为价格模型，尽管在很大程度上消除了之前的质疑，但是另一方面却使得供给驱动模型仅仅局限于价格影响，而实际经济并没有发生任何改变，表现出一种理论上的让步。

供给约束的模型分析

- 供给驱动模型另一个值得关注的应用领域就是研究供给冲击，如自然灾害、贸易壁垒、垄断供给与资源短缺等对经济系统的影响。
- 戴维斯和萨尔金（H. Craig Davis and E. Lawrence Salkin）提出了如下的供给约束分析模型，把整个产业分为有约束的产业与无约束的产业。分别用下标 r与s表示有约束产业与无约束产业的各个变量。

需求拉动模型中的供给约束

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{rr} & A_{rs} \\ A_{sr} & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_r \\ y_s \end{pmatrix}$$

- 模型求解得到：

$$x_s = (I - A_{ss})^{-1}(A_{sr}x_r + y_s)$$

$$y_r = (I - A_{rr})x_r - A_{rs}x_s$$

在无约束最终需求 y_s 已知的情况下，无约束部门的产出 x_s 和受约束部门的最终需求 y_r 将如何受约束部门产出 x_r 的影响。

供给推动中的供给约束

$$(x_r, x_s) = (x_r, x_s)\begin{pmatrix} R_{rr} & R_{rs} \\ R_{sr} & R_{ss} \end{pmatrix} + (v_r, v_s)$$

$$x_s = (x_r R_{rs} + v_s)(I - R_{ss})^{-1}$$

$$v_r = x_r(I - R_{rr}) - x_s R_{sr}$$

在无约束初始投入 v_s 已知的情况下，无约束部门的产出 x_s 和受约束部门的收入 v_r 将如何受约束部门产出 x_r 的影响。

- 对于上述两模型，首先我们举一数值例子来说明两种模型结果产生差异的原因。

表 9-5 供给约束的投入产出表

	受约束部门 r	无约束部门 s1	无约束部门 s2	最终需求	总产出
受约束部门 r	22	40	60	14	136
无约束部门 s1	52	18	24	84	178
无约束部门 s2	12	80	42	72	206
初始投入	50	40	80		
总投入	136	178	206		

计算得到直接消耗系数与分配系数见下表：

表 9-6 直接消耗系数与分配系数

A			R		
0.1618	0.2247	0.2913	0.1618	0.2941	0.4412
0.3824	0.1011	0.1165	0.2921	0.1011	0.1348
0.0882	0.4494	0.2039	0.0583	0.3884	0.2039

现在假定受约束部门的产出减少 1 个单位，也就是$\Delta x_r = -1$利用上述两个模型计算无约束部门产出所受的影响：

对于需求拉动模型，$\Delta x_s = (I - A_{ss})^{-1} A_{sr} \Delta x_r$，计算得到：

$$\Delta x_s = \begin{pmatrix} -0.474 \\ -0.379 \end{pmatrix}$$

对于供给推动模型，$\Delta x_s = \Delta x_r R_{rs} (I - R_{ss})^{-1}$，计算得到：

$$\Delta x_s = (-0.611, -0.658)$$

- 以上两个模型都对受约束部门产出变化对无约束部门产出所带来的影响进行了计算，但结果并不相同。
- 结果的差异来自于两者不同的假定。需求拉动模型假定了投入系数的不变，而供给推动模型假定了分配系数的不变。什么情况下两种模型得出的结论相等呢？

- 只有当所有部门都按相同幅度变化时，两者的影响是一致的。例如第一个部门下降10%，而所有其他部门都下降10%，也就是各部门分别下降13.6，17.8和20.6时，这时候直接消耗系数与分配系数将同时保持不变。
- 当然，这时候需求拉动模型中被假定为不变的无约束部门最终需求，以及供给推动模型中被假定为不变的无约束部门的初始投入 也都不再是不变的了。实际上，正是这一点导致了两者的差异。

- 上述把产业区分为受约束部门与无约束部门的分析，直接可以转化为对于区域间模型的分析。这时候，该模型就可用来分析两个国家之间，由于某一国的出口限制对另一国所产生的影响。

在需求拉动模型中：

$$x_s = (I - A_{ss})^{-1}(A_{sr}x_r + y_s)$$

表明的是由于 r 国产出下降，带来 s 国出口 $A_{sr}x_r$ 的减少，进而引起 s 国产出下降。

同样在分配系数模型中：

$$x_s = (x_r R_{rs} + N_s)(I - R_{ss})^{-1}$$

表明由于 r 国产出下降，带来 r 国对 s 国出口 $x_r R_{rs}$ 的减少，进而引起 s 国产出下降。

基于分配系数的理论价格

- 1、列昂惕夫矩阵与劳动价值论
- 2、西顿的特征价格分析

列昂惕夫矩阵与劳动价值论

- 森岛通夫与西顿
  - Morishim and Seton, Aggregation in Leontief matrices and the labour theory of value, Econometrica, 1961(4)

- 列昂惕夫原模型
  - $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + y_1 = x_1$
  - $x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + y_2 = x_2$
  - …
  - $x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + y_n = x_n$
  - $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = w_0$
  - $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = s_0$
  - 其中，w为工资，而s为 工资外要素收入

- 存在一个理论上的价值系统，以马克思价值概念度量
  - $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{1n} + \beta_1 = \alpha_1$
  - $\alpha_{21} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{2n} + \beta_2 = \alpha_2$
  - …
  - $\alpha_{n1} + \alpha_{n2} + \cdots + \alpha_{nn} + \beta_n = \alpha_n$
  - $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \omega_0$
  - $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = \sigma_0$

- 但是这一理论模型是抽象和无法度量的。但是从理论上来说，价格系统和价值系统的分配系数上相同的
- 在价值系统中引入分配系数：
- $\alpha R + \omega + \sigma = \alpha$

- 为对理论价格求解，需要对过多的未知参数做进一步的定义
- 根据古典生存工资假定，工资全部用于维持生计的消费品购买，定义d_{ij}为第i部门铲除中由第j部门工人购买的比例，因此有：
- $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n)$
- 简记为：$\alpha D = \omega$

- 另外，假定工资与其他要素收入在所有部门保持一个固定的比例，把各部门相同的这一比例$\frac{\sigma_j}{\omega_j}$称为剥削率。定义$\rho = 1 + \frac{\sigma_j}{\omega_j}$
- 得到：$\omega_j + \sigma_j = \rho\omega_j$
- 带入模型：$\alpha R + \omega + \sigma = \alpha$，得到：
- $\alpha R + \rho\alpha D = \alpha$
- $\rho\alpha D = \alpha(I - R)$
- $\alpha D(I - R)^{-1} = \frac{1}{\rho}\alpha$
- 因此，$\frac{1}{\rho}$为矩阵$D(I - R)^{-1}$的特征值，而马克思价值概念的产出α为该矩阵的特征向量。
- 在分配系数为非负不可分解矩阵的情况下，可以保证有唯一正的特征根，且对应有经济意义的正的产出价值。

西顿的特征价格分析

西顿的特征价格分析（Seton’s Eigenprices）

- 马克思的劳动价值论指出，商品的价值等于商品生产中直接和间接消耗的劳动量，用投入产出模型来表示：

$$\tilde{l} = l(I-A)^{-1}$$

- 如果要素投入中还包括资本或土地等其他投入，那么商品的特征成本（eigencost）可以表示为：

$$c' = r'B(I-A)^{-1} = r'C$$

- B各要素的直接投入系数，r'为各要素的回报率。进一步把经济剩余考虑进来，价格可以表示为：

$$p' = \frac{1}{\emptyset} r'C$$

- 其中，$\frac{1}{\emptyset}$为各部门相同的利润边际（uniform profit margin）
- 但是，产品的价格由要素的价格来确定，而各要素的价格即其回报率如何确定呢？西顿从分配系数出发，按初始要素对最终产品所做的贡献对其价格进行度量，提出了特征价格（eigenprices）

- 下面表2.1为基本流量数据，表2.2为转换为劳动价值的流量表
- 两者的联系？

Table 2.1. *Intersector flows at current prices ($s)*

	Agriculture	Building	Clothing	Finals	Output
Agriculture	0	57	18	30	105
Building	74	0	9	60	143
Clothing	0	0	0	90	90
Labour	10	29	9		
Capital	30	1	9		
'Tax'	– 9	56	45		
Output	105	143	90		

Table 2.2. *Intersector flows at mono-labour-costs*

	Mono-labour-costs p.u.	Agriculture	Building	Clothing	Finals	Output
Agriculture	1/3	0	19	6	10	35
Building	1/3	25	0	3	20	48
Clothing	1/5	0	0	0	18	18
Indirect labour-costs		25	19	9		
Direct labour (residual)		10	29	9		
Output		35	48	18		

- 利用EXCEL计算出完全劳动系数行向量为
  - $B_v = A_v(I - A)^{-1}$
  - 0.3312，0.3348，0.1997
  - 约等于1/3，1/3，1/5
- 利用完全劳动系数把中间流量转换为完全劳动表
  - 用完全劳动系数行向量左乘以中间流量矩阵，也就是用行向量中的系数对矩阵相应的行进行缩减
  - 例如从列上看，作为投入的x11，含完全劳动为(1/3)x11，x21为(1/3)x21，x31为(1/5)x31。

Table 2.1. *Intersector flows at current prices ($s)*

	Agriculture	Building	Clothing	Finals	Output
Agriculture	0	57	18	30	105
Building	74	0	9	60	143
Clothing	0	0	0	90	90
Labour	10	29	9		
Capital	30	1	9		
‘Tax’	– 9	56	45		
Output	105	143	90		

Table 2.5. *Intersector flows at mono-grain norms*[a]

	Agriculture	Building	Clothing	Finals	Output
Mono-grain norms	0.389	0.205	0	(Resid.)	
Agriculture	0	11.7	0	30	41.7
Building	29.2	0	0	0	29.2
Clothing	0	0	0	0	0
Factors and ‘Tax’	12.5	17.5	0		
Output	41.7	29.2	0		

[a] Minor discrepancies are due to rounding.

- 利用EXCEL计算出完全分配系数矩阵
  - $D_y = (I - R)^{-1} R_y$
- 用完全分配系数矩阵乘最终产品直接分配系数（当只研究某个部门时，其他部门为0）
  - 得出d11*0.28，d21*0.28，d31*0.28，表示的含义是(30/105=0.28)
    - 第一个部门有d11个产品分配给第一个部门,其中的0.28个被用于最终消费；
    - 第二个部门有d21个产品分配给第一个部门,其中的0.28个被用于最终消费；
    - 第三个部门有d31个产品分配给第一个部门,其中的0.28个被用于最终消费
    - 如此（d11*0.28，d21*0.28，d31*0.28）表示各部门对某种最终产品的贡献（0.3973，0.2056，0）

- 利用这一系数把中间流量转换为新的流量表
- 用中间流量矩阵右乘该系数列向量，也就是用列向量中的系数对矩阵相应的列进行缩减

- 对称分析
  - 利用完全要素投入系数，即直接系数右乘列昂惕夫逆阵，把产品的价格还原为初始投入的价值

$$B_v = A_v(I - A)^{-1}$$

  - 利用完全最终产品分配系数，即直接最终产品分配系数，左乘完全分配系数矩阵

$$v_k = (I - R)^{-1}\widehat{R_y}\ i_k$$

  - 其中i_k为第k个元素为1，其余为0的列向量
  - 对比：B_v各行向量列向合计全为1，$(I - R)^{-1}\widehat{R_y}$各列向量行向合计全为1

$$v_k = (v_k^{\ 1}, v_k^{\ 2}, \cdots v_k^{\ n})$$

- 就是系数（0.389，0.205，0）

Table 2.5. *Intersector flows at mono-grain norms*[a]

	Agriculture	Building	Clothing	Finals	Output
Mono-grain norms	0.389	0.205	0	(Resid.)	
Agriculture	0	11.7	0	30	41.7
Building	29.2	0	0	0	29.2
Clothing	0	0	0	0	0
Factors and 'Tax'	12.5	17.5	0		
Output	41.7	29.2	0		

[a] Minor discrepancies are due to rounding.

- 另一种写法
  - $v_k = (I - R)^{-1}\widehat{R_y}\ i_k$
  - $v_k = \widehat{R_y}\ i_k + Rv_k$
  - 完全最终产品分配系数等于直接最终产品分配系数加上分配系数左乘完全最终产品分配系数
  - 对比：
  - $B_v = A_v(I - A)^{-1} = A_v + B_vA$
  - $D_y = (I - R)^{-1}R_y = R_y + RD_y$

- 同时考虑多个最终产品
  - 以上只考虑了存在一个有使用价值的最终产品，当同时考虑多个有使用价值的最终产品，如多渠价格中以要素价格进行加权相类似，对于选择不同的用来度量使用价值的最终产品，我们可以选择以相应的价格来加权，也就是
  - $v = (I - R)^{-1}\widehat{R_y}\ p = Vp$
  - 这样得到的列向量v是按最终产品贡献度量出来的各种要素的价值

- 回到最初的问题
  - 现在我们可以从最终使用贡献角度来度量初始投入的价值。把要素的使用价值看作是它们对不同商品生产所作贡献的合计

$$\hat{w}r = Wv$$

  - W为要素投入行向量，$\hat{w}$为各要素总使用量为元素的对角矩阵，即W行向合计数对角化得到的矩阵
  - 左边表示各要素所得到的回报，右边是以使用价值度量的，按对不同商品生产所做贡献的合计

- $\hat{w}r = Wv$
- $r = \hat{w}^{-1}Wv = Ev = EVp = E(I-R)^{-1}\widehat{R_y}\ p$
- $r' = p'V'E' = p'\widehat{R_y}\ [(I-R)^{-1}]'E' = p'N$
- 我们有：
- $p' = \frac{1}{\emptyset}r'C$，$r' = p'N$
- 因此：
- $p' = \frac{1}{\emptyset}p'NC$，$r' = \frac{1}{\emptyset}r'CN$
- 表明产品的价格与要素的价格以ø为特征值，分别是矩阵NC和CN的特征向量

$$p' = \frac{1}{\phi} r' C$$

$$r' = p' N$$

$$p' = \frac{1}{\phi} p' NC$$

$$r' = \frac{1}{\phi} r' CN$$

End of Chapter 9