斯拉法-列昂惕夫体系
Sraffa-Leontief System

- 斯拉法-列昂惕夫体系的古典分析传统
- 生产理论——一个对偶的体系
- 相对价格变化与标准商品
- 收入分配与技术选择
- 围绕总量生产函数的争论
- 联合生产与技术选择

斯拉法-列昂惕夫体系的古典分析传统

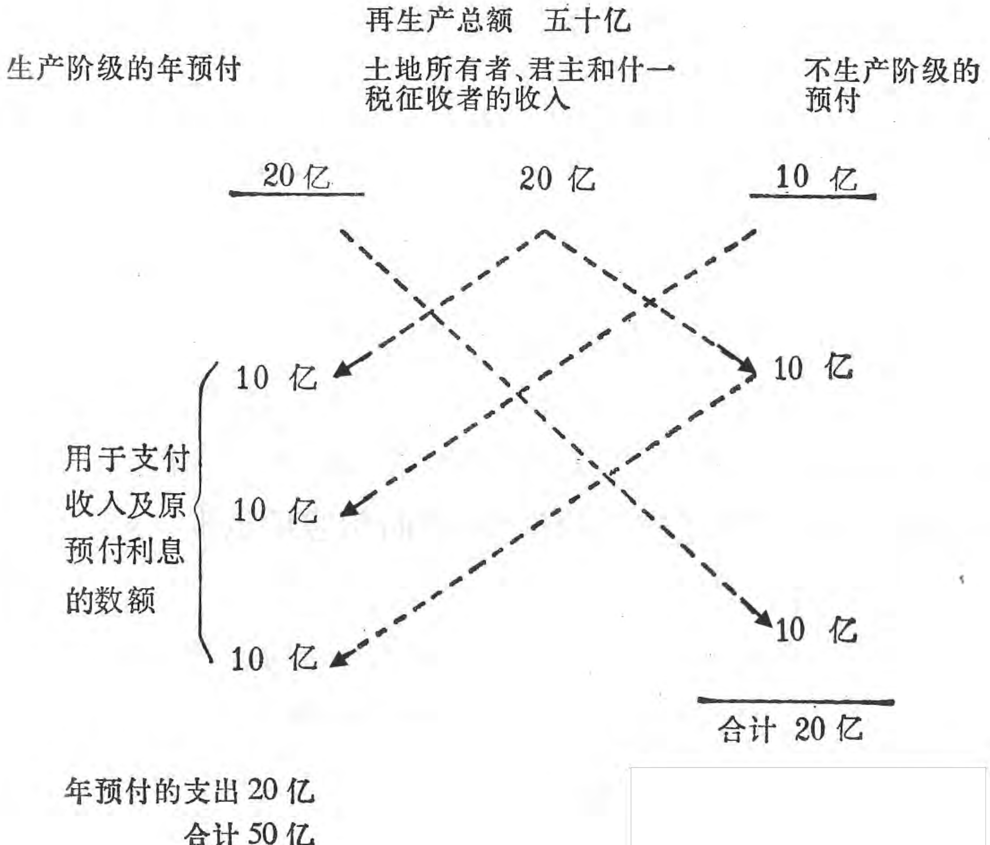
重农学派的遗产

- 重农学派的遗产
  - 重农学派与重商主义：马克思认为“重农学派的重大功绩在于，他们在资产阶级视野内对资本进行了分析。正是这个功绩，使他们成为现代政治经济学的真正鼻祖。”
  - 理论遗产：
    - 关于财富的性质：帕西内蒂：在这之前，“居主导地位的思想是整个世界的财富存量是既定的，一个国家财富的增加只能意味着其他国家财富的减少”，此后，财富的性质从存量转变为流量
    - 《经济表》的分析框架及其背后的思想：剩余与经济是一个循环流
    - 把生产作为经济分析的起点

经济表

- 国民被分为三个阶级：生产阶级、土地所有者阶级和不生产阶级。
  - 生产阶级“耕种土地、逐年再生产国民财富，他们预付农业劳动上的开支，并为土地所有者提供每年的收入。
  - 土地所有者阶级包括君主，土地所有者及什一税的征收者。这个阶级依靠收入，即纯产品来生活。
  - 不生产阶级由从事农业以外的其它工作和别种劳动的人组成，他们的支出，是从生产阶级和从生产阶级取得收入的土地所有者阶级取得的。”

- 生产阶级对不生产阶级的一笔支付表现为固定资本更新设备工具的10亿购买额，
- 生产阶级从不生产阶级得到的两笔收入则表现为向不生产阶级提供农产品作为食品与原料的20亿销售额，
- 生产阶级从土地所有者得到的一笔收入则是向土地所有者销售农产品的10亿销售额；
- 不生产阶级一笔收入来自向生产阶级提供固定设备工具的销售额10亿，一笔来自土地所有者的收入则是工业品10亿的销售额，一笔向生产阶级的支付则是购买农产品的10亿。
- 土地所有者分别向生产阶级与不生产阶级购买农产品与工业品各10亿。



- 生产阶级对不生产阶级的一笔支付表现为固定资本更新设备工具的10亿购买额

生产阶级从不生产阶级得到的两笔收入则表现为向不生产阶级提供农产品作为食品与原料的20亿销售额，

生产阶级从土地所有者得到的一笔收入则是向土地所有者销售农产品的10亿销售额；

不生产阶级一笔收入来自向生产阶级提供固定设备工具的销售额10亿，一笔来自土地所有者的收入则是工业品10亿的销售额，一笔向生产阶级的支付则是购买农产品的20亿。

土地所有者分别向生产阶级与不生产阶级购买农产品与工业品各10亿。

经济表转换为投入产出表式

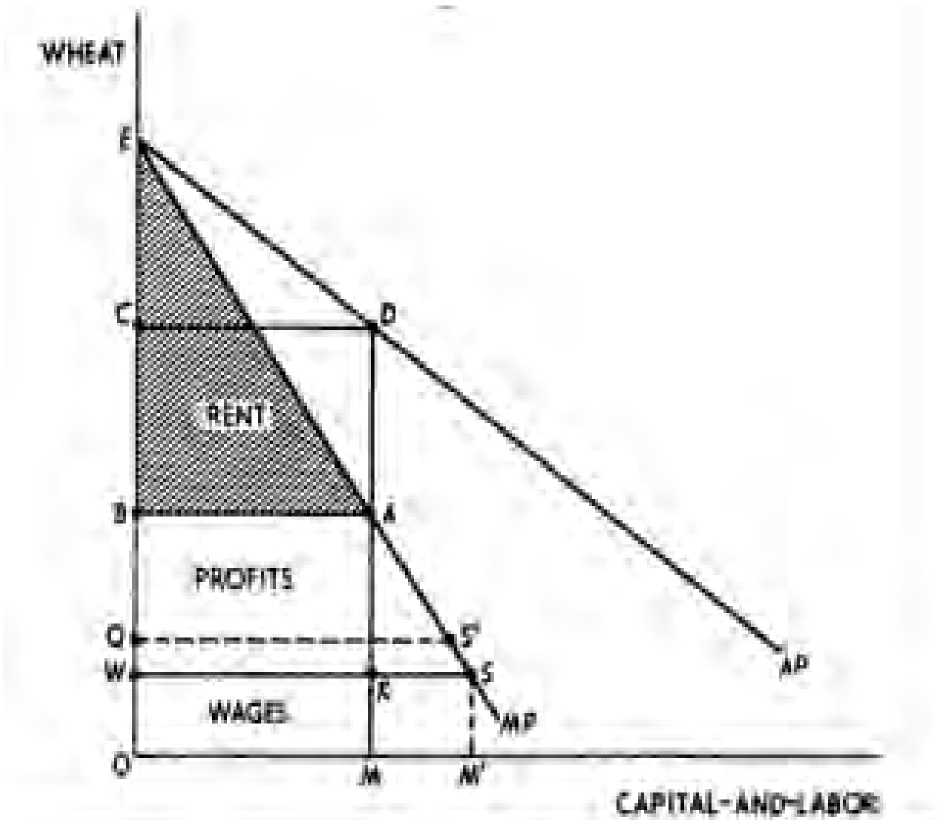
		生产阶级	不生产阶级	土地所有者	总产出
中间投入	生产阶级	20	20	10	50
	不生产阶级	10	0	10	20
初始投入	土地所有者	20	0	0	
总投入		50	20		70

- 生产阶级在农业生产中首先以自身的产品，包括农业劳动的工资、种子等形式作出“年预付”20亿。所谓年预付指的是为了取得本年的收获，而在前一年所支出的预付额。此外还需要为建筑物和工具等的固定资本的更新维护支付的费用10亿，并支付给不生产阶级。农业产出的总价值是50亿，其中30亿是各种生产费用，其中包括生产阶级自己留下来用于重置年预付的20亿。还有20亿是净产品，也就是剩余。由于土地为地主所有，20亿净产品将全部向地主缴纳地租。
- 不生产阶级通过为生产阶级和土地所有者提供产品获得的20亿的收入，而这部分收入正好弥补生产中的投入，即向生产阶级购买农产品作为食物和原料的20亿。
- 土地所有者从农业生产中获得的20亿地租将分别用来购买生产阶级和不生产阶级的产出各10亿用于自己的消费。

- 魁奈的解释
  - 不生产阶级虽然最初提供了10亿的年预付，作为向生产阶级购买加工品原料支出的预付，但是，又从生产阶级向不生产阶级购买加工品的10亿支付中获得了补偿。因此，“这个预付并未生产任何东西，不生产阶级不过把它支付出去，又把它收回来，而不生产阶级向生产阶级购买中的另外10亿则是为该阶级的人们的生活而支出，这里只有消费，即产品的消失，并没有什么再生产。”
  - 从整个社会来看，生产阶级作出的年预付20亿，以及不生产阶级的年预付10亿，共30亿的年预付，生产50亿的产出。也就是说，整个社会一年运转的结果是以30亿的预付，生产出50亿的农产品。整个社会的净产品20亿是由生产阶级创造的，全部以地租的形式归土地所有者所有。
  - 按照投入产出方式的理解，生产阶级与不生产阶级的中间投入为50亿，而总产出为70亿，净产品或增加值为20亿，只是在魁奈看来，不生产阶级的产出是服务于生产阶级的生产，真正的产出只是农产品50亿的产出，而预付的部分则是生产阶级与不生产阶级的预付合计30亿。

从李嘉图到斯拉法

- 李嘉图陷阱和谷物模型
  - 单一部门模型：假定经济中只生产一种产品即谷物，排除了相对价格变动的影响
  - 劳动作为唯一的投入获得相应的工资，而产出扣除工资的部分成为经济体系从生产中获得的“剩余”，或称之为“净产品”，这部分净产品将要在资本与土地两个要素间进行分配。
  - 在具体的分配机制上，工资份额遵循“生存工资”（subsistence wage）假定，而土地有限性带来的边际产出与平均产出之间的差额部分，决定了其成为地租并为地主所有，利润则成为扣除地租与工资后的剩余部分。
  - 从这里我们可以看到，“剩余”或“净产品”概念作为产出超过投入的部分在魁奈那里指的仅仅是地租，而李嘉图这里则包含了地租与利润。
  - 作为工资基金的工资与“年预付”并没有什么实质上的不同。



- 马克布劳格的解释：
  - 李嘉图把资本和劳动归为一个变动投入从而避免同时处理三个变量。这种混合投入是固定资本、流动资本和劳动的投入
  - 变动投入将获得它的边际产品。固定要素土地将获得变动投入的平均产品和边际产品之间缺口所决定的剩余
  - 边际生产力理论并不能决定产品减地租在资本与劳动之间的划分，而需要引入生存工资理论

- 李嘉图陷阱
  - 如果地租和利润的部分全部被消费掉，那么生产将在原有的规模上进行，但如果经济剩余（实际上是其中的利润部分）被用作积累和扩大再生产，经济将处于什么样的长期动态过程呢？
  - 在李嘉图看来，资本积累与生产的扩张在生产方面将面临使用劣等土地带来的报酬递减，以及劳动需求的增加。
  - 在分配方面，报酬递减导致分配中地租份额的增加，而利润与工资份额的下降；
  - 尽管生产扩张中劳动需求上升，带来工资率的上升，但是高工资率会带来人口的增长，最终工资率仍处于生存工资水平。在工资率保持稳定的条件下，地租份额的上升必然带来利润份额的下降。
  - 从长期看，当生产扩张到OM'的劳动投入时，全部净产品转化地租，利润率下降为0。在这一趋势下，资本主义长期增长将趋于停滞。

- 不变价值尺度
  - 假定不考虑地租，谷物模型表述如下：
  - 投入中包括劳动 L和作为种子的谷物c，如果以 w 表示以谷物度量的工资率，投入价值为 $wL + c$的谷物，生产 Q的谷物产出。生产过程表述为：
  - $wL + c \rightarrow Q$
  - 工资利润关系可表现出明确的反向关系：

$$r = \frac{Q - (wL + c)}{wL + c} = \frac{Q}{wL + c} - 1$$

- 谷物模型中只有一种产品，从而不涉及价格，如果扩展到存在两种商品的生产，那么相对价格的变化就会使得原本在谷物模型中得以清晰表现出来的收入分配关系变得不再确定了。
- 工资率的变化会带来相对价格的变化，这样的话，“伴随分配改变而来的价格变动的研究复杂起来。任何特殊的价格变动，究竟是起于被计量的商品的特殊性，还是起于计量标准的特殊性，无法说定。”
- 使李嘉图感到兴趣的价值问题，便是怎样找到一种不因产品分配的变化而变化的价值尺度。因为如果工资涨落本身会使社会产品的价值量值发生变化，那么对利润的影响就很难确定了。

- 古典理论家们需要表明收入分配关系不受相对价格的影响，也就是收入分配关系在逻辑上先于且独立于相对价格的决定。
- 谷物模型中的谷物可以很好地作为这样一个尺子，但是在单一产品谷物之外的现实世界中，则需要一种新的尺度。
- 李嘉图找到的是劳动。在斯密理论中用于描绘早期原始的经济交换关系的劳动价值论被发展起来，成为李嘉图度量价值的标准。进而，斯拉法所寻找的所谓的“标准商品”（standard commodity），实际上是一组商品构成的复合商品，以它作为价值尺度，工资率与利润率之间将再现出一种与相对价格无关的简单关系。

- 在斯拉法的分析体系中，首先从无剩余的经济开始，生产的产出只是刚好弥补各种投入。分析了这种体系下相对价格的决定，也就是对于任一“生产方法”中，存在“唯一的一套交换价值，如果市场采用这些交换价值，会使产品的原来分配复原，使生产过程能够反复进行；这些价值直接产生于生产方法。”
- 斯拉法的目的当然不是这种经济，而是有剩余的经济。如果产出超过投入，就会带来剩余，也就是“净产品”，以及随之而来的是净产品的分配。斯拉法认为，净产品需要在劳动和资本之间进行分配。
- 这时候，对劳动的分配包括两部分，一部分表现为劳动对各种商品的消费，实际上是“生存工资”的部分，与其他生产资料合在一起，另一部分则表现为对剩余的分享，被单独分离出来，表现为劳动投入与工资率的乘积。按照斯拉法的说法，如果劳动的所得全部分离出来的话，将把劳动贬入非基本商品的深渊。

- 斯拉法体系的生产价格可以表述为：

$$p=(1+r)pA+wl$$

- 工资与利润之间的分配关系已经变换为一种新的形式，即“用商品生产商品”的形式。

不同经济中的分配关系

- 谷物模型

$$(1+r)c+wL=Q$$

  - 工资率与利润率呈反向关系

$$r=\frac{Q}{c}-\frac{L}{c}w-1$$

不同经济中的分配关系

- 谷绸模型
  - 丝绸生产：$(1+r)c_s + wL_s = Q_s p_s$
  - 谷物生产：$(1+r)c_c + wL_c = Q_c$
  - 假定了由于竞争两个部门的利润率与工资率都相等，同时以谷物作为计价单位，并设为1。这样谷物生产方程与单一产品的谷物模型并没有什么差异，而丝绸的产出则需要用以谷物为计价单位表示的丝绸的价格 来度量。

$$\frac{dp_s}{dw} = \frac{L_s c_c - c_s L_c}{c_c}$$

  - 一般情况下，相对价格会随工资率，以及相应的利润率的变化而变化，但是如果两部门资本有机构成相同（$\frac{c_s}{l_s} = \frac{c_c}{l_c}$），相对价格不会随工资率与利润率之间的分配关系变化而变化。
  - 造成相对价格改变，但是却并不影响收入分配关系的原因是我们所引入的商品丝绸的特殊性质。这类商品不进入其他商品的生产过程，他们被斯拉法称为“非基本商品”（non-basic commodity），而把进入所有商品生产过程的商品称为“基本商品”（basic commodity）

不同经济中的分配关系

- 谷铁模型
  - 模型中仍然以谷物为计价单位，并设为1，以谷物表示的钢铁的价格表示为p_2，同时工资率也是以谷物度量。
  - 钢铁生产： $(1+r)(a_{12}+a_{22}p_2)+wl_2=p_2$
  - 谷物生产： $(1+r)(a_{11}+a_{21}p_2)+wl_1=1$

$$w=\frac{1-(1+r)(a_{11}+a_{22})+(1+r)^2(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21})}{l_1+(1+r)(a_{21}l_2-a_{22}l_1)}$$

  - 工资率与利润率之间关系的表达式，如果两个部门的资本有机构成相同（ $a_{11}:a_{21}:l_1=a_{12}:a_{22}:l_2$ ），那么上述关系可简化为线性关系

- 一般地：
  - 对于$p = (1 + r)pA + wl$
  - 如果各部门资本有机构成相同：$pA = \alpha l$
  - $p = (1 + r)\alpha l + wl$
  - 设存在一个商品组合向量d，作为计价物$pd = 1$
  - $pd = (1 + r)\alpha ld + wld = 1$
  - $(1 + r)\alpha = \frac{1 - wld}{ld}$
  - 如此工资率与利润率呈反向关系。

- 上述结论从数学性质来看，恰恰是技术矩阵A是导致相对价格变动的关键，各部门资本有机构成相同，等把矩阵A变换为一个向量，中间的传递保持一个与劳动固定的比率来进行。
- 实际上，当我们假定各部门资本有机构成相同时，就是把一个结构问题简化为总量问题。
- 从上述分析我们所得出的一个结论是，李嘉图所受到的相对价格变化的困扰本质上是经济结构问题复杂性所带来的困扰。

- 经济是一个循环流
  - P167-169课后阅读，该节主要参考Kurz&Salvadori,1995 theory of production

生产理论：一个对偶的体系

生存经济

- 假定经济由生产谷物和衣服的两个部门构成。我们先舍弃掉生产资料，假定投入只是劳动。
- 假定两个部门工资率相同。把工资率表示为对两种产品的人均消费：
- $w = p_1 m_1 + p_2 m_2$
- 生产过程进一步可以模型表示如下

实物形式

谷物生产： $L_1 \to c_1$

衣服生产： $L_2 \to c_2$

价值形式

谷物生产： $wL_1 \to p_1 c_1 \Rightarrow p_1 = w\frac{L_1}{c_1} = wl_1 = (p_1 m_1 + p_2 m_2) l_1$

衣服生产： $wL_2 \to p_2 c_2 \Rightarrow p_2 = w\frac{L_2}{c_2} = wl_2 = (p_1 m_1 + p_2 m_2) l_2$

- 由于劳动是唯一的投入，在这种情况下，两种商品的相对价格取决于与直接劳动系数，即$\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2}$

实物表与价值表

	谷物	衣服	总产出
谷物	m_1L_1	m_1L_2	c_1
衣服	m_2L_1	m_2L_2	c_2
总投入	c_1	c_2	

	谷物	衣服	总产出
谷物	$p_1m_1L_1$	$p_1m_1L_2$	p_1c_1
衣服	$p_2m_2L_1$	$p_2m_2L_2$	p_2c_2
总投入	$wL_1 = p_1c_1$	$wL_2 = p_2c_2$	

行模型与列模型

$$m_1 L_1 + m_1 L_2 = c_1$$

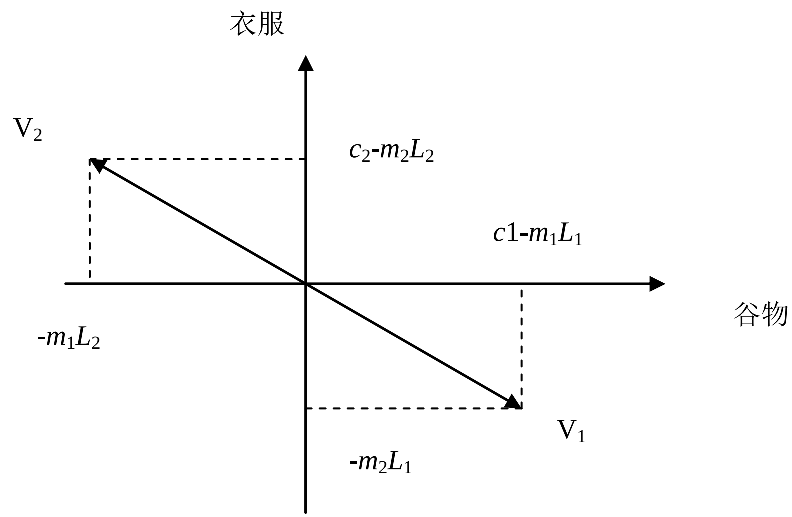
$$m_2 L_1 + m_2 L_2 = c_2$$

$$(p_1, p_2)\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = (p_1, p_2)\begin{pmatrix} m_1 L_1 & m_1 L_2 \\ m_2 L_1 & m_2 L_2 \end{pmatrix}$$

$$(p_1, p_2) = (p_1, p_2)\begin{pmatrix} m_1 l_1 & m_1 l_2 \\ m_2 l_1 & m_2 l_2 \end{pmatrix}$$

谷物生产过程：$(c_1 - m_1L_1, -m_2L_1)$

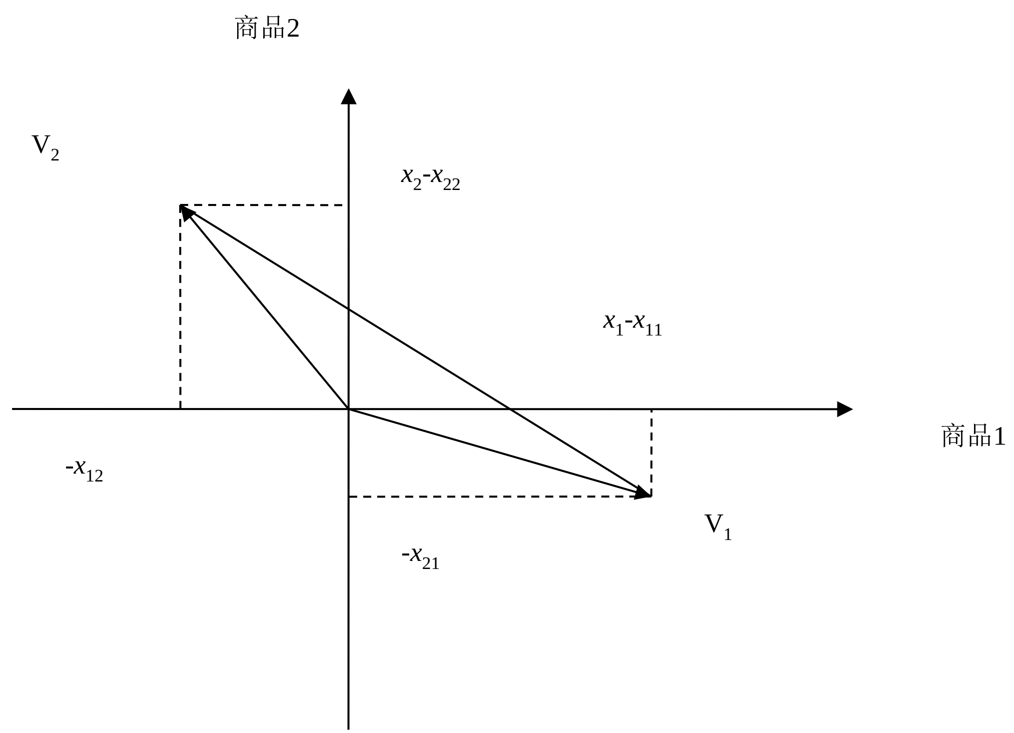
衣服生产过程：$(-m_1L_2, c_2 - m_2L_2)$



- 生存经济中投入与产出相同，净产出为0，净产出前沿经过原点。

有剩余的经济

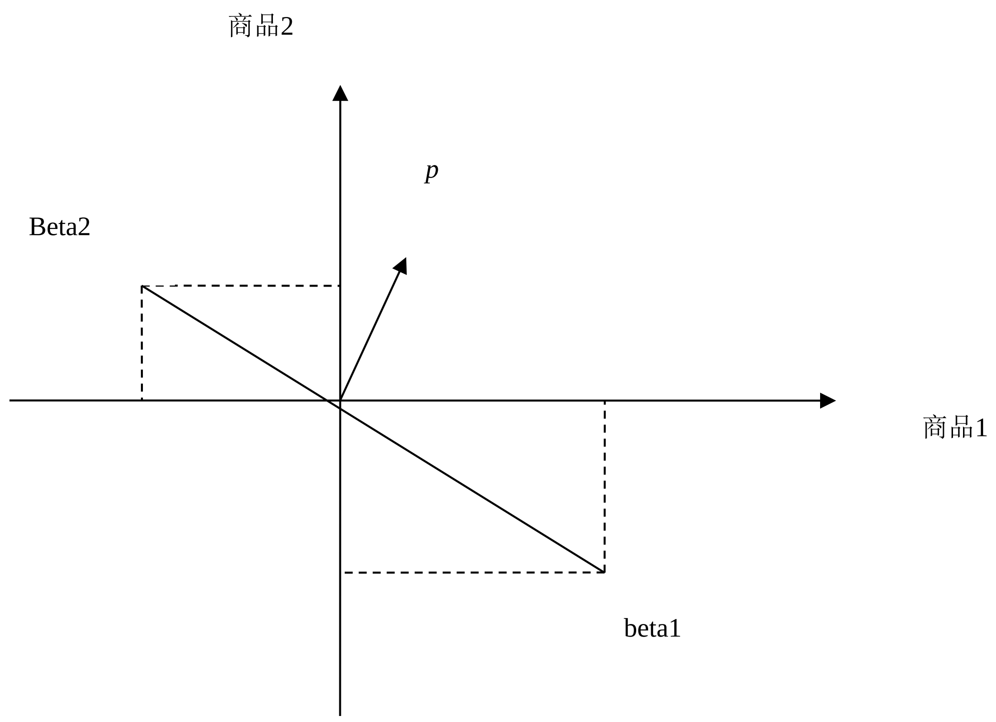
	商品 1	商品 2	最终产品	总产出
商品 1	$p_1 x_{11}$	$p_1 x_{12}$	$p_1 y_1$	$p_1 y_1$
商品 2	$p_2 x_{21}$	$p_2 x_{22}$	$p_2 y_2$	$p_2 x_2$
工资	wL_1	wL_2		
利润	$r(p_1 x_{11} + p_2 x_{21})$	$r(p_1 x_{12} + p_2 x_{22})$		
总投入	$p_1 x_1$	$p_2 x_2$		



商品2
V2
x2-x22
x1-x11
商品1
-x12
V1
-x21

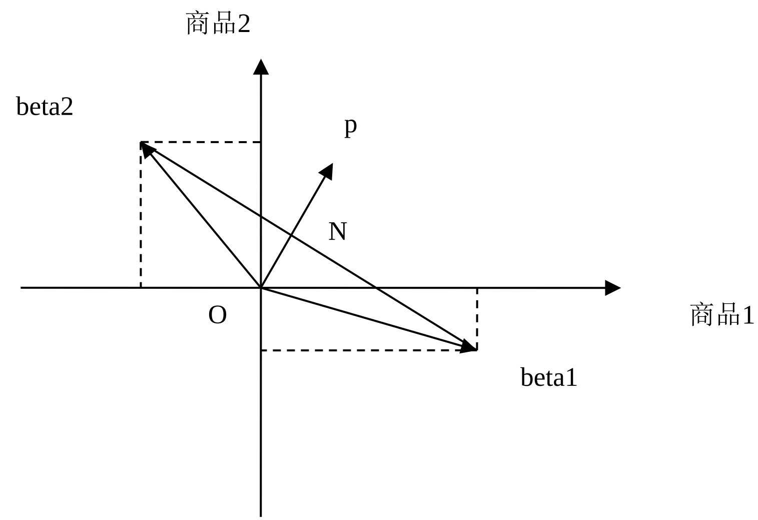
价格与分配

- 生存经济的价格
- $p = pA$，或者$p(I - A) = 0$，净产出价值量为0
- 令 $p = (p_1, p_2)$ $(I - A) = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2)$
- 有：$p\beta_1 = p\beta_2 = 0$
- 价格与净产出向量正交
-



商品2
p
Beta2
商品1
beta1

- 有剩余经济且零利润的价格与分配
- $p(I-A)=wl=w(1,1)$
- 有： $p\beta_1 = p\beta_2 = w$
- 表明向量β_1, β_2在价格向量上的投影相等，且都等于w。
- 价格与净产出前沿垂直



- 但是，对于一般情形下的剩余经济而言，经济剩余需要在工资与利润之间进行分配，工资与利润间的分配关系必将影响相对价格。

$$p(I-A)=rpA+wl$$

$$p(I-A-rA)=w(1,1)$$

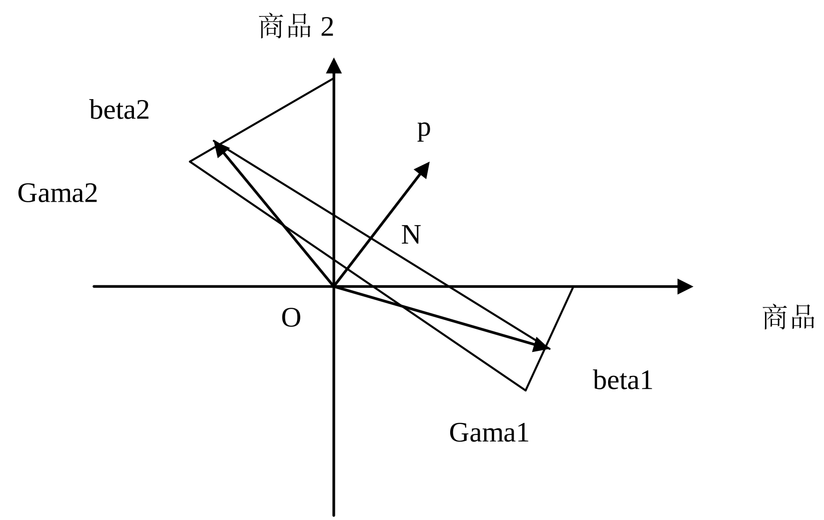
- 生产集与投入集

$$(I-A)=\begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & 1-a_{22}\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2) \qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)$$

$$p(\beta_1 - r\alpha_1) = p(\beta_2 - r\alpha_2) = w$$

在一般情形下，价格不再与净产出前沿线 $\beta_1\beta_2$ 正交，而是与向量 $(\beta_1 - r\alpha_1)$ 与 $(\beta_2 - r\alpha_2)$ 的连线相正交，且原点到交点的距离正是 w。我们可以把向量 $(\beta_1 - r\alpha_1)$ 与 $(\beta_2 - r\alpha_2)$ 的连线 $\gamma_1\gamma_2$ 称为工资前沿线

- 即使对于相同的净产出组合，即净产出前沿线 不变，但收入分配关系改变，工资前沿线变动，都将带来相对价格的改变



消费与增长

- 收入分配考虑的是如何使净产品在工资与利润之间进行分割，而积累过程分析则需要考虑净产品如何在消费与积累之间进行分割。因此，对于消费与增长问题可以做收入分配类似的分析
- 净产品主要用于消费和增加生产中的投入。如果假定各部门保持同样的增长速度，也就是平衡增长。那么从模型上看，可表示如下

L 表示总劳动投入量，c 为人均消费量，d 为消费结构，g 表示各部门平衡增长率

$$(I-A)x = gAx + cdL$$

进一步假定总的劳动投入量为 1 个单位，那么模型简化为：

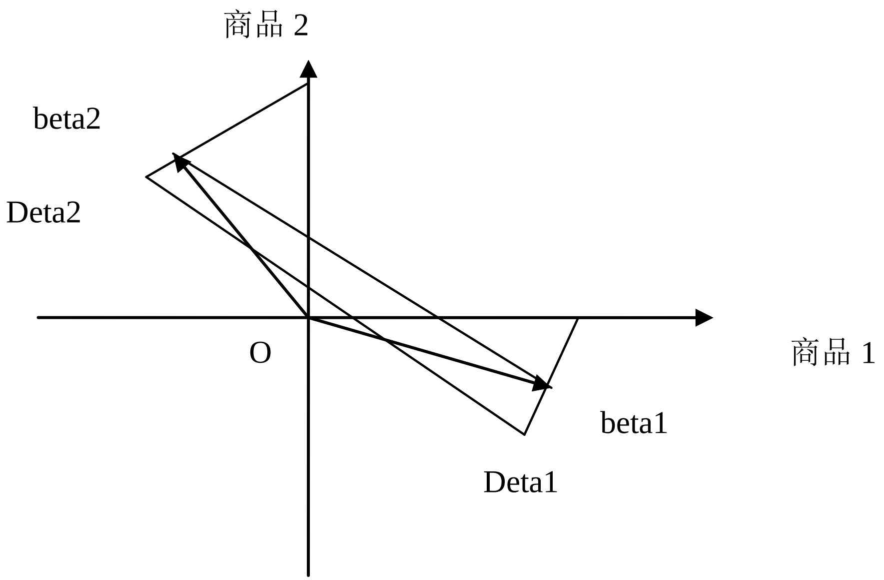
$$(I-A)x = gAx + cd$$

如上述价格与分配的分析可做类似的分析：

$$(I-A-gA)x = cd$$

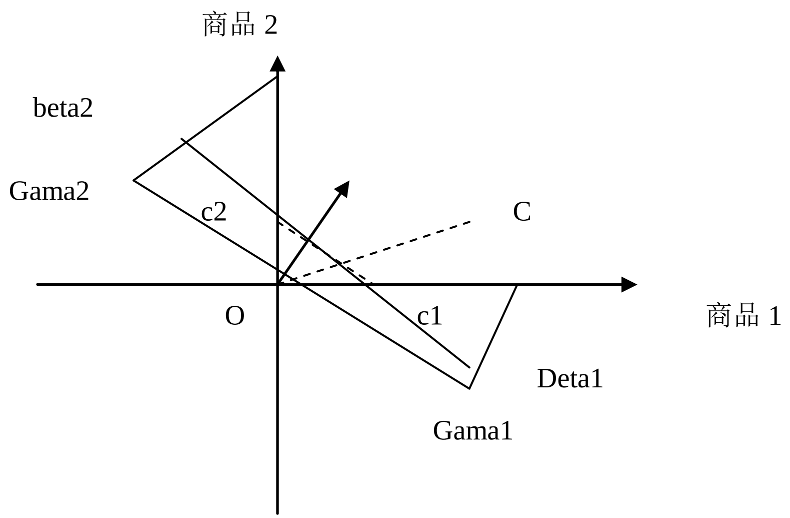
$$(\beta_1 - g\alpha_1)x_1 + (\beta_2 - g\alpha_2)x_2 = cd$$

如此表明，消费向量可以由向量$(\beta_1 - g\alpha_1)$与向量$(\beta_2 - g\alpha_2)$构造出来，在下图中与收入分配分析中工资前沿相对应，这两个向量的连线构成的则是消费前沿面$\delta_1\delta_2$。



商品 2
beta2
Deta2
O
商品 1
beta1
Deta1

- 分配与增长
  - 在行向关系与列向关系各自的模型中，分别决定了收入分配的 $w - r$关系和增长的$c - g$ 关系。但是，收入会转化为消费与投资，使得收入分配与经济增长联系在一起
  - 在古典理论中，通常的假定是工人的工资全部用于消费，而资本家把利润的一部分用于储蓄。那么，在宏观经济储蓄全部转化为投资的均衡条件下，增长与分配之间具有如下关系
  - $gK = srK$
  - 表明投资等于储蓄。其中， K为资本存量，gK 表明资本存量的变化等于投资， s为资本家的储蓄率，rK 则为利润，进一步有
  - $g = sr$
  - 经济增长率等于储蓄率与利润率的乘积



- 工资前沿面与相对价格是正交的，两者存在联系，而最佳消费组合是消费前沿面上与现有相对价格相吻合的点，即消费前沿面与相对价格线（用于消费的预算线）$c1c2$ 的交点。
- 如果工资前沿面改变，相对价格改变，最优消费组合也将变化。或者，最优消费结构固定下来（沿C的方向改变），那么相对价格的改变，就会影响到购买能力，消费前沿面就会变化。

- 工资曲线与消费曲线
  - 考虑一个两部门的生产体系：第一个部门用劳动与资本品生产消费品，第二个部门用劳动与资本品生产该资本品本身

价格模型如下：

$$1 = pa_{21}(1 + r + \delta) + wl_1$$

$$p = pa_{22}(1 + r + \delta) + wl_2$$

其中，p 表示以消费品为计价商品的资本品价格，w 为工资率，r 为利润率，而 δ 为折旧系数。

解上述方程可得到工资率与利润率关系的曲线：

$$w = \frac{1 - a_{22}(1 + r + \delta)}{l_1 + (l_2 a_{21} - l_1 a_{22})(1 + r + \delta)}$$

对于上述工资率与利润率关系的函数 $w = f(r)$，具有如下性质：

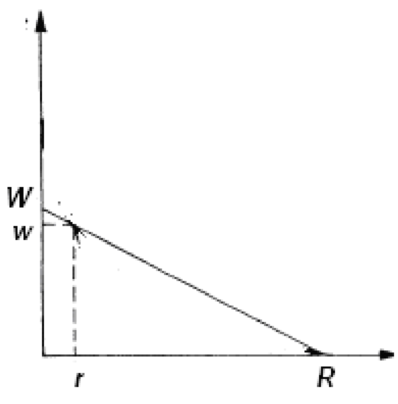
1、 $f'(r) < 0$，曲线是右下倾斜的；

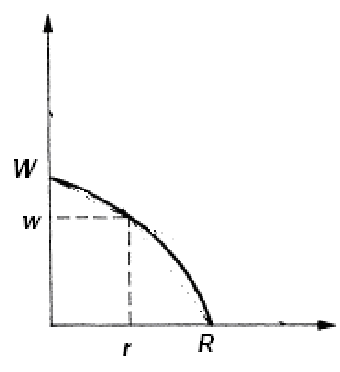
2、两部门资本与劳动的投入比例的相对大小决定工资利润关系曲线的弯曲程度

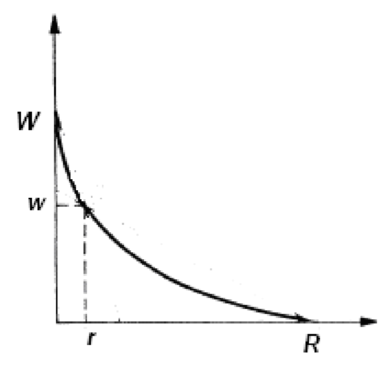
定义两部门资本劳动投入比的比例系数为：

$$m = \frac{a_{21}/l_1}{a_{22}/l_2}$$

当$m=1$时，$f''(r)=0$工资-利润关系曲线为线性的；当$m<1$时，$f''(r)<0$曲线为凹函数；当$m>1$时，$f''(r)>0$曲线为凸函数。







考虑行向数量关系模型。假定经济以稳定的速度 g 增长。我们用 K 表示人均机器存量，I 表示人均投资。那么根据流量与存量的关系，有：

$$I=(g+\delta)K$$

用 c 表示人均消费。可以与价格模型完全对应的方式建立起数量关系模型：

$$1=l_2(1+g+\delta)K+l_1c$$

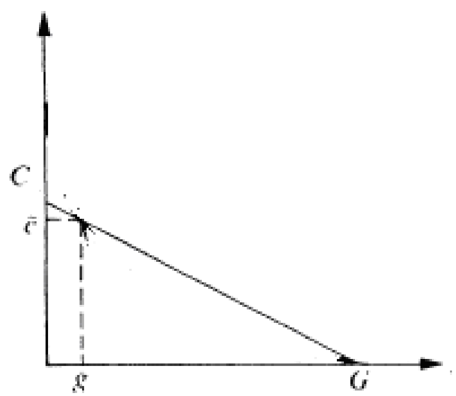
$$K=a_{22}(1+g+\delta)K+a_{21}c$$

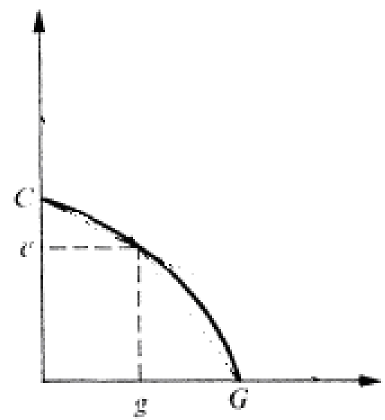
分别表示资本品生产和消费品生产对劳动和资本的需求。由于采用人均的概念，总劳动使用量为 1。

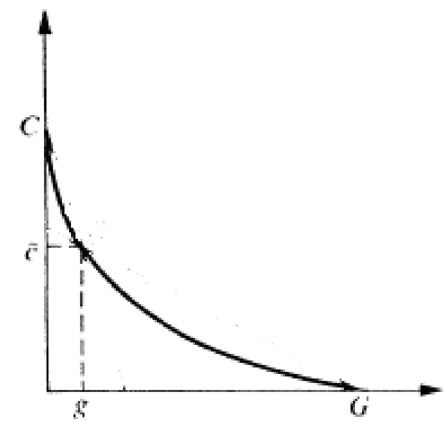
同样解上述方程可得到消费与增长关系的曲线：

$$c=\frac{1-a_{22}(1+g+\delta)}{l_1+(l_2a_{21}-l_1a_{22})(1+g+\delta)}$$

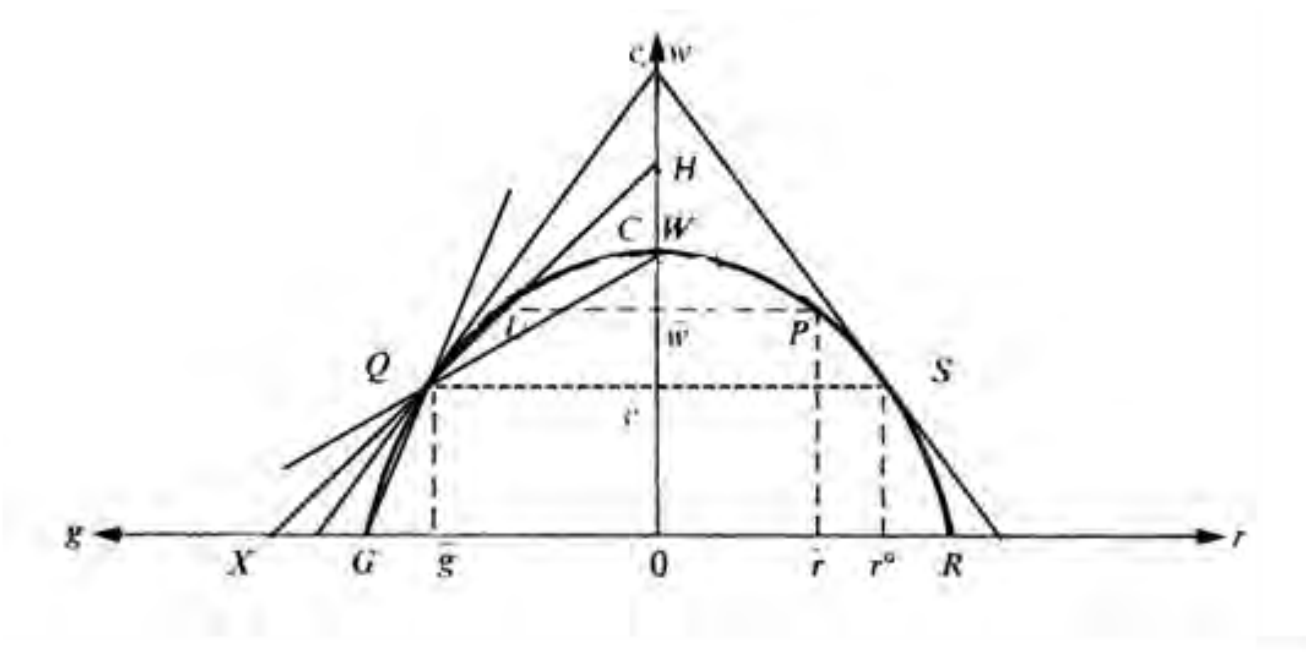
可见消费与增长关系的曲线 $c=f(g)$ 与工资与利润关系曲线 $w=f(r)$ 具有同样的函数形式。因此，两者间也具有类似的特征。







- $w-r$与$c-g$ 之间的关系
  - 从上面 曲线与 曲线方程的推导得出形式完全一样的两个方程，由此对应两个方程的两条曲线也是完全一样的。我们可以用下图，在两个象限中表现$w-r$与$c-g$曲线。其中左边为$w-r$关系，而右边为$c-g$ 关系



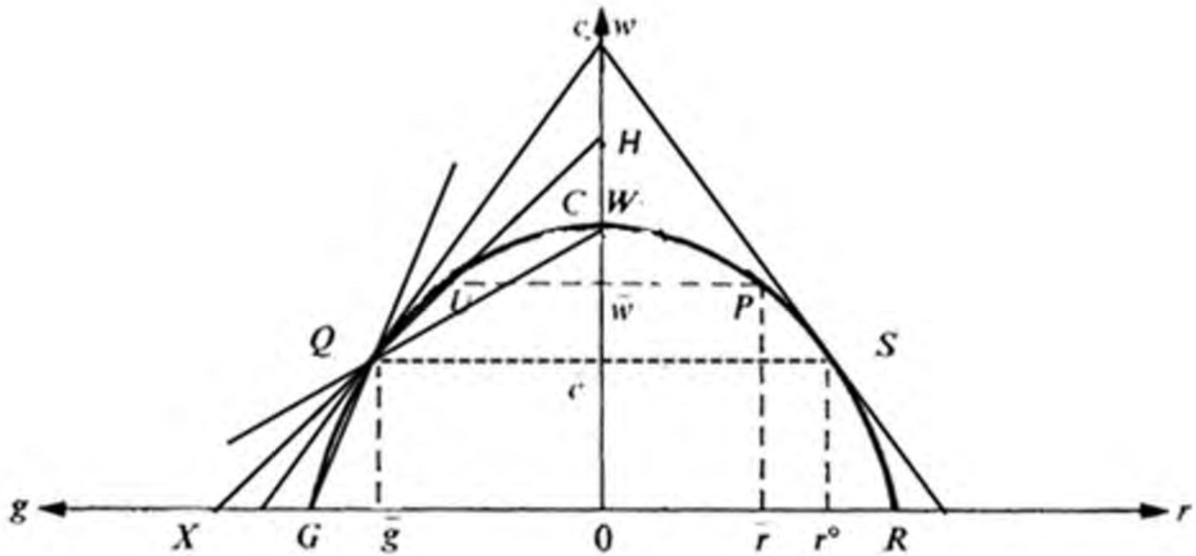
分配与增长中的关键变量利润率 r 和增长率 g 决定了刻画生产过程的三个重要变量，分别表示如下：

人均资本价值：$k = pK$ （7.11）

人均净产出：$N = c + pgK$ （7.12）

资本净产出：$M = \dfrac{N}{k} = \dfrac{c + pgK}{pK} = \dfrac{c}{k} + g$ （7.13）

不同的利润率 r 和增长率 g 的组合决定了上述三个变量的具体值。



对于给定增长率 $\bar{g}$ ，如果利润率为 $\bar{r}$ 。如图所示，对于 $\bar{g}$ 和 $\bar{r}$ 的这样一个组合，在消费-增长曲线上对应于 Q 点，而在工资-利润曲线上对应于 P 点。U 点是消费-增长曲线上与 P 点对应的点。QU 的连线交纵轴与 H ，交横轴于 X 。

- 当g=0,c=C,C与H重合， 当c=0,g=G,G与X重合；类似地， 当r=0,w=W,当w=0,r=R
- 对于消费增长关系，在上述两种极端情况下，0C表示人均净产出，0G表示资本净产出，QC的斜率=(W-c)/g，QG的斜率=c/(G-g)，均表示人均资本价值。
- 在上述两种极端情形之间，人均资本价值表示为直线QU的斜率，k=(0H-0c)/0g，这时的人均净产出N=c+pgK=0c+0g*k=0c+0g*(0H-0c)/0g=0H

- 上述两个体系，一个是价值关系，另一个是实物关系。一个 w-r体系究竟有一个什么样的c-g 体系与之相匹配，或者说对于一个给定的增长率g，究竟是什么样的利润率r 与之配合，则取决于储蓄与投资关系的确立。正是储蓄函数建立起两个体系间的联系。
- 关于储蓄函数，作为一般情形，可以假定工资中也存在部分储蓄。储蓄转化为投资，从而存在如下关系：
- $pgK = s_r prK + s_w w$

$$pgK = s_r(prK + s_w w)$$

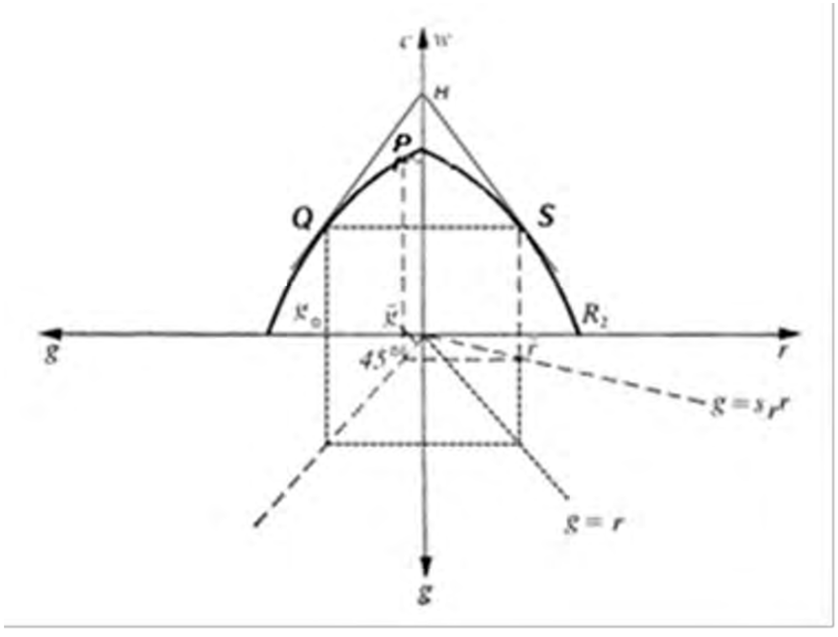
$$g = s_r r + s_w \frac{w}{k}$$

其中 s_r 与 s_w 分别表示对应于利润和工资部分的储蓄率。

- 为简化分析，假定工资全部用于消费，那么增长率只取决于利润部分的储蓄率：
- $g = s_r r$
- 如果没有工资全部用于消费的假定，增长率与利润率之间的函数关系将不是简单的线性关系，因为利润率或增长率的变化将同时影响到人均资本k，整个生产条件将发生改变。

- 工资全部用于消费情况下，增长率与利润率之间的函数关系在图中表示为一条原点出发的射线。

正是通过储蓄函数，增长率与利润率之间建立起联系。在上图中，对于分配关系曲线中的 S 点，存在某个利润率水平 $\bar{r}$ ，当储蓄率为 s_r 时，增长率为 $\bar{g}$ 。这时分配关系曲线中的 S 点对应于消费-增长曲线中的 P 点。



上述说明中，我们可以看到在S点与P点的组合中，增长率不等于利润率，同时人均工资也不等于人均消费。进一步，在增长理论中，人们提出了积累的黄金准则（golden rule of accumulation）。它指的是增长率等于利润率，同时人均消费等于人均工资的积累状态。在上图中，这意味着S点与Q点的一组对应关系。这时，与某个利润率$\overline{r}$对应的增长率不再是$\overline{g}$，而是Q点所对应的g_0点。这时的储蓄函数$s_r=1$。

另外，在黄金准则下我们发现无论是HS还是HQ都是与相应的工资-利润曲线和消费-增长曲线相切。也就是说，过S点与Q点存在无数个直线，对应的存在无数个人均资本k，但是这中间只有过这两点的切点，以及对应的人均资本k对应于黄金准则。

相对价格变化与标准商品

- 不变价值尺度、无替代定理和相对价格变化的内在联系
  - 在上述分析所表明的生产体系内在联系的基础上，我们就可以开始讨论李嘉图“不变价值尺度标准”问题产生的原因，以及斯拉法如何试图解决这样一个逻辑问题的。
  - 如果一个经济系统存在唯一的初始投入要素，例如劳动，工资率的变动将不会对相对价格产生影响。同时也不存在收入分配问题
  - 但是在多个要素投入的情况下，例如劳动与资本，随着工资率与利润率的变动必将带来相对价格的改变。
  - 在古典分析体系中，人们始终认为分配的决定合乎逻辑地先于且独立于价格，而如果不能寻求到一种不变的价值尺度，那么分配事先确定的性质也就无从谈起。

- 同时我们注意到唯一初始投入条件下，技术选择的无替代定理成立，而一旦增加值中存在劳动与资本两个要素，无替代性质也将不再成立。从这里开始我们可以看出无替代定理与李嘉图难题之间的内在联系。这种内在联系就是相对价格的变化。
- 在古典传统的斯拉法研究者看来，无替代定理恰恰强调了他们所想要阐明的一种受分配影响的技术选择观。但是在新古典学者看来，所谓的无替代性只是列昂惕夫体系下特定假定条件的结果，如果违背了这些假定这一性质将无法成立。也就是说，古典理论所坚持的脱离供求关系的技术决定路线只是需要诸多假定的特例。

- 李嘉图和马克思的假定
  - 对于李嘉图寻求不变价值尺度的难题，帕西内蒂分析并解释了古典体系中提出类似李嘉图所做的所有部门单一的资本密度（uniform capital intensity）或者是马克思的所有部门单一的资本有机构成的假定的原因。在这样的假定下，工资率和利润率间就可以保持明确的关系。
  - 对于技术矩阵A，$pA = \lambda p$，也就是说当中间投入与初始投入各部门保持一个相同的比例时，p成为技术矩阵的相对价格，而$1 - \lambda$则是增加值占总投入的比重

对于价格决定系统有：

$$pA(1+\pi)+a_n^* w = p \qquad (7.18)$$

根据定义对于矩阵 A 存在一个价格向量 p^* 为其特征向量，即 $p^* A=\lambda_m p^*$，所以：

$$p^* = a_n^* \frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m} \qquad (7.19)$$

另外根据一体化劳动系数 v^* 与直接劳动系数间的关系：

$$a_n^* = (1-\lambda_m)v^* \qquad (7.20)$$

当设定一体化劳动为价格标准时，有 $p^* = v^*$，结合（7.18）与（7.20）式，有：

$$\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m} = \frac{1}{1-\lambda_m} \qquad (7.21)$$

进一步有关系 $\pi = \Pi(1-w)$ 成立。

- 说明
  - 当各部门资本有机构成不变，各部门的中间投入、利润和工资的份额是不变的
  - $p^*A=\lambda_m p^*$表明λ_m是物耗部分在整个投入中所占的比例，同时它是A的特征值，而价格是A的特征向量。
  - 由上述关系，得到$p^*=a_n^*\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m}$，表明价格向量与直接劳动投入系数向量是线性相关的，进一步我们还看到价格与完全劳动系数向量也是线性相关的
  - 从前式关系，有$p^*(I-A)=(1-\lambda_m)p^*$也就是初始投入部分，带入价格与直接劳动系数的关系，得到：
  - $a_n^*\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m}(I-A)=(1-\lambda_m)a_n^*\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m}$
  - 因此$a_n^*\ (I-A)=(1-\lambda_m)a_n^*$
  - $a_n^*\ =(1-\lambda_m)a_n^*(I-A)^{-1}=(1-\lambda_m)v^*=v^*-\lambda_m v^*$
  - 表明：直接劳动系数与完全劳动系数线性相关，且直接拉动系数等于完全劳动系数减间接劳动系数，其中$\lambda_m v^*$就是间接劳动系数
  - 设完全劳动系数为价格标准（相对价格不变），$p^*=v^*$，$p^*=a_n^*\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m}=v^*=a_n^*\frac{1}{1-\lambda_m}$，因此$\frac{w}{1-(1+\pi)\lambda_m}=\frac{1}{1-\lambda_m}$，进一步有$\pi=\frac{1-\lambda_m}{\lambda_m}(1-w)$

- 斯拉法的标准商品
  - 所有部门的资本有机构成或者资本与劳动的比例相等是一个极为严格，甚至是不切实际的假定。斯拉法正是从这一点开始，提出了“标准体系”与“标准商品”，能够在一种更为一般的体系中展示工资率和利润率间明确的关系
  - “标准体系”与“标准商品”之所以能够解决这一问题的关键仍然是要解决这其中的核心问题，即相对价格变化问题。

- 从列向模型 的框架中说明当所有部门的增加值率相同的情况下，$pA = \lambda p$相对价格只取决于技术矩阵 。只要是技术矩阵 不变，相对价格也将保持不变。
- 投入产出体系作为一个对偶的体系，同样在行的方向上存在类似的联系，即$Ax = \delta x$，这时假定各部门中间产品与总产品的比例关系不变。
- 对于给定的技术矩阵，如果所有部门具有相同的中间投入与初始投入的比例，那么左特征向量成为价格向量，同时，如果所有部门的中间使用与最终使用的比例相同，那么右特征向量成为总产出向量，而且这时中间使用与最终使用的比例将等于中间投入与初始投入的比例。

- 对于行模型$Ax+y=x$，定义各部门最终使用于中间使用的比率为$R_i=\frac{y_i}{x_i-y_i}$。这一比率被斯拉法称为剩余率。如果各部门剩余率相等，则有：
- $Ax+RAx=x$
- $(1+R)Ax=x$
- $Ax=\frac{1}{1+R}x$
- 斯拉法假定各部门相同的剩余率，实际上就是假定了各部门中间使用与总使用存在一个相同的比率，而这个比率就是$\frac{1}{1+R}$。斯拉法把这种具有比例性质的经济体系称为“标准体系”。
- 这时不仅向量x为矩阵A的右特征向量，同时因为$y=\frac{R}{1+R}x$，表明向量y 也是矩阵的特征向量。斯拉法正是称标准体系中的向量y 所代表的这样一种复合商品为“标准商品”。

- 小结
  - 斯拉法绕开了各部门有机构成相同的假定，实际上斯拉法只不过利用了数学性质，把从列向关系所做的假定，改换为从行向关系做出的假定
  - 从投入产出的角度来理解的话，我们可以看到相对价格变化源于列昂惕夫逆阵及其性质，初始投入要素的价值正是通过中间产品的相互需求把要素成本的变化传递到整个经济系统中去。因此，相对价格变化源于列昂惕夫逆阵，而列昂惕夫逆阵所表达的是相互需求的完全联系，而这就是经济结构问题的本质。不同的经济具有不同的相互联系的性质、特点与方式，因而也具有不同的经济结构。
  - 如此说来，李嘉图所面对的难题本质上是一个结构问题，这样的问题在总量分析中不会遇到的。从李嘉图寻找不变价值尺度难题以及无替代定理让我们看到的是结构问题给经济分析所带来的巨大困难。与斯拉法坚持古典立场相比，新古典放弃在纯生产体系中对分配关系进行说明的分析路径，而引入效用与需求，以解决相对价格与分配关系相互影响的循环悖论。

收入分配与技术选择

- 在前面的分析中，我们总是追求一种明确的或者说是线性的工资利润关系，所带来的好处不仅是可以明确地界定收入分配关系，而且在技术选择条件下，不会出现技术的再转轨

- 古典理论的技术选择，是在市场竞争条件下以一套成本最小化的“规则”，从多个技术的比较中进行选择。具体分析中一般简化为假定其他生产过程的生产方法（method）既定，只是某一生产过程面临多种生产方法的选择。

现有价格 (p_i, w_i) 由成本最小化技术（cost-minimizing technique）或优势技术（dominant technique） i 决定，即 $(1+r)a_i p_i + w_i l_i = b_i p_i$，其中 r 为利息率或古典意义上的利润率。任何其他生产方法 j，在现有价格 (p_i, w_i) 下其成本都不低于 $b_j p_i$。如果存在某个方法 j，其成本小于市场价值 $b_j p_i$，存在超额利润从而成为新的技术选择。随着技术的被模仿，该技术成为优势技术的同时超额利润消失，利润率回到长期水平，但价格体系对应新的生产方法 j 发生改变，成为 (p_j, w_j)，即 $(1+r)a_j p_j + w_j l_j = b_j p_j$，由此构成技术选择不断改变的过程。

- 一般情形下的工资利润关系

对于单一生产模型：

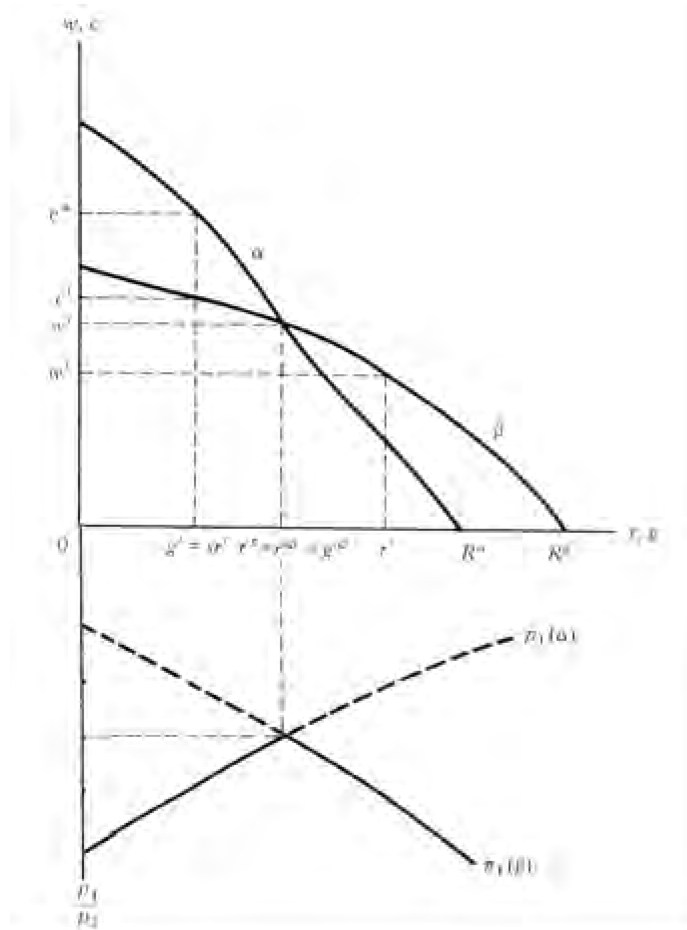
$$p=(1+r)pA+wl$$

$$p=wl[I-(1+r)A]^{-1}$$

通过引入表示消费结构的一组商品 d 作为计价物，使得 $pd=1$，实现对上述体系的标准化的同时，消除求解未知数中的一个自由度。对上式两边同时右乘列向量 d ，变形得到：

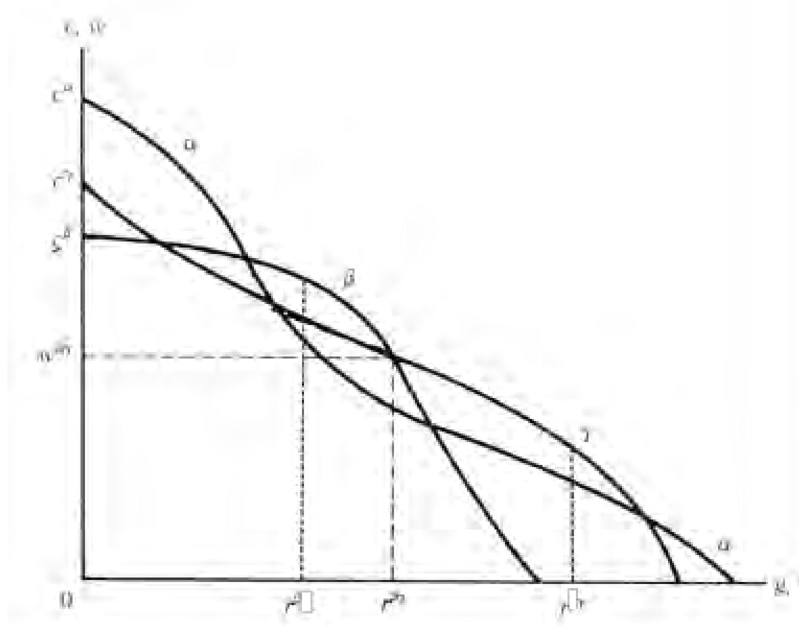
$$w=\frac{1}{l[I-(1+r)A]^{-1}d}$$

- 工资利润关系曲线：
  - 一是横轴截距表示工资率为0时的最大利润率，
  - 二是曲线在第一象限是严格递减的，因为矩阵 $[I-(1+r)A]^{-1}$的所有元素是利润率r 的严格递减函数。
  - 随着利润率的变化，最优技术选择相应改变，进而对应新的技术形成一条新的工资-利润关系曲线。所有的最优技术组合就是由这些不同技术的工资－利润曲线的包络曲线所代表，并把这一包络曲线称之为工资－利润前沿（wage-profit frontier）。
  - 与列模型基础上的分配和价格模型相对应，存在行向模型基础上的消费和增长曲线机器前沿面。



围绕总量生产函数的争论

- 新古典寓言：
  - 随着资本深化，资本-劳动比率上升，利息率是下降的，而工资率是上升的。利润份额下降，储蓄率下降，进而人均消费上升。
  - 技术再转轨不仅带来了资本度量上的难题，而且随着利息率或利润率的下降，资本密度不一定上升
  - 图中随着利润率从r^{γ}下降为r^{β}，技术选择改变，对应的人均消费不是上升，而是下降。
  - 随着收入分配的改变，资本本身的价值也将改变，从而将不存在以价值度量的资本概念，同时，就可能出现随着利润率的增加，劳动并不必然会替代资本。



- 价格魏克赛尔效应和实际魏克赛尔效应
  - 由于价格魏克赛尔效应的存在，边际产品与分配变量之间的对应关系无法成立

为说明收入分配对要素使用的影响，考虑一个简化的经济系统。假定土地免费使用，从而不存在地租，不考虑折旧。谷物作为产出，构成净产品，其价值将在资本与劳动之间进行分配：

$$Y = Kr + Lw$$

其中，Y 为谷物产出，K 为资本价值，L 为劳动量，r 和 w 为利润率和工资率。

以人均形式表示为：

$$y = kr + w$$

因此，人均资本为：

$$k = \frac{y - w}{r}$$

一般地可以表示为：$k = \varphi(y, r, w)$ 。

人均资本的变化为：

$$dk = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + [\frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw]$$

右边第一项为人均产出的变化带来的人均资本变化，表明资本价值受技术变化的影响；第二项为收入分配变化带来的人均资本变化。在理论上，前者被称为“实际魏克赛尔效应”（real Wicksell effect），而后者被称为“价格魏克赛尔效应”（price Wicksell effect）。

对于上述具体形式的人均资本，那么实际与价格的魏克赛尔效应分别为：

实际魏克塞尔效应：$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = \frac{1}{r}dy$$

价格魏克赛尔效应：$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial \varphi}{\partial w}dw = -[\frac{k}{r}dr + \frac{1}{r}dw]$$

上述结论中，如果利润率和工资率保持不变，那么只存在实际魏克赛尔效应，而实际魏克赛尔效应不是别的，正是资本的边际生产率条件。

我们设

$$-[\frac{k}{r}dr + \frac{1}{r}dw] = 0$$

得到：

$$-\frac{dw}{dr} = k$$

那么，对于单一产品的生产模型，这正是我们通常见到的要素使用的均衡条件，要素的收益率，或者是要素的价格取决于要素的边际生产率。

- 正则经济regular economics
  - 埃德温·伯迈斯特（Edwin Burmeister）进一步指出再转轨其实并不是这一悖论产生的必要条件，也就是说在没有再转轨的情况下，也会出现这一悖论
  - 产生这一问题的根本原因其实在于总量模型在同质资本品的条件下并不会遇到麻烦，但是在一个结构模型中，面临异质资本品的情况下，总量模型中的这一结论就难以成立。

$$T(c_1+\dot{k}_1,\cdots,c_n+\dot{k}_n;k_1,\cdots k_n)=0$$

其中，c_i 为商品 i 的人均消费，$\dot{k}_i$ 为第 i 种机器的人均净资本形成，k_i 表示第 i 种机器的人均资本存量，$i=1,\cdots n$ 。

在稳态增长条件下，$\dot{k}_i=0$。关于上式的微分得到：

$$\sum_{i=1}^{n}T_i\frac{dc_i}{dr}+\sum_{i=1}^{n}T_{n+i}\frac{dk_i}{dr}=0$$

在竞争条件下，要求在稳态均衡中：

$T_i=-P_i$，且 $T_{n+i}=rP_i$

其中，P_i 是商品 i 的价格，r 为利息或利润率。因此在稳态均衡下有：

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{dc_i}{dr}=r\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{dk_i}{dr}$$

如果目标仅仅是让对第一种产品的人均消费c_1最大化，那么就有：

$$P_1 \frac{dc_1}{dr} = r\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dk_i}{dr}$$

变形得到

$$\frac{dc_1}{dr} = r\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_1}\frac{dk_i}{dr}$$

如果对于所有的$r > 0$要让$\frac{dc_1}{dr} < 0$，必须有$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_1}\frac{dk_i}{dr} < 0$。满足这一条件的经济，伯迈斯特称之为正则经济（regular economies）

即使在不出现悖论的情况下，随着利润率的下降对应的资本价值也并不必然上升。为对这一问题进行分析，设资本的价值为：

$$v=\sum_{i=1}^{n}P_i k_i$$

随利润率变化，资本价值变化可以表示为：

$$\frac{dv}{dr}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dP_i}{dr}k_i+\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{dk_i}{dr}$$

上式中前者正是价格魏克塞尔效应，而后者则是实际魏克塞尔效应。可以看出，当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{P_1}\frac{dk_i}{dr}<0$ 时，也就是实际魏克塞尔效应是小于零的，但通常 $\frac{dP_i}{dr}$ 是大于 0 的。因此，$\frac{dv}{dr}$ 的符号取决于两者的相对大小。由此看来，$\frac{dv}{dr}<0$ 是实际魏克塞尔效应为负的充分条件，而非必要条件。也就是说，要确保悖论不存在，必然有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{P_1}\frac{dk_i}{dr}<0$，但该条件并不能保证悖论不出现。

- 代用生产函数surrogate production functions
  - 萨缪尔逊则提出了代用生产函数（surrogate production function）。用特殊形式的生产函数说明了收入分配与技术选择变化条件下，新古典“寓言”仍然能够成立

对于多部门生产，价格系统为：

$$p = (1+r)pA + wa_0$$

利用消费结构 $C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)'$ 表示相对价格：$pC = 1$，那么工资与利润之间的关系为：

$$w = \frac{1}{a_0[I-(1+r)A]^{-1}C}$$

对于数量体系，有：

$$x = (1+g)Ax + cC$$

在充分就业下，$a_0 x = 1$，那么消费与增长之间的关系为：

$$c = \frac{1}{a_0[I-(1+g)A]^{-1}C}$$

由于收入等于产出，就有：

$$cpC + gpAx = wa_0x + rpAx$$

人均资本可以表示为（区别于存量资本，我们用v表示）：

$$v = \frac{pAx}{a_0x} = \frac{w-c}{g-r}$$

在$w-r$与$c-g$的坐标体系中，由于价格魏克赛尔效应，随着收入分配变化，人均资本也相应改变。

如果假定所有部门生产资料价值与劳动之比都相同，也就是各部门人均资本相同，那么有：

$$pA = va_0$$

$$\frac{dp(r)}{dr}=\frac{dw}{dr}a_0[I-(1+r)A]^{-1}+wa_0[I-(1+r)A]^{-1}A[I-(1+r)A]^{-1}$$

$$=[\frac{dw}{dr}a_0+pA][I-(1+r)A]^{-1}$$

当且只有当 $\frac{dw}{dr}a_0+pA=0$ 时， $\frac{dp(r)}{dr}=0$ 。也就是各部门人均资本等于 $-\frac{dw}{dr}$ 。

满足这一条件下，价格方程为：

$$p=(1+r+\frac{w}{v})pA$$

因而有：

$$1+r+\frac{w}{v}=\frac{1}{\lambda^*(A)}$$

其中 $\lambda^*(A)$ 为矩阵 A 的最大特征值。

另外，我们知道 $\frac{1}{\lambda^*(A)}=1+R$ ，其中 R 为最大利润率。那么上述关系变化为：

$$w=(R-r)v$$

至此，结论就是分配变量之间呈线形关系，相对价格不随分配的变化而变化。

联合生产与技术选择

- 联合生产问题的性质
  - 技术的表述

一个标准的联合生产体系由投入矩阵 A，劳动投入向量 l，以及产出矩阵 B 构成。其中，投入矩阵的列表示某个生产过程的各个投入，产出矩阵 B 的列表示多种产品的联合产品构成。因此，这一体系可以表述为 $(A,l) \rightarrow B$，或者直接由 (A,B) 表示生产体系或技术体系。假定有 n 个生产过程，m 种产品，那么 A、B 为 $(m \times n)$ 矩阵。在单一产品的情况下，产出矩阵 B 成为对角矩阵，采用规模报酬不变的假定或者是通过计量单位的选择可以进一步转化为单位矩阵 I，因此，(A,I) 就成为单一生产体系，单一生产的技术直接由矩阵 A 来表述。可见，列昂惕夫体系就是一种单一生产体系。

– 联合生产与固定资本

- 斯拉法体系的单一产品模型，在只考虑流动资本的情况下，通过引入标准商品和标准体系，再一次展示出谷物模型中那种明确的收入分配关系
- 针对包含固定资本生产的情形，斯拉法则是通过引入联合生产来加以研究。斯拉法把不同年龄的机器视为不同的产品。这样，固定资本既是作为一种生产要素投入，经过生产过程又被作为一种与最终产品一起的联产品，把使用固定资产的生产过程作为联合生产的一种形式。
- 但是，联合生产的引入在提出解决固定资本问题一个新的路径的同时，也带来众多分析上的困难。

– 联合生产的求解问题

- 对斯拉法体系的研究一般是以方阵系统作为研究对象。
- 对于单一生产系统：
- 存在有经济意义解的条件是列昂惕夫逆阵为非负。称满足这一条件的非负系数矩阵A所表示的技术为生产性的（productive）。如果单一生产的某一技术满足生产性，也就是如果可以生产单位净产出，那么该技术就可以生产任何需要数量的净产出。这一性质也称为调节性质（property of adjustment）。在单一生产的情况下，非负矩阵A使得 成为Z-矩阵，有经济意义解的条件比较容易得到满足

- 对于联合生产的数量体系：$(B - A)x = d$
- 其中：d为净产出列向量， x为活动水平。
- 同单一生产相比，联合生产的问题在于：广义列昂惕夫逆阵可能不存在，从而无法在给定最终净产品的条件下，求出所需的活动水平；
- 或者可逆但可能为负，从而导致出现负的活动水平。类似地对于价格体系，为求解相对价格，不能保证价格为正，即使在价格为正的情况下，还可能出现利润率和工资率的同向变动。
- 由此使斯拉法体系中单一生产所具有的经济性质，在联合生产的情形下显得很不确定，其中的大部分性质将难以成立。
- 研究在什么条件下单一生产的主要性质在联合生产中依然成立，成为斯拉法体系下联合生产研究中的一项分析任务

- All-engaging和All-productive
  - 如果矩阵 $(B-A)$ 是满秩的，且有正的逆阵，就是all-engaging系统，如果矩阵$(B-A)$ 是满秩的，且有半正的逆阵，就是all-productive系统。
  - 这一概念最早是施弗尔德（Bertram Schefold）在1971他的博士论文中提出的，并在他1978年的一篇英文文献中得到了进一步的阐述，对这一概念加以进一步扩展的是比达尔（Christian Bidard）
  - 这一对概念的含义在于：尽管在联合生产中每一生产过程存在多个产出，但是从产出的角度所有净产品都具有可分散生产的性质（separately producible），也就是在非负活动水平下可以生产只含一种产品的单位净产出，这就是all-productive所表明的意思。也就是说任何产品的某个净产出都可以独立（即可分散）生产出来。如果在这一产品的生产中所有生产过程都是必需的话，那么这一体系就是all-engaging体系。这两种联合生产体系尽管不是单一生产，却具有单一生产的性质。

- 子体系和纵向一体化
  - 为了对每种商品生产中所消耗的直接和间接劳动进行度量，斯拉法在《用商品生产商品》一书中所提出“转化为有时期的劳动”（reduction to dated quantities of labour）这一概念，尽管它能够在单一生产中起作用，但在联合生产条件下却面临失效。正是在这种情况下，斯拉法提出了“子体系”（sub-system）以解决联合生产中劳动的度量问题。
  - “这一体系可以按纯净产品中所包括的商品细分为同样多的部分，使每一部分成为一个较小的自行更新体系，其纯产品的组成仅有一种商品。”斯拉法正是把这些部分称为“子体系”。
  - 子体系是以$(B-A)^{-1}$的存在为前提的，因而与前面的all-engaging和all-productive系统从本质上看表达了相同的内容

- 帕西内蒂进一步把“子体系”的概念与列昂惕夫体系结合起来，直接消耗系数和直接劳动系数反映的是投入列昂惕夫体系中的产业概念，而通过列昂惕夫逆阵，得到完全的劳动消耗和完全的资本消耗，从而构成一种纵向一体化（vertical integration）的部门，也就是斯拉法的“子体系”。
-

$$X^{(i)} = (I - A)^{-1} Y^{(i)}$$

实际上，上式的结果也就是列昂惕夫逆阵的第 i 列，它的含义就是为生产第 i 个产业的最终产品 Y_i 的完全需求，即所有直接和间接的消耗。

相应的为生产第 i 个产业的最终产品 Y_i 的完全需求所需要的劳动投入和资本存量为：

$$L^{(i)} = a_n (I - A)^{-1} Y^{(i)} \qquad （7.37）$$

$$S^{(i)} = K(I - A)^{-1} Y^{(i)} \qquad （7.38）$$

$v = a_n (I - A)^{-1}$ 和 $H = K(I - A)^{-1}$ 被帕西内蒂称为商品 i 的纵向一体化劳动系数（vertically integrated labour coefficient）和纵向一体化生产能力（a unit of vertically integrated productive capacity）

$$p = a_n w + pA + pA\pi$$

表示产品的价格有各种投入所组成，包括劳动投入的工资、中间要素或流动资本投入，以及以对资本的回报利润。如果以子系统的概念来表达：

$$p(I - A) = a_n w + pA\pi$$

$$p = a_n (I - A)^{-1} w + pA(I - A)^{-1} \pi$$

$$p = vw + pH\pi \qquad （7.39）$$

它表明的是价格由两部分组成，即工资和利润，这就是斯密所说的“每个商品都最终可转化为工资、利润和地租”。

- 不可再生资源与地租问题
  - 在李嘉图看来，地租是一种边际内的剩余，不进入价格的决定。相应地，商品的价格将由无地租土地上使用的可变投入所决定的。斯拉法在李嘉图理论基础上，区分两类情形对地租进行了分析：一类是不同土质的级差地租，另一类是单一土质土地的地租
  - 情形1：级差地租

首先讨论级差地租的情形。假设经济中存在 n 个工业部门，生产中不需要土地，以及农业部门生产谷物，用 g 表示。农业部门谷物的生产中，总共有 s 个土质不同的地块，其中 k 种被利用。对于每一个地块，我们认为存在一种方法及生产过程。这样的话，整个经济将由 $n+k$ 个生产过程组成。

	工业 1	$\cdots$	工业 n	农业 1	$\cdots$	农业 k
工业 1	a_{11}		a_{1n}	a_{11}^{g}	$\cdots$	a_{1n}^{g}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
工业 n	a_{n1}		a_{nn}	a_{n1}^{g}	$\cdots$	a_{nn}^{g}
农业 g	a_{g1}	$\cdots$	a_{gn}	a_{g1}^{g}	$\cdots$	a_{gn}^{g}
劳动	l_1	$\cdots$	l_n	l_1^{g}	$\cdots$	l_k^{g}
土地				Λ_1	$\cdots$	Λ_k

如此，该体系中工业品生产第 1 到第 n 个方程为：

$$(1+r)(a_{11}p_1+\cdots+a_{n1}p_n+a_{g1}p_g)+wl_1=b_1p_1$$

$$(1+r)(a_{12}p_1+\cdots+a_{n2}p_n+a_{g2}p_g)+wl_2=b_2p_2$$

。。。

$$(1+r)(a_{1n}p_1+\cdots+a_{nn}p_n+a_{gn}p_g)+wl_n=b_np_n$$

农产品第 1 个地块，到第 k 个地块的生产方程为：

$$(1+r)(a_{11}^g p_1+\cdots+a_{n1}^g p_n+a_{g1}^g p_g)+wl_1^g+\rho_1\Lambda_1=b_1^g p_g$$

$$(1+r)(a_{12}^g p_1+\cdots+a_{n2}^g p_n+a_{g2}^g p_g)+wl_2^g+\rho_2\Lambda_2=b_2^g p_g$$

。。。

$$(1+r)(a_{1k}^g p_1+\cdots+a_{nk}^g p_n+a_{gk}^g p_g)+wl_k^g+\rho_k\Lambda_k=b_k^g p_g$$

其中 n 种工业品价格 $p_1,\cdots p_n$，谷物的价格 p_g，工资率 w 和利润率 r，ρ_1，$\cdots$，ρ_k 为不同地块的地租，$b_1,\cdots,b_n$ 与 $b_1^g,\cdots,b_k^g$ 为各工业与农业部门的产出系数。

假定在上述地块中，最劣等地块没有地租，也就是 $\rho_k = 0$。上述农产品生产方程中最后一个方程，也就是最劣等地的生产方程变化为：

$$(1+r)(a_{1k}^g p_1 + \cdots + a_{nk}^g p_n + a_{gk}^g p_g) + wl_k^g = b_k^g p_g$$

这样的话，最劣等地的方程与工业品生产的 n 个方程一起作为方程组将决定相对价格。存在 $n+1$ 个方程和 $n+3$ 个未知数。如果我们假定工资率外生给定，我们将获得该体系相对价格的解。

当我们把相对价格带入到农业生产的前 $k-1$ 个方程，我们将得到某种价格标准下的地租 $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{k-1}$。至于地块的土质差异的区分，可以通过把其他地块也看作是 0 地租，得到价格，比较最大化利润的大小来确定。

- 在对地租进行上述处理之后，就把稀缺资源问题纳入到斯拉法分析框架中。
- 在这样一个框架中，斯拉法认为，不同地块生产率上的差异将受收入分配关系，即工资率与利润率之间关系变动的影响。也就是说，在某个工资率下的不同地块土质的排序，当工资率变化之后，这种排序也会变化。
- 这意味着，不同地块土质的差异在需求固定的情况下，并不能事先给以确定，不同地块的稀缺程度也难以确定。
- 从这一结论我们可以看到从单一生产到联合生产，从可再生资源到不可再生资源，相对价格的变化与回报率的差异同样受到收入分配的影响。

– 情形2：单一土质土地的地租
– 由于土地同质，因此地租相同。为简化起见，我们只考虑存在两个相同肥沃土质的地块。但是，这时的分析需要对谷物是否是基本商品进行区分。

（1）、谷物作为非基本商品

在谷物作为非基本商品的情形下，这时工业品生产方程为：

$$(1+r)(a_{11}p_1+\cdots+a_{n1}p_n)+wl_1=b_1p_1$$

$$(1+r)(a_{12}p_1+\cdots+a_{n2}p_n)+wl_2=b_2p_2$$

。。。

$$(1+r)(a_{1n}p_1+\cdots+a_{nn}p_n)+wl_n=b_np_n$$

两个地块的农业生产方程为：

$$(1+r)(a_{11}^g p_1+\cdots+a_{n1}^g p_n)+wl_1^g+\rho\Lambda_1=b_1^g p_g$$

$$(1+r)(a_{12}^g p_1+\cdots+a_{n2}^g p_n)+wl_2^g+\rho\Lambda_2=b_2^g p_g$$

在上述情形下，我们可以对工业品生产过程求解得到工业品价格和利润，然后带入到农业生产过程，得到谷物价格和地租。

对于谷物生产方程，我们可以计算两个地块的谷物单位成本：

$$q_1 = \frac{(1+r)(a_{11}^g p_1 + \cdots + a_{n1}^g p_n) + wl_1^g}{b_1^g} = \frac{p_g b_1^g - \rho\Lambda_1}{b_1^g}$$

$$q_2 = \frac{(1+r)(a_{12}^g p_1 + \cdots + a_{n2}^g p_n) + wl_2^g}{b_2^g} = \frac{p_g b_2^g - \rho\Lambda_2}{b_2^g}$$

求解后得到：

$$\rho = \frac{q_1 - q_2}{(\Lambda_2 / b_2^g) - (\Lambda_1 / b_1^g)}$$

地租 ρ 大于 0 的条件是如果单位成本地块 1 大于地块 2，即 $q_1 > q_2$，那么 $(\Lambda_2 / b_2^g) > (\Lambda_1 / b_1^g)$，这意味着地块 2 单位产出的土地面积更大，进而在回报率上，地块 1 则更高，即 $(b_g^2 / \Lambda_2) < (b_g^1 / \Lambda_1)$。

两个地块的地租可以表示为农产品价格的函数：

$$\rho = u_1 p_g - u_2 q_1$$

$$\rho = u_2 p_g - u_2 q_2$$

其中，$u_1 = \dfrac{b_1^g}{\Lambda_1}$，$u_2 = \dfrac{b_2^g}{\Lambda_2}$

可见，上述每一个地租都表示为农产品价格的线性函数$\rho(p_g)$。

（2）谷物作为基本商品

谷物作为基本商品，工业生产与农业生产的方程都将改变：

$$(1+r)(a_{11}p_1+\cdots+a_{n1}p_n+a_{g1}p_g)+wl_1=b_1p_1$$

$$(1+r)(a_{12}p_1+\cdots+a_{n2}p_n+a_{g2}p_g)+wl_2=b_2p_2$$

。。。

$$(1+r)(a_{1n}p_1+\cdots+a_{nn}p_n+a_{gn}p_g)+wl_n=b_np_n$$

同时两个地块的农业生产方程为：

$$(1+r)(a_{11}^g p_1+\cdots+a_{n1}^g p_n+a_{g1}^g p_g)+wl_1^g+\rho\Lambda_1=b_1^g p_g$$

$$(1+r)(a_{12}^g p_1+\cdots+a_{n2}^g p_n+a_{g2}^g p_g)+wl_2^g+\rho\Lambda_2=b_2^g p_g$$

上述方程与级差地租的情形相比，差异在于两个地块单位土地的地租相同。与农产品作为非基本商品时的方程相比，差异在于：一是工业品价格不再只是取决于工业生产，同时也取决于农业生产；二是地租与农产品价格之间的关系 $\rho(p_g)$ 一般情况下将是非线性的。其方程形式为：

$$\rho^i(p_g) = u_i p_g - u_i q_i(p_g)$$

在两种地块同时使用的情况下，由于考虑到农产品价格与单位地块的地租都两种地块都相等这意味着两者的地租-价格曲线的交点上获得均衡解。但是对于非线性曲线，可能存在多个交点。这些交点同时满足农产品价格与单位地租相同的条件。

End of Sraffa-Leontief System