第四章
静态均衡及其有效性

内容

- 1、广义H-S定理
- 2、有经济意义解的等价条件
- 3、比较静态分析
- 4、静态均衡的有效性

广义H-S定理

- 静态投入产出闭模型：$x = Ax + c$
- 对偶价格模型：$p = pA + v$
- 对于行模型，定义$B = I - A$，有：
- $Bx = c$
- 静态均衡讨论的是在什么条件下，从已知的$c \geqq 0$，得到$x \geqq 0$。
- 从三个角度研究：系数矩阵主子式的符号（H-S定理）；从拟对角占优矩阵（q.d.d.）；半正矩阵及其谱的性质（佩龙-弗罗贝尼乌斯定理）

- H-S条件
  - 考虑$Bx = c$，其中对于所有的$i \neq j$，都有$b_{ij} < 0$，同时$b_{ii} > 0$，在系数矩阵的行列式不为0的条件下，对于给定的正的向量$c > 0$，要得到正的解x，其充分必要条件是矩阵B的所有主子式都是正的

- 解说
  - 所有顺序主子式大于0，对称矩阵A及其二次型是正定的，如从负号开始，交替变号（小于-大于），那么对称矩阵为负定的；所有主子式大于等于0，那么对称矩阵是半正定的，如果从小于等于号开始交替变号（小于等于-大于等于），那么对称矩阵是半负定的
  - 关于符号条件：所有主子式为正=P-矩阵；对于所有的$i \neq j$，都有$b_{ij} < 0$ =〉Z-矩阵（非对角元素非正）；关于主对角元素为正，我们知道非奇异M-矩阵主对角元素为正（非对角元素非正）。
  - 因此H-S条件是说，在满足符号条件的情况下，存在有经济意义解的充要条件是B为P-矩阵

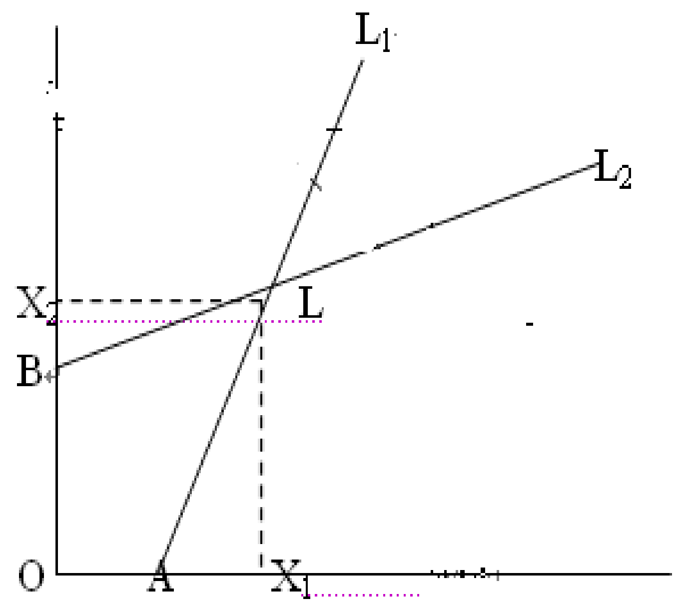
- 证明
  - 方程组的增广矩阵
  - $$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_n \end{pmatrix}$$
  - 采用消元法，把增广矩阵变换为一个上三角矩阵。
  - 第一行乘某个系数加上第二行，以此方式直至第n行，可以使第一列除b_{11}外，全为0。但是第二列的第二个元素可正可负，而第二列其他行一定是负的，这决定了以这一行来加减其他行的时候，下一步究竟是加还是减
  - 为此分两种情形讨论

- 第一种情形：所有对角元素为正，最终得到如下形式
- $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22}' & \cdots & b_{2n}' & c_2' \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}' & c_n' \end{pmatrix}$
- 因为所有运算都是加法运算，所以非对角元素为负，而最后一列全为正
- 最后一个方程：$b'_{nn}x_n = c_n'$，系数全为正，因此有$x_n > 0$
- 倒数第二个方程： $b'_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + b'_{(n-1)n}x_n = c'_{n-1}$，左边第二项为负，移到右边加起来为正，与最后一个方程一样，有：$x_{n-1} > 0$
- 倒数第三个方程：原理类似，有：$x_{n-2} > 0$
- 因此，x_i全为正
- 同时，系数矩阵行列式值在上述变换下并不改变，三角矩阵任何一个主子式的值由矩阵对角元素相乘得到，因此该系数矩阵任何主子式为正。

- 第二种情形：主对角元素中至少有一项是非正的
    - 假设第一个非对角元素出现在第j行，主对角元素为非正，而右端所有非对角元素为负
    - $b'_{jj}x_j + b'_{j(j+1)n}x_{j+1} + \cdots + b'_{jn}x_n = c'_j$
    - 根据假定，$b'_{jj} \leq 0$，而$b'_{j(j+1)n}$至b'_{jn}为负，同时$c'_j > 0$。现在假设x_{j+1}至x_n为正，那么根据上式必然有$x_j < 0$。同时，以前j行j列构成的子式将为0或负。
    - 这表明至少有一个主子式非正，同时将至少有一个x为负
- 综合上述两种情形，定理成立。

- H-S定理的引申含义：
  - 给定某个正的最终需求c，产出为正的系数矩阵的主子式为正。该结论同样适用于任何一个给定的正的最终需求
  - 也就是说，如果某项技术可以生产某个给定的消费组合，那么它能够生产任何一种消费组合

- 几何及经济含义
  - 在两部门情况下，H-S条件为：
  - $|1-a_{11}|>0$，
    $|1-a_{22}|>0$，
    $\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0$
  - 前两条的经济含义是自身投入小于产出，后者为$\frac{1-a_{11}}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{1-a_{22}}$，表示L1的斜率大于L2 的斜率



广义H-S定理

- **定理：** 广义H-S条件（P66-68）
  - 对于投入产出模型$Bx = c$，其中对于所有的$i \neq j$，都有$b_{ij} \leq 0$，即非对角元素非正。下列条件是等价的：
    - i、对于某个给定的$c > 0$，存在非负解$x \geqq 0$；
    - ii、对于任意一个非负 $c \geqq 0$，存在非负解$x \geqq 0$；
    - iii、B的顺序主子式为正；
    - iv、B的所有主子式为正 。

- 说明：
  - 符号条件中没有对主对角元素符号做出限定，只要求B为Z矩阵；
  - 充分必要条件表示为等价形式；
  - 某个与任意一个的区别；
  - 所有主子式为正即为P阵，本定理表明在Z矩阵的条件下，所有主子式为正与顺序主子式为正是等价的；
  - 在本定理中，对于存在有经济意义解的条件，所有主子式为正与顺序主子式为正两者间的等价，在条件上是放松，之所以能够放松的原因是特定的符号条件，即Z矩阵
  - 投入产出矩阵A为正矩阵的情况下，满足B=I-A的符号条件

- 定理4.3（P68-69）
  - 考虑$Bx = c$，其中非对角元素非正，令A为不可分解矩阵，$B = I - A$为一P-矩阵，那么已知$c \geq 0$，就有$x > 0$
  - 说明
    - 与广义H-S定理相比，附加了一个条件即不可分解矩阵A或B
    - 结论进一步强化，即所有产出为正。
    - 经济含义为在不可分解的情况下，相互联系使得即使某些部门最终需求为0，但该部门也要生产

– 证明

- 在广义H-S定理基础上，这里只需要证明x中不含0元素。如果A为不可分解矩阵，那么B也是不可分解矩阵
- 反证法，假设某些部门产出为0。$I = \{k|x_k = 0\}$，$J = \{k|x_k > 0\}$。考虑第r个部门产出为0：
- $b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n = c_r$
- 如果$c_r > 0$，因为$b_{rr}x_r = 0$，而公式左边一定小于等于0，矛盾
- 如果$c_r = 0$，$\sum_{j\in I} b_{rj}x_j + \sum_{j\in J} b_{rj}x_j = 0$，因为$\sum_{j\in I} b_{rj}x_j$=0，所以必然$\sum_{j\in J} b_{rj}x_j = 0$，因为$x_j > 0$，因此$b_{rj} = 0$，而不可能小于0。那么B为可分解矩阵，矛盾

静态体系有经济意义解的等价条件

主子式为正

- 主子式为正即P-矩阵
- 定理4.4表明：一个Z-矩阵，如果同时又是P-矩阵，那么该矩阵即为非奇异M-矩阵；也就是说在Z-矩阵的前提下， P-矩阵与非奇异M-矩阵是等价的。
- 定理4.4
  - B为Z-矩阵，当且仅当B为P-矩阵，有$B^{-1} \geq 0$

– 定理4.4的证明

- 利用广义H-S定理证明。
- 必要性：B是Z-阵，且有$B^{-1} \geq 0$，因此对于给定的$c \geq 0$，有$x = B^{-1}c \geq 0$，即满足H-S的条件(i)，根据H-S定理，有条件(iv)成立，即B为P-阵
- 充分性：在B为Z-阵，且为P-阵的情况下，H-S的条件(i)成立，即对于任意的$c \geq 0$，有$x = B^{-1}c \geq 0$。令$c = e^i$，其中e^i为第i个元素为1，其余为0的向量，因此带入，对于所有的i，可以得到矩阵B^{-1}的每一列都大于等于0，即$B^{-1} \geq 0$

- 定理4.5：A是Z-矩阵，且$A^{-1} \geq 0$，当且仅当A的所有顺序主子式都大于0。
- 说明：
  - 前一定理表明，Z矩阵条件下，P矩阵与非奇异M矩阵是等价的，现在则表明，在Z-矩阵条件下，所有顺序主子式大于0与非奇异M矩阵是等价的；
  - 这也表明在Z-矩阵条件下，所有顺序主子式大于0、所有主子式大于0、非奇异M矩阵相互间都是等价的；
  - H-S定理中已表明在Z矩阵条件下，P-阵与所有顺序主子式为正是等价的。因此，根据H-S定理与定理4.4，这个定理一定成立。
  - 证明见教材P70

- 下面两个定理讨论P-阵与非奇异M-矩阵的特征根的情况（证明见教材P71）
- 定理4.6：当且仅当A的每一个实根，以及A的每一个主子矩阵的实根为正时，A才是P-矩阵
- 定理4.7：A是Z-矩阵，A为非奇异M-矩阵的充分必要条件是A的每个特征值的实部都为正

- 说明：
  - 定理4.6说明P-矩阵不仅每一个实根，而且每一个主子矩阵的实根都为正，且逆命题也成立
  - 定理4.7说明非奇异M-矩阵的每个特征值的实部为正，且逆命题成立，即如果知道一个矩阵是Z-矩阵，且知道每个根的实部为正，这个Z-矩阵一定是非奇异M-矩阵

单调矩阵

- 定义：单调矩阵即逆非负的矩阵
  - 非奇异M-矩阵为单调矩阵，反之不成立，单调矩阵可能不是Z-矩阵
- 判断矩阵为单调矩阵的一个充分必要条件
  - 定理4.8：矩阵A为单调矩阵的充分必要条件是可以从$Ax \geqq 0$推出$x \geqq 0$。
  - 说明：实际上，对于投入产出系统而言，$Ax = 0$时，$x = 0$，而$Ax \geq 0$时，$x \geq 0$，对于不可分解矩阵，$Ax \geq 0$时，$x > 0$。

- 定理4.8证明
  - 必要性：如果A为单调矩阵，$A^{-1} \geq 0$。如果$Ax \geqq 0$，那么$A^{-1}Ax = x \geqq 0$
  - 充分性：如果可以从$Ax \geqq 0$推出$x \geqq 0$，首先证明A非奇异，然而证明逆非负。
    - 设 $\tilde{x}$ 为齐次方程 $Ax = 0$ 的解，因为满足 $A\tilde{x} \geqq 0$ 条件，因此$\tilde{x} \geqq 0$，同理$A(-\tilde{x}) = 0$，因此有$-\tilde{x} \geqq 0$。因此齐次方程$Ax = 0$只有零解，A非奇异。
    - 取A^{-1}的第j列$A * j^{-1}$，根据$AA^{-1} = I$，有$AA * j^{-1} = e_j \geq 0$。根据条件有$A * j^{-1} \geqq 0$，如此有$A^{-1} \geqq 0$。

- 从如下定理可以看出单调矩阵名称的由来
- 定理4.9：如果A为单调矩阵，那么由$Ax \geqq Ay$，必知$x \geqq y$。
- 证明：
  - 由$Ax \geqq Ay$，得到$A(x-y) \geqq 0$。又因为A为单调矩阵，$A^{-1} \geqq 0$，所以有：$A^{-1}A(x-y) \geqq 0$，得到$x \geqq y$。
  - [利用定理4.8，A为单调矩阵，因此可以从$A(x-y) \geqq 0$推出$(x-y) \geqq 0$，即$x \geqq y$]

弗罗贝尼乌斯根

- 我们知道非负矩阵存在一个非负的弗罗贝尼乌斯根，且等于它的谱半径，那么投入产出模型的系数矩阵A作为一个非负矩阵，它的弗罗贝尼乌斯根的情况又如何呢？
- 这提供了从投入产出系数矩阵A的根的情况探讨有经济意义解的条件的另一种路径

- 要点
  - 要保证有经济意义的解，投入产出系数矩阵A的弗罗贝尼乌斯根，作为A的谱半径，要满足什么样的条件？
  - 对于投入产出模型：$(I-A)x=c$，或者$Bx=c$
    - 首先B是Z-矩阵，可以表示为$B=sI-A$，且$A\geq 0$。根据非奇异M-矩阵的定义，如果$\rho(A)<s$，那么B就是非奇异M-矩阵
    - 因为$s=1$，B为非奇异M-矩阵的条件是$\rho(A)<1$，而$\rho(A)$既是A的谱半径，也是A弗罗贝尼乌斯根
    - $\rho(A)<1$， B为非奇异M-矩阵，投入产出模型就有经济意义的解

- 二阶堂Nikaido在他的《凸结构与经济理论》一书中，不仅证明了广义H-S定理，还给出了佩龙-弗罗贝尼乌斯定理的另一种证明，这一证明的好处是揭示了系数矩阵的内在结构及性质

- 讨论
  - 对于非负矩阵A来说$\alpha I - A$本身是一个Z-矩阵，但不一定是一个非奇异M-矩阵，因为至少在前面的定理中我们知道非奇异M-矩阵的主对角元素是正的，这说明α的大小对于是否是一个非奇异M-矩阵来说是有影响的
  - 从非奇异M-矩阵的定义上也可以看出，对于上述矩阵，本身是Z-矩阵的情况下，如果$\rho(A) < \alpha$，那么它就是一个非奇异M-矩阵
  - 由此可以看出，α要足够大，大于A的谱半径，就可以使$\alpha I - A$成为一个非奇异M-矩阵
  - 反过来，对于投入产出模型来说，$\alpha = 1$是确定的，因此只能要求A矩阵的谱半径要足够小，要小于1，也就是说不是所有的非负矩阵A都能保证存在有经济意义的解，还要求其弗罗贝尼乌斯根，即谱半径要小于1

- 主题
  - Z-矩阵$\alpha I - A$成为非奇异M-矩阵，α应满足的条件
  - 证明非负矩阵A存在非负特征值，对应半正的特征向量（非负矩阵的佩龙-弗罗贝尼乌斯定理I）
  - 证明A的所有特征值的模都不超过弗罗贝尼乌斯根（非负矩阵的佩龙-弗罗贝尼乌斯定理II）
  - 两条性质
  - 向非负不可分解矩阵的推广
  - 有经济意义解的条件：非负矩阵A的谱半径小于1

- α应满足的条件
  - 引理4.1（P73）
  - 对于非负矩阵A，$\alpha I - A$就是Z-矩阵，而同时成为非奇异M-矩阵的条件是$\rho(A) < \alpha$
  - 因此有引理4.1，基本含义是为使$\alpha I - A$成为非奇异M-矩阵，α的选择构成了一个集合，以A的谱半径为下确界，即 $(\lambda^*(A), +\infty)$ 的一个半区间，其中$\lambda^*(A)$实际上就是A的谱半径，或弗罗贝尼乌斯根

- 佩龙-弗罗贝尼乌斯定理的证明I
  - 引理4.2、引理4.3、定理4.10：P74-75
  - 构造一个函数$y(\alpha) = (\alpha I - A)^{-1}c$，该函数是关于$\alpha$的一个递减函数
  - $\alpha \in (\lambda^*(A), +\infty)$，进一步证明当$\alpha \to \lambda^*(A)$，$y(\alpha) \to \infty$。
  - $(\alpha I - A)y(\alpha) = c$，如果 $\alpha \to \lambda^*(A)$时$y(\alpha)$是一个有限数，那么 对于 给定的 $c > 0$，存在$y(\alpha) \geq 0$，根据广义H-S定理，$\lambda^*(A)I - A$是非奇异M-矩阵，那么$\lambda^*(A)$将属于半区间，而这与事实相矛盾
  - 因此$\alpha \to \lambda^*(A)$时，公式$(\alpha I - A)y(\alpha) = c$两边除 $y(\alpha)$各分量的合计数，将变换为：$(\lambda^*(A)I - A)x(\alpha) = 0$。这意味着$\lambda^*(A)$是A的特征值，且对应特征向量$x(\alpha)$

- 佩龙-弗罗贝尼乌斯定理证明II
  - 引理4.4（P75）：对于非负矩阵A，如果 $y \geq 0$ ，且$Ay \geq uy$，那么$\lambda^*(A) \geq u$。
  - 定理4.11（P75-76）：非负矩阵A的所有特征值的模都不超过弗罗贝尼乌斯根$\lambda^*(A)$，即$\lambda^*(A) \geq |\lambda_i(A)|$，$\lambda_i(A)$表示弗根之外的其他任意根

- 引理4.4证明
  - 反证法：假设$u > \lambda^*(A)$，根据M(A)的结构，有$(uI - A)^{-1} \geq 0$。
  - 由条件$Ay \geq uy$，得到$(uI - A)y \leq 0$，因此有$y \leq 0$。与条件矛盾。

- 定理4.11证明：
  - 对于非负矩阵A，对于任一特征值和相应特征向量：$Az = \lambda z$，展开：

$$\lambda z_r = a_{r1} z_1 + \cdots + a_{rn} z_n$$

  - 取绝对值：

$$|\lambda||z_r| \leq |a_{r1}||z_1| + \cdots + |a_{rn}||z_n|$$
$$= a_{r1}|z_1| + \cdots + a_{rn}|z_n|$$

  - 设$y = |z_r| \geq 0$。因此上述方程的矩阵形式：

$$|\lambda| y \leqq Ay$$

  根据引理，得到$|\lambda| \leq \lambda^*(A)$

- 两条性质：定理4.12、4.13（P76）
  - 定理4.12：如果$A \geq B \geqq 0$，则$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(B)$
  - 证明：
    - 只要证明$M(A) \subseteq M(B)$。如果$\alpha \in M(A)$，则存在$x \geq 0$，使得$\alpha x \geq Ax$。
    - 由于$A \geq B \geqq 0$，因此有$\alpha x \geq Bx$，或者$(\alpha I - B)x \geq 0$，即$\alpha \in M(B)$，就有：$\lambda^*(A)$作为A的下确界，要大于等于B的下确界$\lambda^*(B)$。

- 定理4.13：$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(C)$，其中C为A的任意主子阵
- 证明：
  - 通过将A阵的某些行和列换成0，并进行矩阵置换，构成矩阵$B = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。
  - 显然$\lambda^*(B) = \lambda^*(C)$，同时根据定理4.12，有$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(B)$。

- 向非负不可分解矩阵的推广
  - 在矩阵A为不可约非负矩阵的情况下，弗罗贝尼乌斯根为正，且为单根，对应的特征向量也为正，且为唯一可能为正的特征向量
    - 引理4.5-定理4.14：弗罗贝尼乌斯根为正
    - 定理4.15：弗罗贝尼乌斯根为单根
    - 定理4.16：唯一正的特征向量
    - 证明见教材77-78页

- 引理4.5：对于非负矩阵A，$Ax \leqq ux$，$u \geq 0$。当且仅当$x \geq 0$而非严格大于0的情况下，非负矩阵A为可分解的。也就是说，在上述条件下，当$x > 0$时，非负矩阵A是不可分解的
- 说明：其含义是对于$(uI - A)x = c$，对于给定的c $\geqq 0$存在半正的解，那么A为可分解矩阵；如果只存在严格为正的解，那么A为不可分解矩阵

– 证明：

- 必要性：矩阵A可分解，令$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$，根据弗罗贝尼乌斯定理有：$A_{11}y_1 = \lambda^*(A_{11})y_1$，且$\lambda^*(A_{11}) \geq 0$, $y_1 \geq 0$。因此，

$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda^*(A_{11})\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$，即$P^{-1}APz = uz$，其中$z = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u = \lambda^*(A_{11})$。令$Pz = x$，那么$x \geq 0$，且不全为正，满足$Ax = ux$或$Ax \leqq ux$。

- 充分性：用I 和J分别表示向量x中等于0(I)和大于0(J)的指标集。对于x元素等于0的那些方程，由$Ax \leqq ux$有：

$$\sum_{j\in I} a_{ij}x_j + \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \leq ux_i = 0$$

因为对于$j \in J$，$x_j > 0$，因此唯有$a_{ij} = 0$,A可分解

- 关于非负不可分解矩阵弗罗贝尼乌斯定理的一个结论
  - 矩阵非负不可分解，弗罗贝尼乌斯根是一个单根，且不小于该矩阵的任何其他特征值，但却可能存在于弗根绝对值相等的特征根（意味着为负）
  - 如果矩阵是本原的，那么就不可能存在这样的根，本原矩阵的弗根是唯一的，且不存在其他绝对值大于等于弗根的特征值
- 非负矩阵对应的弗根是所有特征值模中最大的，因此定理可表述为：
  - 非负不可分解矩阵A的谱半径$\rho(A)$是A的特征值，且对应一个正的特征向量
  - 非负矩阵A的谱半径同样是A的一个特征值，但对应一个非负特征向量

- 定理4.17（有经济意义解的条件）：对于非负矩阵A，$(I-A)$逆非负的充要条件是$\rho(A)<1$。
  - 证明：
    - 充分性：设λ为$(I-A)$任意特征值，那么$1-\lambda$为A的特征值。因为A的谱半径小于1，所以$|1-\lambda|<1$，从而$\lambda>0$，所以$(I-A)$非奇异。
    - 因为$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I-A^n$，因为$\rho(A)<1$，所以$\lim_{n\to\infty} A^n=0$，A为收敛矩阵。因此，由上式，当$n\to\infty$时，$(I-A)\sum_{i=0}^{\infty}A^i=I$，即$(I-A)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A^i$，因为$A\geq 0$，所以$(I-A)^{-1}\geq 0$
    - 必要性：设λ为A的任一特征值，存在相应的特征向量，$Ax=\lambda x$。由此，不等式：

$$|\lambda||x|=|Ax|\leq|A||x|=A|x|$$

这里$|A|$的含义为A矩阵元素取绝对值：$(1-|\lambda|)|x|\geq(I-A)|x|$

因为$(I-A)^{-1}\geq 0$，所以：$(1-|\lambda|)(I-A)^{-1}|x|\geq|x|\geq 0$

由上式可知：$(1-|\lambda|)\geq 0$，有$|\lambda|\leq 1$，且不等于1。否则$0\geq|x|\geq 0$，$x=0$，与x作为特征向量不等于0矛盾。

对角占优矩阵

- 首先将讨论对角占优矩阵特征根的情况
  - 圆盘定理给出了矩阵特征值所处的范围，以A的去心绝对值的行和为半径，以对角元素为圆心构成的一个圆盘
  - 定理4.18：（格斯戈林Gersgorin）矩阵A的每个特征值至少在圆$|z-a_{jj}|\le Q_j$，$j=1,2,\cdots,n$之一内，而且至少在圆$|z-a_{ii}|\le P_i$，$i=1,2,\cdots,n$之一内。其中$Q_j=\sum_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}|a_{ij}|$，$P_i=\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$。

- 证明思路：
- 设λ为A的一个根，因此特征方程$\det(\lambda I - A) = 0$成立。采用反证法，假定所有特征根都不在这些圆内，即对于所有的j，$\left|z - a_{jj}\right| > Q_j$ 。从该式变形得到：
  $$\left|\lambda\delta_{jj} - a_{jj}\right| > Q_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |\lambda\delta_{ij} - a_{ij}|,$$
  其中δ为克罗内克尔δ，对于非对角元素为0，而对角元素为1。而上式表明$(\lambda I - A)$具有严格对角占优，因此是非奇异的，与特征方程矛盾。因此，A的根一定落在某个或某些圆内。利用行和定义的d.d.，可以证明后半个结论。

– 性质：定理4.19、4.20、4.21
– 定理4.19：严格正的对角占优矩阵，每个根的实部为正
– 证明：（利用圆盘定理）A具有严格正的对角占优。采用反证法，假设A的根的实部$Re(\lambda) \le 0$。那么：

$$\left|a_{jj} - \lambda\right| = \left|a_{jj} - \lambda\delta_{jj}\right| \ge \left|a_{jj}\right| > \sum_{i \ne j} \left|a_{jj}\right| = \sum_{i \ne j} \left|a_{jj} - \lambda\delta_{ij}\right|$$

即有：$\left|a_{jj} - \lambda\right| = \left|\lambda - a_{jj}\right| > Q_j$

与格斯戈林定理矛盾。
– 推知：具有严格正的对角占优矩阵就是P-矩阵？

- 定理4.20：A为Z-矩阵，如果A具有严格正的对角占优，那么对角元素的代数余子式要大于非对角元素的代数余子式。
- 证明：任取A的两列，一列元素与另一列相应元素的代数余子式乘积为0，且根据假设A的非对角元素非正，而对角元素为正。对于k和l列，有：

$$A_{kl}a_{kk} = A_{1l}|a_{1k}| + \cdots + A_{(k-1)l}|a_{(k-1)k}| + A_{(k+1)l}|a_{(k+1)k}| + \cdots + A_{1l}|a_{1k}|$$

利用反证法，设A_{kl}为第l列元素的代数余子式中最大的。因为A具有正的对角占优：

$$a_{kk} > |a_{1k}| + \cdots + |a_{(k-1)k}| + |a_{(k+1)k}| + \cdots + |a_{1k}|$$

因此上述等式的左端必然大于右端。因此结论成立。

– 定理4.21：正的q.d.d.的各个根的实部为正
– 证明：采用反证法。假设A的根的实部$Re(\lambda) \leq 0$，那么：

$$\left|a_{jj} - \lambda\right| \geq |a_{jj}|$$

因此：$d_j|a_{jj} - \lambda\delta_{jj}| \geq d_j|a_{jj}|$

由于A具有q.d.d.，对于所有的j，$d_j|a_{jj}| \geq \sum_{i\neq j} d_i|a_{ij}|$，其中至少一个严格不等式成立。由上述两式：

$$d_j|a_{jj} - \lambda\delta_{jj}| \geq d_j|a_{jj}| \geq \sum_{i\neq j} d_i|a_{ij}| = \sum_{i\neq j} d_i|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}|$$

也就是说，对所有的j，

$d_j|a_{jj} - \lambda\delta_{jj}| \geq \sum_{i\neq j} d_i|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}|$，其中至少有一个不等式成立。因此，$(A - \lambda I)$具有q.d.d.。该矩阵非奇异。这与$\lambda$为矩阵A的根矛盾。因此结论成立。

- 定理4.22：麦肯齐（Mckenzie）
  - 令B为方阵，其中对于所有的i，有$b_{ii} > 0$，而对于所有的$i \neq j$，$b_{ij} \leq 0$。在已知$c \geqq 0$时，当且仅当B具有q.d.d.，$Bx = c$才有唯一解$x \geqq 0$。
  - 证明：见教材第82-84页
  - 至此完成对投入产出模型有经济意义解的各种等价条件的讨论

静态体系解的等价条件：总结

- 对于静态模型$Bx = c$，其中$B = I - A$，A为非负矩阵，B为Z-矩阵。在Z-矩阵的条件下，投入产出模型有经济意义解的如下条件是等价的：
  - （1）对于某个给定的$c > 0$，存在非负解$x \geqq 0$
  - （2）对于任意一个非负 $c \geqq 0$，存在非负解$x \geqq 0$
  - （3）B为非奇异M-矩阵
  - （4）B为P-矩阵
  - （5）B为严格对角占优矩阵
  - （6）B为拟对角占优矩阵
  - （7）B的顺序主子式为正
  - （8）$\lambda^*(A) = \rho(A) < 1$
  - （9）B为单调矩阵，即$B^{-1} \geq 0$
  - （10）B的所有实根为正
  - （11）B的所有根的实部为正
- 列向价格模型：$p = pA + v$，$pB = v$，对于给定的v，得到有经济意义解的p，与数量模型的条件是完全一样的。

弗根的经济含义

- 对于$p = pA + v$，定义β为初始投入与中间投入两者的比值，而且各部门这一比值相同，有：$v = \beta pA$，如此价格模型：$\frac{1}{1+\beta} p = pA$
- 对于非负矩阵A，弗罗贝尼乌斯定理保证了价格向量为半正的，而特征根$\lambda^*(A) = \frac{1}{1+\beta} \geq 0$。
- 如果经济中有剩余产品，从而经济系统是可行的（workable, profitable），$\beta > 0$，就要求$0 < \lambda^*(A) < 1$。
- 如果β是初始投入与中间投入的比值，那么$\lambda^*(A)$就是中间投入占总投入的比重。因此非负矩阵A的弗罗贝尼乌斯根的经济含义为：
- 在各部门中间投入与初始投入具有相同比例的经济系统中，弗根表示的是中间投入占总投入的比重，而相应的特征向量成为价格向量；在数量模型中，相应的分析表明弗根是中间产品占总产品的比重，而相应的特征向量为总产出向量。
- 无论是价格模型还是数量模型，弗罗贝尼乌斯定理保证了有经济意义的产出与价格解的存在

- 各部门中间投入与初始投入具有相同的比例过于严格，通常的假定是某种收益率的各部门相同，例如利润率
- 定义各部门具有相同的利润率r，且把利润q看着是中间投入与工资投入所带来的：

$$q = r(pA + wl)$$
$$p = pA + r(pA + wl) + wl$$
$$p = (1 + r)(pA + wl)$$
$$p\left(\frac{1}{1+r} I - A\right) = wl$$

- 当且仅当$\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)^{-1} \geq 0$，对于$wl \geq 0$，有$p \geq 0$。对于非负矩阵A，$\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)$为Z-矩阵，因此有经济意义解的条件是：$\lambda^*(A) < \frac{1}{1+r}$，这意味着对于利润率而言，有经济意义解的条件为：$0 < r < \frac{1}{\lambda^*(A)} - 1$

比较静态分析

- 最终需求对产出的影响
  - 可分解矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = (I - A_{22})^{-1} y_2$$

$$x_1 = (I - A_{11})^{-1} [A_{12} (I - A_{22})^{-1} y_2 + y_1]$$

  - 结果表明：
    - 从A系数看，第一种产品的生产独立于第二种产品，是基本商品；
    - 从最终需求的影响看，对第一种产品的需求不会对第二种产品的生产产生影响，第二部门的产出只受对本部门产品最终需求的影响

- 不可分解矩阵（定理4.23）：某种产品最终需求变化将导致所有部门产出增长，且该产品的产出增长幅度最大
- 证明：
  - 假定满足有经济意义解条件的投入产出系统中仅有第k种产品的最终需求增加
  - 设$y_k' = \alpha y_k$，且$\alpha > 1$，对于所有$i \neq k$，$y_i{}' = y_i$。因此有：$(I - A)\Delta x = \Delta y = (\alpha - 1)e^k$，$e^k$表示第k个元素为1，其他元素为0的列向量。进一步有：

$$\Delta x = (I - A)^{-1}(\alpha - 1)e^k$$

非负矩阵的情况下，有经济意义的解，那么A为非奇异M-矩阵，且主对角元素为正，如果A为非负不可分解矩阵，那么$A^{n-1} > 0$，因此$(I - A)^{-1} = \sum A^i > 0$，又$\alpha - 1 > 0$。因此$\Delta x > 0$。

- 设$y_j' = \beta_j y_j$，由上述结论$\beta_j > 1$。采用反证法，设产出增加幅度最大部门不是k部门，而是r部门。考察$(I - A)\Delta x = \Delta y$的第r个方程：

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{rj} - a_{rj}\right)\left(\beta_j - 1\right)x_j = 0$$

$$(1 - a_{rr})(\beta_r - 1)x_r = \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}\left(\beta_j - 1\right)x_j$$

$$(1 - a_{rr})x_r = \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}\frac{\left(\beta_j - 1\right)}{\left(\beta_r - 1\right)}x_j < \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}\, x_j$$

这意味着I-A不是拟对角占优矩阵，这与有经济意义解的条件矛盾。

- 定理4.24：定义产品k最终需求变动带来产品i产出变动的弹性系数为$\varepsilon_{ik}=\frac{\Delta x_i/x_i}{\Delta y_k/y_k}$，假定只是k最终需求变化，必有$\varepsilon_{ik}\le 1$。
- 证明：利用上一定理的符号，需求的产出弹性可表示为：

$$\varepsilon_{ik}=\frac{\Delta x_i/x_i}{\Delta y_k/y_k}=\frac{(\beta_i-1)x_i/x_i}{(\alpha-1)y_k/y_k}=\frac{(\beta_i-1)}{(\alpha-1)}$$

利用反证法，假设对于某个i，$\beta_i>\alpha$，考察第k个方程：

$$x_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+y_k$$

需求变化后，为：

$$x_k{}'=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j{}'+y_k{}'$$

$$\beta_k x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\beta_j x_j + \alpha y_k$$

根据假定及前面的定理：$\beta_k \geq \beta_j > \alpha$，得到：

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\beta_j}{\beta_k}x_j + \frac{\alpha}{\beta_k}y_k < \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + y_k$$

与第k个方程矛盾。因此定理成立。

- 收入调整对价格的影响

$$p = pA + v$$

  - 假设对第一个部门增税，第二个部门补贴

$$p_1 = \sum p_i a_{i1} + v_1 + \tau$$

$$p_2 = \sum p_i a_{i2} + v_2 - \tau$$

$$p_j = \sum p_i a_{ij} + v_j \qquad j = 3, \cdots, n$$

  - 对上述模型求关于税收的导数，表示为矩阵形式：

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} A + (1, -1, 0, \cdots, 0)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = (1, -1, 0, \cdots, 0)(I - A)^{-1}$$

- 定义$G=I-A$，利用代数余子式展开逆阵

$$\frac{dp_1}{d\tau}=\frac{1}{detG}(G_{11}-G_{12})$$

$$\frac{dp_2}{d\tau}=\frac{1}{detG}(G_{21}-G_{22})$$

$$\frac{dp_i}{d\tau}=\frac{1}{detG}(G_{i1}-G_{i2})\ i=3,\cdots,n$$

- 投入产出模型中，$G=I-A$是一个具有正对角占优的Z-矩阵。根据之前的定理，矩阵G对角元素的代数余子式将大于等于非对角元素的代数余子式，即对于$j\neq i$，$G_{ii}\geq G_{ij}$。因此有结论：

  $\frac{dp_1}{d\tau}\geq 0$，$\frac{dp_2}{d\tau}\leq 0$，而$\frac{dp_i}{d\tau}$符号无法确定

静态均衡的有效性

- 静态均衡的有效性讨论的是投入产出静态均衡的技术有效性并不受外生的最终需求冲击而改变
- 无替代定理（Non-substitution theorem）：
  - Koopmans, T.C. 1951, Activity analysis of production and allocation;
  - Dorfman, Samuelson, Solow, Linear Programming and Economic Analysis
- 无替代定理强调的是单一技术可以作为对技术的充分表述，而不管是否存在多个可替代的过程。从这一性质出发，将表明竞争均衡价格的确定不受需求面的影响，同时需求水平和结构的变化将只影响经济活动水平，而不影响技术本身。

- 考虑经济系统：劳动是唯一的初始投入，且有限。约束：需求大于等于净产出，劳动需求小于劳动供给

$$y \leqq x - Ax$$

$$bx \leq L$$

- 第j部门的投入系数可写为：

$$\left(a_{1j}, \cdots，a_{nj}, b_j\right) = (a_j，b_j)$$

- 称之为第j部门的活动（activity）。所有部门投入系数表示为(A, b)，构成的矩阵称为技术（technology）。

- 用集合T_j表示第j个部门所有可能投入系数活动$(a_j，b_j)$的集合，或者说是第j个部门所有可能选择的活动集，即：$(a_j，b_j) \in T_j, j = 1, \cdots, n$。
- 引入y的可行域，称$U(A, b)$为使用技术(A, b)生产所能达到的y的可行域，即：

$$U(A, b) = \{y | y \geq 0, \text{且存在} x \geq 0 \text{使} x, y \text{满足投入产出模型}\}$$

- 对于任一给定技术(A, b),在满足约束条件下,能够提供的最终产品构成一个最终产品或净产出的可行的集合$U(A, b)$。
- 无替代定理表明: 对于某个最优技术(A^*, b^*)，任何其他技术所能得到的可行域$U(A, b) \subset U(A^*, b^*)$。

- 在我们的模型中，最优技术(A^*, b^*)不会比其他任何一种技术使用更多的劳动去生产相同的y。最优技术也称为优势技术（dominant technology），或者说在技术上是有效的（efficient）。
- 生产性与有效性
  - 生产性的技术（Productive ）: 产出大于投入$y \geqq w$，净产出为非负
  - 有效的技术（efficient）：净产出更大或者是给定产出下投入更少$(y - w, -l) \geq (y' - w', -l')$
- 最优技术对应一组成本最小化的均衡价格:

$$p^* = p^* A^* + b^*$$

$$p^* A + b \geqq p^* A^* + b^*$$

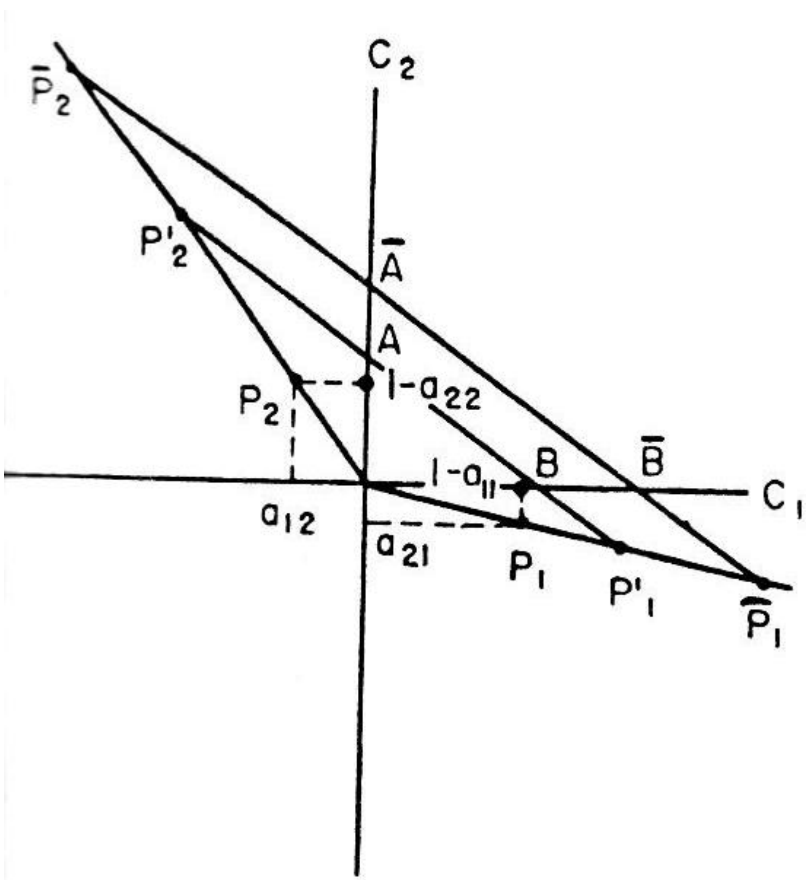
- 在均衡价格下，任何一个部门在该部门所有活动T_j中具有最低成本，同时最小成本的活动具有零利润。

- 产出的技术效率（使用更少的劳动）与价值的成本最小化之间的一致性
  - 如果(A^*, b^*)是成本最小化的技术，但不是有效的技术，存在另一个技术(A', b')更有效，即$(A', b') \le (A^*, b^*)$，同样的产出投入更少。那么对于非负的价格$(p, 1)$，有：

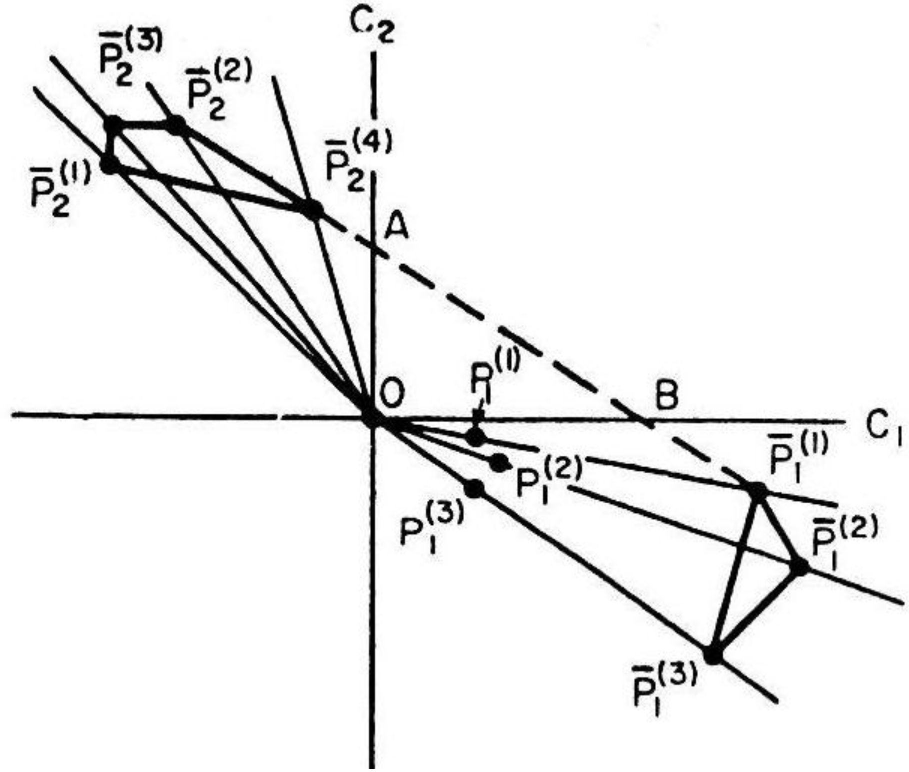
$$(p, 1)(A', b') \le (p, 1)(A^*, b^*)$$

  这意味着(A^*, b^*)不是成本最小化的技术
- 无替代定理证明：P91-92

- 无替代定理的含义



C_2
$\bar{P}_2$
P'_2
$\bar{A}$
A
P_2
$1-a_{22}$
B
$\bar{B}$
$1-a_{11}$
C_1
a_{12}
a_{21}
P_1
P'_1
$\bar{P}_1$



C_2
$\bar{P}_2^{(3)}$
$\bar{P}_2^{(2)}$
$\bar{P}_2^{(4)}$
$\bar{P}_2^{(1)}$
A
O
$P_1^{(1)}$
B
C_1
$\bar{P}_1^{(1)}$
$P_1^{(2)}$
$P_1^{(3)}$
$\bar{P}_1^{(2)}$
$\bar{P}_1^{(3)}$

End of Chapter 4