高级宏观经济学

陈彦斌

中国人民大学经济学院

教材：Advanced Macroeconomics（D. Romer，第 4 版）。

第 1 章、索洛增长模型

“增长理论”的进一步阅读材料：

1. Weil，经济增长。
2. Barro，经济增长。

1.1 经济增长的一些基本事实

- ✧ 经济体为什么出现增长？
- ✧ 国家之间为什么出现差异？

1.2 假定

索洛模型的提出者：Solow (1956)，Swan (1956)。

1) 投入和产出

生产函数: $Y(t)=F(K(t), A(t)L(t))$

- $Y(t)$: 产出
- $K(t)$: 资本
- $L(t)$: 劳动
- $A(t)$: 知识，或者劳动效率
- $A(t)L(t)$: 有效劳动（Effective labor）

三种生产函数:

- $Y=F(K, AL)$: 劳动附加型（labor-augmenting）
- $Y=F(AK, L)$: 资本附加型（capital- augmenting）
- $Y=AF(K, L)$: 希克斯中性（Hicks-neutral）

2) 关于生产函数的假设

生产函数关于两个自变量是规模报酬不变的：资本和有效劳动

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \text{ for any positive } c$$

规模报酬不变假设与下面两个假设有关：

- ✧ 经济规模足够大，以至于专业化的收益已被全部利用。
- ✧ 除了资本、劳动与知识以外的其他投入相对不重要。

简约型（紧凑型，Intensive-form）生产函数: $y=f(k)$

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL), \text{ and } c = 1/AL$$

$$\Rightarrow F(K/AL, 1) = (1/AL)F(K, AL)$$

$$\Rightarrow F(k, 1) = y$$

- $k=K/AL$：单位有效劳动的资本，capital per unit of effective labor
- $y=Y/AL=F(K, AL)/AL$：单位有效劳动的产出 output per unit of effective labor
- $f(k) = F(k, 1)$

$f(k)$的假设:

- $f(0)=0,\ f'(k)>0,\ f''(k)<0$
- Inada 条件: $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$

$f'(k)$的含义: 资本的边际产出

$$F(K, AL) = ALf(K/AL),$$

$$\Rightarrow$$

$$dF(K, AL)/dK = f'(k).$$

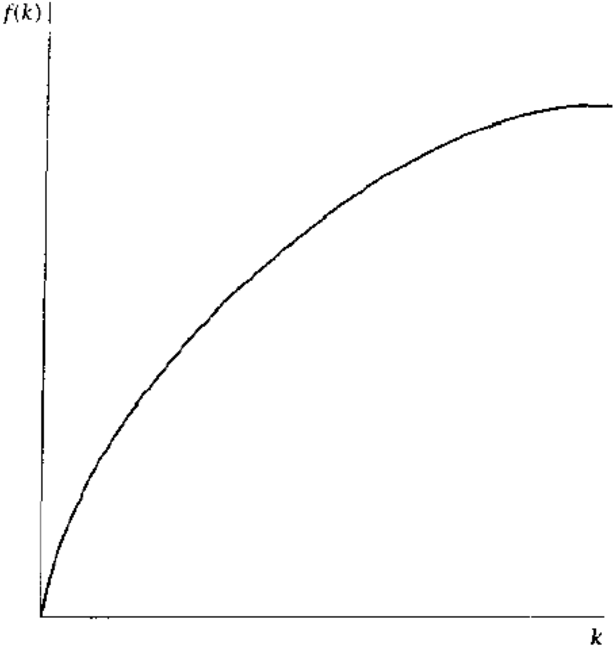


FIGURE 1.1 An example of a production function

Cobb-Douglas 生产函数:

$$F(K, AL)=K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1$$

- $F(cK, cAL) = cF(K, AL)$
- $f(k)=k^{\alpha}$
- $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}>0$
- $f''(k) = -(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-2}<0$

3) 投入至产出的演化

$$\dot{L}(t) \equiv dL(t)/dt = nL(t) \qquad \Rightarrow L(t) = L(0)e^{nt}$$

$$\dot{A}(t) = gA(t) \qquad \Rightarrow A(t) = A(0)e^{gt}$$

n，g 为外生参数

n 是 L 的增长率：

$$\frac{dL(t)/dt}{L(t)} = n$$

$$\Rightarrow$$

$$L(t+\Delta t) - L(t) = n(\Delta t)L(t)$$

关于增长率的一些有用数学技巧，$\dot{X}(t)/X(t)$：

$$\frac{d\ln X(t)}{dt}=\frac{d\ln X(t)}{dX(t)}\frac{dX(t)}{dt}$$

$$=\frac{1}{X(t)}\dot{X}(t).$$

-
- X_1X_2 的增长率为 $\dot{X}_1/X_1+\dot{X}_2/X_2$
- X_1/X_2 的增长率为 $\dot{X}_1/X_1-\dot{X}_2/X_2$
- X^a 的增长率为 X 增长率的 a 倍

产出在消费和投资之间进行分割:

$$Y=C+S=C+I=C+sY,$$

s 是投资占产出之比，是外生常数。

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t)$$

1.3 模型的动力系统（The Dynamics of the Model）

1) k 的动力系统

k=K/(AL) =>

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{(\dot{AL})}{AL}$$

$$=\frac{\dot{K}}{K}-\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

$$=\frac{sY-\delta K}{K}-n-g$$

$$=\frac{sY}{kAL}-\delta-n-g$$

$$=\frac{sf(k)}{k}-\delta-n-g$$

因此，得到

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t)$$

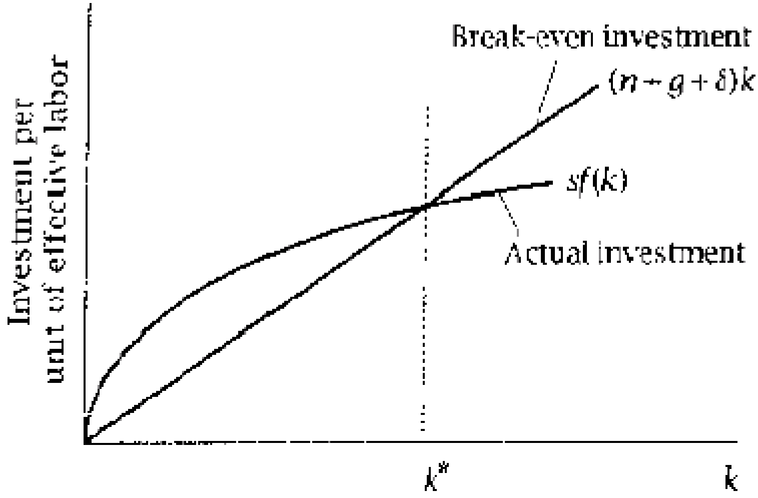


FIGURE 1.2 Actual and break-even investment

问题：为什么有 $sf'(k^*)<n+g+\delta$?

$sf'(k^*)<n+g+\delta \Leftrightarrow$

$sf'(k^*)k^*<sf(k^*) \Leftrightarrow$

$f'(k^*)k^*<f(k^*)$

由于 $\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t)$，

$$\frac{d\left(\dot{k}\right)}{dk} = sf'(k) - (n+g+\delta),$$

$$\frac{d^2\left(\dot{k}\right)}{dk^2} = sf''(k) < 0$$

当 k<k*, $\dot{k} > 0$；当 k>k*, $\dot{k} < 0$.

当 k=0, $\dot{k} = sf(0) - (n+g+\delta)0 = 0$；当 k=k*, $\dot{k} = 0$.

据上，得到下面图形

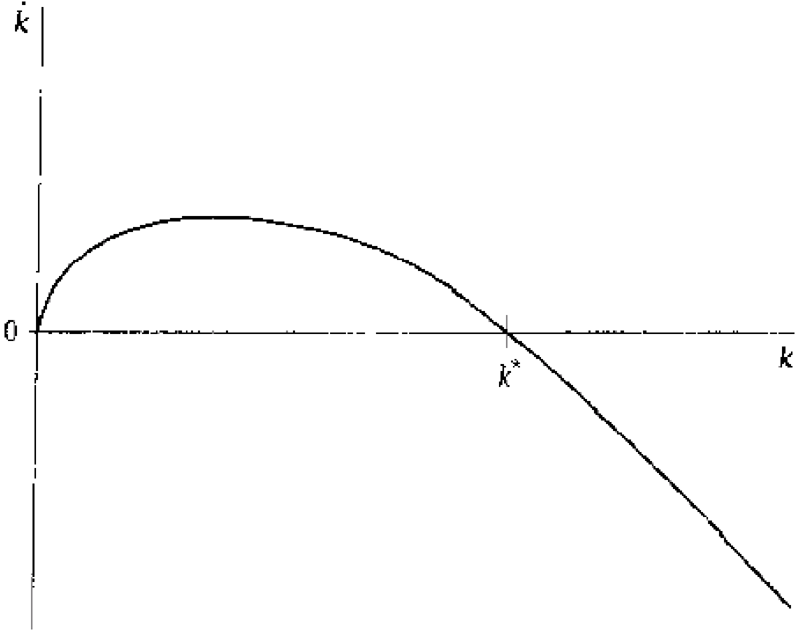


FIGURE 1.3 The phase diagram for k in the Solow model

- 稳定点（均衡）是稳定的（The stationary point is stable）
  - 当偏离 k*时，有回到 k*的趋势。

- **2) 平衡增长路径**

当 $k=k^*$,

- 依据假设, L 和 A 的增长率为 n 和 g

- $$K = k^* AL \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g + n$$

- y=f(k)=Y/AL => Y=ALf(k*) => $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g + n$

- $$\frac{(K/L)^{\bullet}}{(K/L)} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = (g+n) - n = g$$

- $$\frac{(Y/L)^{\bullet}}{(Y/L)} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = (g+n) - n = g$$

- 索洛模型意味着，无论其起点在何处，经济总会收敛于平衡增长路径，在此情形中，模型的每个变量都以不变速度增长。
- (注意：r, w 等价格变量增长率为 0)
- 在平衡增长路径上，人均产出的增长率只取决于技术进步速度 g。

1.4 储蓄率变动的影响

1) 对产出的影响

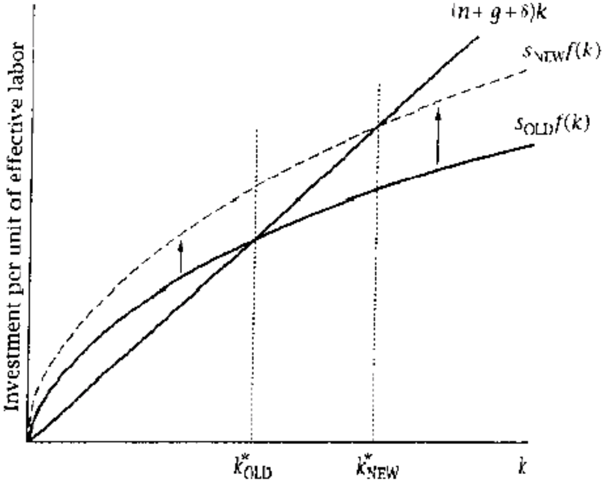
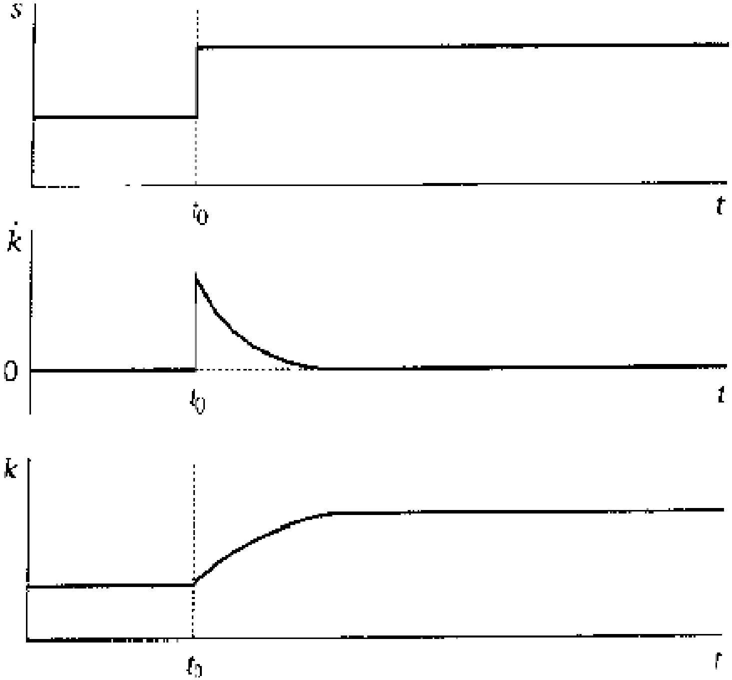


FIGURE 1.4 The effects of an increase in the saving rate on investment

k 的动力系统: k 如何收敛至 k^*_{new}

1. $k=k^*_{old}$, s 开始增加
2. 由于 $\dot{k}(t)=sf(k(t))-(n+g+\delta)k(t)$，$\dot{k}(t)>0$，因此 k 增加
3. 直到 $k=k^*_{new}$

因此，得到如下图形。



s
t_0
t
$\dot{k}$
0
t_0
t
k
t_0
t

Y/L 的动力系统:

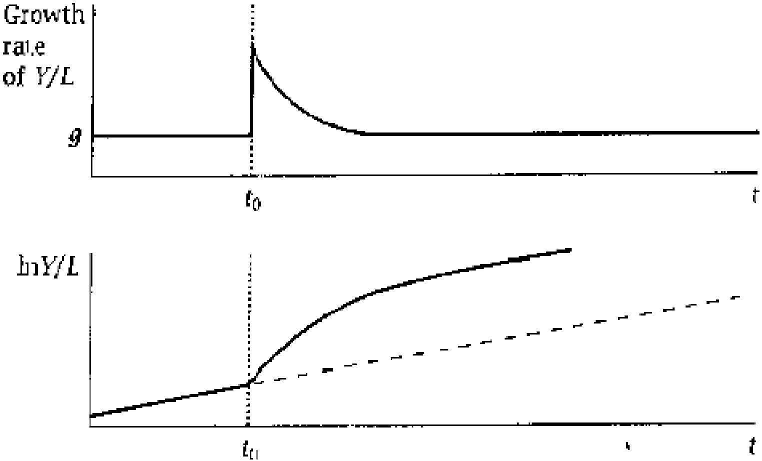
- Y/L=Af(k). 当 k 为常数，Y/L 以速度 g 增长
- 当 k 增长时，Y/L 增长一是因为 A 增长，二是因为 k 增长。因此，Y/L 的增长率超过了 g，即

$$\frac{\dot{(Y/L)}}{(Y/L)} = \frac{\dot{(Af(k))}}{Af(k)} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{f}(k)}{f(k)} = g + \frac{\dot{f}(k)}{f(k)} > g$$，当 k 增长时。

- 当 $k=k^*_{new}$, Y/L 的增长率再次回到 g

- $$\frac{d\ln(Y/L)}{dt} = \frac{\dot{(Y/L)}}{(Y/L)}$$: lnY/L 的斜率等于 Y/L 的增长率

因此，得到下面图形。



总长，储蓄率的变化具有水平效应（*level effect*），但不具有增长效应（*growth effect*）：它改变了经济的平衡增长路径因而改变了在任何时点上的人均产出 Y/L，但这并不影响平衡增长路径上人均产出 Y/L 的增长率。只有 g 的变化具有增长效应。

2) 对消费的影响

家庭关心消费。

- C=Y-S=Y-sY=(1-s)Y
- c=C/AL=(1-s)Y/AL=(1-s)f(k).
- 注意到 s 在 t_0 时非连续的变动，但 k 不能非连续变动。

因此，

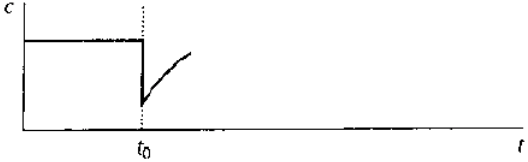


FIGURE 1.5 The effects of an increase in the saving rate

问题：最后的稳态消费是否会超过 t_0 之前的稳态消费？

3) 黄金规则水平的 k

令 c*表示平衡增长路径上的 C/AL，

$$
\begin{aligned}
c^* &= (1-s)f(k^*) \\
&= f(k^*) - sf(k^*) \\
&= f(k^*) - (n+g+\delta)k^*
\end{aligned}
$$

由于 k*取决于 s, n, g, δ, 将 k*记为：

$$k^* = k^*(s,n,g,\delta)$$

有，

$$c^* = f(k^*(s,n,g,\delta)) - (n+g+\delta)k^*(s,n,g,\delta)$$

得到

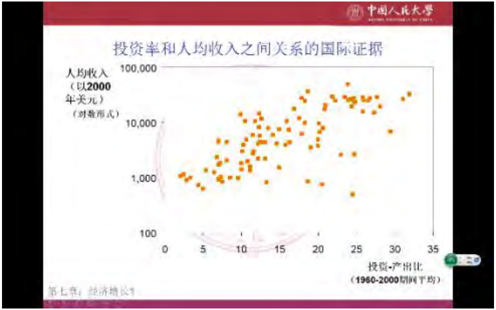
$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f'(k^*(s,n,g,\delta)) - (n+g+\delta) \right] \frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s}$$

由于 $\dfrac{\partial k^{*}(s,n,g,\delta)}{\partial s}>0$，所以

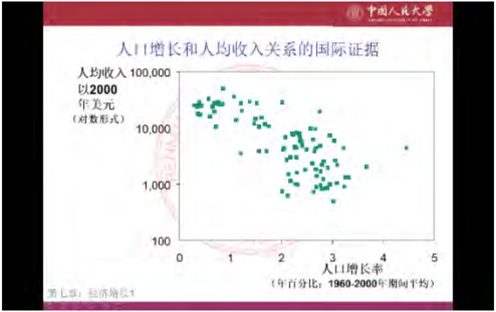
$$\frac{\partial c^{*}}{\partial s}=0\Rightarrow$$
$$f'(k^{*}(s,n,g,\delta))=(n+g+\delta)$$

k*的这个值称为：黄金规则水平的资本。

【含义：$f'(k^{*}(s,n,g,\delta))-\delta=n+g=\dfrac{\dot{Y}}{Y}$，实际收益率等于实际经济增长率】



中國人民大學
投资率和人均收入之间关系的国际证据
人均收入
（以2000
年美元）
（对数形式）
100,000
10,000
1,000
100
0
5
10
15
20
25
30
35
投资-产出比
（1960-2000期间平均）
第七章：经济增长1



中國人民大學
人口增长和人均收入关系的国际证据
人均收入
以2000
年美元
（对数形式）
100,000
10,000
1,000
100
0
1
2
3
4
5
人口增长率
（年百分比：1960-2000年期间平均）
第七章：经济增长1

相关性不是因果关系！

1.5 定量的含义

- 以上的定性分析表明：储蓄率的增加具有水平效应，将人均资本和人均产出将增加到更高的水平。
- 下面的定量分析将表明：储蓄的显著变化只会对平衡增长路径上的产出水平产生中度的影响。

1) 长期中对产出的影响

储蓄增加对产出的长期效应为$\frac{\partial y^*}{\partial s}$。下面计算：$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s}=\frac{\partial y^*/y^*}{\partial s/s}$

由

$$\dot{k}(t)=sf(k(t))-(n+g+\delta)k(t)$$

有

$$sf(k^*(s,n,g,\delta)) = (n+g+\delta)k^*(s,n,g,\delta)$$

➔

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

➔

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}$$

因此，由 $y^* = f(k^*)$，得到

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta)-sf'(k^*)} \\
&= \frac{sf(k^*)}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)}{(n+g+\delta)-sf'(k^*)} \\
&= \frac{(n+g+\delta)k^*}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)}{(n+g+\delta)-sf(k^*)f'(k^*)/f(k^*)} \\
&= \frac{(n+g+\delta)k^*}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)}{(n+g+\delta)-(n+g+\delta)k^*f'(k^*)/f(k^*)} \\
&= \frac{k^*f'(k^*)/f(k^*)}{1-k^*f'(k^*)/f(k^*)} \\
&= \frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)},
\end{aligned}
$$

$\alpha_K(k^*) = k^* f'(k^*)/f(k^*)$ 的含义:

- k=k*处**产出关于资本的弹性**。[当为 C—D 生产函数时，α_K 的值]
- **资本份额**（资本收入占总收入的比重）。如果市场是竞争性的，并且不存在外部性，资本就能获得其边际产出。在平衡增长路径上，资本（单位有效劳动的资本）所获得的总产出为 $k^* f'(k^*)$，因而资本份额为 $k^* f'(k^*)/f(k^*)$。

例子：大部分国家α_K=1/3，因此$\alpha_K/(1-\alpha_K)$=0.5。s 增加 10% (从 0.2 增加到 0.22)，将导致 y 只增加 5%。即使 s 增加 50%，y 也只增加 25%。这说明：储蓄率的显著变化对平衡增长路径上的人均产出的影响是**中度的（moderate）**。

【含义：1、黄金规则下的储蓄率才是最优的。2、储蓄率的增加虽然可以增加收入，但是影响不大】

【注意：中国的α_K=2/3，因此$\alpha_K/(1-\alpha_K)$=2。因此，储蓄率变动对中国的影响比对美国的影响要大。】

2) 收敛速度

记 $\dot{k}=\dot{k}(k)$，有 $\dot{k}(k^*)=0$。由一阶泰勒近似，有

$$\begin{aligned}\dot{k} &\approx \dot{k}(k^*)+\left.\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*}\left(k-k^*\right) \\ &\approx \left.\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*}\left(k-k^*\right)\end{aligned}$$

由 $\dot{k}(t)=sf(k(t))-(n+g+\delta)k(t)$，有

$$\left.\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*} = sf'(k^*(t)) - (n+g+\delta)$$

$$= \frac{sf(k^*)f'(k^*(t))}{f(k^*)} - (n+g+\delta)$$

$$= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - (n+g+\delta)$$

$$= [\alpha_K(k^*) - 1](n+g+\delta)$$

因此,

$$\dot{k}(t) \approx -[1-\alpha_K(k^*)](n+g+\delta)\left(k(t)-k^*\right)$$

定义

$$\chi(t) = k(t) - k^*,$$

$$\lambda = [1 - \alpha_K(k^*)](n + g + \delta)$$

因此,

$$\dot{\chi}(t) \approx -\lambda\chi(t) \Rightarrow \chi(t) = \chi(0)e^{-\lambda t}$$

有

$$k(t) - k^* = e^{-[1-\alpha_K(k^*)](n+g+\delta)t}\left(k(0) - k^*\right)$$

如果 t→∞，那么 k→k*。

还可以证明：

$$y(t) - y^* = e^{-\lambda t}(y(0) - y^*)$$

参数校准（Calibration）：

$n+g+\delta=6\%$每年，(人口增长率 $n=1\sim2\%$，人均产出增长率 $g=1\sim2\%$，$\delta=3\sim4\%$)

$\alpha_K=1/3$

$\lambda=(1-\alpha_K)(n+g+\delta)=4\%$/每年

问题 1：k 和 y 每年走完剩下距离的 4% (i.e. k(t)-k* and y(t)-y*):

Solution:

由

$$y(t)-y^*=e^{-\lambda t}(y(0)-y^*)$$

和

$$y(t+1)-y^*=e^{-\lambda(t+1)}(y(0)-y^*)$$

有

$$\frac{y(t+1)-y^*}{y(t)-y^*}=\frac{e^{-\lambda(t+1)}(y(0)-y^*)}{e^{-\lambda t}(y(0)-y^*)}=e^{-\lambda}=0.96$$

注意 $y(t+1)-y^*$ 是还没有走完的路程。

问题 2：需要大约 17 年走完距离平衡增长路径的一半。

Solution:

由

$$y(t)-y^{*}=e^{-\lambda t}(y(0)-y^{*})$$

和

$$y(t+s)-y^{*}=e^{-\lambda(t+s)}(y(0)-y^{*})$$

有

$$0.5=\frac{y(t+s)-y^{*}}{y(t)-y^{*}}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}(y(0)-y^{*})}{e^{-\lambda t}(y(0)-y^{*})}=e^{-\lambda s}$$

即,

$$s=\ln(0.5)/(-\lambda)=17.3$$

问题 3：我们已经知道 s 增加 10% (from 0.2 to 0.22)，在长期中 y 增加 5%，这个变动需要多长时间？

Solution:

$$\frac{y(t)-y(0)}{y(0)}=\frac{y(t)-y^*+y^*-y(0)}{y(0)}$$

$$=\frac{y^*-y(0)}{y(0)}+\frac{y(t)-y^*}{y(0)}$$

$$=\frac{y^*-y(0)}{y(0)}-\frac{e^{-\lambda t}(y^*-y(0))}{y(0)}$$

$$=(1-e^{-\lambda t})\frac{y^*-y(0)}{y(0)}=(1-e^{-\lambda t})5\%$$

```
>> (1-exp(-0.04*1))*0.05
ans =      0.00196
>> (1-exp(-0.04*18))*0.05
```

```
ans =      0.02566
>> (1-exp(-0.04*100))*0.05
ans =      0.04908
```

1.6 索洛模型与增长理论的核心问题

- （人均）资本积累的差异无法说明（人均）收入的较大差异。例如，$f_1(k_1)=k_1^{\alpha}$，若 $f_1/f_2=10$，那么 $k_1/k_2=(f_1/f_2)^{1/\alpha}=1000$. 但是，资本-产出比随时间大致不变。
- 收入的较大差异需要资本收益率的巨大差异。资本收益率为 $f'(k)-\delta$. 而 $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}=\alpha y^{(\alpha-1)/\alpha}$. 若 $y_1/y_2=10$ 和 $\alpha=1/3$，那么 $f'(k_1)/f'(k_2)=10^{-2}=1/100$. 进而，

$$
\begin{aligned}
&[f'(k_1)-\delta]/[f'(k_2)-\delta] \\
&=[0.01f'(k_2)-\delta]/[f'(k_2)-\delta] \\
&=[0.01f'(k_2)-0.01\delta-0.99\delta]/[f'(k_2)-\delta] \\
&=0.01-0.99\delta/[f'(k_2)-\delta] \\
&<1/100
\end{aligned}
$$

1.7 经验应用

1) 增长核算（Growth accounting）

$$Y(t)=F(K(t), A(t)L(t))$$

➔

$$\begin{aligned}
\dot{Y}(t) &= F_K \dot{K}(t) + F_{AL} (\dot{AL})(t) \\
&= F_K \dot{K}(t) + F_{AL} \left(L(t) \dot{A}(t) + A(t) \dot{L}(t) \right) \\
&= \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} \dot{K}(t) + \left(\frac{\partial Y(t)}{\partial (AL)} A(t) \right) \dot{L}(t) + \left(\frac{\partial Y(t)}{\partial (AL)} L(t) \right) \dot{A}(t) \\
&\equiv \frac{\partial Y}{\partial K} \dot{K}(t) + \frac{\partial Y}{\partial L} \dot{L}(t) + \frac{\partial Y}{\partial A} \dot{A}(t)
\end{aligned}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}=\frac{K(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}+\frac{L(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}+\frac{A(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

$$\equiv \alpha_K \frac{\dot{K}(t)}{K(t)}+\alpha_L \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}+R(t)$$

$\alpha_K+\alpha_L=1$. Why?

Hint: $F=F_K K+F_{AL} AL$

Young, Alwyn. 1995. "The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Reality of the East Asian Growth Experience." *Quarterly Journal of Economics* 110 (August): 641-680.

2) 趋同（Convergence，也译作收敛）

趋同：穷国比富国倾向于更快地增长。

有三个理由：

- 索洛模型预期国家会收敛于其平衡增长路径。人均产出的差异来源于其现在所处的与其平衡增长路径相对应的不同的位置。因此，预期穷国赶上富国。
- 索洛模型意味着富国的人均资本更高，因此资本收益率更低，因此资本从富国流向穷国。
- 知识扩散。

【因此？现在中国与美国差距大、潜力大，未来 20 年可以 8%？

不对：1、差距和潜力不是潜在增速。2、条件收敛下，中国未必就可以收敛到美国。】

Baumol (1986)

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=a+b\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]+\varepsilon_i.$$

如果存在趋同，那么 b<0：具有较高初始收入的国家存在较低的增长。

b=0：不存在趋同。

b=-1：完全的趋同。

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right] - \ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right] = 8.457 - \underset{(0.094)}{0.995} \ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right], \tag{1.37}$$

$$R^2 = 0.87, \qquad \text{s.e.e.} = 0.15,$$

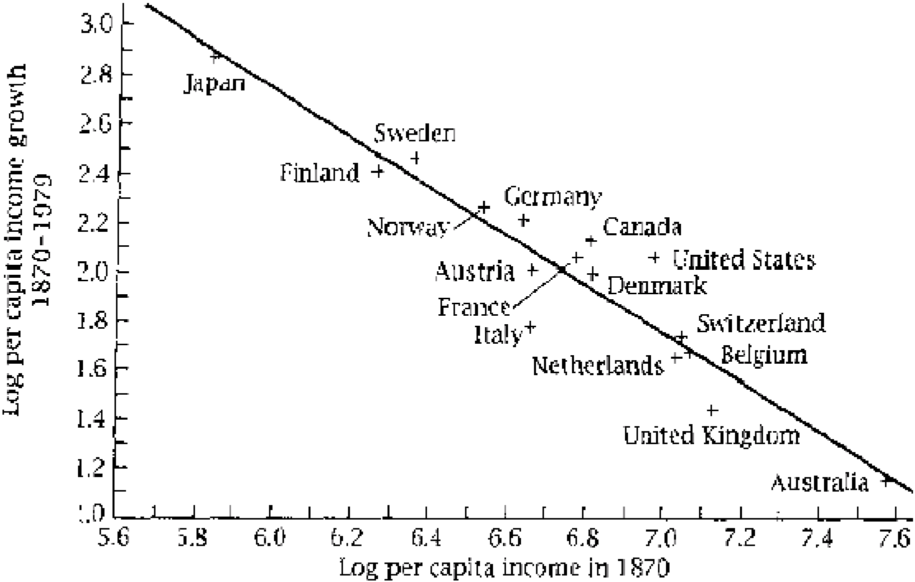


FIGURE 1.7 Initial income and subsequent growth in Baumol's sample (from De Long, 1988; used with permission)

然而，De long (1988) 指出了两个问题：

✧ 样本选择。今天的富国一般才有漫长的历史数据。如果只考虑 1870 年最富裕的国家，则见下图。

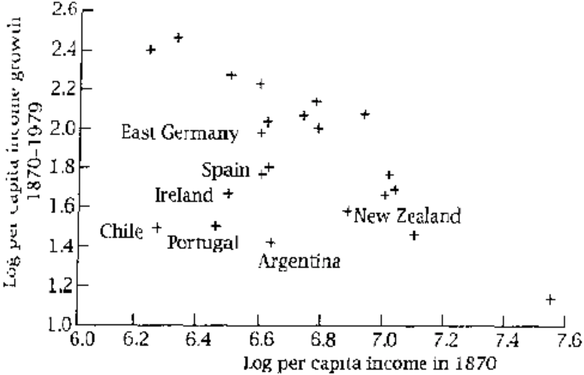


FIGURE 1.8 Initial income and subsequent growth in the expanded sample (from De Long, 1988; used with permission)

✧ 度量误差。

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]^{*}=a+b\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]^{*}+\varepsilon_{i},$$

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]^{*}+u_{i},$$

u 的标准差代表度量误差，固定了之后可以估计其余的参数值。

即使中度的度量误差也会对结果产生显著的影响。

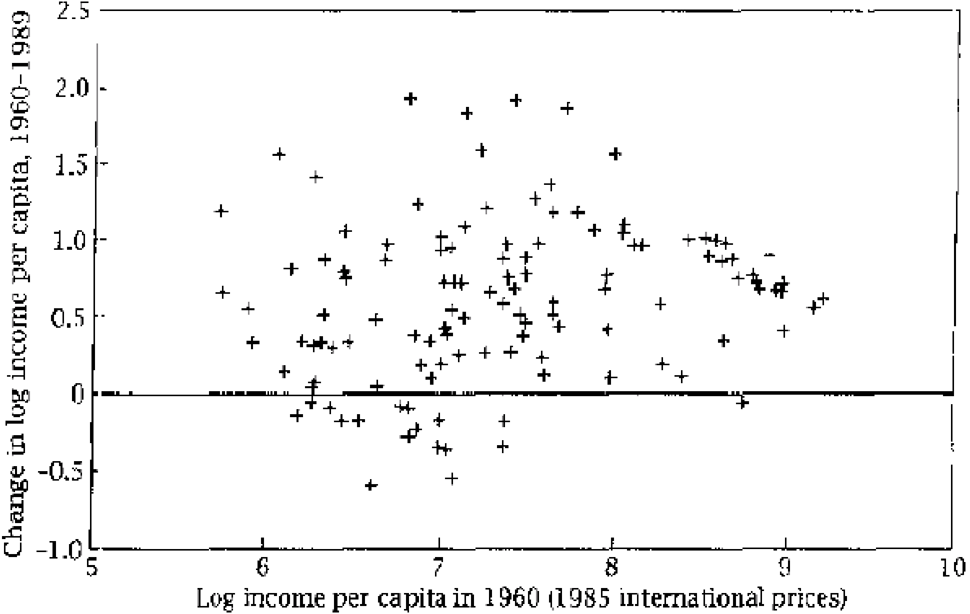


FIGURE 1.9 Initial income and subsequent growth in the postwar period

【中国经济高速增长：

1. 增长核算是表象。

2. 原因为：改革红利，全球化红利，人口红利，技术进步红利，低收入迈向高收入的自然过程。

亚当.斯密：除了和平、低税负和过得去的执法，使一国从最原始的状态发展到最富裕的状态几乎不需要其他东西，所有其他条件都来自于事物的自然过程。**】**

3) 储蓄和投资

在索洛模型描述的世界里：储蓄率上升→ $r=f'(k)$减少→ 居民具有向国外投资的激励→如果不存在资本流动的阻碍，新增储蓄不会全部投在国内。

因此，没有理由预期高储蓄国家也具有高的投资。

Feldstein and Horioka (1980)

$$(I/Y)_j = \underset{(0.018)}{0.035} + \underset{(0.074)}{0.887}(S/Y)_j, \quad R^2=0.91$$

如何解释这种强的关系：

- 资本流动性的阻碍显著存在
- 其他的解释。

1.8 环境与经济增长

本节研究环境约束如何影响长期经济增长。

区分两种环境因素：

- 存在良好界定产权的环境因素。如，自然资源与土地。
- 没有良好产权界定的环境因素。如，自由排放在空气和水中的污染。

（1）自然资源与土地：一种基本情形

生产函数为：

$$Y(t)=K(t)^{\alpha}R(t)^{\beta}T(t)^{\gamma}[A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta-\gamma},$$

$$\alpha>0,\qquad \beta>0,\qquad \gamma>0,\qquad \alpha+\beta+\gamma<1.$$

其中，R 表示生产中可利用的自然资源，T 表示土地数量。

资本、土地、劳动效率的动力系统仍然为：

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t),\ \dot{L}(t)=nL(t),\ \text{and}\ \dot{A}(t)=gA(t).$$

假设土地数量固定：

$$\dot{T}(t)=0.$$

资源禀赋固定而资源在生产中使用，因此资源使用必定会最终下降：

$$\dot{R}(t)=-bR(t),\qquad b>0.$$

由资本的运动方程：

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t),$$

有

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=s\frac{Y(t)}{K(t)}-\delta.$$

这说明，为了使 K 的增长率不变，Y/K 必定是不变的，即 Y 和 K 的增长率相同。

由生产函数得到

$$\ln Y(t) = \alpha \ln K(t) + \beta \ln R(t) + \gamma \ln T(t) + (1-\alpha-\beta-\gamma)[\ln A(t) + \ln L(t)]$$

由于 Ln x 关于时间的导数是 x 的增长率，因此有

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + \beta g_R(t) + \gamma g_T(t) + (1-\alpha-\beta-\gamma)[g_A(t) + g_L(t)],$$

此处 g_x 表示 x 的增长率。

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g).$$

因为 Y 和 K 的增长率相同，所以

$$g_Y^{bgp} = \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) - \beta b}{1-\alpha},$$

问题：是否具有收敛性？

Solution：

由

$$g_Y(t)=\alpha g_K(t)-\beta b+(1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g).$$

知：如果 g_K 大于其平衡增长路径值，g_Y 也会如此，但是其超过的数量小于 g_K。所以 Y/K 下降。而由于

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=s\frac{Y(t)}{K(t)}-\delta.$$

知 $g_K=s(Y/K)-\delta$，Y/K 下降，说明 g_K 也下降。

平衡增长路径上的人均产出为

$$
\begin{aligned}
g_{Y/L}^{bgp} &= g_Y^{bgp} - g_L^{bgp} \\
&= \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)-\beta b}{1-\alpha} - n \\
&= \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)g-\beta b-(\beta+\gamma)n}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

- $-\beta b-(\beta+\gamma)n$ 表明人日益下降的人均资源与土地数量是增长的阻力。
- g 表明技术进步是增长的动力。
- 如果技术进步的动力大于由资源与土地所形成的阻力，那么人均产出的增长是可持续的。这正好是过去数个世纪所发生的事情。

（2）一种示例性计算

问题的提出：以上为定性分析，定量上有多大?

对比两种经济：

$$\dot{T}(t) = 0 \text{ and } \dot{R}(t) = -bR(t)$$

$$\dot{T}(t) = nT(t) \text{ and } \dot{R}(t) = nR(t).$$

即不存在资源与土地的限制，两者都同人口一起增长。

容易证明，这个不存在限制的经济的人均产出的增长率为

$$\tilde{g}_{Y/L}^{bgp} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha-\beta-\gamma)g.$$

因此，增长阻力为：

$$
\begin{aligned}
\text{Drag} &= \tilde{g}_{Y/L}^{bgp} - g_{Y/L}^{bgp} \\
&= \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)g - [(1-\alpha-\beta-\gamma)g - \beta b - (\beta+\gamma)n]}{1-\alpha} \\
&= \frac{\beta b + (\beta+\gamma)n}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

- 估计值：0.24%，其中 1/4 的阻力来自于土地的有限供给，剩余部分可归于有限的能源。
- 含义：环境约束导致的经济增长下降既不太大，也不太小。

【注意：这是针对美国的结论。中国呢？】

【支持美国结论的另外依据：美国资源品价格在过去 100 年里面一直是在下降的。】