第三章
投入产出中的矩阵理论

投入产出中的矩阵理论

- 正矩阵、非负矩阵和半正矩阵
- 可分解与不可分解矩阵
- P-矩阵、Z-矩阵与M-矩阵
- 对角占优矩阵
- 佩龙-弗罗贝尼乌斯定理
- 动态系统及其稳定性
- 线性规划与对偶定理

- P35:
  - $(I - A)x = y$系数矩阵作为线性变换，数学含义与经济含义，关键系数
  - A的特殊性，以及$B = I - A$的特殊性（非奇异M-矩阵）
  - 高山晟

符号约定

- 正矩阵：所有元素为正
- 非负矩阵：所有元素非负，包括0矩阵
- 半正矩阵：所有元素非负，且不含0矩阵
- 符号表示
  - 正矩阵$\mathrm{A} > 0$，非负矩阵$A \geqq 0$，半正矩阵$A \geq 0$

可分解与不可分解

- P36-37可分解与不可分解
  - 置换矩阵P，可逆且$P^{-1} = P'$
  - 左行右列矩阵置换，变换矩阵中元素的位置
  - 是否可置换出一个零的分块阵，可约、可分解，不可约、不可分解
  - 简化线性方程组的求解
    - $Ax = b$
    - $P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}b$
    - 其中$P^{-1}x = (x_1, x_2), P^{-1}b = (b_1, b_2)$
    - $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$
    - $A_{22}x_2 = b_2$

– 可分解与不可分解的经济含义
– 问题：本原矩阵与非本原矩阵的经济含义？

P-矩阵、Z-矩阵与M-矩阵

- P-矩阵：所有主子式为正的方阵
- P0-矩阵：所有主子式非负
- Z-矩阵：非对角元素非正

- M-矩阵：P38定义
  - 如果A为Z-矩阵，且A的*逆非负*，称A为非奇异M-矩阵
  - 如果A为Z-矩阵，$A = sI - B$，其中$B \geq 0$，如果$\rho(A) < s$，A为非奇异M-矩阵

- 定理3.1及证明：非奇异M-矩阵主对角元素为正（非对角元素非正）。
  - 如果A对角元素非正，那么整个A为非正，A的逆非负，$A^{-1}A$非正，实际上为单位阵，为半正矩阵

对角占优矩阵

- P39定义：列对角占优与行对角占优
  - 对于方阵A，如果
  - $|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| = Q_j, j = 1, \cdots, n$
- 严格对角占优矩阵

- 性质：
  - 定理3.2：严格对角占优矩阵为非奇异矩阵
  - 定理3.3（陶斯基Taussky）：A为不可分解阵，加上不严格对角占优，但至少存在一个严格不等式，则为非奇异矩阵

- 定理3.2证明
  - 反证法：假设A非奇异，那么$x'A = 0$存在非零解
  - 设x_k是所有非零解中绝对值最大的解，那么第k个方程：

$$-x_k a_{kk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} x_i a_{ik}$$

  - 取绝对值，有不等式：

$$|x_k||a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |x_i a_{ik}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |x_i||a_{ik}|$$

两边除$|x_k|$，得到：

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{|x_i|}{|x_k|} |a_{ik}| = Q_k$$

  - 这与A具有严格对角占优相矛盾，因此A非奇异。

- 定理3.3证明：
  - 令$|a_{ss}| > Q_s$，利用反证法，假设A为奇异矩阵，则$x'A = 0$存在非零解。有：$-x_s a_{ss} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} x_i a_{is}$，取绝对值：$|x_s||a_{ss}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} |x_i||a_{is}|$

  如果x的所有分量相等：$|a_{ss}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} |a_{is}| = Q_s$，与假设矛盾

  如果不等，设x_k为绝对值最大的解，把所有解分为绝对值等于x_k，用脚标J表示，以及小于x_k两类，对第k个方程取绝对值：

$$|x_k||a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} |x_i||a_{ik}|$$

  用$|a_k| > 0$除，有：$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \frac{|x_i|}{|x_k|}|a_{ik}| = \sum_{\substack{i\in J\\i\neq k}}^{n} |a_{ik}| + \sum_{\substack{i\notin J\\i\neq k}}^{n} \frac{|x_i|}{|x_k|}|a_{ik}|$

  对于最后一项，如果$|a_{ik}| \neq 0$，那么$|a_{kk}| < \sum_{\substack{i\in J\\i\neq k}}^{n} |a_{ik}| + \sum_{\substack{i\notin J\\i\neq k}}^{n} |a_{ik}| = Q_k$，与条件矛盾

  如果$|a_{ik}| \neq 0$，那么对于$i \notin J, k \in J, a_{ik} = 0$，则意味着A为可分解阵，与条件矛盾。

- 广义对角占优矩阵
  - DA为严格对角占优矩阵，其中D为正的对角矩阵，称A为广义对角占优矩阵
  - 广义对角占优矩阵也是非奇异的，因为DA是非奇异的，而D是非奇异的

- 定理3.4：陶斯基定理的推广
  - A为不可分解，$d_i > 0$，DA为不严格对角占优，至少存在一个严格不等式，A非奇异
  - 原因：因为DA满足陶斯基定理的假设，为非奇异矩阵，所以A也是非奇异矩阵。

- 定义：拟对角占优矩阵q.d.d.麦肯齐（Mckenzie）
  - A为不可分解阵， $d_i > 0$，DA为不严格对角占优，至少存在一个严格不等式
  - A为可分解阵，DA为不严格对角占优，对于属于J的那些列（基本商品的列），至少存在一个严格不等式
- 定理3.5：q.d.d.是非奇异的
  - 证明：见教材P42-43

佩龙-弗罗贝尼乌斯定理

- 佩龙（Perron）正矩阵谱的性质， 弗罗贝尼乌斯（Frobenius）推广到不可约非负矩阵
- 定理的主要内容：P43
  - 不可约非负矩阵，存在正的特征值，对应唯一一个正的特征向量，且是单根，称之为弗罗贝尼乌斯根，所有特征值的模不超过弗罗贝尼乌斯根；
  - 非负方阵，弗罗贝尼乌斯根非负，且不必是单根，对应半正的特征向量，且不唯一。

- 引理3.1：一个重要的引理
  - A为非负不可分解矩阵，并令$\sigma > 0$，则$(\sigma I + A)^{n-1} > 0$。
  - 由该引理必有：
    - 对于非负不可分解矩阵，必有$(I + A)^{n-1} > 0$，
    - 对于非负不可分解矩阵，如果对角元素严格为正，必有$A^{n-1} > 0$
- 定理3.6：
  - 对于非负不可分解矩阵A，存在正的特征根$\lambda^{*}(A)$，对应一个正的特征向量
- 证明见教材P43-46

动态系统及其稳定性

- 参考相关差分与微分方程教程
- 差分方程与微分方程
  - 我们不知道经济系统在不同时点的具体位置，但是知道不同时点上，经济系统的改变量或变动的速度，探讨解的存在及其稳定性
  - 一般形式
    - $F[t, y(t), y(t+1), \cdots, y(t+n-1), y(t+n)] = 0$
    - $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$
  - 常系数线性差分与微分方程
    - $a_n y(t+n) + a_{n-1} y(t+n-1) + \cdots + a_1 y(t+1) + a_0 y(t) = g(t)$
    - $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$

- 差分方程解的形式
  - 非齐次差分方程的通解由相应的齐次差分方程的通解与非齐次方程的一个特解相加构成：
  - $y(t) = y_A(t) + \bar{y}\,(t)$
  - 齐次方程的通解含一个任意常数A，给出的是函数随时间变化的一个相对轨迹，给定一个初始条件，就得到齐次方程的特解，函数轨迹也被确定下来

- 均衡及其稳定性
  - 关于经济文献中通常所定义的均衡解。对于一个差分动态经济系统而言，非齐次差分方程的特解$\bar{y}(t)$，就是该系统的均衡解。当$\bar{y}(t)$ 是一个与时间无关的常数时，被称为稳态均衡，而当$\bar{y}(t)$为一个关于时间t的函数时，称为移动均衡；
  - 二是系统变化的时间路径及对均衡的偏离。由非齐次差分方程的通解有，$y_A(t) = y(t) - \bar{y}(t)$因此 。通常称对应齐次方程通解的$y_A(t)$ 为余函数。既然$\bar{y}(t)$ 代表了均衡水平，那么余函数就代表了$y(t)$对均衡水平的离差；
  - 三是关于系统的稳定性。系统的稳定性显然取决于余函数。当$t \to \infty$ 时，$y_A(t) \to 0$，则该线性系统是渐进稳定的。

- 例：$y_{t+1} + ay_t = b$
  - 齐次方程的通解$y_t = A(-a)^t$，即余函数$y_A(t)$，给定初始条件可以确定齐次方程的特解
  - 非齐次方程的特解（待定系数法）：
    - 当$a \neq -1$时，$\bar{y}(t) = \frac{b}{1+a}$
    - 当$a = -1$时，$\bar{y}(t) = bt$
  - 非齐次方程的通解
    - 当$a \neq -1$时，$y(t) = A(-a)^t + \frac{b}{1+a}$
    - 当$a = -1$时，$\bar{y}(t) = A + bt$
  - 余函数$y_A(t) = A(-a)^t$，当$|a| < 1$时，系统是稳定的

- 对于二阶及以上的齐次差分方程，存在多个解，其求解过程转化为求差分方程的特征方程的特征根的问题
- 如果$y_1(t),\cdots,y_n(t)$为齐次方程的n个线性无关的解，那么该齐次方程的通解可表示为：
  - $y_A(t)=A_1y_1(t)+\cdots+A_ny_n(t)$
  - 具体根据差分方程特征方程解的形式而不同，分相异实根、重实根、复根三种情形

- 例：$y(t+2)+c_1y(t+1)+c_0y(t)=0$
  - 假设存在非零特解：$y(t)=\lambda^t$，带入得到：
  - $\lambda^{t+2}+c_1\lambda^{t+1}+c_0\lambda^t=0$，有：
  - $\lambda^2+c_1\lambda+c_0=0$（差分方程的特征方程）
  - 根的情形取决于$\Delta={c_1}^2-4c_0$
  - 相异实根：$y_A(t)=A_1\lambda_1^t+A_2\lambda_2^t$，稳定性取决于两个特征根中模较大的一个，小于1时稳定
  - 重实根：$y_A(t)=A_1\lambda^t+A_2t\lambda^t$，稳定性取决于唯一实根，小于1稳定
  - 共轭复根：$\lambda_1,\lambda_1=\alpha\pm i\beta=r(cos\omega\pm isin\omega)$，通解最终可以变换为：$y_A(t)=Ar^t\cos(\omega t-\theta)$，$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，$\mathrm{tg}\omega=\beta/\alpha$，解呈三角震荡，稳定性条件为$r<1$。

- 微分方程解的形式
  - 例：$y' + by = 0$（一阶齐次微分方程）
  - 通解：同样为指数函数，但以e为底。特征方程的根$\lambda = -b$，有：$y_A(t) = Ae^{-bt}$
  - 稳定性：
    - 作为微分方程解的一般形式$y_A(t) = Ae^{\lambda t}$，随着$t \to \infty$，的稳定性取决于特征根λ的符号。当特征根为负时，$y_A(t) \to 0$，解是稳定的。

- 差分与微分方程组
  - 一阶线性常系数差分方程组：$y(t+1) = Ay(t) + g(t)$
  - 齐次差分方程组：$y(t+1) = Ay(t)$
    - $y_1(t+1) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t)$
    - $y_2(t+1) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t)$
    - …
    - $y_n(t+1) = a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t)$

- 差分与微分方程组
  - 一阶线性常系数微分方程组：$x' = Ax + f(t)$
  - 齐次差分方程组：$x' = Ax$
    - $x_1{}' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$
    - $x_2{}' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$
    - …
    - $x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$

- 差分方程组的解P52-54
  - 对于n阶齐次差分方程组：$y(t+1)=Ay(t)$
  - 尝试指数型的解$y(t)=\alpha\lambda^t$，获得特征方程$|\lambda I-A|=0$，因此λ为A的特征值，而α则是相应的特征向量
  - 相异实根：
    - $y(t)=A_1\alpha^1\lambda_1^t+A_2\alpha^2\lambda_2^t+\cdots+A_n\alpha^n\lambda_n^t$
  - 重根：
    - $y(t)=\sum_{j=1}^{k}P_j(t)\,\lambda_j^t$
  - 复根
    - $\lambda_1,\lambda_1=\alpha\pm i\beta=r(cos\omega\pm isin\omega)$为共轭复根，$\alpha^1=w+iz$，$\alpha^2=w-iz$为对应的特征向量
    - $y(t)=r^t(A_1w+A_2z)cos\omega t+r^t(A_2w-A_1z)sin\omega t$

- 非齐次差分方程组的特解：$y(t+1) = Ay(t) + g(t)$
- 对于某些特殊形式的$g(t)$，可以采取待定系数法P55，但是在甚至不知道其具体函数形式的情况下，可以用运算法
- 得到的一般特解形式为：$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} g(t-\tau-1)$
- 得到的非齐次差分方程的通解
- $y(t) = A^{t} y^{0} + \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} g(t-\tau-1)$

- 微分方程组的解P56-57
  - 常系数齐次线性微分方程组$x' = Ax$
  - 以该方程组的解为列向量构成的矩阵，称为解矩阵，而把其定义区间上线性无关的解矩阵，称为基解矩阵，记为$\Phi(t)$。方程组中的任一解都可以用基解矩阵中的解来线性表示 。
  - 可以证明上述方程组的基解矩阵为：
  - $\Phi(t) = expAt$，且$\Phi(0) = I$。
  - 矩阵指数定义： $expA = e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$

- $\Phi(t) = expAt$为基解矩阵，但矩阵的每一个元素是什么？
- 讨论：对于$x' = Ax$寻求形如$\varphi(t) = e^{\lambda t}c$，$c \neq 0$的解，带入得到：
- $\lambda e^{\lambda t}c = Ae^{\lambda t}c$，由特征方程$\det(\lambda I - A) = 0$可知，$\lambda$是$A$的特征值，而$c$为对应的特征向量。
- 因此
- 如果矩阵A具有n个线性无关的特征向量$v_1, v_2, \cdots, v_n$，对应的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（不必各不相同），那么矩阵$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \cdots, e^{\lambda_n t}v_n]$为方程组的一个基解矩阵。

- 常系数非齐次线性方程组$x' = Ax + f(t)$
  - 解的形式：$\varphi(t) = \Phi(t)c + \bar{\varphi}\,(t)$
  - 假设非齐次线性方程组存在形如$\varphi(t) = \Phi(t)c(t)$的解，带入方程组，得到$c'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$
  - 最终，满足初始条件$\varphi(t_0) = 0$的解为：
  - $\varphi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$
  - 满足初始条件$\varphi(t_0) = \eta$的解为：
  - $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$
  - 其中$\Phi(t)$为齐次线性方程组的基解矩阵，$\varphi_k(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta$为齐次线性方程组满足初始条件$\varphi_k(t_0) = \eta$的解

- 微分方程解的稳定性的定义P58
- 微分方程$x' = Ax$解稳定的条件
  - 系数矩阵A的所有特征根的实部为负，则方程组的零解是渐进稳定的；如果所有特征根的实部为正，则零解是不稳定的
- 差分方程$y(t+1) = Ay(t)$解稳定的条件
  - 差分系统解渐近稳定的充分必要条件是所有根的模小于1
- 稳定线性系统对应的矩阵A称为稳定矩阵

线性规划与对偶定理

- LP:
- $\max z_x = cx$
- $Ax \leq b$
- $x \geq 0$
- 可行解：满足约束条件的解
- 最优解：目标函数最大的可行解
- 所有可行解的集合构成一个凸集，几何意义上即凸多面体

- 原问题的对偶问题
- $\min z_y = yb$
- $yA \geq c$
- $y \geq 0$

- 性质：或者两个线性规划问题都存在最优解，且最优值相等；或者两个都没有最优解，且至少其中一个没有可行解。该性质引申出以下定理
  - 对偶定理：当且仅当对偶问题有最优解，则原问题存在最优解。当且仅当两个问题都存在最优解，且最优值相等时，原问题和对偶问题都有可行解
  - 原问题与对偶问题的选择变量与松弛变量之间具有互补松弛关系。即如果原问题某一选择变量的最优值非零，那么对偶问题对应的松弛变量最优值必为0；相反，如果原问题的某个松弛变量最优值非零，那么对偶问题对应的选择变量最优值必为0。

End of Chapter 3