第五章
动态列昂惕夫体系

内容

- 1、支出滞后与生产滞后
- 2、动态投入产出模型
- 3、动态投入产出模型解的性质
- 4、森岛模型
- 5、索洛动态价格模型
- 6、对偶稳定性定理

支出滞后与生产滞后

支出滞后

- 静态模型引入时间因素：
- $x(t+1) = Ax(t) + y$
- 被称为前向差分系统
- 经济解释：解释为一种支出行为，表示t期的需求引发了t+1期的收入增加
- A不是技术矩阵，而是消费倾向，Ax是引致需求，而y是自发需求，x为收入。$x = (I - A)^{-1}y$中的$(I - A)^{-1}$正是结构化的凯恩斯乘数。
- 引入时间因素，成为动态结构化凯恩斯乘数

- 动态模型解的性质
- $x(1) = Ax(0) + y$
- $x(2) = Ax(1) + y = A^2x(0) + (I + A)y$
- …
- $x(t) = Ax(t-1) + y = A^t x(0) + (I + A + A^2 + \cdots + A^{t-1})y$
- 解的存在取决于$t \to \infty$时，$A^t \to 0$。在数学上，这时A被称为收敛矩阵。矩阵A收敛的条件是A的谱半径小于1。
- 因此，当A的谱半径小于1时，$t \to \infty$时，$A^t \to 0$，$x(t) = (I - A)^{-1}y$，而且一定存在有经济意义的解。这表明动态模型解的存在与有经济意义解的一致性，也表明静态与动态模型解的一致性。

- 如下形式线性差分方程的解：
- $x(t+1) = Ax(t) + g(t)$
- 对于所有的t, $g(t) \geqq 0, x(0) \geq 0$
- 存在非负解的条件：定理5.1

- 定理5.1
  - 以A^i表示A的第i个分量，上述差分方程组有非负解的充要条件是：对于所有的$i = 1,2,\cdots,n$, $A^i \geq 0$，即任何一列至少有一个元素为正
  - 证明：
    - 先讨论两个性质：
    - （1）对于$x \geq 0$，使得$Ax \geq 0$的充要条件是：A的所有列都是半正的，即至少有一个正的元素
    - （2） $A^i \geq 0$与$(A^\tau)^i \geq 0$是等价的

- （1）对于$x \geq 0$，使得$Ax \geq 0$的充要条件是：A的所有列都是半正的，即至少有一个正的元素
  - 证明：充分性只要举一个反例（如果有一列全为0）就可以说明。必要性，取e^i代入$Ax \geq 0$，即表明每一列至少有一个正的元素（A本身是非负的）
- （2） $A^i \geq 0$与$(A^\tau)^i \geq 0$是等价的
  - 证明：利用$A^\tau = AA^{\tau-1}$，因为A的每一列至少有一个正元素，可以运用归纳法，如果$A^{\tau-1}$的每一列至少有一个正元素，根据上面的的结论， $A^\tau = AA^{\tau-1}$必然每一列至少有一个正元素，因为相当于A乘一个半正的向量，得到的向量也是半正的。反过来，如果$(A^\tau)^i \geq 0$，取$\tau = 1$，有$A^i \geq 0$

- 在上述两个性质基础上来证明定理，对于：非齐次差分方程组$x(t+1) = Ax(t) + g(t)$，具有如下形式的通解：
- $x(t) = A^t x(0) + \sum_{\tau=0}^{\infty} A^\tau g(t-\tau-1)$
- 充分性：对于上述形式的通解，因为$A^i \geq 0$，所以A^t的所有列都是半正的，对于$x(0) \geq 0$，必有$x(t) \geq 0$。
- 必要性：令$g(t)$，方程组简化为齐次方程，通解简化为：$x(t) = A^t x(0)$，如果存在非负解$x(t) \geq 0$,那么$(A^t)^i \geq 0$，进而$A^i \geq 0$。

- 对于微分方程的线性系统，以常系数线性系统$x' = Ax + f(t)$为例，其非负解的条件为：存在$\alpha \geq 0$，使得$\alpha I + A \geq 0$。
- 常系数非齐次线性方程组的解为：
- $x(t) = \exp(At)x(0) + \exp(At)\int_0^t \exp(-As)\,f(s)ds$
- 因此，讨论存在非负解先要讨论$\exp(At) \geq 0$的条件

- 引理5.1
  - 对于所有的t，$\exp(At) \geq 0$的充要条件是：存在$\alpha \geq 0$，使得$\alpha I + A \geq 0$
  - 证明：

    充分性：$\exp(At) = \exp(-\alpha It)\exp(\alpha It)\exp(At) = \exp(-\alpha It)\exp[(\alpha I + A)t]$

    如果存在$\alpha \geq 0$使得$\alpha I + A \geq 0$，将有$\exp[(\alpha I + A)t] \geq 0$。同时，对于所有的$\alpha$，都有$e^{-\alpha t} > 0$，因此$\exp(-\alpha It) = e^{-\alpha t}I \geq 0$。可知$\exp(At) \geq 0$。

    必要性：关键是A的非对角元素符号是否非负。对于一个足够小的t，有：$\exp(At) \approx I + At = t(\frac{1}{t}I + A)$。这样，矩阵 $\exp(At)$ 中元素的符号会与矩阵A中元素符号相同。因为，$\exp(At) \geq 0$，因此对于$r \neq s, a_{rs} \geq 0$。

- 定理5.2：常系数线性系统$x' = Ax + f(t)$，对所有t有非负解的充要条件：存在$\alpha \geq 0$，使得$\alpha I + A \geq 0$
- 证明：常系数非齐次线性方程组的解为：

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \exp(At)\int_0^t \exp(-As)\, f(s)ds$$

充分性：方程组的解可变形为：

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-s)]\, f(s)ds$$

根据引理及假定，可知$\exp(At) \geq 0$，且对于所有$t \geq s$，$\exp[A(t-s)] \geq 0$，同时对所有s，有$f(s) \geq 0$，可知解对所有的t是非负的。

必要性：对所有的t，取$f(t) = 0$，根据解的形式，可知$x(t) = \exp(At)x(0)$。取$x(0) = e^i$，$i = 1,2,\cdots,n$。可知$[\exp(At)]^i \geq 0$，进而有$\exp(At) \geq 0$。如此，根据引理，存在$\alpha \geq 0$，使得$\alpha I + A \geq 0$

。

生产滞后

- 模型形式
  - 前向差分系统描述的是需求及其满足，后向差分系统则是一种滞后的生产系统，表明所有产品的生产都需要一个相同的时段：
  - $x(t) = Ax(t+1) + c(t+1)$
- 平衡增长
  - 关于生产滞后模型讨论的核心问题是是否存在平衡增长解，即：
  - $x(t+1) = \alpha x(t)$，且$c(t+1) = \alpha c(t)$，$\alpha > 1$是增长，$\alpha < 1$是衰退。

- 分析：
  - 把平衡增长解带入模型：
  - $x(t) = A\alpha x(t) + \alpha c(t)$
  - $\left(\frac{1}{\alpha}I - A\right)x(t) = c(t)$
  - 其中：$t = 0$时，$\left(\frac{1}{\alpha}I - A\right)x(0) = c(0)$。此后，该经济系统按平衡增长路径增长，且$x(t) = \alpha^t x(0)$， $c(t) = \alpha^t c(0)$。
  - 该系统有经济意义解的条件：$\rho(A) < \frac{1}{\alpha}$，此时$\left(\frac{1}{\alpha}I - A\right)$为非奇异M-矩阵，逆非负。由于A为非负矩阵，$\lambda^*(A) < \frac{1}{\alpha}$。特别当A为不可分解矩阵时，弗罗贝尼乌斯根为正，那么$\alpha < \frac{1}{\lambda^*(A)}$，表明平衡增长率要小于弗罗贝尼乌斯根的倒数

- 解的形式
  - 非齐次差分方程：$x(t) = Ax(t+1) + c(t+1)$
  - 比较P55-56
  - 特解：$x(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(t+\tau+1)$
  - 为向量序列累加的形式，讨论其收敛情况：
    - 因为：$p\sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(\tau+1) = p\sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau} c(\tau+1)$
    - 根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，$p > 0$。$\sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(\tau+1)$与$\sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau} c(\tau+1)$两者收敛是一致的。而且他们的收敛也是差分方程组存在有经济意义解的充分必要条件

- 充分性：
  - 如果$\sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau} c(\tau+1)$收敛，因为：
  - $p\lambda^{1-s} \sum_{\tau=s-1}^{\infty} \lambda^{\tau} c(\tau+1) = p \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(\tau+s) = p \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(t+\tau+1)$
  - 这意味着$\sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(t+\tau+1)$也收敛。
- 必要性：
  - 通过对差分方程组的迭代，得到：
  - $x(t) = A^{s} x(t+s) + \sum_{\tau=0}^{s-1} A^{\tau} c(t+\tau+1)$
  - 如果存在有经济意义的解，由$\sum_{\tau=0}^{s-1} A^{\tau} c(t+\tau+1) \leq x(t)$，知道$\sum_{\tau=0}^{s-1} A^{\tau} c(t+\tau+1)$对于s有上界，进而$\sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(t+\tau+1)$也收敛

- 结论：
  - $\sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} c(\tau+1)$与$\sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau} c(\tau+1)$收敛的条件下，生产滞后动态系统存在有经济意义的解。
  - 有经济意义解的存在不仅受λ影响，也受外生的需求$c(\tau+1)$的影响。当$c(\tau+1)=\alpha^{t} c$，那么条件将变为$\sum_{\tau=0}^{\infty}(\alpha\lambda)^{\tau} c$收敛，当$\alpha\lambda<1$，即$\alpha<\frac{1}{\lambda}$时，有经济意义解存在

动态投入产出模型

- 列昂惕夫最早提出动态投入产出模型并没有按支出滞后和生产滞后的路径发展，而是沿总量增长的哈罗德模型进行了多部门的扩展
- 这一模型建立依赖于资本系数及其所表达的存量-流量关系
- 这一部分将要讨论的问题包括：动态逆阵、因果不确定性、森岛模型和索洛模型，以及对偶稳定性定理

动态投入产出模型及其解

- 资本系数
  - b_{ij}表示生产第j个部门单位总产品对第i个部门产品作为存量资本的需要量。
  - 资本系数表明了一种存量-流量关系，因此也被称为存量-流量矩阵。
  - 把一个时期资本品产出流量看着是由于两个时期产出变化所要求的资本存量的改变

- 动态投入产出模型：微分方程：

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{x}_j + c_i$$

  – 表示成矩阵形式：

$$x = Ax + B\dot{x}_j + c$$

- 动态投入产出模型：差分方程

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left[x_j(t+1) - x_j(t) \right] + c_i(t)$$

  – 表示成矩阵形式：

$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + c(t)$$

- 动态投入产出模型的解
  - 微分方程：$x = Ax + B\dot{x}$
  - 如果B非奇异，那么$\frac{dx}{dt} = B^{-1}(I - A)x$
  - 如果系数矩阵$B^{-1}(I - A)$存在n个相异实根，那么该系数矩阵的一个特征值和特征向量构成特解：$x(t) = k_i e^{\lambda_i t}$，所有特解的线性组合构成通解： $x(t) = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n k_n e^{\lambda_n t}$
  - 存在重根与复根的情形：P105

- 动态投入产出模型的解
  - 差分方程：$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)]$
  - 如果B非奇异，那么$x(t+1) = [I + B^{-1}(I -$

- 微分方程开模型：
  - 微分方程：$x = Ax + B\dot{x} + c$，变形：$\frac{dx}{dt} = B^{-1}(I-A)x - B^{-1}c$
  - 讨论比较简单的一种情形：$c(t) = ge^{ut}$，最终需求呈指数增长
  - $\frac{dx}{dt} = B^{-1}(I-A)x - B^{-1}ge^{ut}$
  - 假定$x(t) = ke^{ut}$是微分方程的一个特解，其中k为常数向量。带入得到：$kue^{ut} = B^{-1}(I-A)ke^{ut} - B^{-1}ge^{ut}$
  - 要求：$[B^{-1}(I-A) - uI]k = B^{-1}g$
    - 如果u不是$B^{-1}(I-A)$的特征值，那么$[B^{-1}(I-A) - uI]$非奇异，$k = [B^{-1}(I-A) - uI]^{-1}B^{-1}g = (I - A - Bu)^{-1}g$
    - 如果u是$B^{-1}(I-A)$的特征值，对特解变形，设$x(t) = (kt+m)e^{ut}$，带入微分方程，进一步求解特解的具体形式。
  - 列昂惕夫：讨论如下最终需求的特解$c(t) = g_1e^{u_1t} + g_2e^{u_2t} + \cdots + g_ve^{u_vt}$，在系数矩阵可逆的情况下，其特解的形式为：

$$x(t) = w_1e^{u_1t} + w_2e^{u_2t} + \cdots + w_ve^{u_vt}$$

- 差分方程开模型：
  - 微分方程：$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + c(t)$，变形为标准形式：
  - $x(t+1) = [I + B^{-1}(I - A)]x(t) - B^{-1}c(t)$
  - 根据非齐次差分方程特解的迭代求解结果，我们令$M = [I + B^{-1}(I - A)]$，上述差分方程特解可表示为：
  - $x(t) = M^t x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} M^t B^{-1} c\,(t - 1 - \tau)$

动态逆阵

- 通过对差分动态投入产出模型的迭代，获得跨期的均衡解

$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + c(t)$$

- 经过变形为：

$$Gx(t) - Bx(t+1) = c(t)$$

其中：$G = I - A + B$

- 上述模型表明：
  - 新的资本品带来资本存量的增加，而增加的资本存量带来产出的增加，这中间资本系数并不改变
  - 从需求的角度来说，现期的资本品需求，实际上是作为未来时期生产扩大之准备
  - 因此，某个年度的最终需求$c(t)$不仅取决于当期的生产，还与之前各个时期的生产有关

$$Gx(0) - Bx(1) = c(0)$$
$$Gx(-1) - Bx(-2) = c(-1)$$
$$\cdots$$
$$Gx(-m) - Bx(-m+1) = c(-m)$$

- 上述m+1个线性方程组用矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} G & -B & & & \\ & G & -B & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & G & -B \\ & & & & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(-m) \\ x(-m+1) \\ \cdots \\ x(-1) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(-m) \\ c(-m+1) \\ \cdots \\ c(-1) \\ \tilde{c}(0) \end{bmatrix}$$

- 其中：$\tilde{c}(0) = c(0) + Bx(1)$

- 上述矩阵方程中最后一个方程求解：

$$x(0) = G^{-1}\tilde{c}(0)$$

- 代入倒数第二个方程：

$$x(-1) = G^{-1}BG^{-1}\tilde{c}(0) + G^{-1}c(-1)$$
$$= RG^{-1}\tilde{c}(0) + G^{-1}c(-1)$$

- 其中：$R = G^{-1}B$，依次有：

$$x(-2) = R^2G^{-1}\tilde{c}(0) + RG^{-1}c(-1) + G^{-1}c(-2)$$

$$x(-3)$$
$$= R^3G^{-1}\tilde{c}(0) + R^2G^{-1}c(-1) + RG^{-1}c(-2)$$
$$+ G^{-1}c(-3)$$

- 表示成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x(-m) \\ x(-m+1) \\ \cdots \\ x(-1) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1} & RG^{-1} & R^2G^{-1} & \cdots & R^mG^{-1} \\ & G^{-1} & RG^{-1} & \cdots & R^{m-1}G^{-1} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & G^{-1} & RG^{-1} \\ & & & & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-m) \\ c(-m+1) \\ \cdots \\ c(-1) \\ \tilde{c}\,(0) \end{bmatrix}$$

- 其中的系数矩阵被称为动态逆阵。模型表示为获得不同时期一组最终需求，所需的各时期的产出。
- 列：例如最后一列，表示为生产$\tilde{c}\,(0)$一个单位所需的各期产出
- 行：为生产不同年度最终产品，对某一年度产出的需求

- 动态逆阵的行和对应列的合计是相等的。一个是时期，一个是截面，两者相等。
  - 从时期来看，某一个年度的最终需求，不仅需要当年的投入，而且需要资本品，而资本品则是上年的产出成果，而上年的产出则进一步需要再上年的资本品和产出，如此，各时期产出的累积；
  - 从截面来看，某一年的产出是今后若干各年最终需求引发的结果。
- 当$m \to \infty$时，R^m是一收敛序列。那么：

$$x = (I + R + R^2 + \cdots + R^m)G^{-1}c = (I - A)^{-1}G^{-1}c$$
$$= (G - B)^{-1}c = (I - A)^{-1}c$$

- 这一结论表明动态体系与静态体系解的一致。

- 若干问题：
  - $m \to \infty$时，R^m收敛性的条件

    $R = (I - A + B)^{-1}B = [I + (I - A)^{-1}B]^{-1}(I - A)^{-1}B$

    - 令$U = (I - A)^{-1}B$，有：

      $$R = (I + U)^{-1}U = (I + U^{-1})^{-1}$$

    - 因为$(I - A)^{-1} > 0$，B为非负不可约矩阵，所以$U > 0$。因此U存在一个正的单根，设为λ_1，对应正的特征向量。因此R对应的根为$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$。因此R总有一个小于1的正根，对应正的特征向量。
    - 一般性地，收敛条件要求特征根的模$\left|\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\right| < 1$，那么U的所有特征根要求$\lambda_i \leq -0.5$。

- 若干问题：
  - 投资时滞对R^m收敛条件的影响
    - 对于上述讨论的模型：
      $x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + c(t)$
    - 投资时滞为1年，投资时滞为n年时：
      $x(t) = Ax(t) + B[x(t+n) - x(t)] + c(t)$
    - 时滞改变对A系数不产生影响，但是对于B系数带来影响。
    - 如果1年时滞的资本系数矩阵为B，其中$b_{ij} = \frac{K_{ij}}{X_j}$，如果以月为单位，资本系数为：$b^*{}_{ij} = \frac{K_{ij}}{X_j/12} = 12b_{ij}$。因此以月度度量的资本系数为$\alpha B$，其中$\alpha = 12$。
    - $R^* = (I - A + \alpha B)^{-1}\alpha B$，其特征值$\frac{\lambda_1/\alpha}{1+\lambda_1/\alpha}$，收敛条件为$\frac{\lambda_i}{\alpha} > -0.5$。也就是说，如果原来系数是发散的，可能通过时滞的缩短，系统成为收敛。

- 若干问题：
  - 资本积累的不可逆性
    - 动态模型认为资本品生产是因为产出扩大带来资本存量扩充的要求。但是存量-流量关系需要一定的假设条件
    - 如果生产能力没有充分利用，产出扩大只带来生产能力的充分利用，而无需新的资本设备
    - 产出增长带来投资需求，而产出下降，只表现为生产能力的闲置，而不会是资本存量的减少
    - 这引起了对于投入产出动态模型的争议

动态投入产出模型解的性质

- 资本积累的不可逆性
  - 列昂惕夫最初提出动态投入产出模型时，已经意识到资本积累的不可逆性，提出了一个分阶段模型
  - 首先定义闲置资本

$$\bar{S}_{ik}(t) = S_{ik}(t) - b_{ik}x_{ik}(t)$$

    - 第k个部门拥有的第i种产品的现有资本存量$S_{ik}(t)$与所需资本存量$b_{ik}x_{ik}(t)$的差额等于闲置资本

- 第一阶段：$\bar{S}_{ik}(t) = 0$。表明生产能力充分利用。假设到t_1时间点，产出由扩张转为收缩。部门k状况可描述为

  $\bar{S}_{ik}(t_1) = 0$， ${}_1\ddot{x}_{ik}(t_1) < 0$， ${}_1\dot{x}_{ik}(t_1) = 0$

  – 左边的下标1表示第一阶段。这时的产出既是阶段1的终点，也是阶段2的起点。

- 第二阶段： $\bar{S}_{ik}(t_1) > 0$ 。生产能力闲置，产出开始下降，之后上升一直到生产能力全部吸收，到 t_2 第二阶段结束。再次回到第一阶段。这时状况为：

  $\bar{S}_{ik}(t_2) = 0$， ${}_2\dot{x}_{ik}(t_2) > 0$

- 上述变化过程中，如果部门的资本如机器设备和厂房等完全不可逆，那么上述第二阶段的资本系数为0，即新增资本品的需求为0

- 综合以上，分阶段的动态闭模型可以表示如下

$x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{S}_{ik} \quad i = 1, \cdots, n$

- 当$S_{ik} = b_{ik} x_k$，且$\dot{x}_k > 0$时，$\dot{S}_{ik} = b_{ik} \dot{x}_k$
- 当$S_{ik} = b_{ik} x_k$，且$\dot{x}_k \leq 0$时，$\dot{S}_{ik} = 0$
- 当$S_{ik} > b_{ik} x_k$时，$\dot{S}_{ik} = 0$
- 其中$a_{ik} \geq 0$，$b_{ik} \geq 0$，$i, k = 1, \cdots, n$
- 上式表明，在生产能力充分利用的情况下，产出增加，资本存量增加，产出下降，资本存量不变；在生产能力未充分利用的情况下，资本存量的变化始终为0。

– 列昂惕夫认为，上述模型尽管可以作为经验分析的一个很好的工具，但内在却存在逻辑的缺陷。P113-114

- 相对稳定性与因果不确定性
  - 对于如下形式的动态投入产出模型
$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + c(t)$$
  - 假定B为非奇异，可变换为：
$$x(t+1) = [I + B^{-1}(I - A)]x(t) - B^{-1}(t)$$
  - 对于动态闭模型，可变换为：
$$x(t+1) = [I + B^{-1}(I - A)]x(t)$$
  - 令$M = [I + B^{-1}(I - A)]$，有
$$x(t+1) = Mx(t)$$
  - 对于上述常系数差分方程系统，特解为：
  - $\tilde{x}(t) = \lambda_i{}^t x^i$，其中$\lambda_i$ 为特征值，x^i为特征向量。如果M存在相异实根，则通解为
$$\tilde{x}(t) = \alpha_1\lambda_1{}^t x^1 + \alpha_2\lambda_2{}^t x^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n{}^t x^n$$
  - 其中各个α由初始条件决定
  - 如果解中特征值为复数，或特征向量包含负元素，得到的解均无经济意义。因此，要研究的是在什么条件下，M能够获得正的特征值及特征向量

- 如果我们能够获得这样一个有经济意义的解 $x^*(t) = {\lambda_1}^t x^1$
- 那么，如果经济的初始条件保持与x^1相同的比例，随着时间的推移，经济系统将始终沿向量x^1的方向变化，这一方向构成经济的平衡增长路径，这时的解称为平衡增长解。

- 如何确保M存在一个正的特征值与特征向量?我们无法保证M为非负矩阵，但可以把$(I-A)^{-1}$限定为非负矩阵
- 假定$(I-A)$满足静态均衡有经济意义解的条件，那么$(I-A)^{-1}\geq 0$。因为资本系数矩阵B也为非负矩阵，$B\geq 0$。因此$(I-A)^{-1}B\geq 0$，如果进一步假设$(I-A)^{-1}B$为不可约矩阵，那么将存在正的特征值与特征向量，即：

$$(I-A)^{-1}B\bar{x}=\lambda\bar{x}$$

- 上式变换为：

$$[I+B^{-1}(I-A)]\bar{x}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{x}=M\bar{x}$$

- 由此构成动态投入产出模型的一个平衡增长解：$x^{*}(t)=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{t}\bar{x}$
- 但是问题是M并不一定是非负矩阵，那么虽然存在这样的正根，但是可能出现绝对值比$\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$更大的负特征值。这样就会导致随着时间的延续，通解将成为一个无经济意义的解。

- 如何保证上述形式的平衡增长解$x^*(t)=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^t\bar{x}$在全局的意义上也是一个有经济意义的解，为此引入相对稳定性的概念（尽管相对稳定性概念本身的含义更为一般）。使得上述平衡增长解成为一个有经济意义的解。
- 定义5.1：相对稳定性
  - 设$x(t+1)=Mx(t)$为一常系数差分方程系统。假设$x^*(t)=\lambda^t\bar{x}>0$为该方程系统的一个特解。设$\hat{x}\,(t)$为从任意初始向量$\hat{x}\,(0)\geq 0$开始的该系统的一个解，则平衡增长被称为相对稳定的，如果

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\hat{x}_i(t)}{x^*{}_i(t)}=\sigma$$

存在，使得$0<\sigma<\infty$，且σ与i无关，其中i为第i个元素。

– 因果不确定：
  - 如果特征值的绝对值较大，且对应的特征向量中存在负的元素，那么增长轨迹将取决于这一特征向量。
  - 这时，从一个正的初始条件出发，在若干年度后，导致最终出现负的产出。

森岛模型

- 在列昂惕夫体系中，价格与产出之间是独立的，价格对产出并没有影响
- 森岛通夫假定投入系数A与资本系数B 是价格和工资率的函数，从而把价格决定方程与产出方程结合起来，并探讨均衡产出与平衡增长

- 假设：把资本品部门与非资本品部门区别开来
  - $i=1,2,\cdots,m$表示m个非资本品生产部门
  - $k=m+1,\cdots,n$表示从$m+1$到n个资本品生产部门
  - x_i和x_k分别表示非资本品和资本品生产部门的产出
  - x_{ji}和x_{jk}分别表示非资本品和资本品生产部门对第j部门的投入，其中$j=1,2,\cdots,m$为非资本品投入，$k=m+1,\cdots,n$为资本品投入，第$(n+1)$个投入为劳动
  - 相应地，用$a_{ji}=x_{ji}/x_i$和$b_{jk}=x_{jk}/x_k$表示非资本品和资本品部门的投入系数

- 投入系数满足成本最小化
  - $min\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji}p_j$（或$min\sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}p_j$）
  - 约束条件
    - 非资本品生产函数$F^i(a_{1i},\cdots,a_{n+1},i)=1$
    - 资本品生产函数$F^k(b_{1k},\cdots,b_{n+1},k)=1$
    - 投入系数非负且是价格的零次齐次函数，每一部门生产中至少有一项投入
    - $a_{ji}\left(\frac{p_1}{p_i},\cdots,\frac{p_{n+1}}{p_i}\right)\geq 0,\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji}>0$
    - $b_{jk}\left(\frac{p_1}{p_k},\cdots,\frac{p_{n+1}}{p_k}\right)\geq 0,\sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}>0$

- 资本品与非资本品部门的成本与价格
  - 单位成本：$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji}$，$\sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}$
  - 价格：$p_i = (1+\pi)\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji}p_j$，$P_k = (1+\pi)\sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}p_j$
- 资本品价格P_k与它提供服务的价格p_k之间的关系

$$p_k = P_k(r + q_k)$$

  - 表示提供服务的价格取决于利息率、折旧与保险费率
- 通过代换，资本品服务价格：

$$p_k = (1+\pi)\left(r\sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}p_j + \sum_{j=1}^{n+1} q_k b_{jk}p_j\right)$$

- 令$a_{jk}=q_k b_{jk}$，可以将非资本品价格和资本品服务的价格统一为

$$p=(1+\pi)(pA+rpB+p_{n+1}C)$$

其中：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1,m+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,m+1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

$C=[a_{n+1,1},\cdots,a_{n+1,m},a_{n+1,m+1}+rb_{n+1,m+1},\cdots,a_{n+1,n}+rb_{n+1,n})$

  - A为现期投入系数，B为资本投入系数，C为劳动投入系数
  - 价格为现期投入、资本投入、劳动投入及均衡利润的合计

- 静态列昂惕夫体系中，均衡价格取决于单位成本，而与生产规模无关。
- 但是在森岛通夫的模型中，在价格变动的情况下，技术选择会产生影响，进一步影响产出增长的动态过程。

- 用$X_i(t)$表示t期非资本品i的产出比率，$X_k(t)$表示t期新资本品k的产出比率，c_i为非资本品i的最终需求，$Y_k(t)$表示t期资本品k的现有数量

$X_j(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} * X_i(t) + c_j \quad j = 1, \cdots, m$

$$Y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} * X_i(t) \qquad k = m+1, \cdots, n$$

- 其中$a_{ji}*$，$b_{ki}*$为均衡价格下的最优投入系数和资本系数

- 资本品被用于弥补生产中各种资本损耗和新增资本

$$X_k(t) = q_k Y_k(t) + Y_k(t+1) - Y_k(t)$$

- 用a_{ki} *代替$q_k b_{ki}$ *，有：

$$X_k(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} * X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} b_{ki} * [X_i(t+1) - X_i(t)]$$

$$k = m+1, \cdots, n$$

- 从形式上看，资本品与非资本品产出模型同一般形式的动态模型没有什么区别，但是技术系数是均衡价格下最优选择的结果

- 进一步，把非资本品产出方程中的消费内生化，把消费品看着是工人的需求，它是关于商品相对价格和名义工资率的函数

$$d_j = d_j(p_1, \cdots, p_{n+1})$$

$$c_j = d_j[\sum_{i=1}^{n} a_{n+1,i} * X_i(t)]$$

- 括号中的项为总就业量

- 在消费内生化的基础上，把非资本品和资本品产出方程合并，得到：

$$X_j(t) = \sum_{i=1}^{n}[a_{ji} * +\left(1-\delta_j\right)d_j * a_{n+1,i} *]X_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\delta_j b_{ji} * [X_i(t+1)-X_i(t)]$$

$$j = 1,\cdots,n$$

- 写成矩阵形式：

$$X_t = [A^* + D^* L^*] X_t + A^* [X_{t+1} - X_t]$$

- 其中：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11*} & \cdots & a_{1n*} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1*} & \cdots & a_{nn*} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{m+1,1*} & \cdots & b_{m+1,n*} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1*} & \cdots & b_{nn*} \end{bmatrix}, \quad D^* = \begin{bmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_m^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_t = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}$$

$$L^* = [a *_{n+1,1}, \cdots, a *_{n+1,n})$$

- 对于该系统而言，H-S条件就是矩阵$[I - A^* - D^*L^*]$的顺序主子式大于0，或者其逆非负，或者$[A^* + D^*L^*]$的谱半径小于1。

索洛动态价格模型

- 索洛认为：
  - 动态列昂惕夫体系的价格方面被忽略了
  - 价格应该包括现期成本和来自资本设备价值的利息构成，资本获得利息是索洛动态价格模型的一个关键

- 产出体系的动态建模，是以引入资本系数，使资本品内生化而实现的
- 引入资本系数的价格模型
  - 开模型$p = pA + rpB + p_0 a_0$
  - 闭模型$p = pA + rpB$
- 在索洛看来，真正的动态模型必然包含某种形式的资本理论

- 索洛动态价格模型
  - 假定期初生产到期末所获得的收益，等于他把资本设备不用于自己生产，而是租用给别人所获得的收益

$$p_j(t+1)-\sum_{i=0}^{n}a_{ij}p_i(t+1)+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}p_i(t+1)$$
$$=(1+r(t))\sum_{i=1}^{n}b_{ij}p_i(t)$$

  - 左边表示生产获得的利润，加上资本品的价值构成生产获得的总资产，右边表示吧资金租借给别人获得的增加值
  - 写成矩阵形式

$$p(t+1)-p(t+1)A+p(t+1)B=(1+r)p(t)B$$

  - 开模型为：

$$p(t+1)-p(t+1)A+p(t+1)B=(1+r_t)p_tB+p_0(t+1)a_0$$

- 理解：资本理论中的均衡条件
  - $p(t)b_j$的背后被看着是存在一笔资金$v_j(t)$，即$v_j(t) = p(t)b_j$。
  - 这笔资金可以自己购买设备$p(t)b_j$生产，得到的收益为利润$\pi_j(t)$，同时这些设备本身的价值随价格变化，新的资本价值为$v_j(t+1) = p(t+1)b_j$，因此投资于生产的收益是$v_j(t+1) + \pi_j(t)$
  - 应该等于该资金的价值加上租借所获得的利息$[1 + r(t)]v_j(t)$
  - 因此有等式关系
  - $\frac{v_j(t+1)}{v_j(t)} + \frac{\pi_j(t)}{v_j(t)} = 1 + r(t)$

- 索洛动态价格模型：$C = I - A$， $W = p_0 a_0$，D为最终需求向量

$$(B + C)' p_{t+1} = (1 + r_t) B' p_t + W$$

- 产出系统：

$$B x_{t+1} = (B + C) x_t - D$$

- 经过变换，有

$$p_{t+1} = (1 + r_t)[I + (B^{-1})' C']^{-1} p_t + (B' + C')^{-1} W$$

$$x_{t+1} = (I + B^{-1} C) x_t - B^{-1} D$$

- 首先分析产出方程：
  - 解的稳定性取决于矩阵$B^{-1}C$及其特征根。用Λ表示n个特征根组成的对角矩阵，X表示特征向量组成的矩阵，其中第k列为第k个特征根的特征向量，有

$$B^{-1}CX = X\Lambda$$

$$(I + B^{-1}C)X = X(I + \Lambda)$$

  - 用x_0表示初始的产出向量，那么可以求出差分方程的唯一解：

$$x_t = X(I + \Lambda)^t X^{-1}(x_0 - C^{-1}D) + C^{-1}D$$

  - 可见，长期产出变动取决于$(1 + \lambda_k)$。当其中其中的任何一个$\lambda > 0$时，产出递增，当$-1 < \lambda < 0$时，产出递减，复数带来产出震荡。
  - 当满足H-S条件时，考虑到$C^{-1}B = (I - A)^{-1}B$存在一个最大的实正根，用ρ表示，那么对应正的特征向量。那么$\frac{1}{\rho}$就是$B^{-1}C$的特征根，用λ_1表示，那么产出系统将以$(1 + \lambda_1)^t = (1 + \frac{1}{\rho})^t$增长
  - 从这一结果我们并不能得出产出系统的动态稳定性质。如果$|1 + \lambda_i| > |1 + \lambda_1|$。均衡将出现问题，最终导致负的产出。但是我们仅知道$|\lambda_i| \geq |\lambda_1|$。

- 其次考察价格方程
  - 价格方程包含工资率和利息率有n+2个变量，n个方程，用相对价格可以减少一个自由度，即使如此，也只能给出相对价格、利息率和工资率间的关系
  - 比较产出体系，价格方程中的$[I+(B^{-1})'C']^{-1}$，其特征根为$\frac{1}{1+\lambda_i}$，而λ�i为$B^{-1}C$的特征根。
  - 利用$X^{-1}B^{-1}CX=I+\Lambda$，可以推导得到：

$$X'C'[I+(B^{-1})'C']^{-1}(X'C')^{-1}=(I+\Lambda)^{-1}$$

  - 利用上式转换：

$$X'C'p_{t+1}$$
$$=(1+r_t)X'C'[I+(B^{-1})'C']^{-1}(X'C')^{-1}(X'C')p_t$$
$$+X'C'(B'+C')^{-1}W$$

- 设$z_t = X'C'p_t$，有：

$$z_{t+1} = (1 + r_t)(I + \Lambda)^{-1} z_t + \text{某个常数向量}$$

- 假定利息率不变，并解一阶查分方程：

$$z_t = (1 + r)^t (I + \Lambda)^{-t} z_0 + \text{某个常数向量}$$

- 并有：

$$p_t = (1 + r)^t (X'C')^{-1} (I + \Lambda)^{-t} X'C'(p_0 - p^*) + p^*$$

- 其中，p^*是稳态价格向量。从上式看出，p_t能否收敛于均衡价格，将取决于$(1 + r)(1 +$

- 综合产出方程与价格方程的均衡条件
  - 产出平衡满足$|\lambda_i| \geq |\lambda_1|$，要求 $|1+\lambda_i| \leq |1+\lambda_1|$
  - 价格平衡要求：每个模都小于1
  - 讨论：如果 $|1+\lambda_i| > |1+\lambda_1|$，平衡增长肯定不稳定，但是因为$(1+r)|1+\lambda_i|^{-1} < (1+r)|1+$

对偶稳定性定理

- 对偶稳定性定理（dual stability theorem）：
  - 对于动态列昂惕夫体系，如果产出系统是相对稳定的，价格系统就不是稳定的，反之亦然。
  - 价格模型：价格是现期成本pA，利息支付rpB，价格变化带来的资本损失或收益$\dot{p}B$，工资成本wa_0，以及相应的利润构成

$$p = (1+\pi)(pA + rpB - \dot{p}B + wa_0)$$

  - 长期均衡假定 $\pi = 0$ ，且为简便计设利息率为常数，特别是在闭模型中利息率对价格的相对稳定性没有影响，进一步设$r = 0$。
  - 简化后价格模型：$p = pA - \dot{p}B$

- 变形得到： $\dot{p} = -p(I-A)B^{-1} = -pD$
- 对于产出系统：$x = Ax + B\dot{x}$
- 于是有：$\dot{x} = B^{-1}(I-A)x = Cx$

在上述的对偶系统中，因为 B^{-1} 是可逆矩阵，$(I-A)B^{-1}$ 与 $B^{-1}(I-A)$ 是相似的。因此，D 和 C 存在相同的根。如果假设 $C^{-1}=(I-A)^{-1}B$ 为非负不可约矩阵，那么：

$C^{-1}>0$，$C^{-1}x^{*}=\lambda^{*}(C^{-1})x^{*}$， $p^{*}C^{-1}=\lambda^{*}(C^{-1})p^{*}$

也就是说存在 $x^{*}>0$ 和 $p^{*}>0$ ， 是 C^{-1} 唯一可能的非负右和左特征向量。

如果产出系统方程（5.50）是相对稳定的，那么 $\mu^*(C)=\dfrac{1}{\lambda^*(C^{-1})}$ 是 C 中有最大实部的根。因为 D 与 C 有相同的根，如果用 $\mu_j(C)$ 表示 C 的所有根。那么－D 的根就由 $-\mu_j(C)$ 给出。显然，$-\mu^*(C)$ 将不是－D 中有最大实部的根。由于对应 $-\mu^*(C)$ 的特征向量 $p^*>0$ 是唯一可能的非负特征解，所以，价格系统不具有相对稳定性。

同样，如果价格系统方程（5.48）是相对稳定的，也就是－D 的有最大实部的根是 $-\mu^*(C)$，那么，这个 $-\mu^*(C)$ 将不可能是 C 的有最大实部的根。所以产出系统不具有相对稳定性。因此，动态列昂惕夫模型的价格和产出系统不能同时是相对稳定的。

对于开模型中的对偶稳定性条件，乔根森也同样给出了结论。假定开模型的产出和价格系统方程为：

$$x = Ax + B\dot{x} + f \qquad (5.51)$$

$$p = pA + rpB - \dot{p}B + a_0 w \qquad （5.52）$$

进一步有：

$$\dot{x} = B^{-1}(I - A)x - B^{-1} f \qquad （5.53）$$

$$\dot{p} = p(rI - (I - A)B^{-1}) - a_0 w B^{-1} \qquad （5.54）$$

用 $\alpha+i\beta$ 表示 C 的除 $\mu^*(C)$ 外的任何根。设 $0\le r<\alpha<\mu^*(C)$，这时产出系统（8-12）是相对稳定的。但是，对于价格系统（5.54），$rI-(I-A)B^{-1}$ 的所有根的实部都是负的。对于齐次方程 $\dot{p}=p(rI-(I-A)B^{-1})$，当 t 趋于无穷大时，它的解为零向量。令某个不变的价格向量 $p=\overline{p}$ 为价格系统方程（5.54）的一个特解，有：

$$\overline{p}(I-A-rB)=a_0w \tag{5.55}$$

$$\overline{p}=a_0w(I-A-rB)^{-1} \tag{5.56}$$

对于价格系统（5.54）的相对稳定性，我们要求$(I-A-rB)^{-1}>0$。

因为：

$$(I-A-rB)^{-1}=(I-A)(I-r(I-A)^{-1}B)^{-1}$$
$$=[(I-r(I-A)^{-1}B]^{-1}(I-A)^{-1}=[(1/r)I-(I-A)^{-1}B]^{-1}r^{-1}(I-A)^{-1}$$

$(I-A)^{-1}>0$，所以当且仅当$[(1/r)I-(I-A)^{-1}B]^{-1}>0$时，$(I-A-rB)^{-1}>0$。

也就要求$1/r>\lambda^{*}[(I-A)^{-1}B]=\lambda^{*}C^{-1}=1/\mu^{*}(C)$，即$r<\mu^{*}(C)$。根据前面所设的条件，这一点是成立的，因此方程（5.56）中的$\overline{p}>0$，价格系统（8-13）是相对稳定的。在另一方面，如果产出系统和价格系统是相对稳定的，那么从产出系统，有$\alpha<\mu^{*}(C)$，而由价格系统有$\alpha>r$，所以有$0\le r<\alpha<\mu^{*}(C)$。因此对于开模型存在下列稳定性定理：动态列昂惕夫开模型和它的价格系统是相对稳定的，当且仅当：

$0\le r<\alpha<\mu^{*}(C)$，其中$\mu^{*}(C)=\lambda^{*}(C^{-1})^{-1}$，$\alpha$是 C 的任意根的实部。

End of Chapter 5