第 3 章、内生增长

第 1 章和第 2 章的增长模型还存在问题：

- 资本积累不能解释长期增长中的大部分
- 不能解释国家之间收入差异的大部分
- 人均产出的增长率唯一的取决于劳动效率 A，是外生的，其含义不清楚。

本章和下一章将表明：

- 本章的研究与开发模型：知识积累可能是世界范围内增长的核心因素，但可能不是国家之间收入差异的核心因素
- 下一章：国家之间的收入差异可能来源于实物资本和人力资本的差异

本章：明确地把劳动效率解释为知识，并且模型化了知识随时间艳华地决定因素。

3.1 假定

存在两个生产部门：

- 生产产品的部门（goods-producing sector），生产函数为：

$$Y(t)=[(1-a_K)K(t)]^{\alpha}[A(t)(1-a_L)L(t)]^{1-\alpha},\qquad 0<\alpha<1$$

- 生产新思想的研发部门（R&D sector），生产函数为：

$$\dot{A}(t)=B[a_K K(t)]^{\beta}[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta},\qquad B>0,\qquad \beta\geq 0,\qquad \gamma\geq 0,$$

- 注意：因为对一种思想和知识在一个场合的使用不会妨碍其在别的场合的使用，所以两个部门都使用全部的知识 A。

与索洛模型一样，储蓄率是外生且不变的。此外，为了简便，资本折旧率为 0。因此，$\dot{K}(t)=sY(t)$。人口的运动方程为：$\dot{L}(t)=nL(t),n\geq 0$

3.2 不存在资本的模型

1) 知识积累的动力系统

当经济中没有资本时，两个生产函数变为：

$$Y(t)=A(t)(1-a_L)L(t)$$

$$\dot{A}(t)=B[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta}$$

A 的增长率为 g_A，那么

$$g_A(t)\equiv\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}=B[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta-1}$$

g_A 的增长率为

$$\frac{\dot{g}_A(t)}{g_A(t)}=\gamma n+(\theta-1)g_A(t)$$

也可记为

$$\dot{g}_A(t)=\gamma n g_A(t)+(\theta-1)[g_A(t)]^2$$

下面分三种情形讨论。

情形 1: θ < 1

对应情形：$\theta < 1$时，生产函数表明知识对新知识生产的贡献相当有限。

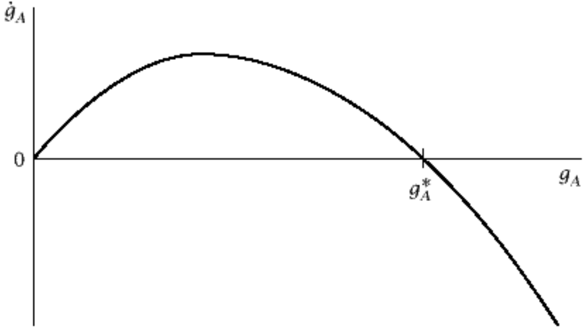

FIGURE 3.1 The dynamics of the growth rate of knowledge when $\theta < 1$

由

$$\dot{g}_A(t) = \gamma n g_A(t) + (\theta - 1)[g_A(t)]^2$$

有：

$$g_A^* = \frac{\gamma n}{1-\theta}$$

模型的含义：

- 在这种情形中，不管经济的初始条件如何，g_A 收敛于 g_A^*
- $Y(t)=A(t)(1-a_L)L(t)$，说明人均产出为 $Y(t)/L(t)=A(t)(1-a_L)$，因此其增长率等于 g_A^*。由于 g_A^* 是 n, θ, γ 的函数，不再是外生给定的，所以平衡增长路径上的增长率是**内生的（endogenous）**。这种模型被称为内生增长模型。
- 模型表明，人均产出增长率是人口增长率的递增函数。【回忆：在索洛模型中，n 增加，人均产出水平降低但是增长率不变】
  - 这一点似乎有点令人迷惑：实际中，人口增长较快的国家，其人均产出的增长率平均而言不是更高。
  - 但是，如果将模型看作是一个**世界范围**的经济增长模型，那么

这一结果就是合理的。较高的世界人口增长才会提高世界范围的收入增长率：人口越多，做出新发现的人就越多。

- 尽管人口增长率影响长期增长，但是劳动力中处于研究开发的人员比例 a_L 则不然。这是 $\theta<1$ 时，a_L 的增加对 A 的影响具有水平效应但是没有增长效应。
  - 方程 $g_A(t)\equiv\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}=B[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta-1}$ 表明，a_L 非连续增加时，$g_A(t)$ 也非连续增加，因此 $g_A(t)>g_A^*$。由 Fig 3.1 可知，$g_A(t)$ 会返回 g_A^*。
  - 数学推导的背后直觉：$\theta<1$ 时，生产函数表明知识对新知识生产的贡献相当有限，知识增长率的增加是不可持续的。

情形 2: θ > 1.

对应情形：新知识的生产超过了已有知识存量的某个比例。

解释如下：由生产函数 $\dot{A}(t) = B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta}$ 有

$$\frac{\dot{A}}{A} = B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta-1} > B[a_L L(t)]^{\gamma}, \text{when } \theta > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{A} > \{B[a_L L(t)]^{\gamma}\} A$$

当θ > 1 时，由

$$\dot{g}_A = \gamma n g_A + (\theta - 1) g_A^2.$$

有如下图形：

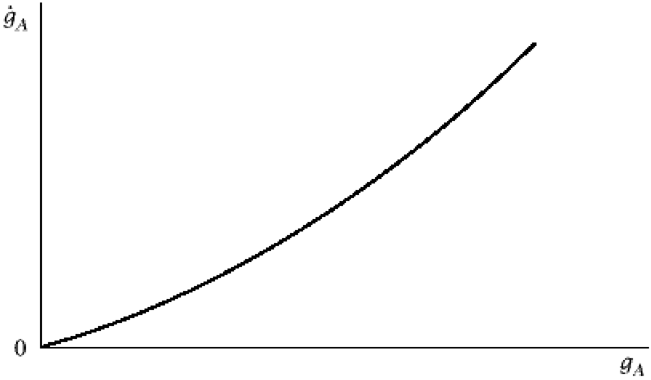

FIGURE 3.2 The dynamics of the growth rate of knowledge when $\theta > 1$

经济增长发散的解释：新知识的生产超过了已有知识存量的某个比例。知识在新知识的生产中是如此有用，以至于知识水平的每一边际增加所产生的新知识之多，使得知识的增长率上升而非下降。因此，一旦开始知识积累，那么经济就进入了一条增长率不断提高的路径。

劳动力中参与研究和开发的人员比例的增加所带来的影响是十分显著的：

由 $g_A(t) \equiv \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta-1}$，有

$$a_L Z \Rightarrow g_A Z$$

并由

$$\dot{g}_A = \gamma n g_A + (\theta - 1) g_A^2.$$

有：

$$g_A Z \Rightarrow \dot{g} Z$$

因此，a_L 的增加导致 A 所遵循的新旧路径之间的缺口不断加大。如下图。

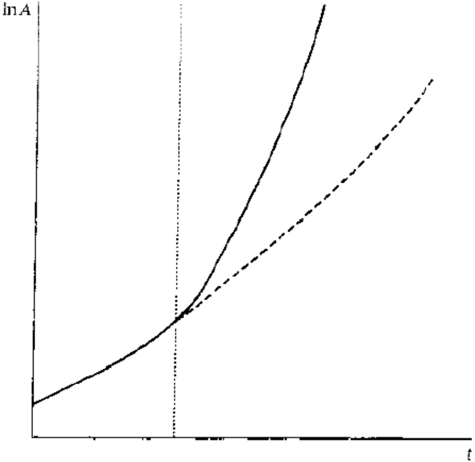

FIGURE 3.4 The impact of a rise in the fraction of the labor force engaged in R&D when $\theta > 1$

其中 lnA 的斜率为： $\dfrac{d\ln A}{dt} = \dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\dot{A}}{A} = g_A^*$

情形 3: θ=1

对应情形：现有知识正好生产足够的新知识，使得新知识的生产与知识存量成比例增加。

解释如下：由生产函数 $\dot{A}(t)=B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta}$ 有

$$\frac{\dot{A}}{A}=B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta-1}=B[a_L L(t)]^{\gamma}, \text{when } \theta=1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \dot{A}=\left\{B[a_L L(t)]^{\gamma}\right\} A$$

当θ=1 时，方程 $g_A(t)=B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta-1}$ 和 $\dot{g}_A=\gamma n g_A+(\theta-1)g_A^2$. 分别简化为：

$$g_A(t)=Ba_L^{\gamma} L(t)^{\gamma}$$

$$\dot{g}_A(t)=\gamma n g_A(t).$$

当 n>0，模型动力系统类似于θ>1 情形。如下图。

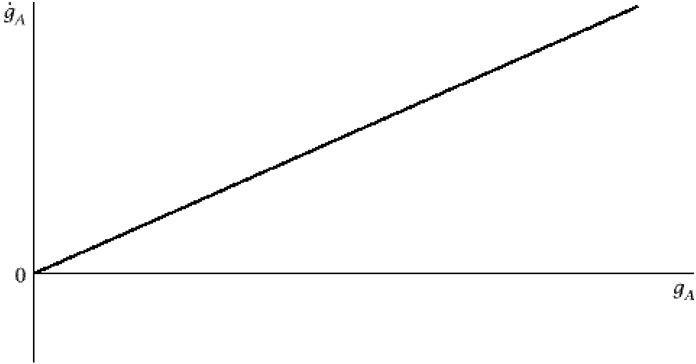

FIGURE 3.3 The dynamics of the growth rate of knowledge when $\theta = 1$ and $n > 0$

当 n=0 或者 γ=0，无论经济初始情况如何，都会立即表现为稳定增长，知识、产出和人均产出的增长率都为 $g_A=B[a_L L]^\gamma$。在这种情况下，a_L 影响经济的长期增长率。

Y=AK 模型：

线性内生增长模型：本节模型和第 3.4 节模型。

内生要素规模报酬的重要性：

上述三种情形具有不同含义的原因是，θ 小于 1、大于 1 或等于 1 决定了生产的内生要素的规模报酬递减、递增或不变。

- 由于劳动的增长是外生的，并且模型中没有资本，所以知识是唯一的内生要素。
- 在产品生产中，知识是规模报酬不变的。
- 因此，知识的规模报酬是否递增取决于知识生产中知识的规模报酬的情形，即取决于θ 。

人口增长的重要性：在全世界范围内，较高的人口增长率有助于世界范围的知识增长，从而会提高全世界的收入增长率。

3.3 一般情形：重新引入资本

（1）知识和资本的动力系统

现在有两个内生变量：资本和知识。

由：

$$\dot{K}(t) = sY(t)$$

和

$$Y(t) = [(1 - a_K)K(t)]^{\alpha}[A(t)(1 - a_L)L(t)]^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

有：

$$\dot{K}(t) = s(1 - a_K)^{\alpha}(1 - a_L)^{1-\alpha}K(t)^{\alpha}A(t)^{1-\alpha}L(t)^{1-\alpha}$$

除以 K(t)，得到

$$
\begin{aligned}
g_K(t) &\equiv \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \\
&= c_K \left[\frac{A(t)L(t)}{K(t)} \right]^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

此处$c_K = s(1 - a_K)^{\alpha}(1 - a_L)^{1-\alpha}$

g_K的增长率为：$\dfrac{\dot{g}_K}{g_K} = (1-\alpha)(g_A + n - g_K)$

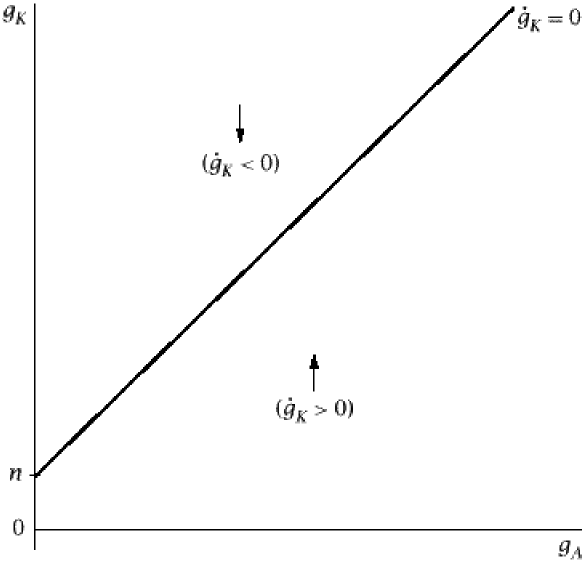

FIGURE 3.4 **The dynamics of the growth rate of capital in the general version of the model**

下面求 A 的动力系统。

由$\dot{A}=B(a_K K)^{\beta}(a_L L)^{\gamma}A^{\theta}$，有

$$g_A(t)=c_{AK}(t)^{\beta}L(t)^{\gamma}A(t)^{\theta-1},$$

其中$c_A\equiv Ba_K^{\beta}a_L^{\gamma}$

因此，g_A的增长率为

$$\frac{\dot{g}_A(t)}{g_A(t)}=\beta g_K(t)+\gamma n+(\theta-1)g_A(t).$$

如下图。

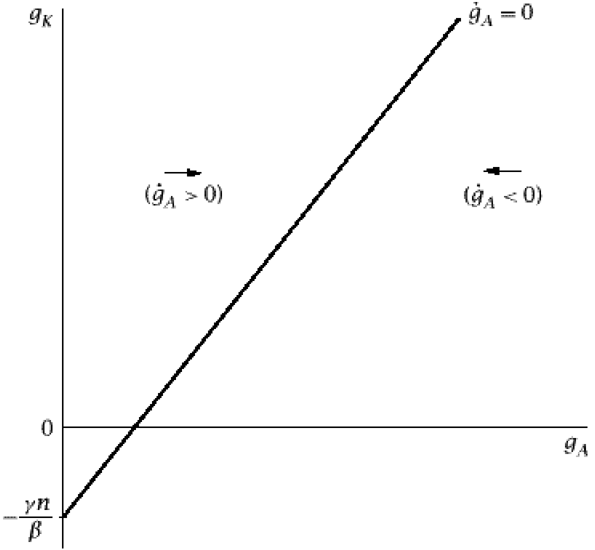

FIGURE 3.5 The dynamics of the growth rate of knowledge in the general version of the model

注意：

- 在产品的生产函数中，资本和知识两种内生要素是规模报酬不变的。因此，资本和知识的规模报酬是否递增，取决于其在知识的生产中，是否规模报酬递增。
- 由知识的生产函数$\dot{A} = B(a_K K)^{\beta}(a_L L)^{\gamma} A^{\theta}$,可知这取决于**β+θ**是否小于1。

情形 1: β+θ<1

当$\beta+\theta<1$时，有$(1-\theta)/\beta>1$，即$\dot{g}_A=0$线比$\dot{g}_K=0$线陡峭。如图。

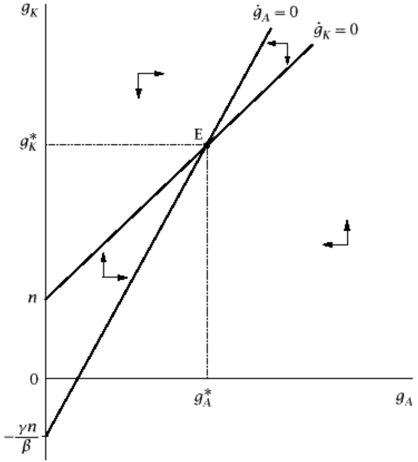

FIGURE 3.6 The dynamics of the growth rates of capital and knowledge when $\beta + \theta < 1$

均衡时有， $g_A^* + n - g_K^* = 0$ ， $\beta g_K^* + \gamma n + (\theta - 1) g_A^* = 0.$

➔
$$g_A^* = \frac{\beta + \gamma}{1 - (\theta + \beta)} n.$$

平衡增长路径上的性质：

- $g_K^* = g_A^* + n$ 。

- 由 $\dot{K}(t) = sY(t)$ 知，Y/K 等于 g_K^*/s，所以总产出的增长率等于 K 的增长率 g_K^* 。由 $g_K^* - n = g_A^*$ 知，人均产出的增长率为 g_A^*

- 长期经济增长率是内生的，并且是 n 的函数。

- a_L 和 a_K 不影响长期增长，储蓄率 s 不影响长期增长。原因与本模型简单形式中原因类似。

情形 2: β+θ=1且 n=0

此时 $g_K = g_A$。无论经济初始情况如何，经济处于平衡增长路径。如图。

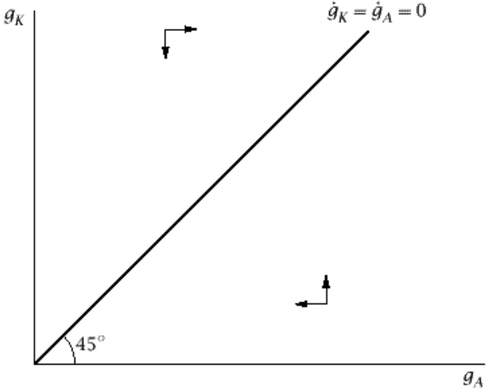

FIGURE 3.7 The dynamics of the growth rates of capital and knowledge when $\beta + \theta = 1$ and $n = 0$

思考一下：$\beta+\theta>1$ 情形？

（2）规模效应和增长

- 早期的新增长模型希望可以解释长期增长的差异，所以假设内生要素规模报酬递增或者不变（储蓄率的变化和用于研究与开发的资源的变化持久地改变增长率）。但是，Jones（1995）指出了一个重要问题：二战后，储蓄率和用于研究与开发的资源都上升了，但增长率没有显著变化。 ［这也是未来增长不太乐观的证据之一，详见Weil 经济增长］
- Jones（1995）的解释：内生要素规模报酬递减。
- 其他解释。见英文版 P114 页。

3.4 知识的性质和决定研究与开发资源配置的因素

- 前面的分析将储蓄率 s 和投入品用于研究与开发的比例（a_L 和 a_K）视为给定的。
- 第 2 章已经研究了 s 内生化的条件。
- 本节研究 a_L 和 a_K 如何决定。[Also see RMT ch11].

复习一下：

- 竞争性（rivalry）：一个人使用某种物品会减少其他人对该物品的使用。
- 排他性（excludability）：一个人使用某种物品会阻止人们使用该物品。

例子：（见《经济学原理》第 11 章，曼昆）

竞争性

排他性	是	否
是	私人物品 ● 冰激凌 ● 衣服 ● 拥挤的收费道路	自然垄断 ● 消防 ● 有限电视 ● 不拥挤的收费道路
否	公有资源 ● 海洋中的鱼 ● 环境 ● 拥挤的不收费道路	公共物品 ● 龙卷风警报器 ● 国防 ● 不拥挤的不收费道路

知识：

- 所有知识都是**非竞争性**。而传统的私人产品是竞争性的。含义：知识的生产和分配不能完全由竞争性的市场力量来决定，因此有必要偏离竞争模型。
- 知识的非排他性同时取决于两个因素：决定产权的经济制度、知识的特性。而传统私人产品都是排他的。例子：
  - 决定产权的经济制度：专利法。
  - 知识特性：可口可乐配方十分复杂，不需要专利法保护；电视节目录制到录像带，或盗版 mp3，太容易复制了，有专利法保护效果也不好。

影响分配资源发展知识的主要力量：

- 对基础科学研究的支持
- 研发和创新的私人激励
- 人才可选择的机会
- 干中学（Learning-by-Doing）

（1）资助基础科学研究

（2）研发和创新的私人激励

研发的典型事实：

- 许多研究是企业在追求利润的目标下完成的。
- 企业利润来自研究：
  - 专利制度使得企业在一定时间内获得垄断利润。
  - 企业的新产品最先进入市场可以获得超额利润。
- 创新具有外部性，可以降低后续创新的成本。

- 知识创造的正外部性的存在表明私人企业 所做的研究与开发还不充分多。但

是，竞争型企业间存在着许多研究成果的重复。

- 估计：R&D 的社会收益 $\geq$ 每年 40%。
- 因此，许多人坚信政府应当鼓励研究与开发。

（3）人才可选择的机会

（4）干中学（Learning-by-Doing）

干中学：有的知识积累不是源于刻意的努力，而是传统经济活动的副产品。个人在制造产品时，他无疑会考虑生产过程的改进方法。例子：每多制造一架飞机所需要的时间在减少，而这没有发生明显的技术进步。【例子：中国造原子弹的时间】

模型：

$$Y(t)=K(t)^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$$

$$A(t)=BK(t)^{\phi},B>0,\ \phi>0$$

合并有

$$Y(t)=K(t)^{\alpha}\,B^{1-\alpha}\,K(t)^{\phi(1-\alpha)}\,L(t)^{1-\alpha}$$

由于 dK/dt= $\dot{K}(t)=sY(t)$，有

$$dK/dt=s\,K(t)^{\alpha}\,B^{1-\alpha}\,K(t)^{\phi(1-\alpha)}\,L(t)^{1-\alpha}$$

$\Rightarrow$

$$g_K=(dK/dt)/K=s\,B^{1-\alpha}\,K(t)^{\alpha+\phi(1-\alpha)-1}\,L(t)^{1-\alpha}$$

$$(dg_K/dt)/g_K=[\alpha+\phi(1-\alpha)-1]\,g_K+(1-\alpha)n$$

$\Rightarrow$

$$dg_K/dt=[\alpha+\phi(1-\alpha)-1]\,g_K g_K+(1-\alpha)n g_K$$

$$\alpha+\phi(1-\alpha)-1<0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\phi(1-\alpha)<1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\phi<1$$

因此，模型的动力系统类似于无资本模型情形模型。

- 当$\phi<1$时，经济的长期增长率是人口增长率 n 的函数。
- 当$\phi>1$时，有一个爆炸性的增长。
- 当$\phi=1$时，若 $n>0$，有一个爆炸性的增长；若 $n=0$，有一个稳定增长。

Y=AK 模型：

以上模型中取：$\phi=1$and $n=0$。

生产函数为：

$$Y(t)=bK(t), \qquad b\equiv B^{1-\alpha}L^{1-\alpha}.$$

资本的动力系统为：

$$\dot{K}(t)=sbK(t).$$

- 资本的增长率为 sb，现在内生的，并且取决于储蓄率 s。
- 本书的解释：资本的贡献大于其传统的贡献：增加的资本不仅通过其对生产的直接贡献来提高产出，而且通过对思想生产的间接贡献从而使所有其他资本更有生产率来提高产出。分别为生产函数中的红色部分和蓝色部分：$Y(t)=K(t)^{\alpha}B^{1-\alpha}K(t)^{\phi(1-\alpha)}L(t)^{1-\alpha}$。
- 曼昆版《中级宏观经济学》的解释：Y=AK，没有给出微观基础，直接将资本解释为广义资本，因此资本的边际收益没有出现递减。

3.5 知识积累模型中的内生储蓄：一个例子

将储蓄内生化很困难，所以在干中学模型的简单情形中(ϕ=1，n=0)增加家庭。

人口无增长，假定每个家庭恰好有一个成员。代表性家庭的效用函数为：

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\, dt, \qquad \rho > 0, \qquad \sigma > 0,$$

厂商 i 的生产函数为：

$$Y_i(t) = K_i(t)^{\alpha}[A(t)L_i(t)]^{1-\alpha},$$

$$\phi=1 \rightarrow A(t)=BK(t)$$

因此，

$$Y_i(t) = B^{1-\alpha}K(t)^{1-\alpha}K_i(t)^{\alpha}L_i(t)^{1-\alpha}.$$

要素市场是竞争性的，因此资本和劳动力都获得其私人边际产出：

$$\frac{\partial Y_i(t)}{\partial K_i(t)} = \alpha B^{1-\alpha} K(t)^{1-\alpha} K_i(t)^{\alpha-1} L_i(t)^{1-\alpha}$$

$$= \alpha B^{1-\alpha} K(t)^{1-\alpha} [K_i(t)/L_i(t)]^{-(1-\alpha)}.$$

由于在均衡中，所有厂商的资本的边际产出必须相同，因而上式表明 K_i/L_i 都相同，因此有 $K_i/L_i=K/L$。由于没有折旧，所以资本的边际产出一定等于实际利率。合并以上事实，得到

$$\begin{aligned} r(t) &= \alpha B^{1-\alpha} K(t)^{1-\alpha} [K(t)/L]^{-(1-\alpha)} \\ &= \alpha B^{1-\alpha} L^{1-\alpha} \\ &\equiv \alpha b \\ &\equiv \bar{r}, \end{aligned}$$

其中第三个等式使用了

$$b \equiv B^{1-\alpha} L^{1-\alpha}.$$

同理，工资由劳动的私人边际产出给定：

$$
\begin{aligned}
w(t) &= (1-\alpha)B^{1-\alpha}K(t)^{1-\alpha}[K_i(t)/L_i(t)]^{\alpha} \\
&= (1-\alpha)B^{1-\alpha}K(t)L^{-\alpha} \\
&= (1-\alpha)b\frac{K(t)}{L},
\end{aligned}
$$

实际工资与资本存量成正比。

家庭的规划问题是：

Max U

s.t.

家庭消费的现值等于家庭的初始财富加上家庭工资的现值。

采用离散化时间的方法，容易求取家庭的欧拉方程为：

$$
\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{r(t)-\rho}{\sigma}
$$

因此，消费的增长率为常数：

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\bar{r} - \rho}{\sigma} \equiv \bar{g}$$

下面使用猜解方法计算均衡。

猜测：

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \bar{g}$$

t 时的工资为

$$w(t) = (1-\alpha)bK(0)e^{\bar{g}t} / L$$

代表性家庭的初始财富加上生命期内劳动收入的现值为：

$$
\begin{aligned}
&K(0)/L+\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}w(t)dt \\
&=K(0)/L+\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}(1-\alpha)bK(0)e^{\bar{g}t}/Ldt \\
&=K(0)/L+(1-\alpha)bK(0)/[(\bar{r}-\bar{g})L]
\end{aligned}
$$

生命期内消费的现值为：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}C(t)dt \\
&=\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}C(0)e^{\bar{g}t}dt \\
&=C(0)/(\bar{r}-\bar{g})
\end{aligned}
$$

由：

$$
\begin{array}{lcl}
\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}C(t)dt & & K(0)/L+\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}w(t)dt \\
=\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}C(0)e^{\bar{g}t}dt & = & =K(0)/L+\int_0^\infty e^{-\bar{r}t}(1-\alpha)bK(0)e^{\bar{g}t}/Ldt \\
=C(0)/(\bar{r}-\bar{g}) & & =K(0)/L+(1-\alpha)bK(0)/[(\bar{r}-\bar{g})L]
\end{array}
$$

得到：

$$C(0)=(b-\bar{g})\frac{K(0)}{L}$$

此处使用了$\bar{r}=\alpha b$的事实。由于 K 和 C 有同样的增长率，所以总消费为：

$$C(t)L=(b-\bar{g})K(t)$$

将以上方程和生产函数：

$$Y(t)=bK(t), \qquad b\equiv B^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$$

代入资本的运动方程$\dot{K}(t)=Y-CL$，得到

$$\dot{K}(t)=bK(t)-(b-\bar{g})K(t)=\bar{g}K(t)$$

因此，消费、资本和产出的增长率都是不变的。

下面说明储蓄率是内生的。

s=(Y-CL)/Y=$\dot{K}(t)/Y = \bar{g}K(t)/Y(t) = \bar{g}K(t)/bK(t) = \bar{g}/b$

$$= \frac{\bar{r} - \rho}{\sigma b}$$

➔

$$s = \bar{g}/b = \frac{\bar{r} - \rho}{b\sigma} = \frac{\alpha b - \rho}{b\sigma}$$

这说明：储蓄率是内生的。

上述公式的含义：较高的α会导致更高的储蓄率，从而导致更高的增长率。

进一步的含义：除非α等于1，否则分散化均衡的增长率低于社会最优增长率。

说明：

社会计划者将考虑资本的全部边际产出而不只是私人边际产出。此时 Y＝bK，因此 r＝b［注意：中央计划者均衡中资本的边际产出为 b，而分散性均衡中资本的边际产出为αb］。代入 $\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{\bar{r}-\rho}{\sigma}\equiv\bar{g}$，而按照 $\dot{K}(t)=sbK(t).$，增长率等于 g。所以，

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{b-r}{s}。\bar{g}=sb。\qquad \bar{g}=\frac{b-r}{s},s=\frac{b-r}{bs}$$

3.6 经验应用：自公元前一百万年以来的人口增长和技术变动

- Kremer（1993）注意到，基本上所有的知识内生增长模型都预言，技术进步是人口规模的递增函数，其逻辑是：人口越多，进行科学发现的人就越多，从而知识积累就越快。
- Kremer（1993）使用人口数据检验了知识内生增长模型。

（1）一个简单的模型

Kremer（1993）的模型是前面模型的直接变形：

- 生产函数为：

$$Y(t) = T^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$$

其中，T 为固定的土地存量，引入土地以使得人口有限；没有资本。

- 知识生产函数为：

$$\dot{A}(t) = BL(t)A(t)^{\theta}.$$

● 马尔萨斯人口条件。人口进行调整从而使人均产出等于生存水平：

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \bar{y}.$$

除了第三个方程之外，本模型类似于第 3.2 节中γ=1 的情形。

下面求解模型。

第一步求出固定土地可以养活的人口规模。将生产函数代入马尔萨斯人口条件，得到

$$\frac{T^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}}{L(t)} = \bar{y}.$$

➔

$$L(t) = \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^{1/\alpha} A(t)^{(1-\alpha)/\alpha} T.$$

含义：可以养活的人口随生存水平的产出递增、随技术递增、与土地数量成正比。[马尔萨斯的逻辑："食物对人类的生存是必需的"，"两性之

间的情欲是必需的，而且与现在的状态相比将不会有什么大的变化”，不断增长的人口与有限的土地只有一个结果－大饥荒。但是，1、技术进步，清朝中叶的人口翻倍，参见千年经济史。2、现代生育控制手段。3、生育意愿随收入增加也在下降，如泰国和现在中国］

第二步求出技术和人口的动力系统。由上述方程可以得到人口增长率：

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}.$$

- **特殊情形**。当θ=1时，由知识生产函数

$$\dot{A}(t)=BL(t)A(t)^{\theta}.$$

可知 $\dot{A}(t)/A(t)=BL(t)$。因此，人口增长率与人口水平成正比：

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}B\right)L(t)$$

- **一般情形**。下面证明：

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \Theta L(t)^{\psi}$$

其中Θ是不变参数的函数，$\psi = 1 - \dfrac{(1-\theta)\alpha}{1-\alpha}$。

证明：

由人口函数

$$L(t) = \left(\frac{1}{\overline{y}}\right)^{1/\alpha} A(t)^{(1-\alpha)/\alpha} T.$$

可以得到

$$A(t) = \left[L(t) \overline{y}^{\frac{1}{\alpha}} T^{-1} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

代入知识的生产函数：

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = BL(t)A(t)^{\theta-1}$$

得到：

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = BL(t)\left[L(t)\bar{y}^{\frac{1}{\alpha}}T^{-1}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}(\theta-1)}$$

而由

$$L(t) = \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^{1/\alpha} A(t)^{(1-\alpha)/\alpha} T.$$

可知：

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}BL(t)\left[L(t)\bar{y}^{\frac{1}{\alpha}}T^{-1}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}(\theta-1)} = \Theta L(t)^{\psi}$$

此处$\psi = 1 - \dfrac{(1-\theta)\alpha}{1-\alpha}$。

含义：

- 除非α很大或θ远小于 1（或两者结合），否则人口增长率随人口规模递增。
- 直觉上，由于劳动现在是一种内生要素，所以即使在新知识的生产中，知识的规模报酬递减（θ<1），Kremer 的模型仍然表明增长率递增：技术进步导致人口增加，而人口增加进而导致更大的技术进步。
- 这种效应在定量上是显著的。即使$\alpha = 1/3, \theta = 1/2$，仍有$\psi = 0.75$。

（2）计量结果

检验 1：

$$n_t = \underset{(0.0355)}{-0.0023} + \underset{(0.026)}{0.524}\, L_t, \qquad R^2 = 0.92, \qquad D.W. = 1.10,$$

n 为人口增长率，L 为人口数，括号中数字为标准差。

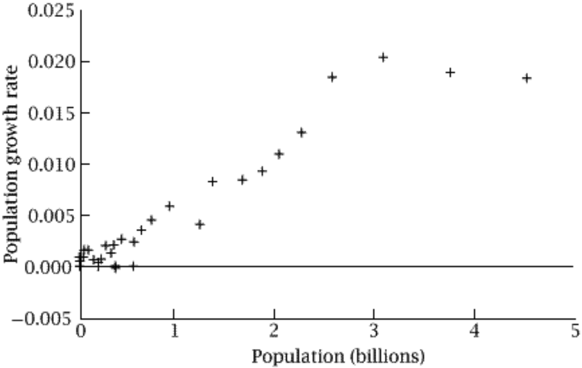

FIGURE 3.8 The level and growth rate of population, 1 million B.C. to 1990 (from Kremer, 1993; used with permission)

检验 2：对世界各地区的比较。

公元前 1 万年冰河时期末极地冰川的融化冲断了大陆桥，把世界分成了若干不同的地区，相互之间在数千年中失去了联系。如果更多人口发现事物时技术进步更快的结论成立，那么人口较多的地区应当增长应当更快。

事实上，确实是这样。1500 年哥伦布重新建立世界的联系时候，人口较多的地区确实文明程度更高。

Kremer 两个检验的结论：

大量人口是技术进步的先决条件。

这与索洛模型和马尔萨斯人口论不同。

3.7 知识积累模型与增长理论的核心问题

- 知识积累模型有助于理解世界范围内的经济增长。
- 知识积累模型难以理解国家之间的收入差异。有两个难点：
  - 第一个难点是数量性的。难以相信，一些国家如此贫穷是因为他们没有拥有 20 世纪就出现的技术改进。
  - 第二个难点是概念性的。难以相信是外国厂商对其产权保护缺乏信心造就了穷国的贫穷。
- 下一章部分讨论如何理解国家之间的收入差距。