Introduction à la théorie spectrale

Eric Cancès

VERSION PROVISOIRE

Table des matières

1 Spectre d'un opérateur linéaire borné

On rappelle le théorème suivant, dit de l'application inverse.

Théorème 1. *Soit E et F deux espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est bijectif, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Soit E un espace de Banach complexe. Pour simplifier les notations, on note λ l'opérateur λI_E où $\lambda \in \mathbb{C}$ et où I_E dé signe l'opérateur identité de E dans E.

Définition-Théorème 1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \ : \ E \to E \text{ bijectif}\}.$$

   L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2. *Pour $\lambda \in \rho(T)$, on note $R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1}$. La famille d'applications linéaires continues $(R_\lambda(T))_{\lambda \in \rho(T)}$ est appelée la résolvante de T. La fonction $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(E)$ et on a pour tout $(\lambda, \mu) \in \rho(T) \times \rho(T)$, l'identité de la résolvante*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

3. *On appelle spectre de T l'ensemble*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \ : \ E \to E \text{ non bijectif}\}.$$

   L'ensemble $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

4. *On note*

$$r(T) = \limsup_{n \to +\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n}$$

   le rayon spectral de T. Soit $D(0, r(T))$ (resp. $C(0, r(T))$) le disque ouvert (resp. le cercle) du plan complexe de centre 0 et de rayon $r(T)$. On a

$$\sigma(T) \subset \overline{D(0, r(T))} \qquad \text{et} \qquad \sigma(T) \cap C(0, r(T)) \neq \emptyset.$$

   En particulier, le spectre d'un opérateur borné n'est jamais vide.

5. *L'ensemble $\sigma(T)$ se décompose en l'union disjointe*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

   avec

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \ : \ E \to E \text{ non injectif}\}, \\
\sigma_c(T) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \surd\, \lambda - T \ : \ E \to E \text{ injectif et } \operatorname{Ran}(\lambda - T) E \neq \overline{\operatorname{Ran}(\lambda - T)} = E\right\}, \\
\sigma_r(T) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \ : \ E \to E \text{ injectif et } \overline{\operatorname{Ran}(\lambda - T)} \neq E\right\}.
\end{aligned}$$

   On dit que $\sigma_p(T)$ est le spectre ponctuel *de T, $\sigma_c(T)$ le* spectre continu *de T, et $\sigma_r(T)$ le* spectre résiduel *de T.*

Remarque 1. $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T, i.e. des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$Tu = \lambda u.$$

En dimension finie, un opérateur linéaire injectif est bijectif et on a donc

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\text{valeurs propres de } T\} \qquad (\text{lorsque } \dim(E) < \infty).$$

Exemple de spectre ponctuel en dimension infinie. Le spectre de l'opérateur identité (en toute dimension y compris infinie) est le singleton $\{1\}$, qui est un élément du spectre ponctuel.

Exemple de spectre continu. Soit $-\infty < a < b < +\infty$, $E = L^2(]a,b[)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall f \in E, \quad (Tf)(x) = xf(x).$$

On vérifiera que $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [a,b]$.

Exemple de spectre résiduel. On considère l'opérateur de *shift* à droite dans $\ell^2(\mathbb{C})$ défini par

$$(Tu)_n = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n = 0, \\ u_{n-1} & \text{si } n \geq 0. \end{array} \right.$$

On vérifiera que $\{0\} \in \sigma_r(T)$.

On rappelle le critère de convergence de Cauchy pour les séries de nombres réels.

Lemme 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels positifs et*

$$\alpha = \limsup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^{1/n}.$$

Alors,

- *si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge ;*
- *si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.*

Preuve du Théorème 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > r(T)$. En utilisant le critère de Cauchy, on voit que la série

$$S = \frac{1}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{T^n}{\lambda^n}$$

est normalement convergente donc convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. De plus,

$$(\lambda - T)S = S(\lambda - T) = 1.$$

Donc $\lambda \in \rho(T)$ et $S = R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(E)$. Il en découle que

$$\sigma(T) \subset \overline{D(0, r(T))}.$$

Soit maintenant $\lambda \in \rho(T)$. L'opérateur

$$\mu - T = \lambda - T + (\mu - \lambda) = (\lambda - T)(1 + (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}) = (\lambda - T)(1 + (\mu - \lambda)R_\lambda(T)) \quad (1)$$

est inversible si $|\mu - \lambda| \|R_\lambda(T)\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. On en déduit que

- $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$,
- $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$,
- $R_\lambda(T)$ est analytique dans $\rho(T)$, i.e. la fonction $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est développable en série entière au voisinage de tout $\lambda \in \rho(T)$. En effet, il découle de (1) que

$$R_{\lambda+z}(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \, z^n \, R_\lambda(T)^{n+1},$$

la série étant normalement convergente donc convergente pour $|z| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}_{\mathcal{L}(E)}$.

En multipliant les deux membres de l'égalité

$$(\lambda - T) = (\mu - T) + (\lambda - \mu)$$

à gauche par $R_\lambda(T)$ et à droite par $R_\mu(T)$, on obtient l'identité de la résolvante.

Supposons que $\sigma(T) \cap C(0, r(T)) = \emptyset$. Comme $\sigma(T)$ est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r(T) - \epsilon)} \subset \rho(T).$$

Comme $R_\lambda(T)$ est analytique sur $\rho(T)$, il en résulte que $f(z) = R(1/z)$ est analytique sur $D(0, 1/(r(T) - \epsilon))$. Or d'après ce qui précède, le développement en série entière de $f(z)$ en 0 est donné par

$$f(z) = -z \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n T^n.$$

En utilisant le critère de Cauchy, on voit que

$$\frac{\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}}}{r(T) - \epsilon} \leq 1,$$

soit

$$r(T) - \epsilon \geq r(T),$$

ce qui recèle manifestement une contradiction. □

2 Opérateurs auto-adjoints bornés sur un espace de Hilbert

On considère un espace de Hilbert séparable de dimension infinie $\mathcal{H}$, muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)$ et de la norme induite notée $\|\cdot\|$. Pour alléger les notations, on note également $\|\cdot\|$ la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que T est* auto-adjoint *si*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (Tu, v) = (u, Tv).$$

2.1 Spectre d'un opérateur auto-adjoint borné

Proposition 1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si T est auto-adjoint, alors*

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

De plus, $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ et l'une au moins des deux extrémités du segment $[-\|T\|, \|T\|]$ appartient à $\sigma(T)$.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha = \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$. Montrons que $\lambda - T \;:\; \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est bijectif. On a

$$((\lambda - T)x, x) = -(Tx, x) + \mathrm{Re}(\lambda)(x, x) - i\alpha(x, x).$$

Mais $(Tx, x) = \overline{(x, Tx)} = \overline{(T^*x, x)} = \overline{(Tx, x)}$. Donc (Tx, x) est réel. Il en résulte que

$$|((\lambda - T)x, x)| \geq |\alpha| \, \|x\|^2.$$

On en déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\|(\lambda - T)x\| \geq |\alpha| \, \|x\|. \tag{2}$$

Il découle immédiatement de (2) que l'opérateur $\lambda - T$ est donc injectif. Afin de montrer que cet opérateur est également surjectif, nous allons montrer que $V := \mathrm{Im}(\lambda - T)$ est fermé et dense dans $\mathcal{H}$.

Montrons que V est fermé dans $\mathcal{H}$. Soit $w_n = (\lambda - T)v_n$ une suite dans V qui converge vers $w \in \mathcal{H}$. En appliquant l'inégalité de coercivité ci-dessus, on obtient

$$\|w_p - w_q\| \geq |\alpha| \, \|v_p - v_q\|.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Elle converge donc vers v dans $\mathcal{H}$. Par continuité

$$w_n = (\lambda - T)v_n \to (\lambda - T)v$$

dans $\mathcal{H}$. Donc $w = (\lambda - T)v$, ce qui prouve que $w \in V$.

Montrons maintenant que V est dense dans $\mathcal{H}$. Soit $w \in V^\perp$. Pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$((\lambda - T)v, w) = 0.$$

En particulier, pour $v = w$,

$$((\lambda - T)w, w) = 0.$$

En utilisant l'inégalité de coercivité, on obtient $w = 0$, ce qui prouve la densité de V dans $\mathcal{H}$.

Des résultats ci-dessus on déduit que

$$\sigma(T) \subset \overline{D(0, r(T))} \cap \mathbb{R} = [-r(T), r(T)]$$

et que

$$\sigma(T) \cap C(0, r(T)) = \sigma(T) \cap C(0, r(T)) \cap \mathbb{R} = \sigma(T) \cap \{-r(T), r(T)\} \neq \emptyset.$$

Il reste à prouver que si T est auto-adjoint, $r(T) = \|T\|$. On s'y prend en trois étapes.

1. Montrons que $\|T\| = \displaystyle\sup_{(x,y)\in(\mathcal{H}\backslash\{0\})\times(\mathcal{H}\backslash\{0\})} \frac{|(Tx, y)|}{\|x\| \, \|y\|}$.

   On a d'abord pour tout $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

   $$|(Tx, y)| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

   D'où

   $$\sup_{(x,y)\in(\mathcal{H}\backslash\{0\})\times(\mathcal{H}\backslash\{0\})} \frac{|(Tx, y)|}{\|x\| \, \|y\|} \leq \|T\|.$$

   D'autre part,

   $$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in(\mathcal{H}\backslash\{0\})\times(\mathcal{H}\backslash\{0\})} \frac{|(Tx, y)|}{\|x\| \, \|y\|} &\geq \sup_{(x,y)\in(\mathcal{H}\backslash\{0\})\times(\mathcal{H}\backslash\{0\}),\; y=Tx} \frac{|(Tx, y)|}{\|x\| \, \|y\|} \\ &= \sup_{x\in\mathcal{H}\backslash\{0\}),\; Tx\neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\| \, \|Tx\|} = \sup_{x\in\mathcal{H}\backslash\{0\})} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|. \end{aligned}$$

2. Montrons que si T est autoadjoint, alors $\|T\| = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \frac{|(Tx,x)|}{\|x\|^2}$.

   Posons
$$A = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \frac{|(Tx,x)|}{\|x\|^2}.$$
   L'inégalité $\|T\| \geq A$ est évidente. Pour démontrer que $\|T\| \leq A$, considérons x et y dans $\mathcal{H}$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a (pour un espace de Hilbert réel pour simplifier)
$$\begin{aligned}
|(Tx,y)| &= \frac{1}{4}\,|(T(x+y),(x+y)) - (T(x-y),(x-y))| \\
&\leq \frac{1}{4}\,(|(T(x+y),(x+y))| + |(T(x-y),(x-y))|) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(A\|x+y\|^2 + A\|x-y\|^2\right) \\
&= \frac{A}{4}2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = A.
\end{aligned}$$
   En utilisant le point 1 ci-dessus, il vient $\|T\| \leq A$.

3. Montrons que si T est auto-adjoint, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$.

   Pour $n = 2$, comme T^2 est auto-adjoint, on utilise le point 2 ci-dessus pour obtenir
$$\|T^2\| = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \frac{|(T^2x,x)|}{\|x\|^2} = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \frac{|(Tx,Tx)|}{\|x\|^2} = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^2 = \left(\sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\})} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^2 = \|T\|^2.$$
   Pour $n = 2^p$, on a par récurrence
$$\|T^{2^p}\| = \|T\|^{2^p}.$$
   Soit maintenant n quelconque et p tel que $2^p \geq n$.
$$\|T\|^{2^p} = \|T^{2^p}\| = \|T^{2^p-n}T^n\| \leq \|T^{2^p-n}\|\|T^n\| \leq \|T\|^{2^p-n}\|T^n\|.$$
   Donc
$$\|T\|^n \leq \|T^n\| \leq \|T\|^n.$$

On obtient finalement
$$r(T) = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|,$$
ce qui clôt la preuve. □

2.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Commençons par rappeler quelques résultats de base sur les opérateurs compacts.

Définition 2. *Un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit compact si, pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'é lé ments de $\mathcal{H}$, on peut extraire de $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(Tu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $\mathcal{H}$.*

Théorème 2. *L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ forme un $*$-idé al bilatère fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, autrement dit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant*

$$\forall S \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad TS \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad S^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

L'espace $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est la fermeture dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de l'espace des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de rang fini.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tendant vers 0 et une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$ telle que*

1. $\sigma(T) = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \{0\}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \mu_n e_n$.

En outre, pour tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda - T)$ est de dimension finie.

Remarque 2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension infinie et T un opérateur auto-adjoint compact sur $\mathcal{H}$. Alors,

- ou bien $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$ (i.e. tous les μ_n sont nuls), auquel cas $T = 0$;
- ou bien $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda_n\}_{n\in\{1,\cdots,N\}} \cup \{0\}$, auquel cas T est de rang fini ;
- ou bien $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \{0\}$ avec $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, auquel cas T est non injectif ;
- ou bien $\sigma_p(T) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \notin \sigma_p(T)$, auquel cas T est injectif ; dans ce cas, $\sigma_c(T) = \{0\}$ et $\sigma_r(T) = \emptyset$ (le vérifier en exercice). Plus généralement, on peut démontrer que le spectre résiduel d'un opérateur auto-adjoint (borné ou non-borné) est toujours vide.

Remarque 3. La notation Bra-ket de Dirac est très utilisé e en physique, notamment pour repré senter des opérateurs auto-adjoints diagonalisables dans une base orthonormale. Ainsi par exemple, l'opérateur T dont il est question dans le Théorème 3 s'é crit en notation Bra-Ket :

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n |e_n\rangle\langle e_n|,$$

tandis qu'un vecteur de $\mathcal{H}$ est repré senté par un Ket $|\psi\rangle$ et qu'une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ (un é lé ment de $\mathcal{H}'$ est repré senté par un Bra $\langle\phi|$. Quand on applique la forme linéaire $\langle\phi|$ au vecteur $T|\psi\rangle$, on obtient le scalaire $\langle\phi|T|\psi\rangle$.

Remarque 4. Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et f une fonction continue (par exemple) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut définir l'opérateur $f(T)$ par

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad f(T)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\mu_n)(e_n, x)\, e_n, \tag{3}$$

où les μ_n et les e_n sont définis dans l'énoncé du Théorème 3. Si en outre f est développable en série entière en 0 et si le rayon de convergence de cette série entière est strictement supérieur à la norme de l'opérateur T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on peut vérifier que la définition (3) de l'opérateur $f(T)$ coïncide avec la définition plus classique

$$f(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n,$$

où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\lambda^n$ désigne le développement en série entière en 0 de la fonction f.

Preuve du Théorème 3. La preuve se décompose en six étapes.

Étape 1. Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Montrons que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Comme $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $(\lambda - T)$ injectif. Posons $V = \mathrm{Im}(\lambda - T) = (\lambda - T)\mathcal{H}$. Pour montrer que $V = \mathcal{H}$, on va montrer que V est à la fois dense et fermé dans $\mathcal{H}$.

1. Montrons que V est fermé.

   Soit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V qui converge vers w dans $\mathcal{H}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite d'éléments de $\mathcal{H}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\lambda - T)v_n.$$

   On a
   $$v_n = \frac{1}{\lambda}[w_n + Tv_n].$$

   Montrons d'abord que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite bornée. Par l'absurde, supposons que $\|v_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On aurait dans ce cas

   $$\lambda\frac{v_n}{\|v_n\|} - T\frac{v_n}{\|v_n\|} = \frac{w_n}{\|v_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

   En utilisant la compacité de l'opérateur T, on extrait de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$T\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

   D'où
   $$\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z = \frac{1}{\lambda}u \qquad \text{dans } \mathcal{H}$$

   et z vérifie
   $$(\lambda - T)z = 0.$$

   Il en résulte que $z = 0$ puisque $(\lambda - T)$ est injectif. C'est impossible car z est limite forte de points de la sphère unité de $\mathcal{H}$.

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une sous-suite bornée. T étant compact, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bornée telle qu'on ait dans $\mathcal{H}$,

   $$Tv_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w' \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

Il en résulte que dans $\mathcal{H}$,

$$v_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v = \frac{1}{\lambda}[w + w'].$$

Comme T est continu, il vient

$$w = \lim_{k\to+\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} (\lambda - T)v_{n_k} = (\lambda - T)v \in V.$$

2. Montrons que V est dense. Soit $w \in V^{\perp}$.

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad ((\lambda - T)v, w) = 0,$$

d'où comme T est auto-adjoint et λ réel,

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad (v, (\lambda - T)w) = 0.$$

On en déduit

$$(\lambda - T)w = 0,$$

et donc $w = 0$ puisque $(\lambda - T)$ est injectif.

Donc $(\lambda - T)\mathcal{H} = \mathcal{H}$ et par suite $\lambda \notin \sigma(T)$. On en déduit

$$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}\,.$$

Étape 2. Montrons que $\sigma_p(T)$ est ou bien une suite finie ou bien une suite infinie qui converge vers 0. Dans le cas contraire, on pourrait extraire de $\sigma_p(T)$ une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls *tous distincts* qui converge vers un réel $\mu \neq 0$. Soit $e_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)$ tel que $\|e_n\| = 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n} T e_n.$$

L'opérateur T étant compact dans $\mathcal{H}$, on peut extraire de la suite $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(Te_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{H}$ vers un certain u. On obtient alors

$$e_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu} u \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

Or la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale car si $n \neq m$,

$$\lambda_n(e_n, e_m) = (\lambda_n e_n, e_m) = (Te_n, e_m) = (e_n, Te_m) = \lambda_m(e_n, e_m),$$

d'où il résulte $(e_n, e_m) = 0$ puisque $\lambda_m \neq \lambda_n$. Donc $\|e_{n_k} - e_{n_{k'}}\| = \sqrt{2}$, ce qui montre que la suite $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, donc ne peut pas converger.

Étape 3. À tout point $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ tel que $\lambda_n \neq 0$, on associe $E_n = \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)$. Montrons que les E_n sont de dimension finie. Soit en effet $T_n = T|_{E_n}$. Il est clair que $T_n = \lambda_n I_n$ (avec $\lambda_n \neq 0$ et I_n désignant l'identité de E_n dans E_n) et que T_n est compact de E_n dans E_n ($E_n = \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)$ est fermé). En particulier la sphère unité de E_n est compacte, ce qui prouve que E_n est de dimension finie.

Étape 4. Montrons que les E_n sont deux à deux orthogonaux et sont orthogonaux à $F = \mathrm{Ker}(T)$. Comme ci-dessus, soit $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, $\lambda_n \neq 0$ et $u \in E_n$. Soit $v \in E_m$ pour un certain $m \neq n$. On a

$$\lambda_n(u, v) = \lambda_m(u, v)$$

Comme $\lambda_n \neq \lambda_m$, on a $(u,v)=0$. De même avec $v \in F$,

$$\lambda_n(u,v) = (Tu,v) = (u,Tv) = 0,$$

d'où $(u,v)=0$ puisque $\lambda_n \neq 0$.

Étape 5. Soit $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Montrons que $H = E \oplus F$. Remarquons tout d'abord que E est T-stable. Soit $x \in E$.

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, \quad x_n \in E_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty.$$

Comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie ou tend vers 0, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$ converge dans $\mathcal{H}$. On a donc

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n, \quad \lambda_n x_n \in E_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n|^2 < +\infty.$$

Donc $Tx \in E$. Montrons ensuite que $E^\perp$ est T-stable. Soit $w \in E^\perp$.

$$\forall v \in E, \qquad (Tw,v) = (w,Tv) = 0.$$

Donc $Tw \in E^\perp$. Définissons maintenant

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{T} : & E^\perp & \to & E^\perp \\ & v & \mapsto & Tv. \end{array}$$

$\widetilde{T}$ est auto-adjoint compact sur $E^\perp$. Donc

$$\sigma(\widetilde{T}) \subset \sigma_p(\widetilde{T}) \cup \{0\}.$$

Supposons que $\sigma_p(\widetilde{T}) \neq \{0\}$. Soit $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{T})$, $\lambda \neq 0$. Il existe $v \in E^\perp \setminus \{0\}$ tel que

$$\widetilde{T}v = \lambda v$$

d'où aussi $Tv = \lambda v$. Donc $\lambda \in \sigma_p(T)$, d'où il résulte que $\lambda = \lambda_n$ et que $v \in E_n$ pour un certain n. D'où

$$v \in E_n \cap E^\perp = \{0\},$$

ce qui contredit l'hypothèse $v \neq 0$. Il en résulte que

$$\sigma(\widetilde{T}) = \{0\}.$$

Comme $\sigma(\widetilde{T})$ contient $-\|\widetilde{T}\|$ ou $\|\widetilde{T}\|$, il s'en suit que $\|\widetilde{T}\| = 0$ et donc que $\widetilde{T} = 0$. Finalement $\widetilde{T} = T|_F$.

Étape 6. Notons enfin n_k la dimension de E_k. On conclut la preuve en prenant

- $\mu_1 = \lambda_1, \cdots, \mu_{n_1} = \lambda_1$ et $(e_1, \cdots, e_{n_1})$ une base orthonormale de E_1 ;
- $\mu_{n_1+1} = \lambda_2, \cdots, \mu_{n_1+n_2} = \lambda_2$ et $(e_{n_1+1}, \cdots, e_{n_1+n_2})$ une base orthonormale de E_2,

et ainsi de suite. On obtient ainsi une base hilbertienne de $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ formés de vecteurs propres de T, qu'on complète si T n'est pas injectif, par une base hilbertienne de F, afin de construire une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. $\square$

2.3 Application : forme canonique d'un opérateur compact

Définition 3. *Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. On note $|T|$ l'opérateur auto-adjoint compact positif sur $\mathcal{H}$ défini par $|T| = \sqrt{T^*T}$.*

La définition ci-dessus appelle quelques commentaires. Comme $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, l'opérateur T^*T est auto-adjoint compact. On peut donc le diagonaliser dans une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$T^*T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|.$$

De plus, $\lambda_n = \langle e_n|T^*T|e_n\rangle = (e_n, T^*Te_n) = \|Te_n\|^2 \geq 0$. On définit la racine carré e de T^*T par

$$\sqrt{T^*T} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n} |e_n\rangle\langle e_n|.$$

On peut montrer que l'opérateur $|T| := \sqrt{T^*T}$ est bien défini (en ce sens qu'il est indé pendant du choix de la base hilbertienne qui diagonalise T^*T), et que c'est l'unique opérateur linéaire borné positif tel que $|T|^2 = T^*T$. Notons que lorsque T est auto-adjoint compact, la définition ci-dessus de $|T|$ coïncide avec la définition de $|T|$ issue du calcul fonctionnel (cf. Remarque 4).

Le théorème suivant é tend au cas des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert de dimension infini le résultat bien connu de dé composition singulière d'une matrice carré e de taille $n \times n$.

Théorème 4. *Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Alors, il existe une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dé croissante de nombres réels positifs qui converge vers 0 et deux bases hilbertiennes $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telles que*

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n |f_n\rangle\langle e_n|.$$

Les nombres σ_n sont appelés les valeurs singulières de l'opérateur T.

Comme la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite d'opérateurs $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad T_N = \sum_{n=0}^{N} \sigma_n |f_n\rangle\langle e_n|$$

est une suite d'opérateurs de rang fini qui converge vers T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Preuve du Théorème 4. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne qui diagonalise T^*T et $(\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^*T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 |e_n\rangle\langle e_n|.$$

Quitte à renumé roter les ϕ_n, on peut toujours imposer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dé croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma_n > 0$, on pose $f_n = \sigma_n^{-1} Te_n$. On a

$$(f_n, f_m) = \sigma_n^{-1}\sigma_m^{-1}(Te_n, Te_m) = \sigma_n^{-1}\sigma_m^{-1}(T^*Te_n, e_m) = \sigma_n^{-1}\sigma_m^{-1}\sigma_n^2(e_n, e_m) = \delta_{nm},$$

et on peut complé ter le système orthogonal (f_n) ainsi défini pour en faire une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n |f_n\rangle\langle e_n|\right) e_p = \sum_{n|\sigma_n>0} \sigma_n^{-1}(T^*Te_n, e_p) f_n = \sum_{n|\sigma_n>0} \sigma_n^{-1}(Te_n, Te_p) f_n == \sum_{n|\sigma_n>0} (f_n, Te_p) f_n = Te_p,$$

ce qui termine la preuve. □

3 Opérateurs linéaires

Nous introduisons dans cette section la notion d'opérateur linéaire (non nécessairement borné) qui joue un rôle essentiel en mé canique quantique.

3.1 Définition et premiers exemples

Définition 4. *Soit E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire de E sur F une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$ à valeur dans F. L'espace vectoriel $D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur T.*

1. *Si $D(T)$ est dense dans E, on dit que T est à domaine dense.*
2. *Le graphe de T est l'espace vectoriel*
$$\Gamma(T) = \{(v, T(v)),\ v \in D(T)\}\,.$$
3. *Si $\Gamma(T)$ est fermé dans $E \times F$, on dit que T est un opérateur fermé.*
4. *Soit T_1 et T_2 deux opérateurs linéaires de E sur F. On dit que T_2 est une extension de T_1, ce qu'on note $T_1 \subset T_2$, si $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$, i.e. si*
$$\forall v \in D(T_1), \quad v \in D(T_2) \quad \text{et} \quad T_2(v) = T_1(v).$$
5. *On dit que T est fermable s'il admet une extension fermé e.*
6. *Un opérateur linéaire* borné *de E dans F est un opérateur T défini sur E (i.e. tel que $D(T) = E$) pour lequel il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que*
$$\forall u \in E, \quad \|Tu\|_F \leq C\|u\|_E.$$
L'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de E dans F coïncide donc avec l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F.
7. *Un opérateur linéaire* non-borné *de E dans F est un opérateur linéaire de E dans F qui n'admet pas d'extension bornée, i.e. qui ne peut pas être prolongé en une application linéaire continue de E dans F.*

Les preuves des deux propositions suivantes sont laissé es en exercice au lecteur.

Proposition 2. *Soit E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F de domaine $D(T)$ fermable. La fermeture $\overline{\Gamma(T)}$ de $\Gamma(T)$ dans $E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire fermé , noté $\overline{T}$. L'opérateur $\overline{T}$ est la plus petite extension fermé e de T, en ce sens que toute extension fermé e de T est une extension de $\overline{T}$.*

Proposition 3. *Soit E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F de domaine $D(T)$ et de graphe $\Gamma(T)$. Si l'opérateur T est fermé, alors*

1. *l'espace vectoriel $D(T)$, muni de la norme du graphe $\|\cdot\|_{\Gamma(T)}$ définie par*
$$\forall u \in D(T), \quad \|u\|_{\Gamma(T)} = \left(\|u\|^2 + \|Tu\|^2\right)^{1/2}$$
est un espace de Banach ;

2. *l'opérateur T, considéré comme une application linéaire de $D(T)$, muni de la norme du graphe, dans F, est continue (i.e. $T \in \mathcal{L}(D(T), E)$ si $D(T)$ é tant muni de la norme du graphe).*

Exemple. L'opérateur linéaire A sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini sur $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$ par $Au = \Delta u$ est un opérateur non-borné fermé. Dans ce cas particulier, la Proposition 3 traduit le fait que l'opérateur laplacien est continu de $H^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, si on munit $H^2(\mathbb{R}^d)$ de la norme du graphe (qui n'est autre ici que la norme associée au produit scalaire $\langle u, v\rangle_{H^2} = \int_{\mathbb{R}^d}(1 + |k|^4)\overline{\widehat{u}}(k)\,\widehat{v}(k)\; dk$ où $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ sont les transformé es de Fourier de u et de v). L'opérateur T sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini sur $D(T) = C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^d)$ par $Tu = \Delta u$ est un opérateur non-borné, qui n'est pas fermé mais qui est fermable. Sa fermeture est l'opérateur A. Insistons sur le fait qu'un opérateur linéaire n'a de sens que si on définit son domaine. Ainsi par exemple, nous établirons plus loin que l'opérateur A est auto-adjoint et possède à ce titre plusieurs propriétés très intéressantes, ce qui n'est pas le cas de l'opérateur T.

Remarquons qu'un opérateur non-borné peut ne pas être fermable. Ainsi l'opérateur T de $E = L^2(\mathbb{R})$ dans $F = \mathbb{R}$, de domaine $D(T) = C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})$ défini par $Tu = u(0)$ est tel que

$$\Gamma(T) = \{(u, u(0)),\; u \in C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})\} \subset L^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad \text{ et } \quad \overline{\Gamma(T)} = L^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Or l'ensemble $\overline{\Gamma(T)}$ n'est pas un graphe.

3.2 Spectre d'un opérateur linéaire

Définition-Théorème 2. *Soit E un espace de Banach et T un opérateur linéaire sur E, fermé, de domaine $D(T)$.*

1. *On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \;:\; D(T) \to E \textit{ bijectif}\}\,.$$

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2. *Pour $\lambda \in \rho(T)$, on note $R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1}$. La famille d'opérateurs linéaires bornés $(R_\lambda(T))_{\lambda\in\rho(T)}$ est appelée la résolvante de T. La fonction $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(E; D(T))$ ($D(T)$ é tant muni de la norme du graphe) et on a pour tout $(\lambda, \mu) \in \rho(T) \times \rho(T)$, l'identité de la résolvante*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

3. *On appelle spectre de T l'ensemble*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

$\sigma(T)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$ (é ventuellement vide ou é gal à $\mathbb{C}$ tout entier).

4. *L'ensemble $\sigma(T)$ se décompose en l'union disjointe*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

avec

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \;:\; D(T) \to E \textit{ non injectif}\}\,,$$

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \;:\; D(T) \to E \textit{ injectif et } \mathrm{Ran}(\lambda - T) \neq \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - T)} = E\right\},$$

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \;:\; D(T) \to E \textit{ injectif et } \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - T)} \neq E\right\}.$$

L'ensemble $\sigma_p(T)$ est appelé le spectre ponctuel de T, $\sigma_c(T)$ son spectre continu, et $\sigma_r(T)$ son spectre résiduel.

Le caractère ouvert de l'ensemble $\rho(T)$, l'analyticité de la résovante $R_\lambda(T)$ et l'identité de la résolvante se prouvent comme dans le cadre des applications linéaires continues (cf. définition-Théorème 1).

Remarque 5. *Dans l'alinea 1 de la définition ci-dessus, la condition $\lambda - T\ :\ D(T) \to E$ bijectif entraîne automatiquement que $(\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E; D(T))$ (le vérifier en exercice en s'appuyant sur le Théorème 1 et la Proposition 3).*

3.3 Opérateurs auto-adjoints

Définition 5. *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert et T un opérateur sur $\mathcal{H}$ à domaine dense. Soit $D(T^*)$ l'ensemble défini par*

$$D(T^*) = \{u \in \mathcal{H} \mid \exists v_u \in \mathcal{H}\ t.q. \quad (Tw, u) = (w, v_u), \quad \forall w \in D(T)\}.$$

L'opérateur linéaire T^* sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(T^*)$ défini par

$$T^* u = v_u$$

où v_u est tel que $(Tw, u) = (w, v_u)$ pour tout $w \in D(T)$ (si v_u existe, il est unique de par le théorème de Riesz), est appelé l'adjoint de T.

Remarque 6. Le graphe de l'opérateur T^* est donné par

$$\Gamma(T^*) = (J(\Gamma(T)))^\perp, \tag{4}$$

où J est l'application linéaire continue de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans lui-même définie par $J((u, v)) = (-v, u)$ et où $(J(\Gamma(T)))^\perp$ dé signe l'orthogonal dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de l'ensemble $J(\Gamma(T)) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Il en résulte en particulier que l'adjoint d'un opérateur à domaine dense est toujours fermé .

Définition 6. *On dit que T est*

1. *symétrique si $T \subset T^*$;*
2. *auto-adjoint si $T = T^*$.*

Notons que

$$\begin{aligned} T \text{ symétrique} \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall u \in D(T),\ u \in D(T^*) \text{ et } T^* u = Tu \\ &\Leftrightarrow \quad \forall (u, v) \in D(T) \times D(T),\ (Tu, v) = (u, Tv). \end{aligned}$$

Exemple. Soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact et injectif, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de B comptées avec leur multiplicité, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Be_n = \mu_n e_n$. Posons $\lambda_n = 1/\mu_n$ (λ_n est bien défini car B étant injectif, $\mu_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). L'opérateur A défini par

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\, e_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2\, |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$$\forall u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\, e_n \in D(A), \quad Au = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n u_n\, e_n$$

est un opérateur auto-adjoint non-borné (le vérifier en exercice). De plus, A est inversible de $D(A)$ dans $\mathcal{H}$, $AB = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ et $BA = \mathbb{1}_{D(A)}$.

Remarque 7. Dans la pratique, les modèles fournissent des opérateurs “formellement” symétriques, c’est-à-dire symétriques si on les définit sur un espace de fonctions "sympathiques" (comme $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$). Or c’est pour les opérateurs auto-adjoints qu’on dispose de propriétés mathématiques vraiment intéressantes (théorème de décomposition spectrale, théorème de Stone, calcul fonctionnel, ...). Quand on récupère un opérateur “formellement” symétrique T issu d’un modèle et qu’on définit dans un premier temps sur un espace de fonctions "sympathiques", il faut donc se poser les deux questions suivantes :

1. Existe-t-il un prolongement auto-adjoint ? (ce n’est pas toujours le cas) ;
2. Ce prolongement est-il unique ? (ce n’est pas toujours le cas).

Si la réponse à ces deux questions est oui, on dit que l’opérateur T est *essentiellement auto-adjoint*. On notera que l’adjoint d’un opérateur à domaine dense é tant toujours fermé , tout opérateur auto-adjoint est fermé et on pourra vérifier en exercice que tout opérateur symétrique est fermable. Un opérateur symétrique admet donc deux extensions fermés naturelles : sa fermeture $\overline{T}$ (qui, comme on l’a vu, est la plus petite extension fermé e de T) et l’opérateur T^* (dont on peut voir, en utilisant (4), qu’il s’agit de la plus grande extension fermé e de T. L’opérateur T est auto-adjoint si $T = \overline{T} = T^*$ et essentiellement auto-adjoint si $\overline{T} = T^*$. Toute extension auto-adjointe T_a de T vérifie $\overline{T} \subset T_a \subset T^*$. Comme on l’a dit plus haut, certains opérateurs symétriques n’admettent aucune extension auto-adjointe.

Montrons maintenant le caractère auto-adjoint de l’opérateur laplacien sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cet opérateur, lorsqu’on le défini sur le domaine $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, est symétrique puisque pour u et v dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$(\Delta u, v)_{L^2} = (u, \Delta v)_{L^2} \,.$$

Théorème 5. *L’opérateur laplacien défini sur le domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur auto-adjoint non-borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. Dans toute cette preuve, $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Notons T l’opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini par $D(T) = H^2(\mathbb{R}^d)$ et $Tu = \Delta u$ pour $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. On a

$$D(T^*) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \exists v_u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ t.q } (\Delta w, u) = (w, v_u),\ \forall w \in H^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Mais

$$(\Delta w, u) = -(|\xi|^2 \widehat{w}, \widehat{u}) = -\int_{\mathbb{R}^d} \overline{(|\xi|^2 \widehat{w}(\xi))} \widehat{u}(\xi)\, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{w}(\xi)} (|\xi|^2 \widehat{u}(\xi))\, d\xi$$

et

$$(w, v_u) = (\widehat{w}, \widehat{v}_u) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{w}(\xi)} \widehat{v}_u(\xi)\, d\xi.$$

Donc $u \in D(T^*)$ si et seulement si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, autrement dit si $u \in H^2(\mathbb{R}^d) = D(T)$. On a en outre pour $u \in D(T^*)$,

$$\widehat{(T^* u)}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi),$$

ce qui équivaut à

$$T^* u = \Delta u.$$

Donc T est auto-adjoint. □

On pourra vérifier que l'opérateur T_0 de domaine $D(T_0) = C_c^\infty(R^d)$ défini par $\forall u \in D(T_0)$, $T_0 u = \Delta u$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et son unique extension auto-adjointe est l'opérateur T qui fait l'objet du Théorème 5. En revanche, si Ω est un ouvert borné ré gulier de $\mathbb{R}^d$, l'opérateur T_1 défini par $D(T_1) = C_c^\infty(\Omega)$ et $\forall u \in D(T_1)$, $T_1 u = \Delta u$ est symétrique mais n'est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$. Ainsi, les opérateurs T_2, T_3, T_4 et T_5 sur $L^2(\Omega)$ définis par

- $D(T_2) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\forall u \in D(T_2),\ T_2 u = \Delta u$;
- $D(T_3) = \left\{u \in H^2(\Omega) \,|\, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$, $\forall u \in D(T_3),\ T_3 u = \Delta u$;
- $D(T_4) = H^2(\Omega)$, $\forall u \in D(T_4),\ T_4 u = \Delta u$;
- $D(T_5) = H_0^2(\Omega)$, $\forall u \in D(T_5),\ T_5 u = \Delta u$,

sont tels que T_2 et T_3 sont des extensions auto-adjointes de T_1, T_4 est l'adjoint de T_1 et de T_5, et T_5 est l'adjoint de T_4.

La preuve de la proposition suivante, qui découle du Théorème 3, est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 4 (diagonalisation des opérateurs à résolvante compacte)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(T)$. Supposons qu'il existe $\sigma \in \rho(T)$ tel que $R_\sigma(T) = (\sigma - T)^{-1}$, considéré comme un opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, soit un opérateur compact. Alors pour tout $z \in \rho(T)$, $R_z(T) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (on dit que l'opérateur T est à résolvante compacte) et*

1. *il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty$, et une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$ formée d'éléments de $D(T)$ telle que*
   (a) $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$,
   (b) $Te_n = \lambda_n e_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace propre $E_n = \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)$ est de dimension finie ;*
3. *on a*

$$D(T) = \left\{ u = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n e_n \in \mathcal{H}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$$\forall u = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n e_n \in D(T), \quad Tu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n u_n e_n.$$

Le théorème suivant fournit une caractérisation des opérateurs auto-adjoints :

Théorème 6. *Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, symétrique, à domaine dense. T est auto-adjoint si et seulement si* $\mathrm{Ran}\ (T + i) = \mathrm{Ran}\ (T - i) = \mathcal{H}$.

Preuve. Soit T un opérateur symétrique tel que $\mathrm{Ran}\ (T + i) = \mathrm{Ran}\ (T - i) = \mathcal{H}$. Pour montrer que T est auto-adjoint, il suffit de vérifier que $D(T^*) = D(T)$ et pour cela que $D(T^*) \subset D(T)$ puisque l'inclusion réciproque découle du caractère symétique de l'opérateur T. Soit donc $u \in D(T^*)$. Comme $\mathrm{Ran}\ (T + i) = \mathcal{H}$, il existe $v \in D(T)$ tel que

$$(T + i)v = (T^* + i)u.$$

Comme en outre $Tv = T^*v$ (car T est symétrique), cette relation s'écrit aussi

$$(T^* + i)(v - u) = 0.$$

Donc $v - u \in \mathrm{Ker}(T^* + i) = \mathrm{Ran}(T - i)^\perp = \{0\}$ puisque $\mathrm{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$. Donc $v = u \in D(T)$.

Réciproquement, soit T un opérateur auto-adjoint. Pour tout $u \in D(T)$

$$((T + i)u, u) = (Tu, u) - i(u, u).$$

Comme $(u, u) = \|u\|^2 \in \mathbb{R}$ et $(Tu, u) \in \mathbb{R}$ (puisque T est auto-adjoint),

$$\|u\|^2 \leq |((T + i)u, u)| \leq \|(T + i)u\| \, \|u\|.$$

Donc

$$\forall u \in D(T), \qquad \|(T + i)u\| \geq \|u\|. \tag{5}$$

En particulier $(T + i)$ est injectif. On montre de même que $(T - i)$ est lui-aussi injectif. Notons maintenant $V = \mathrm{Ran}(T + i)$ et montrons que V est à la fois dense et fermé dans $\mathcal{H}$ (cela impliquera que V est égal à $\mathcal{H}$). Pour vérifier que V est dense, remarquons que $\mathrm{Ran}(T + i)^\perp = \mathrm{Ker}(T - i) = \{0\}$ (car $(T - i)$ est injectif). Pour montrer que V est fermé, considérons une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V qui converge vers un certain $v \in \mathcal{H}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite d'éléments de $D(T)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (T + i)u_n = v_n.$$

Comme (v_n) converge dans $\mathcal{H}$, il découle de (5) que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ donc converge dans $\mathcal{H}$ vers un certain $u \in \mathcal{H}$. D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall w \in D(T), \qquad (Tw, u_n) = (w, Tu_n) = (w, v_n - iu_n).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\forall w \in D(T), \qquad (Tw, u) = (w, v - iu).$$

Donc $u \in D(T^*) = D(T)$ et $Tu = v - iu$. Donc $v = (T + i)u \in V$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 7. *Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, symétrique, à domaine dense. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est auto-adjoint ;*
2. *il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ran}(T + \lambda) = \mathrm{Ran}(T + \overline{\lambda}) = \mathcal{H}$;*
3. *pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Ran}(T + \lambda) = \mathcal{H}$.*

Preuve. Simple adaptation, laissée en exercice, de la preuve précédente. □

La caractérisation fournie par le théorème précédent est un peu lourde à manier. Lorsqu'on veut vérifier qu'un opérateur est auto-adjoint, on utilise souvent l'argument suivant : on décompose H en $H_0 + W$ où H_0 est un opérateur qu'on sait être auto-adjoint, et où W est une "perturbation" de H_0 ; si W vérifie certaines hypothèses (explicitées ci-dessous), on peut en déduire directement que H est auto-adjoint.

Définition 7. *Soient H_0 et W deux opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

1. *On dit que W est H_0-borné (relativement borné par rapport à H_0) si W est un opérateur borné de $D(H_0)$, muni de la norme du graphe, dans $\mathcal{H}$, autrement dit si $D(H_0) \subset D(W)$ et s'il existe deux constantes a et b telles que*

$$\forall u \in D(H_0), \quad \|Wu\| \leq a\|H_0 u\| + b\|u\|. \tag{6}$$

   L'infimum des a tels que la propriété ci-dessus soit vraie est appelée la borne relative de W par rapport à H_0.

2. *On dit que W est H_0-compact (ou relativement compact par rapport à H_0) si W est un opérateur compact de $D(H_0)$, muni de la norme du graphe, dans $\mathcal{H}$.*

Remarquons

1. qu'un opérateur continu de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est H_0-borné avec borne relative égale à 0 pour n'importe quel H_0,
2. qu'un opérateur compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est H_0-compact pour n'importe quel H_0.

Théorème 8 (de Kato-Rellich)**.** *Soit H_0 un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit W un opérateur non-borné symétrique sur $\mathcal{H}$. On suppose que W est H_0-borné de borne relative strictement inférieure à 1. Alors l'opérateur $H = H_0 + W$ de domaine $D(H) = D(H_0)$ est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$.*

Preuve. Pour tout $\mu > 0$,

$$\forall u \in D(H_0), \qquad \|(H_0 + i\mu)u\|^2 = \|H_0 u\|^2 + \mu^2 \|u\|^2. \tag{7}$$

Comme H_0 est auto-adjoint, $\mathrm{Ran}(H_0 + i\mu) = \mathcal{H}$ (cf. Théorème 7). En utilisant (7) avec $u = (H_0 + i\mu)^{-1} v$, on obtient

$$\forall v \in \mathcal{H}, \qquad \|H_0(H_0 + i\mu)^{-1} v\| \leq \|v\|, \qquad \|(H_0 + i\mu)^{-1} v\| \leq \frac{\|v\|}{\mu}.$$

En reportant ces inégalités dans (6), il vient

$$\|W(H_0 + i\mu)^{-1} v\| \leq a\|H_0(H_0 + i\mu)^{-1} v\| + b\|(H_0 + i\mu)^{-1} v\| \leq \left(a + \frac{b}{\mu}\right) \|v\|.$$

Soit μ_0 tel que $a + \frac{b}{\mu} < 1$. L'inégalité ci-dessus prouve que $A = W(H_0 + i\mu_0)^{-1}$ est un opérateur continu de norme strictement inférieure à 1. Il en résulte que $\mathrm{Ran}(I + A) = \mathcal{H}$. Comme par ailleurs $\mathrm{Ran}(H_0 + i\mu_0) = \mathcal{H}$, $\mathrm{Ran}((I + A)(H_0 + i\mu_0)) = \mathcal{H}$. Or $(I + A)(H_0 + i\mu_0) = H_0 + W + i\mu_0$. Il vient donc

$$\mathrm{Ran}(H_0 + W + i\mu_0) = \mathcal{H}.$$

De même, $\mathrm{Ran}(H_0 + W - i\mu_0) = \mathcal{H}$ et donc (Théorème 7) $H_0 + W$ est auto-adjoint. $\square$

4 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints

4.1 Familles et mesures spectrales

On rappelle que $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un projecteur orthogonal si $P^2 = P = P^*$. On rappelle également qu'on peut munir $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'au moins trois topologies intéressantes correspondant aux trois notions de convergence suivante : on dit que la suite d'opérateurs bornés $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}(\mathcal{H}))^{\mathbb{N}}$ converge vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

- en norme (ou pour la norme d'opérateurs) si $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \to 0$;
- fortement, ce qu'on note $\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, A_n = A$, si pour tout $u \in \mathcal{H}$, $A_n u \to Au$ fortement dans $\mathcal{H}$;
- faiblement, ce qu'on note $\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\, A_n = A$, si pour tout $u \in \mathcal{H}$, $A_n u \rightharpoonup Au$ faiblement dans $\mathcal{H}$.

Bien entendu, la convergence en norme d'opérateurs, implique la convergence forte, qui elle-même implique la convergence faible.

Définition 8 (famille spectrale)**.** *Une famille spectrale sur $\mathcal{H}$ est une famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de projecteurs orthogonaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$P_\lambda P_\mu = P_{\min(\lambda,\mu)}$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;*
2. *$\underset{\mu\to\lambda,\ \mu>\lambda}{\text{s-lim}}\, P_\mu = P_\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;*
3. *$\underset{\lambda\to-\infty}{\text{s-lim}}\, P_\lambda = 0$ et $\underset{\lambda\to+\infty}{\text{s-lim}}\, P_\lambda = I$.*

Définition 9 (mesure spectrale)**.** *Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble borélien de $\mathbb{R}$. Un mesure spectrale dans $\mathcal{H}$ est une famille $(P_B)_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ de projecteurs orthogonaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que*

1. *$P_{B_1} P_{B_2} = P_{B_1\cap B_2}$, pour tout $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$;*
2. *$P_\emptyset = 0$ et $P_\mathbb{R} = I$*
3. *si $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est une famille dénombrable de sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints ($B_m \cap B_n = \emptyset$ si $m \neq n$), alors $P_B = \underset{N\to+\infty}{\text{s-lim}} \sum_{n=0}^{N} P_{B_n}$.*

Il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des familles spectrales et l'ensemble des mesures spectrales. En effet, si $(P_B)_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ est une mesure spectrale $P_\lambda = P_{]-\infty,\lambda]}$ définit une famille spectrale, et si $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille spectrale, il existe une unique mesure spectrale telle que $P_{]\lambda,\mu]} = P_\mu - P_\lambda$ pour tout $\lambda < \mu$.

Exemple. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $\alpha_{-1} = -\infty$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_\lambda = \sum_{n,\ \alpha_n\le\lambda} (e_n, \cdot) e_n$$

et pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose

$$P_B = \sum_{n,\ \alpha_n\in B} (e_n, \cdot) e_n.$$

On vérifie facilement (le faire en exercice) que $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ forme une famille spectrale et que la mesure spectrale correspondante est $(P_B)_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$. Soit A l'opérateur auto-adjoint défini par

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n \in \mathcal{H} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 |u_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\forall u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n \in D(A), \quad Au = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n e_n.$$

On a

$$D(A) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \|P_{\{\alpha_n\}} u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \|P_{\alpha_n} u - P_{\alpha_{n-1}} u\|^2 < +\infty \right\},$$

$$\forall u \in D(A), \quad Au = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n P_{\{\alpha_n\}} u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n (P_{\alpha_n} u - P_{\alpha_{n-1}} u).$$

Théorème 9. *Soit $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale, f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et u dans $\mathcal{H}$.*

1. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Les sommes de Riemann*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\lambda'_k)(P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k})u$$

avec $a = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = b$ et $\lambda'_k \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ convergent fortement dans $\mathcal{H}$ lorsque $\sup |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \to 0$. On note leur limite

$$\int_a^b f(\lambda) dP_\lambda u.$$

Si l'intégrale

$$\int_a^b f(\lambda) dP_\lambda u$$

admet une limite forte dans $\mathcal{H}$ lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda u$$

cette limite.

2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda u$ *existe ;*

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\|P_\lambda u\|^2$ *existe ;*

   (c) $v \mapsto F(v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)} d(P_\lambda u, v)$ *est une forme linéaire continue.*

   Dans le cas où ces conditions sont vérifié es, on a

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda u \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\|P_\lambda u\|^2 \tag{8}$$

L'énoncé ci-dessus fournit une définition précise de l'intégrale figurant dans l'assertion (a) : il s'agit d'une intégrale de Riemann. On peut utiliser une définition similaire pour les intégrales figurant en (b) et en (c). Mais on peut aussi définir l'intégrale figurant dans (b) en remarquant que la fonction

$$\begin{array}{rcl} F_u \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ \lambda & \mapsto & F_u(\lambda) = \|P_\lambda u\|^2 \end{array}$$

est une fonction croissante vérifiant $F_u(-\infty) = 0$ et $F_u(+\infty) = \|u\|^2$. En effet, si $\lambda < \lambda'$, on a $P_\lambda P_{\lambda'} = P_\lambda$ et donc

$$\begin{array}{rcl} F_u(\lambda) & = & \|P_\lambda u\|^2 \\ & = & \|P_\lambda P_{\lambda'} u\|^2 \\ & \leq & \|P_{\lambda'} u\|^2 \\ & = & F_u(\lambda'). \end{array}$$

On peut donc associer à F_u la mesure de Radon positive bornée μ_u définie pour tout intervalle $]a, b]$ par $\mu_u(]a, b]) = F_u(b) - F_u(a)$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\|P_\lambda u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\mu_u.$$

De même, la fonction

$$\begin{array}{rcl} G_{u,v} \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto & G_{u,v}(\lambda) = (P_\lambda u, v) \end{array}$$

peut être interprétée comme la fonction de répartition de la mesure de Radon bornée complexe

$$\nu_{u,v} = \frac{1}{4} \left(\mu_{u+v} - \mu_{u-v} + i\mu_{u-iv} - i\mu_{u+iv} \right),$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(P_\lambda u, v) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu_{u,v}.$$

Notons que l'é galité (8) peut être vue comme une gé né ralisation de la formule de Parseval.

Preuve du Théorème 9.

Preuve de la première assertion. Soit $(P_B)_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ la mesure spectrale associée à $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue donc uniformément continue sur le compact $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|\lambda - \lambda'| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(\lambda) - f(\lambda')| \leq \epsilon.$$

Soit deux partitions de $[a, b]$

$$a = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = b$$

et

$$a = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m = b$$

telles que $\sup |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \leq \eta/2$ et $\sup |\mu_{k+1} - \mu_k| \leq \eta/2$. Soit pour tout k, $\lambda'_k \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ et $\mu'_k \in]\mu_k, \mu_{k+1}]$. Soit

$$a = \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l = b$$

la partition résultant des deux précédentes. On a

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\lambda'_k)(P_{\lambda_{k+1}}-P_{\lambda_k})u-\sum_{k=1}^{m-1} f(\mu'_k)(P_{\mu_{k+1}}-P_{\mu_k})u = \sum_{k=1}^{l-1} \epsilon_k(P_{\nu_{k+1}}-P_{\nu_k})u = \sum_{k=1}^{l-1} \epsilon_k P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}u$$

avec pour tout $1 \leq k \leq l-1$,

$$|\epsilon_k| \leq \epsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{l-1} \epsilon_k P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}u\right\|^2 &= \sum_{k=1}^{l-1}\sum_{k'=1}^{l-1} \epsilon_k\,\epsilon'_k \left(P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}u, P_{]\nu_{k'},\nu_{k'+1}]}u\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l-1}\sum_{k'=1}^{l-1} \epsilon_k\,\epsilon'_k \left(u, P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}P_{]\nu_{k'},\nu_{k'+1}]}u\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l-1} \epsilon_k^2 \|P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}u\|^2 \\
&\leq \epsilon^2 \sum_{k=1}^{l-1} \|P_{]\nu_k,\nu_{k+1}]}u\|^2 \\
&= \epsilon^2 \|P_{]a,b]}u\|^2 \\
&\leq \epsilon^2 \|u\|^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille des sommes de Riemann est de Cauchy, donc converge dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ lorsque le pas η de la partition de $[a, b]$ tend vers zéro.

Cela montre la première assertion.

Preuve de la deuxième assertion.

- Montrons que les conditions (a) et (b) sont équivalentes.

  Soit $-\infty < \alpha \leq \beta < +\infty$ et $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \beta$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda'_k)(P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k})u\right\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(\lambda'_k)|^2 \left\|(P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k})u\right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |f(\lambda'_k)|^2 \left(\left\|P_{\lambda_{k+1}}u\right\|^2 - \|P_{\lambda_k}u\|^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |f(\lambda'_k)|^2 \left(F_u(\lambda_{k+1}) - F_u(\lambda_k)\right).
\end{aligned}$$

  En faisant tendre $\max|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$ vers 0, on obtient l'égalité

$$\left\|\int_\alpha^\beta f(\lambda)\, dP_\lambda u\right\|^2 = \int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2\, d\|P_\lambda u\|^2,$$

  de laquelle découle directement l'équivalence entre (a) et (b).

- Montrons que (c) implique (b).

  Soit $u \in \mathcal{H}$ et $-\infty < a < b < +\infty$. Posons $v = \displaystyle\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda u$. En appliquant l'opérateur $P_{]a,b]}$ à une somme de Riemann approchant l'intégrale, on obtient

$$v = P_{]a,b]} v.$$

  On a donc

$$\begin{aligned}
F(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v) \\
&= \lim_{\alpha \to -\infty,\ \beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v) \\
&= \lim_{\alpha \to -\infty,\ \beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)}\, d(P_\lambda u, P_{]a,b]} v) \\
&= \lim_{\alpha \to -\infty,\ \beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)}\, d(P_{]a,b]} P_\lambda u, v) \\
&= \int_a^b \overline{f(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v) \\
&= \left(\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda u, v \right) \\
&= \|v\|^2.
\end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\|v\|^2 = F(v) \leq \|F\|\, \|v\|, \quad \text{et donc que} \quad \|v\| \leq \|F\|.$$

  Par ailleurs,

$$\|v\|^2 = \left\| \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda u \right\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2\, d\|P_\lambda u\|^2.$$

  Il s'en suit

$$\int_a^b |f(\lambda)|^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \leq \|F\|^2,$$

  et on obtient (b) en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$.

- Montrons que (b) implique (c).

  On a pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\left| \int_a^b \overline{f(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v) \right| = \left| \left(\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda u, v \right) \right| \leq \left(\int_a^b |f(\lambda)|^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \right)^{1/2} \|v\|.$$

  Il en résulte que $F(v)$ est bien définie et que $v \mapsto F(v)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de continuité

$$|F(v)| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \right)^{1/2} \|v\|.$$

$\square$

4.2 Théorème de décomposition spectrale

Théorème 10. *Soit* $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *une famille spectrale. A* $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *on peut associer l'opérateur* T *défini sur le domaine*

$$D(T) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \, d\|P_\lambda u\|^2 < +\infty \right\}. \tag{9}$$

par

$$\forall u \in D(T), \quad Tu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda u. \tag{10}$$

L'opérateur T *est un opérateur linéaire auto-adjoint.*

On écrit souvent

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dP_\lambda, \qquad T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda.$$

Cela signifie que $\forall u \in \mathcal{H}$, les sommes de Riemann associées à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP_\lambda u$$

convergent vers x, et que $\forall u \in D(T)$, les sommes de Riemann associées à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda u$$

convergent vers Tu.

Preuve. D'après la proposition précédente, (10) définit clairement un opérateur linéaire sur le domaine $D(T)$. On a de plus

$$\forall u \in D(T), \quad \forall v \in \mathcal{H}, \qquad (Tu, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(P_\lambda u, v).$$

Il reste à prouver que T est auto-adjoint.

- Montrons d'abord que $D(T)$ est dense. Soit $v \in \mathcal{H}$ et $v_n = P_{]-n,n]} v$. Il est clair que $v_n \in D(T)$ et que $v_n \to v$.
- Soit maintenant $u \in D(T)$ et $v \in D(T)$. On a

$$\begin{aligned}
(Tu, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(P_\lambda u, v) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(u, P_\lambda v) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\,\overline{(P_\lambda v, u)} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(P_\lambda v, u)} \\
&= \overline{(Tv, u)} = (u, Tv).
\end{aligned}$$

  Donc T est symétrique.

- Soit enfin $u \in D(T^*)$. Soit $v \in \mathcal{H}$ et $-\infty < a < b < +\infty$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda\, d(P_\lambda u, v) &= \left(u, \int_a^b \lambda\, dP_\lambda v\right) \\ &= (u, TP_{]a,b]}v) \\ &= (P_{]a,b]}T^*u, v) \quad \underset{a\to-\infty,\, b\to+\infty}{\longrightarrow} (T^*u, v).\end{aligned}$$

  Donc, pour tout $v \in \mathcal{H}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(P_\lambda u, v) = (T^*u, v).$$

  Comme $v \mapsto (T^*u, v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, il en résulte que $u \in D(T)$.

Donc T est auto-adjoint. □

Grâce au théorème ci-dessus, on peut donc définir l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S} &\to \mathcal{A} \\ (P_\lambda) &\mapsto T \text{ défini par (9)-(10)}\end{aligned}$$

où on a noté $\mathcal{A}$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles spectrales sur $\mathcal{H}$.

On peut maintenant énoncer le théorème spectral, qui prend plusieurs formes é quivalentes.

Théorème 11 (version "mesure spectrale" du théorème spectral)**.** *L'application $\mathcal{F}$ définit une correspondance biunivoque entre les familles spectrales et les opérateurs auto-adjoints. Etant donné un opérateur auto-adjoint T sur $\mathcal{H}$, la mesure spectrale $(P_B^T)_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ associée à l'unique famille spectrale $(P_\lambda^T)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ telle qu'on ait (9)-(10) est caractérisée par*

$$\frac{1}{2}\left(P^T_{]a,b[} + P^T_{[a,b]}\right) = \underset{\epsilon\to 0^+}{\text{s-lim}} \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \left(R_{\lambda-\epsilon}(T) - R_{\lambda+\epsilon}(T)\right) d\lambda \tag{11}$$

où $(R_z(T))_{z\in\rho(T)}$ est la résolvante de T.

Théorème 12 (version "calcul fonctionnel" du théorème spectral)**.** *Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'algèbre commutative des fonctions boréliennes borné es. Si T est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, il existe une unique application*

$$\begin{aligned}\Phi_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \Phi_T(f) = f(T)\end{aligned}$$

vérifiant les proprié tés suivantes :

1. *Φ_T est un $*$-homé omorphisme d'algèbres :*

$$(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T), \quad (fg)(T) = f(T)g(T), \quad \overline{f}(T) = f(T)^*;$$

2. *$\|f(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_{L^\infty}$;*

3. *soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $R_z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par $R_z(x) = (z-x)^{-1}$. Alors $R_z(T) = (z-T)^{-1}$ (l'inverse de l'opérateur $z - T$) ;*

4. *si $f_n(x) \to x$ et $|f_n(x)| \leq |x|$ pour tout n et tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall u \in D(T)$, $f_n(T)u \to Tu$ dans $\mathcal{H}$;*

5. *si $f_n(x) \to f(x)$ simplement et $\sup \|f_n\|_{L^\infty} < \infty$, alors $\forall u \in \mathcal{H}$, $f_n(A)u \to f(A)u$ dans $\mathcal{H}$;*

6. *si $u \in \mathcal{H}$ est tel que $Au = \lambda u$, alors $f(A)u = f(\lambda)u$.*

Le lien entre les deux versions du théorème spectral se fait en remarquant que pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$, $P_B^T = \mathbb{1}_B(T)$, où $\mathbb{1}_B$ est la fonction caracté ristique de B.

Remarque 8. *On peut en fait définir l'opérateur (non-né cessairement borné) $f(T)$ sur $\mathcal{H}$ dès que T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ et f une fonction borélienne (non-né cessairement borné e) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par*

$$D(f(T)) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\|P_\lambda^T u\|^2 < +\infty \right\},$$

et

$$\forall u \in D(f(T)), \quad f(T)u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, dP_\lambda^T u,$$

où $(P_\lambda^T)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ désigne la famille spectrale associée à l'opérateur T.

4.3 Liens entre spectre et mesure spectrale

Théorème 13. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, $(P_\lambda^T)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille spectrale et $(P_B^T)_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ la mesure spectrale qui lui sont associées. On a les propriétés suivantes :*

1. *$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*

2. *Si $T \geq cI$, alors $\sigma(T) \subset [c, +\infty[$.*

3. *Si T est borné, $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ et au moins l'une des deux extrémités de l'intervalle est dans $\sigma(T)$;*

4. *$\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $P_{\{\lambda_0\}}^T \neq 0$ (ou de façon équivalente si $P_{\lambda_0}^T \neq P_{\lambda_0 - 0}^T$). Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_0 est alors*

$$E_{\lambda_0} = \mathrm{Ran}(P_{\{\lambda_0\}}^T) = \mathrm{Ran}(P_{\lambda_0}^T - P_{\lambda_0 - 0}^T) \ ;$$

5. *$\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ si et seulement si*

   (a) *$P_{\{\lambda_0\}}^T = 0$ (autrement dit si $P_{\lambda_0 - 0}^T = P_{\lambda_0}^T$),*

   (b) *$P_{]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 - \epsilon]}^T \neq 0$ (i.e. $P_{\lambda_0 - \epsilon}^T \neq P_{\lambda_0 + \epsilon}^T$) , pour tout $\epsilon > 0$;*

6. *$\sigma_r(T) = \emptyset$.*

Ce théorème signifie que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est le support de l'unique mesure spectrale qui lui est associée. Le spectre ponctuel correspond à la partie atomique de cette mesure et le spectre continu à la partie continue de cette mesure.

Preuve. Pour allé ger les notations, on note P_λ et P_B au lieu de P_λ^T et P_B^T.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{Ran}(\lambda - T) = \mathcal{H}$ et on vérifie facilement que
$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|},$$
ce qui montre que $\lambda \in \rho(T)$.

2. Soit $\lambda < c$. Posons $\alpha = c - \lambda > 0$. On a pour tout $u \in D(T)$
$$((T - \lambda)u, u) = ((T - c)u, u) + \alpha\|u\|^2.$$
Comme $T - c$ est un opérateur positif, on a
$$((T - \lambda)u, u) \geq \alpha\|u\|^2.$$
Donc $T - \lambda$ est coercif. On en déduit facilement que $\lambda \in \rho(T)$.

3. L'assertion 3 a déjà été établie précédemment (cf. Proposition 1).

4. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $u \in D(T)$
$$(T - \lambda_0)u = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)\, dP_\lambda u$$
et donc
$$\|(T - \lambda_0)u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2.$$
Supposons $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. Soit u vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_0. On a pour tout $\epsilon > 0$
$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \geq \epsilon^2 \int_{|\lambda-\lambda_0|>\epsilon} d\|P_\lambda u\|^2 = \epsilon^2 \left(\|P_{\lambda_0-\epsilon}u\|^2 + \|u - P_{\lambda_0+\epsilon}u\|^2\right).$$
Il s'en suit que
$$\forall \epsilon > 0, \quad P_{\lambda_0-\epsilon}u = 0, \quad P_{\lambda_0+\epsilon}u = u.$$
D'où comme $\lambda \mapsto P_\lambda$ est fortement continue à droite,
$$(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})u = u,$$
ce qui prouve que
$$E_{\lambda_0} \subset (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\mathcal{H}.$$
Réciproquement, soit λ_0 tel que $P_{\lambda_0} \neq P_{\lambda_0-0}$. Soit $u \in (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\mathcal{H}$, $u \neq 0$ et $v \in \mathcal{H}$ tel que $u = (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})v$. On a immédiatement $u \in D(T)$ et donc
$$\|(T - \lambda_0)u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2. \tag{12}$$
Mais
$$\begin{aligned}
\|P_\lambda u\|^2 &= (P_\lambda u, P_\lambda u) \\
&= (P_\lambda u, u) \\
&= (P_\lambda (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})v, u) \\
&= \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \lambda < \lambda_0 \\ ((P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})v, u) = \|u\|^2 & \text{si } \lambda > \lambda_0. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc
$$d\|P_\lambda u\|^2 = 0 \quad \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}\,,$$
et (12) implique $Tu = \lambda_0 u$. D'où
$$(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0 - 0})\mathcal{H} \subset E_{\lambda_0}.$$

5. Prouvons le point 6. Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \sigma_r(T)$. On a alors
$$\overline{\mathrm{Ran}(\lambda_0 - T)} \neq \mathcal{H}.$$
Donc il existe un v non nul dans $\mathrm{Ran}(\lambda_0 - T)^\perp$. Pour ce v
$$\forall u \in D(T), \quad ((\lambda_0 - T)u, v) = 0.$$
Comme en outre λ_0 est réel, il vient
$$\forall u \in D(T), \quad (Tu, v) = \lambda_0 (u, v) = (u, \lambda_0 v).$$
On en déduit que $v \in D(T^*) = D(T)$ et que $Tv = \lambda_0 v$. Donc $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \cap \sigma_r(T)$, ce qui est contradictoire.

6. Il reste à prouver le point 5.

Soit $\lambda_0 \notin \sigma(T)$. Alors $(\lambda_0 - T)^{-1}$ existe et est continu. Il existe donc un $\alpha > 0$ tel que
$$\forall u \in D(T), \quad \|(\lambda_0 - T)u\| \geq \alpha \|u\|.$$
D'après (12) on a donc
$$\forall u \in D(T), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \geq \alpha^2 \|u\|^2. \tag{13}$$
Supposons que $P_{\lambda_0} = P_{\lambda_0 - 0}$ mais que $P_{\lambda_0+\epsilon} - P_{\lambda_0-\epsilon} \neq 0$ pour tout $\epsilon > 0$. Il existerait alors $0 < \epsilon < \alpha$ et $y \in \mathcal{H}$ tel que $(P_{\lambda_0+\epsilon} - P_{\lambda_0-\epsilon})y = u \neq 0$. On a
$$d\|P_\lambda u\|^2 = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \lambda \leq \lambda_0 - \epsilon \\ d\|P_\lambda u\|^2 & \text{si } \lambda_0 - \epsilon < \lambda \leq \lambda_0 + \epsilon \\ 0 & \text{si } \lambda > \lambda_0 + \epsilon \end{array} \right.$$
Il est clair que $u \in D(T)$. De plus en appliquant (13) à x, on obtient
$$\begin{aligned} \epsilon^2 \|u\|^2 &= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\|P_\lambda u\|^2 \\ &= \epsilon^2 \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} d\|P_\lambda u\|^2 \\ &\geq \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|P_\lambda u\|^2 \\ &= \|(T - \lambda_0)u\|^2 \geq \alpha^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$
ce qui est une contradiction.

Réciproquement, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$P_{\lambda_0-\epsilon} = P_{\lambda_0+\epsilon}$$

on a pour tout $u \in D(T)$,

$$\begin{aligned}
\|(T-\lambda_0)u\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d\|P_\lambda u\|^2 \\
&= \int_{|\lambda-\lambda_0|>\epsilon} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d\|P_\lambda u\|^2 \\
&\geq \epsilon^2 \int_{|\lambda-\lambda_0|>\epsilon} d\|P_\lambda u\|^2 \\
&= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\|P_\lambda u\|^2 \\
&= \epsilon^2 \|u\|^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que $T - \lambda_0$ est coercif, d'où il découle que $\lambda_0 \in \rho(T)$.

□

5 Spectre essentiel et spectre discret

Définition 10. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le spectre $\sigma(T)$ est la ré union de deux ensembles disjoints :*

- *Le spectre discret*

$$\sigma_d(T) = \{ \text{ ensemble des valeurs propres isolé es de } T \text{ de multiplicité finie } \}$$

- *Le spectre essentiel*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_d(T)$$

Le spectre essentiel comprend donc

- le spectre continu,
- les valeurs propres qui sont plongé es dans le spectre continu,
- les valeurs propres isolé es de multiplicité infinie.

Il possède la proprié té importante d'être stable par perturbation relativement compacte.

La proposition suivante fournit une caracté risation pratique du spectre essentiel basé e sur la notion de suite de Weyl.

Proposition 5. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont é quivalentes :*

1. $\lambda_0 \in \sigma_{\text{ess}}(T)$
2. *il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $D(T)$ telle que*

$$\begin{cases} \|u_n\| = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement) dans } \mathcal{H} \\ Tu_n - \lambda_0 u_n \to 0 \text{ (fortement) dans } \mathcal{H}. \end{cases} \tag{14}$$

Une telle suite est appelé e une suite de Weyl.

Une suite de Weyl peut être considé ré e comme une suite de "quasi" vecteurs propres.

Preuve. Let $\lambda_0 \in \sigma_{\rm ess}(T)$. If λ_0 is an eigenvalue of T of infinite multiplicity, any orthonormal basis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $\mathrm{Ker}(\lambda_0 - T)$ satisfies (14). Let us now consider the case when λ_0 is not an eigenvalue of T of infinite multiplicity. Up to replacing $\mathcal{H}$ with the T-stable space $E = \mathrm{Ker}(T-\lambda_0)^\perp$, and T with $T_E : E \to E$, one can always assume, without restriction, that $\mathrm{Ker}(T-\lambda_0) = 0$. As $\lambda_0 \in \sigma(T)$, one has $\mathrm{Ran}(T-\lambda_0) \neq \overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda_0)} = \mathcal{H}$. Let $w \in \mathcal{H} \setminus \mathrm{Ran}(T-\lambda_0)$, and $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of elements of $\mathrm{Ran}(T-\lambda_0)$ which converges to w in $\mathcal{H}$. Let $v_n \in D(T)$ such that $(T-\lambda_0)v_n = w_n$. Let us now prove that the sequence $\|v_n\| \to +\infty$. By contradiction, assume that $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ has a bounded subsequence and consider a subsequence $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ of $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which weakly converges to some $v \in \mathcal{H}$. Then

$$\begin{aligned}\forall x \in D(T), \quad (x,w) &= \lim_{k\to+\infty}(x, w_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty}(x,(T-\lambda_0)v_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to+\infty}((T-\lambda_0)x, v_{n_k}) = ((T-\lambda_0)x, v).\end{aligned}$$

As T is self-adjoint, one obtains $v \in D(T^*) = D(T)$ and $(T-\lambda_0)v = w$. We reach a contradiction. Therefore $\|v_n\| \to +\infty$ and the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n/\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies (14). Indeed, one clearly has $\|u_n\| = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $Tu_n - \lambda_0 u_n = w_n/\|v_n\| \to 0$. Lastly, one can extract from the bounded sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a subsequence $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ which weakly converges toward some $u \in H$. One then has

$$\begin{aligned}\forall x \in D(T), \quad (u,(T-\lambda_0)x) &= \lim_{k\to+\infty}(u_{n_k},(T-\lambda_0)x) \\ &= \lim_{k\to+\infty}(T-\lambda_0)u_{n_k}, x) = 0,\end{aligned}$$

which implies $u = 0$. Therefore the whole sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weakly converges to zero.

Conversely, assume that there exists a sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of vectors of $D(T)$ satisfying (14). Then $\lambda_0 \in \sigma(T)$ (otherwise, $(T-\lambda_0)^{-1}$ would be a bounded operator and one would have $u_n = (T-\lambda_0)^{-1}(Tu_n - \lambda_0 u_n) \to 0$, which would contradict the fact that $\|u_n\| = 1$ for all n). Assume that $\lambda_0 \in \sigma_d(T)$ and denote by $F = \mathrm{Ker}(T-\lambda_0)$ the finite dimensional eigenspace associated with λ_0. It is easy to check that F and $F^\perp$ are T-stable and that $S = (T-\lambda_0)|_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ has a bounded inverse. Now, each u_n can be decomposed as $u_n = v_n + w_n$ with $v_n \in F$ and $w_n \in F^\perp$. As F is finite dimensional, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strongly converges to zero. Besides, $w_n = S^{-1}Sw_n = S^{-1}(Tu_n - \lambda_0 u_n) \to 0$. This implies that $u_n \to 0$. We reach a contradiction. Consequently, $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_d(T) = \sigma_{\rm ess}(T)$. □

5.1 Théorème de Weyl

Théorème 14 (Weyl)**.** *. Soit H_0 un opérateur auto-adjoint et W un opérateur symétrique H_0-compact. Alors l'opérateur $H = H_0 + W$ de domaine $D(H) = D(H_0)$ est auto-adjoint et*

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0).$$

On rappelle (cf. définition 7) que l'opérateur W est dit H_0-compact (ou relativement compact par rapport à H_0) si W est un opérateur compact de $D(H_0)$, muni de la norme du graphe, dans $\mathcal{H}$, soit, de manière é quivalente, s'il existe $z \in \rho(H_0)$ tel que l'opérateur $W(z-H_0)^{-1}$ soit dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Il résulte alors de la formule de la résolvante que $W(z-H_0)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ pour tout $z \in \rho(H_0)$.

Preuve du Théorème 14. Nous allons d'abord montrer que W est H_0-borné de borne relative nulle. On pourra ainsi dé duire du théorème de Kato-Rellich que H est auto-adjoint. Par l'absurde, supposons qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on puisse trouver un certain $u_n \in D(T)$ tel que

$$a\|H_0 u_n\| + n\|u_n\| < \|W u_n\|.$$

Quitte à remplacer u_n par $u_n/\|Wu_n\|$, on peut toujours supposer que $\|Wu_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en dé duit que $u_n \to 0$ (fortement) dans $\mathcal{H}$ et que la suite $(H_0 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{H}$. Or,

$$Wu_n = (W(H_0 + i)^{-1})((H_0 u_n + iu_n).$$

Comme la suite $(H_0 u_n + iu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, et comme l'opérateur $W(H_0 + i)^{-1}$ est compact, on peut extraire de la suite $(Wu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(Wu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge fortement vers un certain $v \in \mathcal{H}$ vérifiant $\|v\| = 1$ puisque $\|Wu_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $(u_{n_k}, Wu_{n_k}) \to (0, v)$ dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Comme $v \neq 0$, $(0, v) \notin \Gamma(W)$, ce qui contredit le fait que le graphe de W est fermable puisque W est symétrique (cf. Remarque 7).

It remains to prove that $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$. Let us first show that $\sigma_{\rm ess}(H_0) \subset \sigma_{\rm ess}(H)$. Let $\lambda \in \sigma_{\rm ess}(H_0)$ et let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a Weyl sequence, i.e.

$$u_n \in D(H_0), \quad \|u_n\| = 1, \quad u_n \rightharpoonup 0, \quad (H_0 - \lambda)u_n \to 0.$$

It holds

$$(H - \lambda)u_n = (H_0 - \lambda)u_n + Wu_n \tag{15}$$

and the second term of the right hand side can be rewritten as

$$Wu_n = W(H_0 - i)^{-1}(H_0 - i)u_n.$$

We now remark that $(H_0 - i)u_n = (H_0 - \lambda)u_n + (\lambda - i)u_n \rightharpoonup 0$. As $W(H_0 - i)^{-1}$ is compact, it follows that on the one hand $Wu_n \rightharpoonup 0$, and that on the other hand one can extract from any subsequence of $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a subsequence $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ such that $(Wu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ strongly converges in $\mathcal{H}$. Consequently, the whole sequence $(Wu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strongly converges to 0. Using (15), we obtain that $(H - \lambda)u_n \to 0$, which proves that $\lambda \in \sigma_{\rm ess}(H)$.

In order to establish that $\sigma_{\rm ess}(H) \subset \sigma_{\rm ess}(H_0)$, we just have to show that $-W$ is H-compact (this will allow us to intertwine the roles played by H_0 and H). Let $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence in $D(H)$ endowed with the graph norm of H and $C \in \mathbb{R}_+$ such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|v_n\| + \|Hv_n\| \leq C.$$

We have seen previously that W was H_0-bounded with relative bound equal to zero. In particular, there exists a constant $c \in \mathbb{R}_+$ such that

$$\forall u \in D(H) = D(H_0), \quad \|Wu\| \leq 1/2\|H_0 u\| + c\|u\|,$$

from which we infer that

$$\forall u \in D(H) = D(H_0), \quad \|H_0 u\| \leq \|Hu\| + \|Wu\| \leq \|Hu\| + 1/2\|H_0 u\| + c\|u\|.$$

Therefore

$$\forall u \in D(H) = D(H_0), \quad \|H_0 u\| \leq 2\|Hu\| + 2c\|u\|.$$

It follows that the sequence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $D(H_0) = D(H)$ endowed with the graph norm of H_0. As W, hence $-W$, is H_0-compact, we can extract from $(-Wv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a subsequence strongly converging in $\mathcal{H}$. Therefore, $-W$ is H-compact. □

5.2 Formules de Courant-Fischer

Théorème 15 (Principe du minmax, formules de Courant-Fischer)**.** *Soit H un opérateur auto-adjoint borné infé rieurement. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lambda_n(H) = \inf_{V \in \mathcal{V}_n} \sup_{\psi \in V, \|\psi\|=1} (H\psi, \psi) \tag{16}$$

où $\mathcal{V}_n$ dé signe l'ensemble des sous-espaces de $D(H)$ de dimension n. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

- *soit H possède au moins n valeurs propres (compté es avec leurs multiplicité s) infé rieures à $\min(\sigma_{\text{ses}}(H))$, et λ_n est alors la n-ième valeur propre de H,*
- *soit H possède au plus $n-1$ valeurs propres (compté es avec leurs multiplicité s) infé rieures à $\min(\sigma_{\text{ses}}(H))$, et on a alors $\lambda_n(H) = \min(\sigma_{\text{ses}}(H))$.*

Démonstration.

Première é tape : Montrons que

$$a < \lambda_n(H), \quad \Rightarrow \quad \dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})) < n$$

Supposons que

$$\dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})) \geq n \;;$$

soit alors $V \subset \text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})$ de dimension n. On a

$$\sup_{\psi \in V, \|\psi\|=1} (H\psi, \psi) \leq a$$

et donc $\lambda_n(H) \leq a$.

Deuxième é tape : Montrons que

$$a > \lambda_n(H), \quad \Rightarrow \quad \dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})) \geq n.$$

Supposons que

$$\dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})) \leq n-1 \;;$$

alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_n$, $V \cap \text{Ran}(\Pi_{]a,+\infty[}) = V \cap \text{Ran}(\Pi_{]-\infty,a]})^\perp \neq \emptyset$. Soit donc $u \in V \cap \text{Ran}(\Pi_{]a,+\infty[})$ de norme 1. On a

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} (v, Hv) \geq (u, Hu) \geq a.$$

D'où $\lambda_n(H) \geq a$.

Troisième é tape : Montrons que si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,\lambda_n(H)+\epsilon]})) = \infty$$

alors $\lambda_n(H) = \min(\sigma_{\text{ses}}(H))$ et il y a au plus $n-1$ valeurs propres (compté es avec leurs multiplicité s) strictement infé rieures à $\lambda_n(H)$.

On a

$$\forall \epsilon > 0, \quad \dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,\lambda_n(H)-\epsilon]})) \leq n-1 \quad \text{ et } \quad \dim(\text{Ran}(\Pi_{]-\infty,\lambda_n(H)+\epsilon]})) = \infty$$

Donc,

- soit $\dim(\mathrm{Ran}(P_{\lambda_n(H)} - P_{\lambda_n(H)-0})) = 0$, auquel cas $\lambda_n(H) \in \sigma_c(H) \subset \sigma_{ess}(H)$;
- soit $\dim(\mathrm{Ran}(P_{\lambda_n(H)} - P_{\lambda_n(H)-0})) = +\infty$ auquel cas $\lambda_n(H) \in \sigma_{ess}(H)$ car $\lambda_n(H)$ est une valeur propre de multiplicité infinie ;
- soit $\dim(\mathrm{Ran}(P_{\lambda_n(H)} - P_{\lambda_n(H)-0})) \in \mathbb{N}^*$, auquel cas $\lambda_n(H) \in \sigma_{ess}(H)$ car $\lambda_n(H)$ est une valeur propre non isolé e.

Soit maintenant $a < \lambda_n(H)$. Il existe $\epsilon > 0$ pour lequel

$$\dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]a-\epsilon,a+\epsilon]}) \leq \dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]-\infty,a+\epsilon]}) \leq \dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]-\infty,\lambda_n(H)-\epsilon]})) \leq n-1.$$

Donc $a \notin \sigma_{ess}(H)$. Donc $\lambda_n(H)$ est bien le bas du spectre essentiel. Un raisonnement é lé mentaire montre qu'il ne peut pas y avoir plus de $n-1$ valeurs propres en dessous de $\lambda_n(H)$.

Quatrième é tape : Montrons que si

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]-\infty,\lambda_n(H)+\epsilon_0]})) < \infty$$

alors il y a n valeurs propres infé rieures ou é gale à $\min(\sigma_{\mathrm{ses}}(H))$ et $\lambda_n(H)$ est la n-ième plus petite valeur propre de H.

En effet, de par les deux premières é tapes

$$\forall \epsilon > 0, \quad \dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]\lambda_n(H)-\epsilon,\lambda_n(H)+\epsilon]})) \geq 1.$$

Donc $\lambda_n(H) \in \sigma(H)$. Comme de plus

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \dim(\mathrm{Ran}(\Pi_{]\lambda_n(H)-\epsilon_0,\lambda_n(H)+\epsilon_0]})) < \infty,$$

on a $\lambda_n(H) \in \sigma_d(H)$.

Un raisonnement simple montre que $\lambda_n(H)$ est né cessairement la n-ième plus petite valeur propre de H (en tenant compte des multiplicité s). $\square$

5.3 Application : état fondamental d'un opérateur de Schrödinger

Théorème 16 (Caracté risation du fondamental d'un opérateur de Schrödinger)**.** . *On considère l'opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ défini formellement par*

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + W$$

où

$$W \in L^2 + L^\infty_\epsilon = \{W \quad / \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists W_2 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \exists W_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^3),\ \|W_\infty\|_{L^\infty} \leq \epsilon,\ W = W_2 + W_\infty\}.$$

Alors

1. *H définit un opérateur auto-adjoint non borné de domaine $D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$ et $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty[$.*
2. *Supposons en outre qu'il existe $u \in D(H)$ tel que*

$$(u, Hu) < 0.$$

Alors

(a) H possède au moins une valeur propre strictement né gative ;

(b) pour tout $\epsilon > 0$, H possède au plus un nombre fini de valeurs propres (compté es avec leurs multiplicité s) infé rieures à $-\epsilon$;

(c) la plus petite valeur propre de H est simple. Le fondamental u_0 de H est donc unique à une phase globale près et peut être choisi strictement positif ;

(d) si $u \geq 0$ est un vecteur propre normalisé de H, alors $u = u_0$.

Preuve.
Preuve de l'assertion 1.

Posons $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. On sait que l'opérateur H_0 de domaine $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ et que $\sigma_{ess}(H_0) = [0, +\infty[$.

Soit $u \in D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$. On a $u \in L^2 \cap L^\infty$, donc $u^2 \in L^1 \cap L^\infty$. Par ailleurs $W^2 \in L^1 + L^\infty$. Donc $W^2 u^2 \in L^1$. Il en découle que $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3) \subset D(W)$. Comme W est réel, W définit un opérateur symétrique. Pour pouvoir conclure à l'aide du théorème de Weyl, il reste à montrer que W est H_0-compact.

Soit une suite (u_n) bornée par $M > 0$ dans $H^2(\mathbb{R}^3)$. De (u_n) on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) telle que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \qquad \text{dans } H^2 \text{ faible}$$

$$u_{n_k} \longrightarrow u^* \qquad \text{presque partout.}$$

Soit $\epsilon > 0$, et une dé composition de W en $W_2 + W_\infty$ pour laquelle $\|W_\infty\|_{L^\infty} \leq \epsilon/4M$. On a

$$\begin{aligned}
\|Wu_{n_k} - Wu^*\|_{L^2} &\leq \|W_2(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2} + \|W_\infty(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2} \\
&\leq \|W_2(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2} + \|W_\infty\|_{L^\infty}\|(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2} \\
&\leq \|W_2(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2} + \epsilon/2.
\end{aligned}$$

Mais

$$\|W_2(u_{n_k} - u^*)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} W_2^2(u_{n_k} - u^*)^2 \longrightarrow 0.$$

En effet,

$$W_2^2(u_{n_k} - u^*)^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{presque partout}$$

et

$$\begin{aligned}
|W_2(x)^2(u_{n_k}(x) - u^*(x))^2| &\leq 2\,(\sup \|u_{n_k}\|_{L^\infty})\, W_2(x)^2 \\
&\leq C\,(\sup \|u_{n_k}\|_{H^2})\, W_2(x)^2 \leq CMW_2(x)^2 \in L^1(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

Donc la suite Wu_{n_k} converge vers Wu^* dans L^2. Donc W est H_0-compact.

Preuve de l'assertion 2a.

vérifions tout d'abord que H est borné infé rieurement. Pour cela posons pour $n \geq 1$

$$W_n = \sup\left(\inf(W, n), -n\right).$$

On vérifie facilement que pour tout $n \geq 1$,

$$W_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad W - W_n \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \|W_n\|_{L^\infty} \leq n, \quad \|W - W_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$. On a

$$\begin{aligned}
(u, Hu) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} W u^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (W - W_n) u^2 + \int_{\mathbb{R}^3} W_n u^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|W - W_n\|_{L^2} \|u\|_{L^4}^2 - \|W_n\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C\|W - W_n\|_{L^2} \|u\|_{H^1}^2 - n\|u\|_{L^2}^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - C\|W - W_n\|_{L^2}\right) \|\nabla u\|_{L^2}^2 - (n + C\,\|W - W_n\|_{L^2})\,\|u\|_{L^2}^2 \\
&\geq -b_n \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

pour n assez grand.

Supposons qu'il existe $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$(u, Hu) < 0.$$

Il en résulte en particulier que

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in H^2(\mathbb{R}^3),\ \|\phi\|_{L^2}=1} (\phi, H\phi) < 0.$$

Comme $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty[$, on dé duit du principe du minmax que λ_1 est la plus petite valeur propre de H.

Preuve de l'assertion 2b.

Supposons qu'il existe un certain $\epsilon > 0$ tel que H admette une infinité de valeurs propres (compté es avec leurs multiplicité s) infé rieures à $-\epsilon$. On pourrait alors extraire une suite de valeurs propres qui converge vers un certain $\lambda < 0$. Né cessairement, $\lambda \in \sigma(H)$ car $\sigma(H)$ est un ensemble fermé . On aurait alors

- λ est valeur propre de multiplicité infinie
- ou bien λ n'est pas une valeur propre isolé e.

Dans les deux cas $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$, ce qui contredit le fait que $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty[$.

Preuve de l'assertion 2c.

Comme λ_1 est valeur propre, il existe $u_1 \in D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$, normalisé pour la norme L^2 tel que

$$-\frac{1}{2}\Delta u_1 + W u_1 = \lambda_1 u_1.$$

Il résulte du principe du minmax que u_1 est un minimiseur du problème

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in H^2(\mathbb{R}^3),\ \|\phi\|_{L^2}=1} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 \ + \int_{\mathbb{R}^3} W \phi^2.$$

Etant donné que

- la quantité

  $$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 \ + \int_{\mathbb{R}^3} W |\phi|^2$$

  est bien définie pour tout $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$,

- la fontionnelle

$$\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}^3) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} W|\phi|^2 \end{array}$$

  est continue,

- $H^2(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^3)$,

(vérifier tout cela en exercice) on a aussi

$$\lambda_1 = \inf_{\phi\in H^1(\mathbb{R}^3),\ \|\phi\|_{L^2}=1} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} W|\phi|^2.$$

Quitte à remplacer u_1 par $|u_1|$, on peut donc supposer $u_1 \geq 0$ (car si $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $|u| \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $|\nabla|u|| = |\nabla u|$).

Théorème 17 (Iné galité de Harnack)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $u \in H^1(\Omega)$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + Vu = 0 & \textit{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \textit{dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec $V \in L^p_{\rm loc}(\Omega)$ pour un certain $p \geq 3/2$. Alors, pour tout $R > 0$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall y \in \Omega \textit{ tel que } B_{4R}(y) \subset \Omega, \quad \sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u.$$

L'iné galité de Harnack est prouvé e par exemple dans

D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag 1983.

Il résulte de l'ingalité de Harnack que $u_1 > 0$. En effet, supposons qu'il existe x_0 tel que $u_1(x_0) = 0$. Alors u_1 serait nulle sur tout $\mathbb{R}^3$ (prendre $u = u_1$, $V = 2(W - \lambda_1)$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, $y = x_0$ et une suite (R_n) tendant vers l'infini), ce qui est impossible puisque $\|u_1\|_{L^2} = 1$.

Soit maintenant u un fondamental de H orthogonal à u_1. Dans ce cas $|u|$ est aussi un fondamental, et on obtient par Harnack $|u| > 0$. u tant dans $H^2(\mathbb{R}^3)$, u est une fonction continue. On a donc, ou bien $u > 0$ ou bien $u < 0$. Dans les deux cas, u ne peut pas être orthogonal à u_1. On aboutit ainsi à une contradiction.

Preuve de l'assertion 2d.

Soit $u \geq 0$ un vecteur propre de H. Tout vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda > \lambda_1$ est orthogonal à u_1. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1 u > 0,$$

u_1 est associé à la valeur propre λ_1. Or λ_1 est valeur propre simple. Donc $u = Cu_1$. u et u_1 sont normalisés et positifs. Il en résulte que $u = u_1$. $\square$

Références

[1] E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 42, Cambridge University Press, 1996.

[2] B. Helffer, *Spectral theory and its applications*, Cambridge University Press, 2013.

[3] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol I, Functional Analysis. Second Ed*, Academic Press, 1980.

[4] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV, Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.