

On Brownian Motion, Ito Calculus and the Feynman-Kac Formula

25 janvier 2016

Dans cette partie, nous allons aborder une façon probabiliste pour trouver le noyau $k_\beta(x, x')$ que nous avons trouvé avec le formule de Trotter dans la section précédente. Avant de commencer le calcul de ce noyau, nous allons introduire quelques notions qui nous serviront dans la suite.

1 Definitions

Definition 1.1. Processus de Markov

La séquence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Markov défini sur \mathbb{R}^d par rapport à la mesure de probabilité φ si \forall fonction $f \in \mathcal{C}_0$ tendant vers 0 à ∞ , la limite suivante existe (presque sûrement) :

$$E_\varphi(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X_n)$$

et on note $E_\varphi(f)$ l'espérance par rapport à la mesure φ

Definition 1.2. Ergodicité

Un processus est ergodique si il satisfait les conditions suivantes :

- φ est une mesure de probabilité invariant par le processus de Markov
- **Condition d'accessibilité** : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi(B) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\exists n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_n \in B | X_0 = x) > 0$$

Remark. 1. Nous avons défini les notions d'ergodicité sur \mathbb{R}^d , mais les memes definitions restent vraies pour le tore Π^d aussi.

2. Quand nous ferons les simulations en utilisant l'algorithme de Metropolis, il nous suffira de verifier que la probabilité de transfert pour l'algorithme de Metropolis satisfait la condition d'accessibilité dans la definition d'ergodicité.

Definition 1.3. Chaines de Markov

Une chaîne de Markov (discrète) est un processus de Markov défini par :

$$X_{n+1}^{\Delta t} = X_n^{\Delta t} + b(X_n^{\Delta t}) + \sqrt{\Delta t} \xi_n \quad (1)$$

$$X_0^{\Delta t} = f(x) \quad (2)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction reguliere. Ici $\xi_j \sim \mathcal{N}(0, 1)_{\mathbb{R}^d}$, c'est à dire que ξ_j est un vecteur gaussien de dimension d .

A partir d'une chaine de Markov discrete nous pouvons construit une chaine de Markov en temps continu en liant les instants de temps t_n et t_{n+1} de manière affine. Dans ce cas, nous avons avec les memes conditions que ci-dessus $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\tilde{X}_t^{\Delta t} = X_n^{\Delta t} + (t - t_n)X_{n+1}^{\Delta t} \quad (3)$$

$$(4)$$

Le processus $\tilde{X}_t^{\Delta t}$ a une limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \tilde{X}_t^{\Delta t} = X_t \quad (5)$$

où X_t suit l'equation differentielle stochastique donné par :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t \quad (6)$$