MAP 583 - Feuille d'exercices 3

28 janvier 2014

Exercice 1 (inégalité de Kato-Seiler-Simon pour $p = 2$). Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On note $f(x)$ l'opérateur de multiplication par f en représentation position et $g(p)$ l'opérateur de multiplication par g en représentation impulsion.

1a. Calculer le noyau intégral de l'opérateur $f(x)g(p)$.

1b. Montrer que l'opérateur $f(x)g(p)$ est dans $\mathfrak{S}_2(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))$ et que

$$\|f(x)g(p)\|_{\mathfrak{S}_2} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

1c. Déduire de la question précédente que si $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (V à valeurs réelles), l'opérateur

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V,$$

de domaine $D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ et que son spectre essentiel est $\sigma_{\text{ess}}(H) = \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 (formule de Trotter).

2a. Produit de Lie.

Soit A et B deux matrices de $\mathbb{R}^{N \times N}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre quelconque sur $\mathbb{R}^{N \times N}$ (autrement dit une norme sur $\mathbb{R}^{N \times N}$ telle que $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tout A et B dans $\mathbb{R}^{N \times N}$). On pose

$$S = \exp(A + B), \quad S_n = (\exp(A/n) \exp(B/n))^n,$$

$$\sigma_n = \exp((A + B)/n), \quad \tau_n = \exp(A/n) \exp(B/n).$$

Vérifier que

$$S - S_n = \sigma_n^n - \tau_n^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_n^k (\sigma_n - \tau_n) \tau_n^{n-1-k}.$$

Montrer qu'il existe une constante C_0 dépendant que A et B, mais pas de n, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|\sigma_n - \tau_n\| \leq C_0 n^{-2}.$$

En déduire qu'il existe une constante C_1 dépendant que A et B, mais pas de n, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|S - S_n\| \leq C_1 n^{-1}.$$

2b. On reprend les hypothèses de la question précédente, et on pose

$$\widetilde{S}_n = \exp(B/(2n))\,(\exp(A/n)\exp(B/n))^{n-1}\exp(A/(2n)).$$

Montrer qu'il existe un réel positif C_2 dépendant que A et B, mais pas de n, tel que

$$\|S - \widetilde{S}_n\| \leq C_2 n^{-2}.$$

On considère maintenant deux opérateurs auto-adjoints A et B sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que $A + B$ soit auto-adjoint sur $D = D(A) \cap D(B)$. Le but des questions suivantes est de montrer que

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \left(e^{iA/n}e^{iB/n}\right)^n = e^{i(A+B)}. \tag{1}$$

2c. Soit C un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(C)$. Montrer à l'aide du calcul fonctionnel que

$$\forall \phi \in D(C), \quad \lim_{s\to 0} s^{-1}(e^{isC} - 1)\phi = iC\phi.$$

2d. Pour $s \in \mathbb{R}^*$, on pose $K_s = s^{-1}\left(e^{isA}e^{isB} - e^{is(A+B)}\right)$. Déduire de la question précédente que pour tout $\psi \in D$, $K_s\psi$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}$ lorsque s tend vers 0.

2e. Pour $\psi \in D$, on pose $\|\psi\|_D = \|\psi\| + \|(A+B)\psi\|$. Montrer que D, muni de la norme $\|\cdot\|_D$, est un espace de Banach.

2f. En utilisant le théorème de la borne uniforme rappelé ci-dessous, monter qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}^*, \quad \forall \psi \in D, \quad \|K_s\psi\| \leq C\,\|\psi\|_D.$$

Théorème 1 (de la borne uniforme)**.** *Soit V un espace de Banach et W un espace vectoriel normé. Soit $(A_s)_{s\in\mathcal{S}}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(V,W)$ telle que pour tout $v \in V$, $(\|A_s v\|_W)_{s\in\mathcal{S}}$ soit bornée. Alors $(\|A_s\|_{\mathcal{L}(V,W)})_{s\in\mathcal{S}}$ est bornée.*

2g. Soit X un sous-ensemble compact de D (muni de la norme $\|\cdot\|_D$). Montrer que $K_s\phi$ tend vers 0 dans $\mathcal{H}$ uniformément sur X lorsque s tend vers 0.

2h. Soit $\psi \in D$ et $X = \left\{e^{it(A+B)}\psi,\ t \in [-1,1]\right\}$. Montrer que X est un sous-ensemble compact de D (muni de la norme $\|\cdot\|_D$). En déduire que

$$s^{-1}\left(e^{isA}e^{isB} - e^{is(A+B)}\right)e^{it(A+B)}\psi \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{H},$$

uniformément pour $t \in [-1,1]$.

2i. En adaptant la preuve de la formule du produit de Lie, montrer que pour tout $\psi \in D$,

$$\left(e^{iA/n}e^{iB/n}\right)^n \psi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} e^{i(A+B)}\psi \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

2j. En déduire la formule de Trotter (1).

Exercice 3 (théorème RAGE (Ruelle, Amrein et Georgescu, Enss)).

Partie I. Un théorème de Wiener.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note A_μ l'ensemble des atomes de μ. On pose

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu(x).$$

3a. Vérifier que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\widehat{\mu}(t)|^2\, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} K_T(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

où K_T est une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera, et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} K_T(x-y)\, d\mu(y) = \mu(\{x\}).$$

3b. En déduire que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\widehat{\mu}(t)|^2\, dt = \sum_{x\in A_\mu} \mu(\{x\}).$$

Partie II. Soit H un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

3c. On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que $\sigma_{\mathrm{p}}(H) = \emptyset$. Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\langle\psi|e^{-itH}\psi\rangle|^2\, dt = 0,$$

puis que pour tout $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\langle\phi|e^{-itH}\psi\rangle|^2\, dt = 0.$$

En déduire que pour tout opérateur compact $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|Ke^{-itH}\psi\|^2\, dt = 0.$$

3d. On note $\mathcal{H}_p$ l'espace de Hilbert engendré par tous les vecteurs propres de H et $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_p^\perp$. Montrer que $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_c$ sont stables par H en ce sens que

$$D(H) = (\mathcal{H}_p \cap D(H)) \oplus (\mathcal{H}_p \cap D(H))$$

et que

$$\forall u \in \mathcal{H}_p \cap D(H),\ Hu \in \mathcal{H}_p \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \mathcal{H}_c \cap D(H),\ Hu \in \mathcal{H}_c.$$

Vérifier que $\sigma_{\mathrm{p}}\left(H|_{\mathcal{H}_c}\right) = \emptyset$. A-t-on toujours $\sigma_{\mathrm{c}}\left(H|_{\mathcal{H}_p}\right) = \emptyset$?

3e. Montrer que tout opérateur compact $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et tout $\psi \in \mathcal{H}_c$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|Ke^{-itH}\psi\|^2\, dt = 0.$$

3f. Soit $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur H-compact. Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{H}_c \cap D(H)$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|Ke^{-itH}\psi\|^2\, dt = 0.$$

Indication : remarquer que pour tout $\psi \in \mathcal{H}_c \cap D(H)$, $(H+i)\psi \in \mathcal{H}_c$.

Vérifier que le résultat reste vrai pour tout $\psi \in \mathcal{H}_c$.

Partie III. Un opérateur auto-adjoint H sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est dit localement compact si

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \text{t.q.}\ \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0,\ f(x)(z-H)^{-1} \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))),\ \forall z \in \rho(H), \qquad (2)$$

autrement dit si pour toute fonction f (essentiellement) bornée et tendant vers 0 à l'infini, l'opérateur de multiplication par f est H-compact.

3g. Soit H un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel qu'il existe deux constantes réelles positives a et b telles que

$$-\Delta \le aH + b \qquad (3)$$

(i.e. telles que pour tout $\phi \in D(H)$, $\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 \le a\langle\phi|H|\phi\rangle + b\|\phi\|_{L^2}^2$). Montrer que H est localement compact.

3h. Soit $V \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que l'opérateur de multiplication par V soit $-\Delta$-borné de borne relative égale à 0. Déduire de la question précédente que l'opérateur de Schrödinger $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$ est localement compact. En déduire que l'Hamiltonien de l'atome d'Hydrogène

$$H = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|x|} \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R}^3)$$

est localement compact.

3i. Terminer la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2 (RAGE)**.** *Soit H un opérateur auto-adjoint localement compact sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On note $\mathcal{H}_p$ l'espace de Hilbert engendré par tous les vecteurs propres de H et $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_p^\perp$. Soit χ_{B_R} la fonction caractéristique de la boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$. On a*

$$(\phi_0 \in \mathcal{H}_p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall t \ge 0,\ \left\|(1-\chi_{B_R})e^{-itH}\phi_0\right\|_{L^2} \le \epsilon; \qquad (4)$$

$$(\phi_0 \in \mathcal{H}_c) \quad \Leftrightarrow \quad \forall R > 0,\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left\|\chi_{B_R}e^{-itH}\phi_0\right\|_{L^2}^2 dt = 0. \qquad (5)$$