경우의 수

합의 법칙

- 두 사건 *A*, *B* 가 **동시에 일어나지 않을 때**, *A*, *B* 가 일어나는 경우를 각각 *m*가지, *n*가지라고 하면 ***A* 또는 *B*** 가 일어나는 경우의 수는 ***m+n*** 가지이다.

곱의 법칙

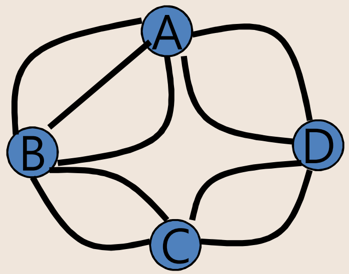
- 한 사건 A 가 *m* 가지로 일어나고 그 각각에 대하여 다른 사건 B 가 *n*가지로 일어날 때 **A 와 B 가 동시에 일어나는 경우의 수는** $m \times n$ 이다.

연습문제

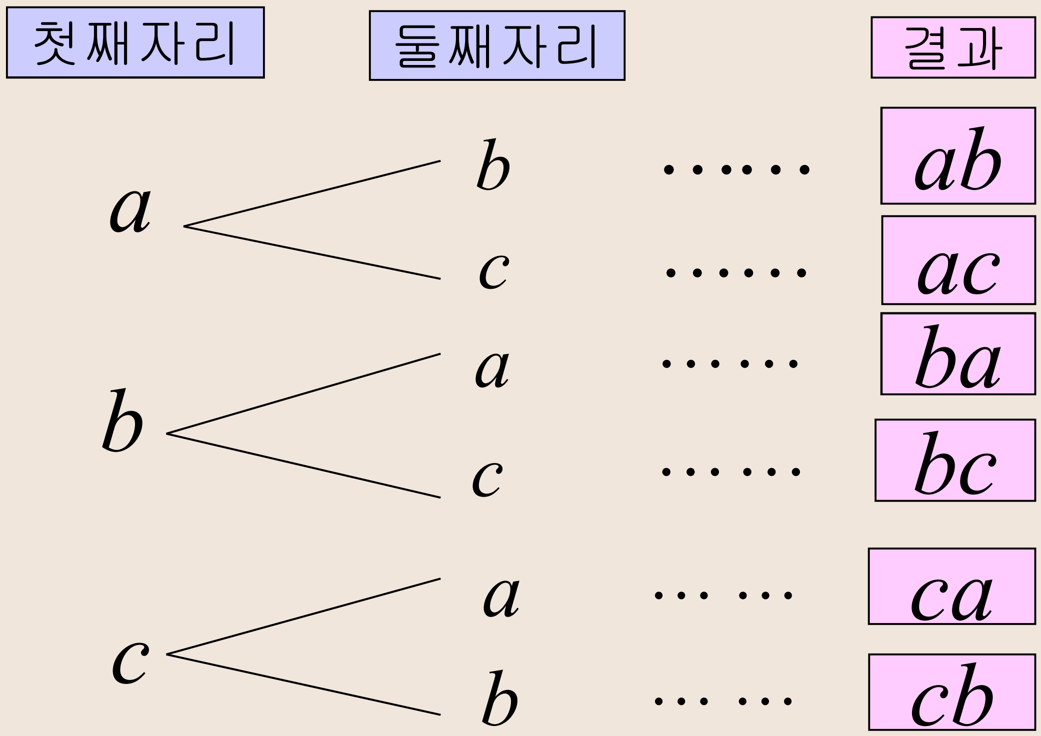
- A, B, C, D 의 네 지점을 잇는 도로망이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) B에서 A를 지나 C로 가는 방법의 수

(2) B에서 C 로 가는 방법의 수를 구하라.



세 개의 문자 *a, b, c* 중 두 개를 택하여 일렬로 배열하는 방법의 수는?



- 따라서, 앞의 결과는 첫째 자리에 들어갈 수 있는 경우의 수에다 둘째 자리에 들어갈 수 있는 경우의 수를 곱의 법칙에 의하여 곱한 가지 수가 된다.

$$\therefore 3 \times 2 = 6 \text{ (가지)}$$

- 이것을 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열 이라 한다.

순 열

- 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 방법을 ***n* 개에서 *r* 개를 택하는 순열**이라 하고, 이 순열의 수를 ${}_nP_r$ 로 나타낸다.

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \quad (\text{단, } r \le n) $$

- ${}_nP_r$ 에서 $r = n$ 이면,

$$ {}_nP_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! $$

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0! = 1 \qquad {}_nP_0 = 1 $$

- 1, 2, 3, 4, 5 의 다섯 개의 숫자 중에서 서로 다른 세 숫자를 이용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 모두 몇 개인가?

순열의 점화식

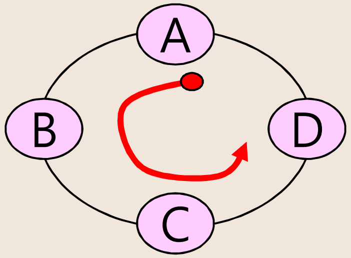
$$ {}_{n}P_{r} = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1} $$

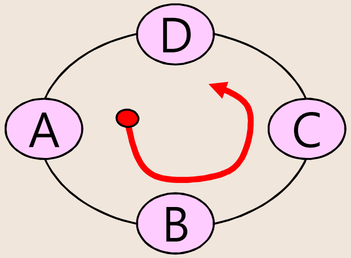
- 1, 2, 3, 4 네 개의 숫자에서 세 개를 뽑는 순열을 생각해 보자.
- 먼저 4가 마지막에 있는 경우 (X, Y, 4)는 나머지 1, 2, 3에서 두 개의 위치를 채우면 된다.
- 그런데 4이외에 1, 2, 3가 맨 마지막에 있는 경우 (X, Y, 1), (X, Y, 2), (X, Y, 3)도 생각해야 하므로 결국 마지막에 있는 수를 제외한 나머지 세 개의 숫자에서 두 개의 순열을 뽑으면 된다.
- 이 경우의 수가 위의 점화식이다.

원순열

- 서로 다른 n개의 원소를 **원형으로 배열하는** 것을 **원순열** 이라 한다.
- 또 이를 계산하는 방법은 $(n-1)!$

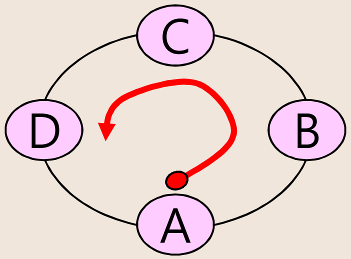
ABCD

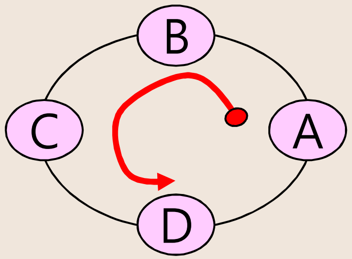




DABC

CDAB





BCDA

중복 순열

- 서로 다른 n 개의 **중복을 허용하여** r 개를 택하여 일렬로 나열하는 방법을 n 개에서 r 개를 택하는 **중복순열** 이라 한다.

$$_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$

- 서로 다른 3 개의 과일 사과, 배, 수박 이 있다. 2개를 택하여 일렬로 배열할 때 중복을 허용하여 나열한 순열의 개수는?
  - (사과, 사과), (배,배), (수박,수박) 의 3가지를 더 생각할 수 있다.
- 중복 순열의 점화식

$$_{n}\Pi_{r} = n \cdot {}_{n}\Pi_{r-1}$$

조합

- 서로 다른 n 개에서 **순서를 생각하지 않고** r 개 (0 <= r <= n)를 택하는 것을 **조합**이라 한다

$$ {}_nP_r = {}_nC_r \times r! $$

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad {}_nC_0 = 1 $$

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \qquad {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r $$

서로 다른 n 개의 물건을 p개, q개, r개 ($p+q+r = n$) 의 3개조로 나누는 방법의 수

- 서로 다른 종류의 꽃 15송이를 다섯 송이씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는?

다음 식을 생각해 보자

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- 4개의 인수 (a+b) 로 부터 각각 a 또는 b 를 하나씩 택하여 곱한 것이다.
- 예를 들어, ab^3 항은 4개의 (a+b) 중에서 3개로부터 b를 택하고, 나머지 하나는 a를 택하여 곱한 것. 즉, ${}_4C_3 \times {}_1C_1 = 4$

이항정리

$$(a+b)^n = \boxed{{}_nC_0} a^n + \boxed{{}_nC_1} a^{n-1}b + \boxed{{}_nC_2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \boxed{{}_nC_r} a^{n-r}b^r + \cdots + \boxed{{}_nC_n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

일반항

이항계수

파스칼의 삼각형

$(a+b)$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$\cdots$	....

중복조합

- 서로 다른 n 개에서 **중복을 허락** 하여 r 개를 택하는 조합을 **중복조합** 이라 하고, 이 중복조합의 수를 $_nH_r$ 로 나타낸다

$$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

- 중복조합의 점화식

$$_nH_r = {}_nH_{r-1} + {}_{n-1}H_r \quad \longleftarrow \quad {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

- 예 : 숫자 1, 2에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 조합은?
  - (1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,2,2)

순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 차이점

(i) ${}_nP_r$: 중복을 허락하지는 않지만, 순서는 생각한다.

(ii) ${}_n\Pi_r$: 중복을 허락하고 순서도 생각한다.

(iii) ${}_nC_r$: 중복을 허락하지 않고 순서도 생각하지 않는다.

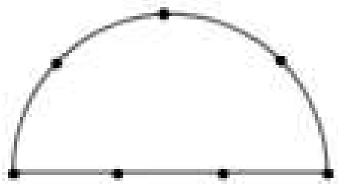
(iv) ${}_nH_r$: 중복을 허락하고 순서도 생각하지 않는다.

연습 문제

1. 6명의 학생을 A, B, C 세 팀으로 2명씩 나누는 방법의 수를 구하여라

2. 여자 6명, 남자 4명 중에서 4명을 선출할 때, 적어도 남자 1명이 포함되는 경우의 수를 구하여라.

15 다음 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.



확률에 관한 여러 용어 정리

- 시행 : 동일한 조건에서 여러 차례 반복할 수 있는 실험이나 관찰.
- 표본공간(S) : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 가능한 결과의 전체집합
- 사건(A) : 표본공간의 부분집합
- 전사건(U) : 표본공간 자신의 집합 (반드시 일어나는 사건)
- 공사건(Φ) : 결코 일어나지 않는 사건
- 합사건 : ***A* 또는 *B*** 가 일어날 사건
- 곱사건 : ***A* 와 *B*** 가 동시에 일어날 사건
- 배반사건 : 두 사건 $A \cap B = \phi$ 인 A 와 B 를 서로 배반사건이라 한다.
- 여사건 : A^c 사건 A 에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건 이라 한다.

확률의 정의

- 하나의 사건이 일어날 수 있는 가능성을 수치로 나타낸 것 사건 A가 일어날 확률을 *P(A)* 로 나타낸다.

확률의 기본 성질

- 임의의 사건 A 에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$ 이며,
- 특히, $P(U) = 1, P(\phi) = 0$ 이다.

여사건의 확률

- A의 여사건을 A^c , 사건 A가 일어날 확률을 P(A) 라고 하면

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

수학적 확률

- 어떤 시행에서 얻어지는 결과(근원사건)이 모두 같은 정도로 일어날 것 이라고 기대될 때, 전사건 S에 속하는 총수를 n(S) , 사건 A 에 속하는 근원사건의 개수를 n(A) 라 하면, 사건 A가 일어날 확률 P(A) 는

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{사건 } A \text{가 일어날 경우의 수}}{\text{모든 경우의 수}}$$

통계적 확률

- 한 사건 A 가 일어날 확률을 P 라 할 때, n 번의 반복시행에서 사건 A 가 일어난 횟수를 r 이라 하면, 상대돗수 $\frac{r}{n}$ 은 n 이 커짐에 따라 확률 P 에 가까워 진다.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{r}{n} = P \quad \Longleftrightarrow \quad P: \text{사건 } A \text{ 의 통계적 확률}$$

연습문제

- 20장의 복권 중에 당첨 복권이 4장 들어있다. 이 중에서 2장의 복권을 샀을 때 2장 모두 당첨될 확률은?
- 남자 6명, 여자 4명 중에서 위원 4명을 뽑을 때 남자 2명, 여자 2명이 뽑힐 확률은?
- 한 줄로 6명이 설 때, 특정한 3사람이 이웃하게 될 확률은?
- 흰 구슬 8개와 붉은 구슬 5개가 들어 있는 주머니에서 3 개를 꺼낼 때, 모두 같은 색일 확률은?
- 10개의 제비 중에서 당첨이 4개 들어있다. 처음에 갑이 1개를 꺼내고, 다음에 을이 한 개를 꺼낼 때 을이 당첨을 뽑을 확률은?

확률의 덧셈정리

- 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 두 사건 A, B 가 **동시에 일어나지 않을 때**,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- 한 개의 주사위를 던질 때 2의 배수 또는 3의 배수의 눈이 나올 확률은?
- 흰 공 4개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때 3개 모두 같은 색의 공일 확률은?

조건부확률

- A 안에서 $A \cap B$ 가 일어날 확률 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 는 A 가 일어났을 때의 B 의 조건부 확률이다.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \qquad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

- 주머니 속에 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있다 한 개씩 두 번 꺼 낼 때 두 개가 모두 흰 공일 확률은? 처음 꺼낸 공을 다시 주머니에 넣었을 때 두 개 모두 흰 공 일 확률은?

독립사건, 종속사건

- $P(B|A) = P(B|A^c) = P(B)$ 이면, 사건 A와 B는 서로 독립 이라고 하고 이 때, 두 사건을 독립사건 이라 한다. 또, 서로 독립이 아닌 두 사건 즉, $P(B|A) \neq P(B)$ 일 때, 두 사건 A, B를 종속사건 이라 한다.

- 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 동시에 던질 때 주사위의 3의 눈과 동전의 앞면이 나올 확률은?

- 10개의 제비 중에서 3개의 당첨 제비가 들어 있다. 이 제비를 A, B 두 사람이 A, B 순으로 하나씩 뽑을 때, 누가 더 유리할까?
  - 각자가 당첨할 확률 ?

확률의 곱셈정리

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

독립사건의 곱셈정리

- 두 사건 A 와 B 가 서로 독립 이면

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

흰 구슬 5개, 붉은 구슬 2개가 들어 있는 주머니에서 구슬을 꺼낼 때, 처음에는 붉은 구슬, 두 번째에는 흰 구슬이 나올 확률은?

독립 시행

- 동전이나 주사위를 여러 번 던질 때와 같이 어떤 시행을 계속해서 되풀이할 때, 매번 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 즉, 각 시행의 결과가 그 이전의 시행의 결과에 영향을 미치지 않는 시행

독립시행의 확률

- 어떤 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 p 이고 그 여사건 이 일어날 확률이 q (q=1-p)일 때, n 번의 독립시행에서 사건 A 가 r 번 일어날 확률은 $P_r = {}_nC_r p^r q^{n-r}\ (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$

- 5개의 동전을 동시에 던질 때, 이 중에서 2개의 동전만 앞면이 나올 확률을 구하면?

채널이 1부터 100까지 설정된 텔레비전이 있다. 이 텔레비전의 리모콘의 일부는 오른쪽 그림과 같고, 현재 켜져 있는 채널은 50이다. 채널증가 버튼 채널 ▲과 채널감소 버튼 채널 ▼ 두 개 중 한 번에 한 개의 버튼을 임의로 여섯 번 누를 때, 채널이 다시 50이 될 확률은? (단, 버튼을 한 번 누르면 채널은 1씩 변한다.)

한개 문 위에 스포츠카가 있고 두개 문 뒤에는 염소가 있을 때, 세 개의 문 중에 하나를 선택하여 그 문뒤에 스포츠카가 있으며 가질 수 있는 게임이 있습니다.

출연자가 한 문을 선택합니다.
게임 진행자가 나머지 문 중에 염소가 있는 문을 보여줍니다.
그리고 나서 처음 선택한 문을 바꿀 의사가 있는지 출연자에게 묻습니다.

출연자가 처음 선택을 고수할 때, 스포츠카를 갖게 될 확률은?