PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT VÀ BÀI TOÁN DÃY SỐ

Nguyễn Quang Tân

THPT Chuyên Lào Cai

Tóm tắt nội dung

Đặc trưng của phương trình kiểu Pell và một số phương trình quy về phương trình kiểu Pell là có tập nghiệm biểu diễn được thông qua các dãy số. Vì vậy từ các phương trình Diophant này ta có thể tạo ra các bài toán dãy số nguyên, cũng như tìm cách giải cho các bài toán này. Ví dụ như trong các đề thi học sinh giỏi Quốc gia môn toán năm 1999 và năm 2012 có hai bài toán về dãy số, hai bài toán này gắn với 2 phương trình Diophant là $u^2 - 5v^2 = -4$ và $x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0$ mà có thể quy về phương trình kiểu Pell $u^2 - 3v^2 = -2$. Khi giải các bài toán này có hai hướng là sử dụng công thức nghiệm của phương trình kiểu Pell hoặc sử dụng phương pháp *Vieta Jumping* [2]. Với cách tiếp cận như vậy bài viết này nêu cách tạo ra một số bài toán về dãy số nguyên từ phương trình Diophant.

Xét phương trình

$$u^2 - Dv^2 = 1. \tag{1}$$

Nếu (u,v) là nghiệm của phương trình thì $(\pm u, \pm v)$ cũng là nghiệm của phương trình. Vì vậy trong bài viết này ta chỉ quan tâm đến các nghiệm nguyên dương.

Giả sử (u_1, v_1) và (u_2, v_2) là 2 nghiệm nguyên dương của phương trình (1) nếu $v_1 < v_2$ thì $u_1 < u_2$ nên ta có thể sắp thứ tự các tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (1) theo v. Ta gọi nghiệm nhỏ nhất theo thứ tự trên là nghiệm cơ sở của phương trình (1).

Định lý 1 (Nghiệm của phương trình Pell). *Nếu D là một số nguyên dương nhưng không phải là số chính phương thì*

$$u^2 - Dv^2 = 1$$

có vô hạn nghiệm nguyên dương và nghiệm tổng quát được cho bởi (u_n, v_n) với $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = au_n + Dbv_n, \quad v_{n+1} = bu_n + av_n, \tag{2}$$

trong đó $(u_1, v_1) = (a, b)$ là nghiệm cơ sở nghĩa là nghiệm mà $b > 0$ nhỏ nhất.

Công thức truy hồi ở trên sinh ra do hằng đẳng thức Brahmagupta

$$\begin{aligned} \left(a^2 + nb^2\right)\left(c^2 + nd^2\right) &= (ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2 \\ &= (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2, \end{aligned} \tag{3}$$

Chú ý. Ta có thể viết ngắn ngọn là dãy (u_n) và (v_n) được xác định bởi

$$u_n + v_n\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n.$$

Từ đó ta có công thức của (u_n) và (v_n) là:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(a + b\sqrt{D})^n + (a - b\sqrt{D})^n}{2}; \\ v_n &= \frac{(a + b\sqrt{D})^n - (a - b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Do $a + b\sqrt{D}, a - b\sqrt{D}$ là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - 2aX + 1 = 0$ nên ta có công thức truy hồi độc lập cho u_n, v_n

$$u_0 = 1; u_1 = a; u_{n+1} = 2au_n - u_{n-1}; \tag{5}$$

$$v_0 = 0; v_1 = b; v_{n+1} = 2av_n - v_{n-1} \tag{6}$$

Bạn đọc có thể xem chứng minh định lý này trong mục *Solving Pell's Equation* trong tài liệu [1].

Bây giờ chúng ta sẽ áp dụng định lý trên để tạo ra một số bài toán về dãy số.

Ví dụ 1. Trước hết ta bắt đầu với phương trình đơn giản:

$$u^2 - 3v^2 = 1. \tag{7}$$

Phương trình này có nghiệm cơ sở là $(a, b) = (2, 1)$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là $(u_n; v_n)$ xác định bởi:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2; u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_1 &= 1; v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{aligned} \tag{8}$$

Ta có thể tìm công thức truy hồi cho dãy (v_n) từ (4) hoặc sử dụng (8) như sau:

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+1} + 2v_{n+1} \\ &= 2u_n + 2v_{n+1} + 3v_n \end{aligned}$$

Thay $u_n = v_{n+1} - 2v_n$ vào đẳng thức trên ta được

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n.$$

Vậy dãy (v_n) được xác định bởi:

$$v_1 = 1; v_2 = 4; v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n \text{ với } n \geq 1. \tag{9}$$

Tương tự dãy (u_n) được xác định một cách độc lập bởi

$$u_1 = 2, u_2 = 7, u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \text{ với } n \geq 1$$

Ta có $u_n - v_n\sqrt{3} = \dfrac{1}{u_n + v_n\sqrt{3}}$ mà $0 < \dfrac{1}{u_n + v_n\sqrt{3}} < 1$ nên $\lfloor v_n\sqrt{3} \rfloor = u_n - 1$.

Tương tự $u_n\sqrt{3} - 3v_n = \dfrac{\sqrt{3}}{u_n + v_n\sqrt{3}}$ nên $\lfloor u_n\sqrt{3} \rfloor = 3v_n$.

Từ các kết quả trên ta có thể phát biểu vài bài toán như sau:

Bài toán 1. Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_1 = 1; v_2 = 4$ và $v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$ với $n \geq 1$. Chứng minh $3v_n^2 + 1$ luôn là số chính phương với mọi $n \geq 1$.

Bài toán 2. Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 2, u_2 = 7, u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\lfloor u_n\sqrt{3} \rfloor = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right].$$

Bây giờ ta xét một phương trình mà có thể đưa về phương trình (7)

$$x^2 - 4xy + y^2 = 1. \tag{10}$$

Phương trình trên có thể biến đổi thành $(x-2y)^2 - 3y^2 = 1$. Bằng cách đặt $u = |x-2y|$ và $v = y$ ta có $u^2 - 3v^2 = 1$. Từ đó được $y = v_n$ và $|x - 2y| = u_n$ trong đó u_n, v_n xác định bởi công thức (8). Xảy ra 2 trường hợp:

Nếu $x - 2y = u_n$ thì $x = u_n + 2v_n = v_{n+1}$.

Nếu $x - 2y = -u_n$ thì $x = -u_n + 2v_n = v_{n-1}$.

Vậy tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (10) là $\{v_n, v_{n+1}\}$ với $n \geq 1$.

Từ đó ta phát biểu một số bài toán như sau.

Bài toán 3. Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_1 = 1; v_2 = 4$ và $v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$ với $n \geq 1$. Hai số nguyên dương a, b thỏa mãn

$$a^2 - 4ab + b^2 = 1.$$

Chứng minh rằng a, b là hai số hạng của dãy số (v_n).

Bài toán 4. Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_1 = 1; v_2 = 4$ và $v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$. Chứng minh rằng $4v_nv_{n+1} + 1$ luôn là tổng của hai bình phương.

Định lý 2 (Nghiệm của phương trình kiểu Pell). *Cho số nguyên dương D không phải là số chính phương và N là số nguyên khác 0. Giả sử S_0 là tập hợp tất cả các nghiệm phương trình*

$$x^2 - Dy^2 = N \tag{11}$$

thỏa mãn điều kiện

$$y^2 \leq \max\left\{Nb^2, \frac{-Na^2}{D}\right\},$$

trong đó (a, b) là nghiệm nguyên cơ sở của phương trình $u^2 - Dv^2 = 1$. Khi đó tất cả các nghiệm của phương trình (11) là (x_n, y_n) xác định bởi

$$x_1 = \alpha, y_1 = \beta, x_{n+1} = ax_n + Dby_n, y_{n+1} = bx_n + ay_n$$

với $n \geq 1$ và $(\alpha, \beta) \in S_0$.

Bạn đọc tham khảo chứng minh của định lý 2 trong tài liệu [3]. Ta gọi mỗi nghiệm thuộc tập S_0 trong định lý là một nghiệm cơ sở và mỗi nghiệm cơ sở này xác định một dãy (x_n, y_n) là nghiệm của phương trình (11).

Ví dụ 2. Bây giờ ta xét phương trình

$$x^2 - 4xy + y^2 = -2. \tag{12}$$

Ta viết lại phương trình: $(x-2y)^2 - 3y^2 = -2$. Bằng cách đặt $u = |x-2y|, v = y$ ta thu được phương trình

$$u^2 - 3v^2 = -2 \tag{13}$$

Nghiệm cơ sở của phương trình Pell tương ứng $u^2 - 3v^2 = 1$ và $(a,b) = (2,1)$. Áp dụng định lý 2 ta thấy phương trình (13) có một nghiệm cơ sở là $(u_1, v_1) = (1,1)$. Suy ra tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (13) là (u_n, v_n) được xác định bởi

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_1 &= 1, v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{aligned} \tag{14}$$

Kết quả này có thể chứng minh mà không cần sử dụng định lý 2. Thật vậy bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n^2 - 3v_n^2 = -2$. Bây giờ ta sử nguyên lý cực hạn để chứng minh phương trình (13) không có nghiệm nào khác ngoài các nghiệm (u_v, v_n).

Giả sử tồn tại nghiệm nguyên dương của phương trình (12) mà không có dạng (u_n, v_n), gọi (a,b) là nghiệm nhỏ nhất trong các nghiệm đó.

Do hằng đẳng thức Brahmagupta (3) nên $(2a-3b, 2b-a)$ cũng thỏa mãn phương trình (13). Ta có $b \geq 2$ và $4b^2 > a^2 = 3b^2 - 2 = \frac{9}{4}b^2 + 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 > \frac{9}{4}b^2$. Do đó

$$\frac{3}{2}b < a < 2b.$$

Suy ra $(2a-3b, 2b-a)$ cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (13) và $2b - a < b$. Do tính nhỏ nhất của (a,b) nên tồn tại k để $(2a-3b, 2b-a) = (u_k, v_k)$. Dẫn tới $(a,b) = (2u_k + 3v_k, u_k + 2v_k) = (u_{k+1}, v_{k+1})$. Mâu thuẫn với cách chọn (a,b).

Từ đó ta có $y = v_n$ và $x = u_n + 2v_n = v_{n+1}$ hoặc $x = -u_n + 2v_n = v_{n-1}$. Vậy tất cả các nghiệm của phương trình (12) là $\{v_n, v_{n+1}\}$ với $n \geq 1$.

Từ (14) ta có thể xây dựng dãy (v_n) độc lập xác định bởi

$$v_1 = 1, v_2 = 3, v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n \text{ với } n \geq 1. \tag{15}$$

Từ các kết quả trên ta có thể đưa ra bài toán sau:

Bài toán 5. Cho dãy (v_n) xác định bởi $v_1 = 1, v_2 = 3, v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$ và a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + 2 = 4ab.$$

Chứng minh rằng a, b là hai số hạng của dãy số (v_n).

Bài toán trên kết hợp với bài toán tiếp theo, cho ta đề thi VMO 2012.

Bài toán 6. Cho a, b là các số nguyên dương mà ab chia hết a^2+b^2+2. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2+b^2+2}{ab}=4.$$

Lời giải. Giả sử $\dfrac{a^2+b^2+2}{ab}=k\in\mathbb{N}^*$.

Đặt $S=\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*|x^2+y^2+2=kxy\}$. Vì $(a,b)\in S$ nên $S\neq\emptyset$. Giả sử $(A,B)\in S$ là cặp số với $A+B$ nhỏ nhất trên S.

Giả sử $A>B$. Xét phương trình
$$x^2-kBx+B^2+2=0$$
có nghiệm $x_1=A$. Theo định lý Viet thì phương trình trên còn có một nghiệm nữa là
$$x_2=kB-A=\frac{B^2+2}{A}.$$
Theo công thức nghiệm thì rõ ràng x_2 nguyên dương. Như vậy (x_2,B) cũng thuộc S.

Vì $B<A$ nên $B+1\leq A$ suy ra $B^2+2B+1\leq A^2$ do đó $B^2+2<A^2$.

Suy ra $x_2=\dfrac{B^2+2}{A}<\dfrac{A^2}{A}=A$.

Vậy $x_2+B<A+B$ mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của (A,B).

Dẫn đến $A=B$. Suy ra $A^2\mid 2(A^2+1)$ nên $A^2\mid 2$. Suy ra $A=1$. Vậy $k=4$.

Bài toán 7 (VMO 2012). Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của b^2+2 và b là ước số của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi $v_1=v_2=1$ và $v_n=4v_{n-1}-v_{n-2}$ với mọi $n\geq 2$.

Lời giải. Giả sử (a,b) là cặp số tự nhiên lẻ mà a là ước số của b^2+2 và b là ước số của a^2+2. Trước hết ta chứng minh $(a,b)=1$. Thật vậy, đặt $d=(a,b)$ thì do $d|a$ mà $a|b^2+2$ nên $d|b^2+2$, mặt khác $d\mid b$ nên $d\mid 2$. Mà a,b lẻ nên d lẻ, suy ra $d=1$.

Xét số $N=a^2+b^2+2$ thì do a^2+2 chia hết cho b nên N chia hết cho b. Tương tự, N chia hết cho a. Vì $(a,b)=1$ nên từ đây suy ra N chia hết cho ab. Theo bài toán trên thì
$$a^2+b^2+2=4ab \tag{16}$$
Ta thấy nếu $\{v_{n-1},v_n\}$ là nghiệm của phương trình (16) thì $\{4v_n-v_{n-1},v_n\}$ cũng là nghiệm của (16). Nói cách khác $\{v_n,v_{n+1}\}$ cũng là nghiệm của phương trình (16). Vì $\{v_1,v_2\}$ là nghiệm của (16) nên $\{v_n,v_{n+1}\}$ là nghiệm của (16) với mọi $n\geq 1$.

Giả sử tồn tại cặp số (a,b) thỏa mãn (16) nhưng không tồn tại n sao cho $\{a,b\}=\{v_n,v_{n+1}\}$. Trong các cặp số như thế, chọn (a,b) có tổng $a+b$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b$ (chú ý a không thể bằng b vì nếu a = b suy ra a = b = 1, khi đó $\{a, b\} = \{v_1, v_2\}$).

Theo nhận xét trên thì $\{4b - a, b\}$ cũng là nghiệm của (16). Nhưng do $4b - a = (b^2 + 2)/a < a$ nên $4b - a + b < a + b$. Theo định nghĩa của (a, b) ở trên, phải tồn tại n sao cho $\{4b - a, b\} = \{v_n, v_{n+1}\}$.

Hơn nữa $b - (4b - a) = a - 3b$ mà $a^2 - 3ab + 3b^2 - ab = 2b^2 - 2$ hay $(a - 3b)(a - b) = 2(b^2 - 1) \geq 0$ suy ra $4b - a \leq b$. Như vậy $4b - a = v_n, b = v_{n+1}$. Nhưng từ đây $a = 4v_{n+1} - v_n = v_{n+2}$, tức là $\{a, b\} = \{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là phải tồn tại số tự nhiên n sao cho $\{a, b\} = \{v_n, v_{n+1}\}$ và như vậy a, b là số hạng của dãy (v_n). Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Ta thấy dãy (v_n) xác định bởi (9) thỏa mãn

$$v_{n+1}^2 - 4v_n v_{n+1} + v_n^2 = 1.$$

và dãy (v_n) xác định bởi (15) thỏa mãn

$$v_{n+1}^2 - 4v_n v_{n+1} + v_n^2 = -2.$$

Như vậy từ hằng đẳng thức mà dãy số thỏa mãn ta có thể xây dựng được phương trình mà dãy đó là nghiệm.

Xét dãy số Fibonacci cho bởi $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với $n \geq 1$. Dãy số này thỏa mãn đẳng thức

$$F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Hay chi tiết hơn ta có:

$$\begin{aligned} F_{2n}^2 - F_{2n}F_{2n-1} - F_{2n-1}^2 &= -1 \\ F_{2n+1}^2 - F_{2n+1}F_{2n} - F_{2n}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta dự đoán kết quả sau:

Bài toán 8. Tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - xy - y^2 = -1 \tag{17}$$

là (F_{2n}, F_{2n-1}) với $n \geq 1$.

Tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - xy - y^2 = 1 \tag{18}$$

là (F_{2n+1}, F_{2n}) với $n \geq 1$.

Lời giải. Ta thấy nghiệm nguyên dương của phương trình (17) thỏa mãn

$$x = \frac{y + \sqrt{5y^2 - 4}}{2}$$

nên y tăng thì x cũng tăng, vì thế các nghiệm nguyên dương của phương trình (17) có thể sắp thứ tự theo y. Tương tự các nghiệm nguyên dương của phương trình (18) cũng sắp thứ tự theo y.

Giả sử phương trình (17) có nghiệm nguyên dương không có dạng (F_{2n}, F_{2n-1}), trong các nghiệm đó gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất. Dễ thấy $a > b > 1$ và $(b, a - b)$ là nghiệm của phương trình (18), đây là nghiệm không có dạng (F_{2n+1}, F_{2n}). Vì nếu tồn tại k để $(b, a - b) = (F_{2k+1}, F_{2k})$ thì

$$(a, b) = (F_{2k+1} + F_{2k}, F_{2k+1}) = (F_{2k+2}, F_{2k+1}).$$

Điều này mâu thuẫn với cách chọn (a, b).

Gọi (m, n) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình (18) không có dạng (F_{2n+1}, F_{2n}).

Ta có $m > n > 1$ và $(n, m - n)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (17), lập luận tương tự như trên ta thấy $(n, m - n)$ không phải là nghiệm có dạng (F_{2n}, F_{2n-1}). Do cách chọn (a, b) và (m, n) ta có

$$m - n \geq b \geq m.$$

Mâu thuẫn, vậy bài toán được chứng minh.

Xét phương trình

$$u^2 - 5v^2 = -4 \tag{19}$$

Nếu (u, v) là nghiệm của phương trình (19) thì u, v có cùng tính chẵn lẻ. Bằng cách $x = \dfrac{u + v}{2}$ và $y = v$ ta được phương trình (17).

Nên $\left(\dfrac{u + v}{2}, v\right) = (F_{2n}, F_{2n-1})$ nên $(u, v) = (2F_{2n} - F_{2n-1}, F_{2n-1})$.

Ta đặt $u_n = 2F_{2n} - F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2n-2}$ và $v_n = F_{2n-1}$.

Do tính chất của dãy (F_n) ta có:

$$F_{2n+3} = 3F_{2n+1} - F_{2n-1}, \quad F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$$

Suy ra các dãy $(u_n), (v_n)$ được xác định bởi

$$u_1 = 1, u_2 = 4, u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$
$$v_1 = 1, v_2 = 2, v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n$$

Hai dãy số này cũng thỏa mãn hệ thức:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 5v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{2} \tag{20}$$

Từ đó ta có bài toán

Bài toán 9 (VMO 1999). Cho hai dãy số (x_n), (y_n) xác định như sau

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n \text{ với mọi } n \geq 1,$$
$$y_1 = 1, y_2 = 2, y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n \text{ với mọi } n \geq 1$$

Chứng minh rằng các số nguyên dương a, b thõa mãn phương trình $a^2 - 5b^2 = -4$ khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương k sao cho $a = x_k, b = y_k$.

Lời giải. Dễ dàng chứng minh $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 5y_n}{2}$ và $y_{n+1} = \dfrac{x_n + 3y_n}{2}$.

Xét phương trình

$$u^2 - 5v^2 = -4 \tag{21}$$

suy ra $\left(\frac{u}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{v}{2}\right)^2 = -1$.

Mặt khác $(3, 1)$ là nghiệm của phương trình $u^2 - 5v^2 = 4$ nên theo hằng đẳng thức Brahgamutap thì $\left(\dfrac{3u+5v}{2}; \dfrac{u+3v}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3u-5v}{2}; \dfrac{3v-u}{2}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình (21).

Dễ dàng chứng minh (x_n, y_n) luôn là nghiệm của phương trình (21).

Giả sử (a, b) là nghiệm của phương trình (21) mà không tồn tại k để $(a, b) = (x_k, y_k)$.

Gọi (A, B) là nghiệm nhỏ nhất như thế.

Nếu $B = 1$ thì $A = 2$ và $(A, B) = (x_1, y_1)$ nên $B > 1$.

Suy ra $A^2 = 5B^2 - 4 \geq 4A^2$ nên $A \geq 2B$ suy ra $\dfrac{3A - 5B}{2}$ là số nguyên dương.

Mặt khác $A^2 < 5B^2 < 9B^2$ nên $3B > A$ suy ra $\dfrac{3B - A}{2}$ là số nguyên dương.

Vậy $\left(\dfrac{3A-5B}{2}; \dfrac{3B-A}{2}\right)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình (21) mà $\dfrac{3B-A}{2} < B$.

Do tính nhỏ nhất của (A, B) nên tồn tại k để $\left(\dfrac{3A-5B}{2}; \dfrac{3B-A}{2}\right) = (x_k, y_k)$ khi đó $(A, B) = \left(\dfrac{3x_k+5y_k}{2}; \dfrac{x_k+3y_k}{2}\right) = (x_{k+1}, y_{k+1})$. Vô lý.

Trong bài báo *The Method of Vieta Jumping* [2] có bài toán sau:

Bài toán 10. Cho a, b là các số nguyên dương mà ab chia hết $a^2 + b^2 + 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

Lời giải. Giả sử $\dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k \in \mathbb{N}^*$. Gọi S là tập nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{x^2 + x^2 + 1}{xy} = k,$$

Vì $(a,b) \in S$ nên $S \neq \emptyset$. Gọi (A,B) là nghiệm nguyên dương có tổng các thành phần nhỏ nhất trên S. Nếu $A > B$ ta xét phương trình

$$\frac{t^2 + B^2 + 1}{tB} = k$$

phương trình trên tương đương với

$$t^2 - kBt + B^2 + 1 = 0$$

ta biết rằng $t_1 = A$ là một nghiệm của phương trình. Nghiệm còn lại là

$$t_2 = kB - A = \frac{B^2 + 1}{A}$$

Từ công thức trên ta thấy t_2 là số nguyên dương và $B < A$ nên $B^2 + 1 < (B+1)^2 \leq A^2$ nên $t_2 < A$. Như vậy $(t_2, B) \in S$ và $t_2 + B < A + B$. Suy ra $A = B$ và ta có: $A^2 | (2A^2 + 1)$ dẫn tới $A = 1$ nên $k = 3$.

Từ bài toán trên chúng ta đặt ra bài toán sau:

Bài toán 11. Giải phương trình:

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy. \tag{22}$$

Lời giải. Nhân 4 vào 2 vế của phương trình ta được $4x^2 + 4y^2 - 12xy = -4$ từ đó ta có:

$$(2x - 3y)^2 - 5y^2 = -4$$

Từ đây ta thu được $y = v_n$ và $|2x - 3y| = u_n$.

Nếu $2x - 3y = u_n$ thì $x = \dfrac{u_n + 3v_n}{2} = v_{n+1}$.

Nếu $2x - 3y = -u_n$ thì $x = \dfrac{-u_n + 3v_n}{2} = v_{n-1}$.

Vậy tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (22) là $\{x, y\} = \{v_n, v_{n+1}\}$.

Như vậy từ hai kết quả trên ta có thể phát biểu một bài toán mới như sau:

Bài toán 12. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn a chia hết $b^2 + 1$ và b chia hết $a^2 + 1$. Chứng minh rằng a, b là hai số hạng của dãy số (v_n) xác định bởi:

$$v_0 = 1, v_1 = 2, v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n.$$

Lời giải. Ta có thể đưa ra lời giải không sử dụng công thức nghiệm của phương trình kiểu Pell sau đây. Từ $a \mid b^2 + 1$ và $b \mid a^2 + 1$ ta có: $ab \mid a^2 + b^2 + 1$ dẫn đến $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

Xét phương trình

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy \tag{23}$$

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $\{v_n, v_{n+1}\}$ là nghiệm của phương trình (22).

Giả sử rằng $\{a, b\}$ là nghiệm của phương trình (22) mà không tồn tại n để $\{a, b\} = \{v_n, v_{n+1}\}$.

Gọi $\{A, B\}$ là nghiệm mà $A + B$ nhỏ nhất trong các nghiệm đó.

Nếu $A = B = 1$ thì $A^2 \mid 2A^2 + 1$ nên $A^2 \mid 1$ suy ra $A = B = 1$ khi đó $\{A, B\} = \{v_1, v_2\}$. Mâu thuẫn.

Không mất tính tổng quát giả sử $A > B$.

Xét phương trình $t^2 - 3Bt + B^2 + 1 = 0$ còn có nghiệm $t_1 = A$ và $t_2 = 3B - A = \dfrac{B^2+1}{A}$.

Rõ ràng t_2 nguyên dương và $B + 1 \leq A$ nên $B^2 + 2B + 1 \leq A^2$ suy ra $B^2 + 1 < A^2$ nên $t_2 < A$.

Suy ra $t_2 + B < A + B$. Dẫn đến tồn tại n để $\{v_n, v_{n+1}\} = \{3B - A, B\}$.

Mặt khác $B - (3B - A) = A - 2B$ mà $A^2 - 2AB + 2B^2 - AB = B^2 - 1$ nên $(A - 2B)(A - B) = B^2 - 1 \geq 0$ nên $A - 2B \geq 0$ suy ra $B \geq 3B - A$.

Do đó $v_n = 3B - A$ và $v_{n+1} = B$. Suy ra $A = 3v_{n+1} - v_n = v_{n+2}$. Vô lý.

Ta xét tiếp một phương trình Diophant khá đẹp.

Bài toán 13. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = xyz.$$

Lời giải. Giả sử (a, b, k) là một nghiệm của phương trình. Ta có:

$$\frac{a^2 + b^2 + a + b + 1}{ab} = k.$$

S là tập nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{x^2 + y^2 + x + y + 1}{xy} = k.$$

Vì $(a, b) \in S$ nên $S \neq \emptyset$.

Gọi $(A, B) \in S$ sao cho $A + B$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B$.

Nếu $A > B$ thì

Xét phương trình:

$$\frac{t^2 + B^2 + t + B + 1}{Bt} = k \Leftrightarrow t^2 + (1 - kB)t + B^2 + B + 1 = 0.$$

Có nghiệm $t_1 = A$ và $t_2 = kB - 1 - A = \frac{B^2+B+1}{A}$.

Ta thấy t_2 nguyên dương nên $(t_2, B) \in S$.

Do $B < A$ nên $(B+1)^2 \leq A^2$ suy ra $B^2 + B + 1 < A^2$ dẫn đến $t_2 < A$.

Do đó $t_2 + B < A + B$ mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $A + B$.

Vậy $A = B$ khi đó $A^2 \mid 2A^2 + 2A + 1$ nên $A^2 \mid (A+1)^2$ hay $A \mid A + 1$.

Suy ra $A = 1$. Vậy $k = 5$.

Xét dãy số $v_1 = 1, v_2 = 1$ và $v_{n+2} = 5v_{n+1} - v_n - 1$.

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp là $\{v_n, v_{n+1}\}$ là nghiệm của phương trình.

Giả sử $\{a, b\}$ là nghiệm của phương trình mà không tồn tại n để $\{a, b\} = \{v_n, v_{n+1}\}$.

Trong các nghiệm như thế gọi $\{A, B\}$ là nghiệm mà $A + B$ nhỏ nhất.

Nếu $A = B$ thì $A = 1$ nên $\{A, B\} = \{v_1, v_2\}$. Mâu thuẫn.

Giả sử $A > B$ thì xét phương trình

$$t^2 - (5B-1)t + B^2 + B + 1 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm $t_1 = A$ và $t_2 = 5B - A - 1 = \frac{B^2+B+1}{A}$.

Ta thấy t_2 là số nguyên dương, do $B + 1 \leq A$ nên $B^2 + B + 1 < A$ nên $t_2 < A$.

Suy ra t_2, B cũng là một nghiệm của phương trình mà $t_2 + B < A + B$.

Tồn tại n để $\{t_2, B\} = \{v_n, v_{n+1}\}$ Mặt khác $B - t_2 = A + 1 - 4B$.

Mà $A^2 + B^2 + A + B - 5AB + 1 = 0 \Leftrightarrow A(A+1-4B) - B(A+1-4B) = 3B^2 - 2B - 1 \Leftrightarrow (A+1-4B)(A-B) = (3B+1)(A-B) \geq 0$.

Hay $5B - A - 1 \leq B$ nên $5B - A - 1 = v_n$ và $B = v_{n+1}$ suy ra $A = 5v_{n+1} - v_n - 1 = v_{n+2}$. Vô lý.

Từ bài toán trên ta xây dựng một bài toán "dãy số" như sau:

Bài toán 14. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a \mid b^2 + b + 1$ và $b \mid a^2 + a + 1$. Chứng minh rằng a, b là 2 số hạng của dãy số (v_n) xác định bởi $v_1 = 1, v_2 = 1$ và $v_{n+2} = 5v_{n+1} - v_n - 1$.

Tài liệu

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach*, Springer, 2010.

[2] Yimin Ge, *The Method of Vieta Jumping*, Mathematical Reflections 5, 2007.

[3] Phan Huy Khải, *Chuyên đề 5: Phương trình nghiệm nguyên*, NXBGD, 2006.