MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ NGUYÊN

Lê Xuân Đại, Trần Ngọc Thắng
Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Dãy số có một vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học, không chỉ như là một đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng một vai trò như một công cụ đắc lực của các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn… Các vấn đề liên quan đến dãy số rất phong phú. Hiện nay có nhiều tài liệu đề cập đến các bài toán về dãy số. Tuy nhiên, chủ yếu quan tâm đến các tính chất của dãy số như Giới hạn dãy, số hạng tổng quát, sự đơn điệu của dãy, tính bị chặn…

Các bài toán về dãy số nguyên là những bài toán hay và khó. Trong bài viết này chúng tôi muốn trình bày một số vấn đề cơ bản và các phương pháp thường sử dụng về dãy số nguyên. Chuyên đề này được chia thành 2 phần như sau:

Phần 1: Giới thiệu một số phương pháp cơ bản giải các bài toán về dãy số nguyên.

Phần 2: Khai thác một số bài toán điển hình qua các kì thi Olimpic toán học.

I- MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. Dãy Fibonacci và dãy Lucas.

1.1. Dãy Fibonacci (F_n) mang tên chính nhà toán hoc Pisano Fibonacci. Dãy cho bởi hệ thức truy hồi đơn giản $\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$

Dễ dàng thấy công thức tổng quát của dãy (F_n) là:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \text{ (Công thức Binet)}$$

Từ sau, để thuận tiện cho việc tính toán, ta quy ước $F_0 = 0$.

1.2. Một vài tính chất số học của dãy Fibonacci:

1. $(F_n, F_{n+1}) = 1$ với mọi *n*.

2. Nếu *n* chia hết cho *m* thì F_n chia hết cho F_m.

3. Nếu F_n chia hết cho F_m thì *n* chia hết cho *m* với *m*>2.

4. $(F_n, F_m) = F_d$ với $d = (m,n)$.

5. Nếu $n \geq 5$ và F_n là số nguyên tố thì *n* cũng là số nguyên tố.

6. Dãy (F_n) chứa một tập vô hạn những số đôi một nguyên tố cùng nhau.

7. $F_{5n} = 5F_n.q_n$ với q_n không chia hết cho 5.

8. $F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots k$.

9. F_n có tận cùng là 0 khi và chỉ khi $n \vdots 15$.

10. F_n có tận cùng là hai chữ số 0 khi và chỉ khi $n \vdots 150$.

1.3. Một vài hệ thức cơ bản của dãy Fibonacci:

1. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

2. $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$

3. $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

4. $F_{n-1}.F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

5. $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n.F_{n+1}$

5. $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 ... - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$

6. $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}.F_{n+2}$.

7. $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$

8. $F_{n+1}.F_{n+2} - F_n.F_{n+3} = (-1)^n$

9. $F_n^4 - 1 = F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}$

1.4. Dãy Lucas (L_n) được xác định như sau: $\begin{cases} L_0 = 2; L_1 = 1 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

Những số hạng của dãy Lucas có thể coi như giống với dãy Fibonacci bởi hai dãy này đều có cùng hệ thức xác định dãy.

Tương tự công thức Binet cho dãy Fibonacci, ta có công thức tổng quát của dãy Lucas:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \geq 02$$

2. Thặng dư bậc hai

2.1. Định nghĩa. Ta gọi a là một thặng dư bậc hai modulo p (hay a là một số chính phương $(mod\ p)$) nếu tồn tại số nguyên x sao cho $x^2 \equiv a(mod\ p)$, trong đó p là một số nguyên dương.

2.2. Định lí. Cho p là một số nguyên tố.

(i) Nếu $p = 2$ thì mọi số a lẻ đều là số chính phương $(mod\ 2)$.

(ii) Nếu $p > 2$. Khi đó

a là số chính phương $(mod\ p)$ khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(mod\ p)$;

a không là số chính phương $(mod\ p)$ khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(mod\ p)$.

2.3. Kí hiệu Legendre. Giả sử p là số nguyên tố lẻ, a là số nguyên không chia hết cho p. Khi đó ta có các kết quả sau:

(1). $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)(mod\ p)$

(2). Nếu $a \equiv b(mod\ p)$ thì $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

(3). $\left(\frac{a}{p}\right).\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$

(4). $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

(5). $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

(6). Luật tương hỗ Gauss: Nếu p, q là hai số nguyên tố lẻ thì:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}}$$

3. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2.

3.1. Định nghĩa. Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai ẩn (u_n) là phương trình sai phân dạng: $$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n) \quad (1)$$

Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với phương trình (1) có dạng:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad (2)$$

Nghiệm tổng quát của (1) có dạng $u_n = x_n + y_n$, trong đó x_n là nghiệm tổng quát của (2), còn y_n là một nghiệm riêng nào đó của (1).

Để tìm nghiệm của (2) đầu tiên ta lập phương trình đặc trưng của (2) là:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

TH1. Nếu phương trình đặc trưng (3) có hai nghiệm thực phân biệt t_1, t_2 thì:

$$x_n = At_1^n + Bt_2^n$$

TH2. Nếu phương trình đặc trưng (3) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = t_0$ thì:

$$x_n = (A + Bn)t_0^n$$

TH3. Nếu phương trình đặc trưng (3) có nghiệm phức $t = x + iy = r(cos\varphi + isin\varphi)$ với $i^2 = -1; r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = arctan\frac{y}{x}$. Khi đó: $x_n = r^n(Acosn\varphi + Bsinn\varphi)$

Ở đây A, B là các hằng số thực được xác định dựa vào các điều kiện ban đầu.

II- MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ NGUYÊN

1. Phương pháp quy nạp toán học

Bài toán 1. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 0; a_1 = 1$ và

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n$$

với mọi *n* nguyên dương. Chứng minh rằng a_n là số chính phương với mọi $n \geq 0$.

Lời giải. Chú ý rằng $a_2 = 1; a_3 = 4; a_4 = 9; a_5 = 25$.

Do đó $a_0=F_0^2;a_1=F_1^2;a_2=F_2^2;a_3=F_3^2;a_4=F_4^2;a_5=F_5^2$, ở đó (F_n) là dãy Fibonacci.

Từ đó ta có định hướng chứng minh $a_n=F_n^2$ bằng quy nạp theo n.

Thậy vậy, giả sử $a_k=F_k^2$ với mọi $k\le n$. Như vậy

$a_n=F_n^2;a_{n-1}=F_{n-1}^2;a_{n-2}=F_{n-2}^2$ (1)

Từ giả thiết ta có $a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}=2(-1)^n$ và $a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=2(-1)^{n-1}$

Cộng hai đẳng thức trên ta được: $a_{n+1}-2a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0,\ \ n\ge 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}a_{n+1}=2F_n^2+2F_{n-1}^2-F_{n-2}^2&=\left(F_n+F_{n-1}\right)^2+\left(F_n-F_{n-1}\right)^2-F_{n-2}^2\\&=F_{n+1}^2+F_{n-2}^2-F_{n-2}^2=F_{n+1}^2\end{aligned}$$

Vậy $a_n=F_n^2,\quad \forall n\ge 0$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=a_2=1;a_3=4$ và

$$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n$$

với mọi *n* nguyên dương. Chứng minh rằng a_n là số chính phương với mọi $n\ge 1$.

Bài toán 3. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0=0;a_1=1;a_2=2;a_3=6$ và

$a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n,\quad \forall n\ge 0$.

Chứng minh rằng a_n chia hết cho *n* với mọi $n\ge 1$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a_4=12;a_5=25;a_6=48$.

Ta có $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=1;\frac{a_3}{3}=2;\frac{a_4}{4}=3;\frac{a_5}{5}=5;\frac{a_6}{6}=8$, như vậy $\frac{a_n}{n}=F_n$ với mọi n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ở đó (F_n) là dãy Fibonacci.

Từ đó ta có định hướng chứng minh $a_n=nF_n$ với mọi $n\ge 1$ bằng quy nạp theo n.

Bài toán 4. Cho *k* nguyên dương lớn hơn 1. Xét dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases}a_0=4;a_1=a_2=(k^2-2)^2\\a_{n+1}=a_na_{n-1}-2\left(a_n+a_{n-1}\right)-a_{n-2}+8,\ \ \forall n\ge 2\end{cases}$$

Chứng minh rằng $2+\sqrt{a_n}$ là số chính phương với mọi $n \ge 0$.

Lời giải. Gọi α, β là hai nghiệm của phương trình $t^2 - kt + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = k \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$

+ Ta chứng minh bằng quy nạp theo n: $a_n = \left(\alpha^{2F_n} + \beta^{2F_n}\right)^2, \ \ \forall n \ge 0$ (1)

Dễ thấy (1) đúng với n = 0, 1, 2.

Giả sử (1) đúng đến n. Ta có:

$$a_{n+1} - 2 = \left(a_n - 2\right)\left(a_{n-1} - 2\right) - \left(a_{n-2} - 2\right)$$
$$= \left(\alpha^{4F_n} + \beta^{4F_n}\right)^2 . \left(\alpha^{4F_{n-1}} + \beta^{4F_{n-1}}\right)^2 - \left(\alpha^{4F_{n-2}} + \beta^{4F_{n-2}}\right)^2$$
$$= \alpha^{4F_{n+1}} + \beta^{4F_{n+1}}$$

Suy ra $a_n = 2 + \alpha^{4F_{n+1}} + \beta^{2F_{n+1}} = \left(\alpha^{2F_{n+1}} + \beta^{2F_{n+1}}\right)^2$. Do đó (1) được chứng minh.

+ Từ (1), ta có $2+\sqrt{a_n} = a_n = 2 + \alpha^{2F_n} + \beta^{2F_n} = \left(\alpha^{F_n} + \beta^{F_n}\right)^2$ là số chính phương (đpcm).

Bài toán 4 (*IMO 1981*). Tìm giá trị lớn nhất của $P = m^2 + n^2$, trong đó *m*, *n* là các số nguyên thoả mãn $1 \le m; n \le 1981$ và $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

Lời giải. Ta xét các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình:

$(x^2 - xy - y^2)^2 = 1$ (1) với $x > y$.

Gọi (n, m) là một nghiệm như thế ($n > m$)

+ Xét bộ $(m+n; n)$ ta có: $\left((m+n)^2 - (m+n)n - n^2\right)^2 = \left(-(n^2 - mn - m^2)\right)^2 = 1$

Suy ra $(m+n; n)$ cũng là một nghiệm của (1)

Rõ ràng (2; 1) là một nghiệm của (1), nên ta có các bộ sau cũng là nghiệm của (1):
$(3,2);(5,3);(8,5);(13,8);(21,13);(34,21);.....$

+ Xét bộ $(m; n-m)$ ta có: $\left(m^2 - m(n-m) - (n-m)^2\right)^2 = \left(-(n^2 - mn - m^2)\right)^2 = 1$

Suy ra $(m; n-m)$ cũng là một nghiệm của (1).

- Nếu $m \le n-m \Rightarrow n \ge 2m \Rightarrow n(n-m) \ge 2m^2 \Rightarrow n^2 - mn - m^2 > 1$ $(m>1)$ (vô lí)

- Nếu $m > n-m$ thì bộ $(m;n-m)$ là một nghiệm của (1) nhỏ hơn nghiệm (n,m).

Quá trình phải dừng lại và kết thúc ở nghiệm $(n,1)$ $(n>1)$. Chú ý thêm rằng (2, 1) là bộ duy nhât thoả mãn (1) mà $n=1$.

Tóm lại tất cả các nghiệm nguyên dương của (1) sẽ là: $\left(F_n;F_{n-1}\right)$ với $n \ge 2$.

Như vậy, giá trị lớn nhất của *P* bằng giá trị lớn nhất của $F_n^2 + F_{n-1}^2$ với $F_n \le 1981$.

Dãy các số hạng của dãy Fibonacci thoả mãn là: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* bằng $1597^2 + 987^2$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \ge 4$ thì $F_n + 1$ không là số nguyến tố.

Lời giải. Ta có đẳng thức $F_n^4 - 1 = F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}$ (1)

Giả sử tồn tại $n \ge 4$ sao cho $F_n + 1$ là số nguyên tố. Khi đó từ (1) thì $F_n + 1$ chia hết ít nhất một trong các số $F_{n-2};F_{n-1};F_{n+1};F_{n+2}$.

Nhưng $F_n + 1 > F_{n-2}; F_n + 1 > F_{n-1}$ nên hoặc $F_n + 1 \mid F_{n+1}$ hoặc $F_n + 1 \mid F_{n+2}$.

Trong trường hợp đầu tiên thì

$F_n + 1 \mid \left(F_n + F_{n-1}\right) \Rightarrow F_n + 1 \mid \left((F_n+1) + (F_{n-1}-1)\right) \Rightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 1$ (vô lí)

Trong trường hợp thứ hai thì

$F_n + 1 \mid \left(F_n + F_{n+1}\right) \Rightarrow F_n + 1 \mid 2(F_n+1) + F_{n-1} - 2 \Rightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 2$ (vô lí)

Vậy $F_n + 1$ là hợp số với mọi $n \ge 4$.

Bài toán 7. Cho dãy số nguyên (x_n): $x_0 = 3; x_1 = 11$ và $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 7x_n$ $\forall n \ge 0$.

Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ *a* sao cho với mọi *m*, *n* nguyên dương tồn tại *k* nguyên dương mà $x_n^k - a$ chia hết cho 2^m.

Lời giải. Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \equiv 3 \pmod 8$

* Chọn $m=3; n=1$ thì theo giả thiết tồn tại $k\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $11^k\equiv a\pmod 8$

Suy ra $3^k\equiv a\pmod 8\Rightarrow a\equiv 1;3\pmod 8$.

* Ta sẽ chứng minh tất cả các số $a\equiv 1\pmod 8$ hoặc $a\equiv 3\pmod 8$ đều thoả mãn đề bài.

- Với $m=1$ thì ta chọn $k=1$ thoả mãn

- Với $m=2,3$ thì ta chọn k chẵn nếu $a\equiv 1\pmod 8$ và chọn k lẻ nếu $a\equiv 3\pmod 8$.

- Xét $m>3$: Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo *m*.

Giả sử với $m>3$ tồn tại số k_m sao cho $x_n^{k_m}-a\,\vdots\,2^m\Rightarrow x_n^{k_m}-a=2^m.b$

- Nếu *b* chẵn thì $x_n^{k_m}-a\equiv 0\pmod{2^{m+1}}$, khi đó ta chọn $k_{m+1}=k_m$.
- Nếu *b* lẻ, chọn $k_{m+1}=k_m+2^{m-2}$.

Khi đó $x_n^{2^{m-2}}-1=\left(x_n-1\right).\left(x_n+1\right).\left(x_n^2+1\right)...\left(x_n^{2^{m-3}}+1\right)=2^m.q_m$; q_m lẻ.

Vì $x_n^2-1=(x_n-1)(x_n+1)=8q$ với q lẻ.

Suy ra $x_n^{k_{m+1}}-a=x_n^{2^{m-2}}\left(x_n^{k_m}-a\right)+a\left(x_n^{2^{m-2}}-1\right)=2^m\left(x_n^{2^{m-2}}.b+a.q_m\right)\vdots\,2^{m+1}$.

Vậy số k_{m+1} thoả mãn.

Kết luận: Tất cả các số *a* cần tìm là $a\equiv 1\pmod 8$ hoặc $a\equiv 3\pmod 8$.

2. Sử dụng các tính chất của phương trình sai phân tuyến tính.

Một tính chất cơ bản có rất nhiều ứng dụng của dãy tuyến tính cấp hai là tính chất sau đây:

Cho dãy tuyến tính cấp hai (u_n): $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,\ \ \forall n\ge 1$. Khi đó

$$u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2=(-b)^{n-1}\left(u_3u_1-u_2^2\right),\ \ \forall n\ge 1.$$

Bài toán 1. Cho dãy (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases}a_1=20; a_2=30\\ a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n,\ \ \forall n\ge 1\end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho $1+5a_na_{n+1}$ là số chính phương.

Lời giải.

* Áp dụng kết quả trên với dãy (a_n) ta được:

$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=a_1a_3-a_2^2=500 \Rightarrow a_n^2+500=a_{n+1}a_{n-1}$

* Xét với $n\geq 4$, ta có: $\left(a_n+a_{n+1}\right)^2=a_n^2+2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2$, nhưng $a_{n+1}^2=9a_n^2-6a_na_{n-1}+a_{n-1}^2$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left(a_n+a_{n+1}\right)^2&=a_n^2+2a_na_{n+1}+9a_n^2-6a_na_{n-1}+a_{n-1}^2\\&=2a_na_{n+1}+3a_n(3a_n-a_{n-1})+a_{n-1}^2+a_n^2-3a_na_{n-1}\\&=5a_na_{n+1}+a_{n-1}^2-a_na_{n-2}\\&=5a_na_{n+1}+a_{n-1}^2-\left(a_{n-1}^2+500\right)\\&=5a_na_{n+1}-500\end{aligned}$$

Do đó $\left(a_n+a_{n+1}\right)^2=5a_na_{n+1}-500<5a_na_{n+1}+1$

Từ dãy (a_n) tăng và $n\geq 4$ ta có $a_n+a_{n+1}\geq 180+470=650$

Suy ra $\left(a_n+a_{n+1}+1\right)^2=\left(a_n+a_{n+1}\right)^2+2(a_n+a_{n+1})+1$

$$>\left(a_n+a_{n+1}\right)^2+501=5a_na_{n+1}+1$$

Vậy $\left(a_n+a_{n+1}\right)^2<5a_na_{n+1}+1<\left(a_n+a_{n+1}+1\right)^2$ nên $1+5a_na_{n+1}$ không chính phương.

Bằng phép thử trực tiếp với *n* = 1, 2, 3 ta được *n* = 3 là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài toán 2. Cho dãy số nguyên (a_n): $a_1=2; a_2=7$ và

$$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leq\frac{1}{2},\ \forall n\geq 2.$$

Chứng minh rằng a_n là số lẻ với mọi $n>1$.

Lời giải. Ta có $a_1=2; a_2=7; a_3=25; a_4=89; a_5=317$.

Ta thấy $\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{2}<a_{n+1}\le\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{2}$. Do đoạn $\left[\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{2};\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{2}\right]$ có độ dài bằng 1 nên a_{n+1} tồn tại một cách duy nhất, như vậy dãy (a_n) xác định duy nhất.

Ta có ngay $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$ (*) với $n=3,4,5$. Ta hy vọng (*) cũng chính là công thức truy hồi cho dãy (a_n). Tuy nhiên việc chứng minh khẳng định này không hề đơn giản. Một kĩ thuật hay dùng ở đây là đi xét một dãy (b_n) có tính chất như dãy (a_n) rồi chứng minh $a_n=b_n$.

Ta xét dãy số (b_n) xác định như sau: $\begin{cases} b_1=2; b_2=7 \\ b_n=3b_{n-1}+2b_{n-2} \end{cases}$

Khi đó với mọi $n\ge 2$ thì $b_{n+1}.b_{n-1}-b_n^2=(-2)^{n-2}$.

Ta cũng dễ dàng có $b_n>2^n$ bằng quy nạp

Từ đó $\left|b_{n+1}.b_{n-1}-b_n^2\right|=2^{n-2}\Rightarrow\left|b_{n+1}-\dfrac{b_n^2}{b_{n-1}}\right|=\dfrac{2^{n-2}}{b_{n-1}}<\dfrac{1}{2}$.

Do dãy (a_n) xác định duy nhất nên $a_n=b_n$ với mọi $n\ge 1$.

Khi đó $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$,$\forall n\ge 3$ và ta có ngay a_n là số lẻ với mọi $n>1$ (đpcm).

Bài toán 3. Cho trước *a,b* nguyên dương và dãy (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=ax_n+b, \quad \forall n\ge 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi cách chọn *a,b* thì trong dãy (x_n) tồn tại vô hạn hợp số.

Lời giải. Giả sử x_n là hợp số với hữu hạn *n*. Gọi *N* là số nguyên dương lớn hơn tất cả các giá trị n thoả mãn. Khi đó x_m là số nguyên tố với mọi $m>N$.

Chọn số nguyên tố $x_m=p$ không chia hết $a-1$.

Gọi *t* là số thoả mãn $t(1-a)\equiv b \pmod p$, khi đó $x_{n+1}-t\equiv a(x_n-t) \pmod p$

Tiếp tục quá trình và đặt biệt với *m*=*n* ta được

$x_{m+p-1} - t \equiv a^{p-1}(x_m - t) \pmod p \equiv (x_m - t) \pmod p$

Hay $x_{m+p-1} \equiv 0 \pmod p$, điều này vô lí vì x_{m+p-1} là số nguyên tố lớn hơn *p*.

Bài toán 4. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, \quad \forall n \ge 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng:

a) a_n là số nguyên dương với mọi $n \ge 0$.

b) $a_n.a_{n+1} - 1$ là số chính phương với mọi $n \ge 0$.

Lời giải.

a) Ta có $a_1 = 5$ và dễ thấy ngay dãy (a_n) tăng ngặt.

Từ giả thiết ta có $2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36}$. Bình phương hai vế ta được:

$a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$ (1)

Từ (1) ta cũng có $a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2\right) - 7a_n\left(a_{n+1} - a_{n-1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} \quad (3)\ \forall n \ge 1$$

Từ (3) suy ra a_n là số nguyên dương với mọi $n \ge 0$.

b) Từ (1) ta có $\left(a_n + a_{n+1}\right)^2 = 9\left(a_n a_{n+1} - 1\right) \Rightarrow a_n a_{n+1} - 1 = \left(\dfrac{a_n + a_{n+1}}{3}\right)^2$.

Do đó $a_n.a_{n+1} - 1$ là số chính phương với mọi $n \ge 0$ (đpcm).

Bài toán 5. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}, \quad \forall n \ge 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng số $b=\frac{1}{5}\left(a_{2n}+8\right)$ có thể biểu diễn thành tổng của ba só nguyên dương liên tiếp với mọi $n\ge 1$.

Lời giải. Tương tự bài toán trên ta được: $a_{n+1}-8a_n+a_{n-1}=0,\ \forall n\ge 1$

Từ đó tìm ra $a_n=\left(4+\sqrt{15}\right)^n+\left(4-\sqrt{15}\right)^n$.

Nhận xét : Với mỗi $n\ge 1$ đều tồn tại $k\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a_n=\left(4+\sqrt{15}\right)^n+\left(4-\sqrt{15}\right)^n=\sqrt{15}.k$$

Khi đó $\left[\left(4+\sqrt{15}\right)^n+\left(4-\sqrt{15}\right)^n\right]^2=15k^2\Rightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^{2n}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{2n}=15k^2-2$

Do đó $b=\frac{1}{5}\left(a_{2n}+8\right)=3k^2+2=(k-1)^2+k^2+(k+1)^2$ và ta có đpcm.

Bài toán 6. Cho hai số thực *a* và *b* khác 0. Xét dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0=0;u_1=1 \\ u_{n+2}=au_{n+1}-bu_n,\quad \forall n\ge 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng nếu có bốn số hạng liên tiếp của dãy (u_n) là số nguyên thì mọi số hạng của dãy là số nguyên.

Lời giải.

Ta có ngay $u_{n+1}^2-u_nu_{n+2}=b^n$ (1)

+ Giả sử tồn tại bốn số hạng $u_m;u_{m+1};u_{m+2};u_{m+3}$ là số nguyên, từ (1) suy ra b^m và b^{m+1} là số nguyên. Từ đó suy ra *b* là số hữu tỷ. Nhưng b^m là số nguyên nên *b* nguyên.

+ Ta chỉ cần phải chứng minh $a\in\mathbb{Z}$: Ta có $\begin{cases} u_{m+2}=au_{m+1}-bu_m \\ u_{m+3}=au_{m+2}-bu_{m+1} \end{cases}$

Nếu *a* là số vô tỉ thì từ 2 hệ thức trên suy ra $u_{m+1}=u_{m+2}=0$, suy ra *b*=0, mẫu thuẫn. Vậy *a* là số hữu tỷ.

Xét dãy đa thức hệ số nguyên $Q_n(x):\begin{cases} Q_0(x)=0; Q_1(x)=1 \\ Q_{n+2}(x)=xQ_{n+1}(x)-bQ_n(x)=0 \end{cases}$

Khi đó $Q_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$, môníc và $\deg Q_n(x)=n-1$.

Ta có $Q_n(a)=u_n$, đặc biệt $Q_{m+1}(a)=u_{m+1}$. Vậy a là nghiệm hữu tỷ của đa thức $P(x)=Q_{m+1}(x)-u_{m+1}$

Vì đa thức $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ và môníc nên $a\in\mathbb{Z}$. Vậy mọi số hạng của dãy (u_n) là số nguyên.

Bài toán 7. Cho *m* là số nguyên dương và dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0=0; x_1=m \\ x_{n+1}=m^2x_n-x_{n-1},\ \forall n\geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng với một cặp $(a;b)\in\mathbb{N}^2$, với $a\leq b$ là một nghiệm của phương trình $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ khi và chỉ khi tồn tại $n\in\mathbb{N}$ để $(a;b)=(x_n;x_{n+1})$.

Bài toán 8. Cho *a*,*b* là các số nguyên lớn hơn 1. Dãy (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0=0; x_1=1 \\ x_{2n}=ax_{2n-1}-x_{2n-2} \quad (n\geq 1) \\ x_{2n+1}=bx_{2n}-x_{2n-1} \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên *m*,*n* thì $x_{n+m}.x_{n+m-1}...x_{n+1}$ chia hết cho $x_m.x_{m-1}$.

3. Phương pháp sử dụng giới hạn của dãy số

Ta có một tính chất rất thú vị về giới hạn của các dãy số nguyên

“Nếu dãy số nguyên (a_n) hội tụ về số *a* thì tồn tại n_0 sao cho với mọi $n\geq n_0$ thì $a_n=a$”

Bài toán 1. Cho dãy số nguyên $(a_n)_{n\geq 0}$ thoả mãn điều kiện sau:

$$0\leq a_n+7a_{n+1}+10a_{n+2}\leq 9,\ \ \forall n\geq 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n\geq n_0$ thì $a_n=0$.

Lời giải.

Đây quả thực là một bài toán rất khó. Từ giả thiết dãy (a_n) nguyên và kết luận của bài toán giúp ta định hướng việc chứng minh $\lim a_n = 0$.

Đặt $x_k = \min\{a_k, a_{k+1}, ...\}; y_k = \max\{a_k, a_{k+1}, ...\}$ thì (x_k) là dãy tăng; (y_k) là dãy giảm và $x_k \le y_k$ với mọi *k*.

Dãy (a_n) bị chặn nên hai dãy (x_k), (y_k) bị chặn. Do đó cả hai dãy đều hội tụ.

Giả sử $\lim x_n = x; \lim y_n = y$.

Do $x_k; y_k \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$ thì $x_n = x; y_n = y$.

Tồn tại $n \ge n_0$ sao cho $a_{n+2} = y; a_n, a_{n+1} \ge x \Rightarrow 8x + 10y \le 9$ (1).

Cũng vậy, Tồn tại $m \ge n_0$ sao cho $a_{m+2} = x; a_m, a_{m+1} \le y \Rightarrow 10x + 8y \ge 0$ (2).

Từ (1), (2) và *x*,*y* là số nguyên suy ra $x = y = 0$.

Do đó $\lim a_n = 0$, suy ra đpcm.

Bài 2. Cho số tự nhiên $c \ge 3$. Xét dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_{n-1} - \left[\dfrac{a_{n-1}}{2}\right] + 1 \ \ \forall n \ge 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$ thì $a_n = 3$.

Lời giải. Bài toán được giải quyết nếu ta chứng minh đuợc $\lim a_n = 3$.

+ Dễ chứng minh bằng quy nạp $a_n \ge 3 \ \ \forall n \ge 1$.

+ Từ đó suy ra ngay dãy (a_n) giảm.

Vậy dãy (a_n) hội tụ. Chuyển qua giới hạn ta được $\lim a_n = 3$ (đpcm).

4. Phương pháp sử dụng tính tuần hoàn của dãy số dư

Định lý. Cho dãy số nguyên (a_n) thoả mãn $a_n = c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_k a_{n+k}$ trong đó $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số nguyên và *m* là số nguyên dương lớn hơn 1. Gọi r_n là số dư trong phép chia a_n cho *m*. Khi đó dãy (r_n) tuần hoàn.

Bài toán 1. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số hạng của dãy Fibonacci chia hết cho 2012.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát với mọi số tự nhiên *n*, tồn tại vô hạn số hạng của dãy Fibonacci chia hết cho *n*.

Xét các cặp số dư khi chia hai số hạng liên tiếp trong dãy Fibonacci theo modulo *n*.

$(F_0, F_1); (F_1, F_2); (F_2, F_3)....$

Vì dãy Fibonacci là vô hạn mà chỉ có n^2 khả năng cho mỗi cặp số dư theo modulo *n* nên tồn tại (F_i, F_{i+1}) thoả mãn $F_i \equiv F_{i+m}$ và $F_{i+1} \equiv F_{i+m+1}$ (mod *n*) với $m \in \mathbb{Z}^+$.

Xét *i* > 1, ta có: $F_{i-1} = F_{i+1} - F_i \equiv F_{i+m+1} - F_{i+m} = F_{i+m-1} \pmod{n}$

Quá trình cứ tiếp tục dẫn đến $F_j \equiv F_{j+m} \pmod{n} \quad \forall j \geq 0$

Suy ra $0 \equiv F_0 \equiv F_m \equiv F_{2m} \equiv \dots \pmod{n}$, tức là có vô hạn các số F_{km} thoả mãn yêu cầu bài toán. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 29; a_1 = 105; a_2 = 381 \\ a_{n+3} = 3u_{n+2} + 2u_{n+1} + a_n \quad (1)\ \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương *m* luôn tồn tại số tự nhiên *n* sao cho các số $a_n, a_{n+1} - 1, a_{n+2} - 2$ đều chia hết cho *m*.

Lời giải.

Ta bổ sung thêm bốn số hạng của dãy là $a_{-1} = 8, a_{-2} = 2, a_{-3} = 1, a_{-4} = 0$.

Giả sử $a_n \equiv r_n \pmod{m};\ 0 \leq r_n \leq m-1$.

Xét các bộ ba (r_n, r_{n+1}, r_{n+2}). Khi đó tồn tại hai số nguyên $p < q$ sao cho:

$$\begin{cases} r_p = r_q \\ r_{p+1} = r_{q+1} \\ r_{p+2} = r_{q+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_p \equiv a_q \pmod m \\ a_{p+1} \equiv a_{q+1} \pmod m \\ a_{p+2} \equiv a_{q+2} \pmod m \end{cases}$$

Kết hợp với (1) ta được: $a_{q+k} \equiv a_{p+k} \pmod m\ \forall k$.

Do đó $a_k \equiv a_{q-p+k} \pmod m\ \forall k$. Đặt $t = q - p \in \mathbb{N}^*$ thì $a_k \equiv a_{k+t} \pmod m\ \forall k$

Suy ra $a_k \equiv a_{k+ht} \pmod m\ \forall k \in \mathbb{Z};\ \forall h \in \mathbb{N}^*$.

Nói riêng ta được $\begin{cases} a_{ht-4} \equiv a_{-4} \equiv 0 \pmod m \\ a_{ht-3} \equiv a_{-3} \equiv -1 \pmod m \\ a_{ht-2} \equiv a_{-2} \equiv 2 \pmod m \end{cases}$

Với h đủ lớn thì $ht - 4 \in \mathbb{N}$. Khi đó đặt $n = ht - 4$ ta được:

$a_n \equiv 0 (\operatorname{mod} m),\ a_{n+1} \equiv 1 (\operatorname{mod} m),\ a_{n+2} \equiv 2 (\operatorname{mod} m)$

Do đó các số $a_n, a_{n+1} - 1, a_{n+2} - 2$ đều chia hết cho m (đpcm).

Bài toán 3. Cho dãy (x_n) , xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 603, x_2 = 102 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_n x_{n+1} - 2}\ , \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) Mọi số hạng của dãy đều là số nguyên dương.

b) Có vô số nguyên dương *n* sao cho x_n có 4 chữ số tận cùng là 2003.

c) Không tồn tại số nguyên dương *n* sao cho x_n có 4 chữ số tận cùng là 2004.

Bài toán 4. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = a; x_1 = b \\ x_{n+1} = 5x_n^2 - 3x_{n-1} + a_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng với mọi cách chọn các số nguyên a,b thì dãy trên hoặc không có số nào chia hết cho 2011 hoặc có vô số số chia hết cho 2011.

Bài toán 5 Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 22; x_1 = 9 \\ x_{n+2} = x_{n+1}.x_n + 1\ \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

a) Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu tồn tại $x_k \vdots p$ thì tồn tại $m > k$ sao cho $x_m \vdots p$

b) Giả sử $x_k \vdots p$ và $k \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (x_n) tuần hoàn kể từ chỉ số $n \geq k$.

III- KHAI THÁC MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ NGUYÊN QUA CÁC KÌ THI OLIMPIC.

1. Bài toán 1 (TST VN 2011). Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = 3 \text{ và } a_{n+2} = 1 + \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right] \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.

Trong đó $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Lời giải.

Hướng thứ nhất. Ta thử dự đoán dãy số (a_n) là dãy tuyến tính dạng $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + r$, với mọi $n \geq 0$. Theo công thức truy hồi ta tính được $a_2 = 10, a_3 = 34, a_4 = 116$. Khi đó từ $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + r$, với mọi $n \geq 0$ ta được hệ:

$$\begin{cases} 3p + q + r = 10 \\ 10p + 3q + r = 34 \\ 34p + 10q + r = 116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = -2 \\ r = 0 \end{cases}$$

Do đó $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \geq 0$. (1)

Ta sẽ chứng minh dãy (a_n) thỏa mãn công thức truy hồi (1) bằng hai cách sau đây:

Cách 1. Ta chứng minh bằng quy nạp công thức truy hồi (1). Thật vậy, trước hết từ đẳng thức $a_{n+2} = 1 + \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right]$, bằng quy nạp ta suy ra $a_{n+1} > 2a_n, \forall n \geq 0$ nên

$a_n > 2a_{n-1} > ... > 2^n a_0 = 2^n$, $\forall n \geq 1$. (2)

Ta dễ thấy (1) đúng với $n = 0$, ta giả sử (1) đúng đến $n = k \geq 0$ tức là:

$$a_{k+2} = 4a_{k+1} - 2a_k \Rightarrow \frac{a_{k+2} + 2a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} + 2a_{k-1}}{a_k} \Rightarrow a_{k+2}a_k - a_{k+1}^2 = 2\left(a_{k+1}a_{k-1} - a_k^2\right) = ... = 2^k. \quad (3)$$

Ta có $a_{k+2}a_k - a_{k+1}^2 = 2\left(a_{k+1}a_{k-1} - a_k^2\right) \Rightarrow \dfrac{a_{k+2}a_k}{a_{k+1}} - a_{k+1} = 2a_{k-1} - \dfrac{2a_k^2}{a_{k+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{a_{k+2}2a_k}{a_{k+1}} - 2a_{k+1} = 4a_{k-1} - \dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}} \Rightarrow \dfrac{a_{k+2}\left(4a_{k+1} - a_{k+2}\right)}{a_{k+1}} - 2a_{k+1} = 4a_{k-1} - \dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}}$

$\Rightarrow 4a_{k+2} - 2a_{k+1} = \dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + 4a_{k-1} - \dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + \dfrac{4\left(a_{k+1}a_{k-1} - a_k^2\right)}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + \dfrac{4.2^{k-1}}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + \dfrac{2^{k+1}}{a_{k+1}}$

(do (3)). Kết hợp với (2) ta được:

$\dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} < 4a_{k+2} - 2a_{k+1} < \dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + 1 \Rightarrow 4a_{k+2} - 2a_{k+1} = \left[\dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} + 1\right] = \left[\dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}}\right] + 1 = a_{k+3}$. Do đó đẳng thức (1) đúng với $n = k+1$. Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi $n \ge 0$.

Từ đẳng thức (1) ta suy ra được:

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n \Rightarrow \dfrac{a_{n+2} + 2a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + 2a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2\left(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2\right) = ... = 2^n.$

<u>Cách 2.</u>

Bây giờ ta xây dựng dãy $\left(b_n\right)$ thỏa mãn điều kiện: $b_0 = 1, b_1 = 3,$ và $b_{n+2} = 4b_{n+1} - 2b_n$ $\forall n \ge 0$. Từ cách xác định dãy $\left(b_n\right)$ ta được:

$\dfrac{b_{n+2} + 2b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{b_{n+1} + 2b_{n-1}}{b_n} \Rightarrow b_{n+2}b_n + 2b_n^2 = b_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_{n-1}$

$\Rightarrow b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = 2\left(b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2\right) = ... = 2^n\left(b_2b_0 - b_1^2\right) = 2^n$

$$\Rightarrow b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2}{b_n} + \frac{2^n}{b_n} \qquad (4)$$

Bằng quy nạp dễ thấy dãy $\left(b_n\right)$ là một dãy tăng và do đó:

$$b_n = 4b_{n-1} - 2b_{n-2} > 2b_{n-1} > 2^2 b_{n-2} > ... > 2^n b_1 = 2^n \Rightarrow b_n > 2^n \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra

$$\frac{b_{n+1}^2}{b_n} < b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2}{b_n} + \frac{2^n}{b_n} < \frac{b_{n+1}^2}{b_n} + 1 \Rightarrow b_{n+2} = \left[\frac{b_{n+1}^2}{b_n} + 1\right] = 1 + \left[\frac{b_{n+1}^2}{b_n}\right], \forall n \ge 0 \qquad (6)$$

Từ (6) suy ra dãy $\left(b_n\right)$ cũng thỏa mãn:

$$b_0 = 1, b_1 = 3 \text{ và } b_{n+2} = 1 + \left[\frac{b_{n+1}^2}{b_n}\right], \forall n \ge 0.$$

Do đó ta được $a_n = b_n, \forall n \ge 0$. Vì vậy $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.

<u>Hướng thứ hai.</u> Ta sẽ dự đoán đẳng thức $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n$ $\forall n \ge 0$ như sau.

Giả sử ta chứng minh được đẳng thức $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n. Khi đó ta có:

$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2\left(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2\right) \Rightarrow \dfrac{a_{n+2} + 2a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + 2a_{n-1}}{a_n} = ... = \dfrac{a_2 + 2a_0}{a_1} = 4$

$\Rightarrow a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n$.
Để chứng minh công thức truy hồi trên ta thực hiện giống như cách 1, cách 2 trong chứng minh theo hướng thứ nhất.

Nhận xét 1. Từ cách xác định của dãy $a_0 = 1, a_1 = 3$ và $a_{n+2} = 1 + \left[\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}\right]$ với mọi $n \geq 0$, bằng phương pháp quy nạp ta chỉ ra $a_n \geq 2^n, \forall n \geq 0$. Khi đó ta có:
$\left[\dfrac{a_{n+1}^2 + 2^n}{a_n}\right] = 1 + \left[\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}\right] = a_{n+2}$. Từ đó ta đề xuất bài toán sau:

<u>**Bài 1.2**</u> Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = 3 \text{ và } a_{n+2} = \left[\frac{a_{n+1}^2 + 2^n}{a_n}\right] \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.
Trong đó $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài tập tương tự.

<u>**Bài 1.3(IMO Shortlist 1988)**</u> Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện:

$$a_0 = 2, a_1 = 7 \text{ và } a_{n+2} = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n} + \frac{1}{2}\right] \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng a_n là số lẻ và $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-2)^n$ với mọi $n \geq 0$.

<u>**Bài 1.4 (VMO 1997, bảng B)**</u> Cho dãy số nguyên $(a_n), n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau:
$a_0 = 1, a_1 = 45, a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ với mọi $n \geq 0$.

a) Tính số các ước nguyên dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ theo n.
b) Chứng minh rằng $1997a_n^2 + 4.7^{n+1}$ là số chính phương với mọi n.

<u>**Bài 1.5**</u> Dãy số $(a_n), n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}, n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số đều là số nguyên dương.

<u>**Bài 1.6**</u> Dãy số $(a_n), n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \left[\dfrac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}\right], n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2, \quad \forall n = 0,1,2,..$

<u>**Bài 1.7**</u>

Gọi a là nghiệm dương của phương trình $x^2 - 2012x - 1 = 0$.

Xét dãy số (x_n): $x_0 = 1$; $x_{n+1} = [ax_n]$, $\forall n \geq 0$. Tìm phần dư khi chia x_{2012} cho 2012.

2. Bài toán 2 (China South East Mathematical Olimpiad 2011).

Cho dãy (a_n) thỏa mãn điều kiện: $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, 4, \ldots$Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n số $a_n + a_{n+1} + 2$ là một số chính phương.

Lời giải.

Hướng thứ nhất. Ta tính được $a_1 + a_2 + 2 = 2^2; a_2 + a_3 + 2 = 3^2; a_3 + a_4 + 2 = 7^2; a_4 + a_5 + 2 = 18^2; a_5 + a_6 + 2 = 47^2; \ldots$ nên ta dự đoán $a_n + a_{n+1} + 2 = b_n^2$, trong đó $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 7, b_4 = 18, b_5 = 47, \ldots$ Ta sẽ tìm tính chất của dãy (b_n). Đầu tiên ta thử dự đoán dãy (b_n) là tuyến tính tức là $b_{n+1} = ab_n + bb_{n-1} + c$ với mọi $n = 2,3, \ldots$

Do đó ta có hệ sau:

$$\begin{cases} ab_2 + bb_1 + c = b_3 \\ ab_3 + bb_2 + c = b_4 \\ ab_4 + bb_3 + c = b_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 7 \\ 7a + 3b + c = 18 \\ 18a + 7b + c = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1. \\ c = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có hướng giải như sau: Ta lập dãy (b_n) được xác định như sau: $b_1 = 2, b_2 = 3$ và $b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$Sau đó ta sẽ chứng minh $a_n + a_{n+1} + 2 = b_n^2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Cách 1. Từ dãy truy hồi của (a_n) và (b_n) ta được: $b_n = \frac{3\sqrt{5}-5}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$; $a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{3}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{9+3\sqrt{5}}{3}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Khi đó ta kiểm tra được ngay đẳng thức $a_n + a_{n+1} + 2 = b_n^2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Cách 2. Ta chứng minh bằng quy nạp đẳng thức trên. Thật vậy, từ cách xác định của dãy ta chỉ ra được:

$$b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = 5 \Leftrightarrow (3b_n - b_{n-1})b_{n-1} - b_n^2 = 5 \Leftrightarrow 3b_nb_{n-1} = b_{n-1}^2 + b_n^2 + 5 = a_{n-1} + a_n + a_n + a_{n+1} + 9 = a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1} + 9 \quad (1)$$

Theo công thức truy hồi của dãy (b_n) và (1) ta có:

$$b_{n+1}^2 = (3b_n - b_{n-1})^2 = 9b_n^2 + b_{n-1}^2 - 2.3.b_nb_{n-1} = 9(a_n + a_{n+1} + 2) + a_{n-1} + a_n + 2 - 2(a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1} + 9) = 7a_{n+1} - a_n + 7a_n - a_{n-1} + 2 = a_{n+1} + a_{n+2} + 2$$ hay $b_{n+1}^2 = a_{n+1} + a_{n+2} + 2$.

Do đó $b_n^2 = a_n + a_{n+1} + 2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Hướng thứ hai. Từ công thức truy hồi của dãy (a_n) ta tìm được công thức tổng quát:$a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{3}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{9+3\sqrt{5}}{3}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Khi đó ta chứng minh được:

$$a_n + a_{n+1} + 2 = \left[\frac{3\sqrt{5}-5}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^2$$

Bài tập tương tự.

<u>Bài 2.1 (Problem M1174, Kvant)</u>. Cho dãy số nguyên (a_n) được xác định bởi: $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20$ và $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$ với mọi $n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $1 + 4a_n a_{n+1}$ là một số chính phương.

<u>Bài 2.2.</u> Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 0; a_1 = 1$ và

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n$$

với mọi n nguyên dương. Chứng minh rằng a_n là số chính phương với mọi $n \geq 0$.

<u>3. Bài toán 3 (VMO 2011)</u>.

Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

Lời giải.

<u>Hướng thứ nhất.</u>

Xét phương trình đặc trưng của dãy số $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n$ là:

$x^2 - 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{14}$, ta thấy nghiệm này lẻ nên công thức của a_n sẽ phức tạp. Do bài toán chỉ yêu cầu chứng minh $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011 nên ta có thể thay dãy (a_n) bởi dãy (b_n) sao cho $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$, $\forall$n=0,1,2,...

Bây giờ ta sẽ chọn dãy (b_n) thỏa mãn: $b_0 = 1, b_1 = -1$ và $b_{n+2} = 6b_{n+1} + (5+k)b_n$ với mọi $n \geq 0$ và k là số ta sẽ chọn sau. Khi đó phương trình đặc trưng sẽ là: $x^2 - 6x - 5 - k = 0 \Rightarrow \Delta' = 14 + k$, để Δ' là số chính phương ta sẽ chọn $k = 2011$. Như vậy ta xây dựng dãy (b_n) được xác định như sau: $b_0 = 1, b_1 = -1$ và $b_{n+2} = 6b_{n+1} + 2016b_n$ với mọi $n \geq 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - 6x - 2016 = 0 \Leftrightarrow x = 48; x = -42$, khi đó $b_n = c_1 48^n + c_2(-42)^n$ và kết hợp với $b_0 = 1, b_1 = -1$ suy ra

$$b_n = \frac{41}{90}48^n + \frac{49}{90}(-42)^n \Leftrightarrow 90b_n = 41.48^n + 49.(-42)^n \qquad (1)$$

suy ra $90b_{2012} = 41.48^{2012} + 49.42^{2012}$.

Do 2011 là số nguyên tố nên theo định lí Fecma nhỏ ta có: $48^{2011} \equiv 48 \pmod{2011}$, $42^{2011} \equiv 42 \pmod{2011}$ do vậy ta thu được:

$90(b_{2012}+1) \equiv 41.48^2 + 49.42^2 + 90 \pmod{2011} \equiv 0 \pmod{2011} \Rightarrow b_{2012}+1 \equiv 0 \pmod{2011}$ hay $b_{2012}-2010$ chi hết cho 2011.

Từ cách xác định của dãy (a_n) và (b_n) ta có: $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$, $\forall$n=0,1,2,...Do đó $a_{2012}-2010$ chi hết cho 2011.

Hướng thứ hai.

Từ dãy truy hồi $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n$ ta sẽ tìm công thức tổng quát cho a_n.

+) Phương trình đặc trưng của dãy trên là: $x^2 - 6x - 5 = 0 \leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{14}$. Khi đó $a_n = c_1\left(3+\sqrt{14}\right)^n + c_2\left(3-\sqrt{14}\right)^n$, sử dụng giả thiết $a_0 = 1, a_1 = -1$ ta được:

$$a_n = \frac{\sqrt{14}-4}{2\sqrt{14}}\left(3+\sqrt{14}\right)^n + \frac{\sqrt{14}+4}{2\sqrt{14}}\left(3-\sqrt{14}\right)^n \qquad (2)$$

+) Đặt $p = 2011$ ta được:

$$a_{p+1} = \frac{\sqrt{14}-4}{2\sqrt{14}}\left(3+\sqrt{14}\right)^{p+1} + \frac{\sqrt{14}+4}{2\sqrt{14}}\left(3-\sqrt{14}\right)^{p+1}$$

Chú ý: $\left(3+\sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} + B_{p+1}\sqrt{14}, \left(3-\sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} - B_{p+1}\sqrt{14}$, trong đó: $A_{p+1} = C_{p+1}^0 3^{p+1} + C_{p+1}^2 3^{p-1}\left(\sqrt{14}\right)^2 + \cdots + C_{p+1}^{p+1}\left(\sqrt{14}\right)^{p+1}$ (3)

Và $B_{p+1} = C_{p+1}^1 3^p + C_{p+1}^3 3^{p-2}\left(\sqrt{14}\right)^2 + \cdots + C_{p+1}^p\left(\sqrt{14}\right)^{p-1}$ (4)

Dễ dàng chứng minh được: $a_{p+1} = A_{p+1} - 4B_{p+1}$ (5)

Ta có $k(k-1)C_{p+1}^k = p\left((k-1)C_{p-1}^{k-1} + kC_{p-1}^{k-2}\right) \equiv 0 (mod\ p)$ suy ra $C_{p+1}^k \equiv 0 (mod\ p)$ với mọi $k = 2, \dots, p-1$. Do đó theo (3) và (4) ta được:

$A_{p+1} \equiv \left(14^{\frac{p+1}{2}} + 3^{p+1}\right)(mod\ p)$ và $B_{p+1} \equiv \left(3.14^{\frac{p-1}{2}} + 3^p\right)(mod\ p)$, từ đây kết hợp với (5) ta thu được: $a_{p+1} \equiv \left(2.14^{\frac{p-1}{2}} - 3^p\right)(mod\ p)$ (6)

Ta có $45^2 = 2025 \equiv 14 (mod\ p)$ nên theo định lí Fecma nhỏ và (6) ta được:

$a_{p+1} \equiv -3 + 2.45^{p-1} \equiv -3 + 2 \equiv -1 (mod\ p)$ hay ta được $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

Nhận xét 2. Trong (1) nếu ta thay $n = 2011$ ta được:

$$90b_{2011} = 41.48^{2011} + 49.(-42)^{2011} \equiv 41.48 - 49.42 \pmod{2011} \equiv -90 \pmod{2011},$$

suy ra $b_{2011} + 1 \vdots 2011 \Rightarrow a_{2011} + 1 \vdots 2011$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài 3.1 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0=1, a_1=-1 \text{ và } a_{n+2}=6a_{n+1}+5a_n \text{ với mọi } n\geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{2011}-2010$ chia hết cho 2011.

Nhận xét 3. Nếu trong (1) thay n bởi số nguyên tố $p>5$ ta được:

$90b_p=41.48^p+49.(-42)^p\equiv 41.48-49.42 \pmod p \equiv -90 \pmod p \Rightarrow b_p+1 \vdots p$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài 3.2 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0=1, a_1=-1 \text{ và } a_{n+2}=6a_{n+1}+2016a_n \text{ với mọi } n\geq 0.$$

Chứng minh a_p+1 chia hết cho p, trong đó p là một số nguyên tố lớn hơn 5.

Nhận xét 4. Nếu trong (1) thay n bởi số $p+1$, trong đó p là số nguyên tố lớn hơn 5 ta được:

$90b_{p+1}=41.48^{p+1}+49.(-42)^{p+1}\equiv 41.48^2+49.42^2 \pmod p \equiv 180900 \pmod p$

$\Rightarrow 90(b_{p+1}-2010) \vdots p \Rightarrow b_{p+1}-2010 \vdots p$

Bài 3.3 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0=1, a_1=-1 \text{ và } a_{n+2}=6a_{n+1}+2016a_n \text{ với mọi } n\geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{p+1}-2010$ chia hết cho p, trong đó p là một số nguyên tố lớn hơn 5.

Nhận xét 5. Bây giờ ta sẽ đưa ra bài toán tổng quát cho **bài toán 3**. Trong cách chứng minh theo hướng thứ nhất **bài toán 3** ta thấy số nguyên tố 2011 thỏa mãn $45^2\equiv 14(mod\ 2011)$ hay 14 là số chính phương $mod\ 2011$.

Do vậy trong **bài toán 3** ta có thể thay số nguyên tố 2011 bằng số nguyên tố p thỏa mãn 14 là số chính phương $mod\ p$. Khi đó ta có bài toán sau:

Bài 3.4 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0=1, a_1=-1 \text{ và } a_{n+2}=6a_{n+1}+5a_n \text{ với mọi } n\geq 0.$$

Tìm tất cả các số nguyên tố $p>5$ sao cho 14 là số chính phương $mod\ p$ và $a_{p+1}+1$ chia hết cho p.

Lời giải. Trước hết ta tìm tất cả các số nguyên tố $p>5$ sao cho 14 là số chính phương $mod\ p$.

14 là số chính phương $modp$ khi và chỉ khi $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{7}{p}\right)=1$ hoặc $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{7}{p}\right)=-1$.

TH1. $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{7}{p}\right)=1$. Khi đó ta có: $\left(\frac{2}{p}\right)=1=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\Leftrightarrow \mathrm{p}\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\ 8)$ từ đó xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $\mathrm{p}\equiv 56\mathrm{k}+8\mathrm{r}+1$ $(r=0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right)=(-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right)=\left(\frac{r+1}{7}\right)=1\Leftrightarrow \mathrm{r}=0,1,3,6$ hay ta được $p\equiv 1,9,25,49(mod\ 56)$.

+) Nếu $p \equiv 56k + 8r - 1$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r-1}{7}\right) = 1 \Leftrightarrow r = 1, 2, 3, 5$ hay ta được $p \equiv 7, 15, 23, 39 (mod\ 56)$.

TH2. $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$. Khi đó ta có: $\left(\frac{2}{p}\right) = -1 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \Leftrightarrow p \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\ 8)$ từ đó xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $p \equiv 56k + 8r + 3$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r+3}{7}\right) = -1 \Leftrightarrow r = 0, 2, 3$ hay ta được $p \equiv 3, 19, 27 (mod\ 56)$.

+) Nếu $p \equiv 56k + 8r - 3$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r-3}{7}\right) = -1 \Leftrightarrow r = 1, 2, 3, 6$ hay ta được $p \equiv 5, 13, 21, 45 (mod\ 56)$, do p nguyên tố nên ta loại trường hợp $p \equiv 21 (mod\ 56)$.

Vậy tất cả các số nguyên tố p cần tìm có dạng:

$$p \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 39, 45, 49 (mod\ 56).$$

Chú ý các số nguyên tố có dạng trên là tồn tại vì theo định lí **Dirichlet** với hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau a, b thì tồn tại vô hạn các số nguyên tố dạng $an + b$.

Ta trở lại chứng minh **bài 3.4**.

Ta sẽ dựa theo hướng giải thứ nhất của **bài toán 3**. Do 14 là số chính phương $mod\ p$ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $m^2 - 14 \equiv 0 (mod\ p)$. Xét dãy số (b_n) được xác định như sau: $b_0 = 1, b_1 = -1$ và $b_{n+2} = 6b_{n+1} + (m^2 - 9)b_n$ với mọi $n \geq 0$, dễ thấy m là số thỏa mãn $(2m; p) = 1$. Khi đó phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là: $x^2 - 6x - m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 - m; x = 3 + m$ suy ra $b_n = c_1(3+m)^2 + c_2(3-m)^2$ và kết hợp với $b_0 = 1, b_1 = -1$ ta được:

$$2mb_n = (m+4)(3+m)^n + (m-4)(3-m)^n$$

$$\Rightarrow 2mb_{p+1} = (m+4)(3+m)^{p+1} + (m-4)(3-m)^{p+1} \equiv (m+4)(3+m)^2 + (m-4)(3-m)^2 (\mathrm{mod}\ p)$$

$$\Rightarrow 2m\left(b_{p+1} + 1\right) \equiv 2m(m^2 - 14)(modp)$$

$$\Rightarrow \left(b_{p+1} + 1\right) \equiv (m^2 - 14)\ (modp) \equiv 0 (mod\ p) \qquad (1)$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$b_n \equiv a_n\ (mod\ p)$với mọi $n \geq 0$ (2)

Mặt khác ta có: $2mb_p \equiv (m+4)(3+m) + (m-4)(3-m)(mod\ p)$ suy ra $2mb_p \equiv -2m(modp) \Rightarrow b_p + 1 \equiv 0(\mathrm{modp})$

Từ (1) và (2) ta được: $a_{p+1} + 1 \equiv 0 (mod\ p)$.

Vậy tất cả các số nguyên tố $p > 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$p \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 39, 45, 49 (mod\ 56).$$

Nhận xét 6. Theo hướng chứng minh thứ hai của **bài toán 3** ta có:

$a_{p+1} \equiv \left(2.14^{\frac{p-1}{2}} - 3^p\right) (mod\ p)$ nên theo định lí nhỏ Fecma ta có:

$$a_{p+1} + 1 \equiv 1 + 2.14^{\frac{p-1}{2}} - 3 \equiv 2\left(14^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) (mod\ p)$$

Do đó số nguyên tố $p > 5$ thỏa mãn $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p khi và chỉ khi $14^{\frac{p-1}{2}} - 1$ chia hết cho p hay 14 là số chính phương $mod\ p$. Do đó ta thu được bài toán sau:

Bài 3.5 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Tìm tất cả các số nguyên tố $p > 5$ sao cho $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p.

Lời giải.

Theo **nhận xét 6** thì tất cả số nguyên tố $p > 5$ sao cho $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p là số nguyên tố thỏa mãn 14 là số chính phương $mod\ p$.

Ta có 14 là số chính phương $modp$ khi và chỉ khi $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = 1$ hoặc $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$.

TH1. $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = 1$. Khi đó ta có:

$\left(\frac{2}{p}\right) = 1 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \Leftrightarrow \mathrm{p} \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\ 8)$ từ đó xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $\mathrm{p} \equiv 56\mathrm{k} + 8\mathrm{r} + 1$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r+1}{7}\right) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{r} = 0, 1, 3, 6$ hay ta được $p \equiv 1, 9, 25, 49(mod\ 56)$.

+) Nếu $\mathrm{p} \equiv 56\mathrm{k} + 8\mathrm{r} - 1$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r-1}{7}\right) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{r} = 1, 2, 3, 5$ hay ta được $p \equiv 7, 15, 23, 39(mod\ 56)$.

TH2. $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$. Khi đó ta có:

$\left(\frac{2}{p}\right) = -1 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \Leftrightarrow \mathrm{p} \equiv \pm 3(\mathrm{mod}\ 8)$ từ đó xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $\mathrm{p} \equiv 56\mathrm{k} + 8\mathrm{r} + 3$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r+3}{7}\right) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{r} = 0, 2, 3$ hay ta được $p \equiv 3, 19, 27(mod\ 56)$.

+) Nếu $\mathrm{p} \equiv 56\mathrm{k} + 8\mathrm{r} - 3$ $(r = 0,1,\dots,6)$ thì $\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{r-3}{7}\right) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{r} = 1, 2, 3, 6$ hay ta được $p \equiv 5, 13, 21, 45(mod\ 56)$, do p nguyên tố nên ta loại trường hợp $p \equiv 21(mod\ 56)$.

Vậy tất cả các số nguyên tố cần tìm có dạng:

$$p \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 39, 45, 49(mod\ 56)$$

Nhận xét 7. Theo hướng chứng minh thứ hai của **bài toán 3** ta có

$$A_p = C_p^0 3^p + C_p^2 3^{p-2}\left(\sqrt{14}\right)^2 + \dots + C_p^{p-1} 3\left(\sqrt{14}\right)^{p-1} \quad (1)$$

Và $B_p = C_p^1 3^{p-1} + C_p^3 3^{p-3}\left(\sqrt{14}\right)^2 + \cdots + C_p^p\left(\sqrt{14}\right)^{p-1}$ (2)

Ta có với mọi $k = 1, 2, \dots, p-1$ ta có $C_p^k \equiv 0 (mod\ p)$ nên từ (1) và (2) ta được: $A_p \equiv 3^p (mod\ p)$ và $B_p \equiv 14^{\frac{p-1}{2}} (mod\ p)$. Mặt khác ta có $a_p = A_p - 4B_p$ suy ra $a_p + 1 \equiv 3^p - 4.14^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 4\left(14^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)(mod\ p)$

Do đó số nguyên tố $p > 5$ thỏa mãn $a_p + 1$ chia hết cho p khi và chỉ khi $14^{\frac{p-1}{2}} - 1$ chia hết cho p hay 14 là số chính phương $mod\ p$. Do đó ta thu được bài toán sau:

Bài 3.6 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi } n \ge 0.$$

Tìm tất cả các số nguyên tố $p > 5$ sao cho $a_p + 1$ chia hết cho p.

Từ cách giải ***bài 3.5*** ta suy ra lời giải của các bài toán sau:

Bài 3.7 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi } n \ge 0.$$

Tìm tất cả các số nguyên tố $p > 5$ sao cho $a_{p+1} - 2010$ chia hết cho p.

Bài 3.8 Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi } n \ge 0.$$

Tìm tất cả các số nguyên tố $p > 5$ sao cho $a_p - 2010$ chia hết cho p.

Bây giờ ta tiếp tục suy nghĩ **bài toán 3** xem nó phục thuộc vào giá trị ban đầu a_0, a_1 như thế nào? Tại sao người ta lại lấy $a_0 = 1, a_1 = -1$ và ta có thể tìm được điều kiện của a_0, a_1 để kết quả bài toán không thay đổi không? Sau khi nghiên cứu vấn đề này tôi đã thu được bài toán sau:

Bài 3.9 Cho a, b là các số nguyên cho trước. Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$$a_0 = a, a_1 = b \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

Lời giải.

Ta xây dựng dãy (b_n) được xác định như sau: $b_0 = 1, b_1 = -1$ và $b_{n+2} = 6b_{n+1} + 2016b_n$ với mọi $n \ge 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - 6x - 2016 = 0 \Leftrightarrow x = 48; x = -42$, khi đó $b_n = c_1 48^n + c_2(-42)^n$ và kết hợp với $b_0 = a, b_1 = b$ suy ra

$$b_n = \frac{42a+b}{90}48^n + \frac{48a-b}{90}(-42)^n \Leftrightarrow 90b_n = (42a+b).48^n + (48a-b).(-42)^n \quad (1)$$

suy ra $90b_{2012} = (42a+b).48^{2012} + (48a-b).42^{2012}$.

Do 2011 là số nguyên tố nên theo định lí Fecma nhỏ ta có: $48^{2011} \equiv 48 \pmod{2011}$, $42^{2011} \equiv 42 \pmod{2011}$ do vậy ta thu được:

$90(b_{2012}+1) \equiv (42a+b).48^2 + (48a-b).42^2 + 90 \pmod{2011} \equiv 0 \pmod{2011}$

$\Rightarrow 90(b_{2012}+1) \equiv 90(5a+6b+1) \pmod{2011}$

hay $b_{2012} - 2010$ chi hết cho 2011 khi và chỉ khi $5a + 6b + 1 \equiv 0 (mod\ 2011)$.

Từ cách xác định của dãy (a_n) và (b_n) ta có: $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$, $\forall$n=0,1,2,...Do đó $a_{2012} - 2010$ chi hết cho 2011 khi và chỉ khi $5a + 6b + 1 \equiv 0 (mod\ 2011)$. Từ phương trình đồng dư này ta tìm được $a = -m + 1 + 6t, b = -5t - 1 + 371m$, trong đó m, t là các số nguyên tùy ý.

Tương tự lời giải của các bài toán trên ta có thể đưa ra các bài tập sau:

Bài 3.10 Cho a, b là các số nguyên cho trước. Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$$a_0 = a, a_1 = b \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho $a_{2011} - 2010$ chia hết cho 2011.

Bài 3.11 Cho a, b là các số nguyên cho trước. Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$$a_0 = a, a_1 = b \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p, trong đó $p > 5$ là một số nguyên tố sao cho 14 là số chính phương $mod\ p$.

Bài 3.12 Cho a, b là các số nguyên cho trước. Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$$a_0 = a, a_1 = b \text{ và } a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho $a_p - 1$ chia hết cho p, trong đó $p > 5$ là một số nguyên tố sao cho 14 là số chính phương $mod\ p$.

Bây giờ ta nghiên cứu bài toán theo hướng sau: thay giả thiết $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n$ với mọi số tự nhiên n bởi $a_{n+2} = 2ha_{n+1} + ka_n$ với mọi số tự nhiên n và $a_0 = a, a_1 = b$, trong đó h, k, a, b là các số nguyên. Khi đó ta sẽ tìm điều kiện cho các số h, k, a, b sao cho $a_{2012} + 1$ chia hết cho 2011 hay tổng quát hơn ta tìm điều kiện cho h, k, a, b, p , trong đó p là số nguyên tố lớn hơn 5 sao cho $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p. Ta sẽ suy nghĩ theo hướng giải thứ nhất của **bài toán 3** . Khi đó ta có bài toán sau:

Bài 3.13 Cho dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$a_0 = a, a_1 = b$ và $a_{n+2} = 2ha_{n+1} + ka_n$ với mọi số tự nhiên n; trong đó a, b, h, k là các số nguyên cho trước.

Tìm tất cả các số nguyên a, b, h, k sao cho $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p; trong đó p là số nguyên tố lớn hơn 5, thỏa mãn $h^2 + k$ là số chính phương $mod\ p$ và không chia hết cho p.

Lời giải.

Do $h^2 + k$ là số chính phương $mod\ p$ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $m^2 - h^2 - k \equiv 0(mod\ p)$. Xét dãy số (b_n) được xác định như sau: $b_0 = a, b_1 = b$ và $b_{n+2} = 2hb_{n+1} + (m^2 - h^2)b_n$ với mọi $n \geq 0$, dễ thấy m là số thỏa mãn $(2m; p) = 1$. Khi đó phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là:
$x^2 - 2hx - (m^2 - h^2) = 0 \leftrightarrow x = h \pm m$, nên ta được:
$b_n = c_1(h + m)^n + c_2\,(h - m)^n$, kết hợp với $b_0 = a, b_1 = b$ ta thu được:

$$b_n = \frac{am - ah + b}{2m}(h + m)^n + \frac{am + ah - b}{2m}(h + m)^n$$

$$\Rightarrow 2m\left(b_{p+1} + 1\right) = (am - ah + b)(h + m)^{p+1} + (am + ah - b)(h - m)^{p+1}$$

$$\Rightarrow 2m\left(b_{p+1} + 1\right) \equiv (am - ah + b)(h + m)^2 + (am + ah - b)(h - m)^2 + 2m$$

$\equiv 2m(a(m^2 - h^2) + 2bh + 1) \equiv 2m(ak + 2bh + 1)(modp)$.

Do $(2m; p) = 1$ nên $b_{p+1} + 1$ chia hết cho p khi và chỉ khi $ak + 2bh + 1 \equiv 0(mod\ p)$. Mặt khác bằng quy nạp dễ thấy $a_n \equiv b_n(mod\ p)$, với mọi số tự nhiên n. Vậy $a_{p+1} + 1$ chia hết cho p khi và chỉ khi $ak + 2bh + 1 \equiv 0(mod\ p)$.

Bài 3.14 Cho dãy số (a_n) được xác định như sau:
$a_1 = 5, a_2 = 11$ và $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, ...$
Chứng minh rằng a_{2002} chia hết cho 11.

Lời giải. Ta thấy phương trình đặc trưng $x^2 - 2x + 3 = 0$ vô nghiệm nên việc thực hiện theo **hướng giải thứ 2** của **bài toán 3** là rất phức tạp. Bây ta viết công thức truy hồi của dãy (a_n) dưới dạng $a_{n+1} = 2a_n + 8a_{n-1} - 11a_{n-1}$ nên ta xét dãy (b_n) xác định bởi $b_1 = 5, b_2 = 11, b_{n+1} = 2b_n + 8b_{n-1}$. Từ đó dễ thấy $b_{2002} \equiv 0(mod\ 11)$ nên $a_{2002} \equiv 0(mod\ 11)$.

Tương tự như cách suy luận của các bài toán trên ta hoàn toàn có thể đưa ra các bài toán tổng quát cho **bài 3.14**

Để kết thúc việc nghiên cứu dạng **bài toán 3**, bạn đọc có thể dựa vào **hướng giải thứ nhất** của **bài toán 3** để giải các bài tập sau:

Bài 3.15 Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:
$a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = -1$ và $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 1987a_n$ với mọi số tự nhiên n.
Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

Bài 3.16 Dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau:

$a_0 = 179, a_1 = 269, a_2 = -1$ và $a_{n+3} = -a_{n+2} + 15a_{n+1} - 13a_n$ với mọi số tự nhiên n.
Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

4. BÀI TOÁN 4 (IMO 2010). Tìm tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_m + n)(u_n + m)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.
Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề. Nếu p là một số nguyên tố thỏa mãn $p|u_k - u_l$ thì $p|k - l$.
Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:
TH1. $p^2|u_k - u_l$ suy ra $u_l = u_k + ap^2$, trong đó a là một số nguyên. Chọn số D đủ lớn sao cho $D > max\{u_k, u_l\}$ và D không chia hết cho p.
Lấy $n = pD - u_k$ ta được
$n + u_k = pD \equiv (mod\ p)$ và $n + u_k$ không chia hết cho p
$n + u_l = n + u_k + u_l - u_k = pD + p^2a \equiv (mod\ p^2)$
Mặt khác $(n + u_k)(u_n + k)$ và $(n + u_l)(u_n + l)$ là các số chính phương nên:
$\begin{cases} u_n + k \equiv 0(mod\ p) \\ u_n + l \equiv 0(mod\ p) \end{cases}$ suy ra $k - l \equiv 0(mod\ p)$.
TH2. $p|u_k - u_l$ và $u_k - u_l$ không chia hết cho p^2.
Chọn D sao cho $n = p^3D - u_k$ và D không chia hết cho p. Khi đó ta được:
$n + u_k = p^3D$
$n + u_l = p^3D + u_l - u_k \equiv 0(mod\ p)$ và $n + u_l$ không chia hết cho p^2.
Mặt khác $(n + u_k)(u_n + k)$ và $(n + u_l)(u_n + l)$ là các số chính phương nên:
$\begin{cases} u_n + k \equiv 0(mod\ p) \\ u_n + l \equiv 0(mod\ p) \end{cases}$ suy ra $k - l \equiv 0(mod\ p)$.
Vậy bổ đề được chứng minh.
Trở lại bài toán ta thấy nếu $u_k = u_l$ thì với số nguyên tố đủ lớn $p > max(k, l)$ theo bổ đề ta được $p|k - l$, điều này chỉ xảy ra khi $k = l$.
Cũng theo **<u>bổ đề</u>** trên dễ thấy $|u_{n+1} - u_n| = 1$ với mọi số nguyên dương n. Từ đây ta được $u_2 - u_1 = 1$ hoặc $u_2 - u_1 = -1$.
+) Nếu $u_2 - u_1 = 1$ hay $u_2 = u_1 + 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 - 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 - 1 = 1 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 - 1 = -1\ hay\ u_3 = u_1 \rightarrow 3 = 1$ vô lí).
Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 + n - 1 = n + c$ với mọi số nguyên dương n. Thử lại ta thấy thỏa mãn.
+) Nếu $u_2 - u_1 = -1$ hay $u_2 = u_1 - 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 + 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 + 1 = -1 \Rightarrow u_3 = u_1 - 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 + 1 = 1\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí).

Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 - n + 1$ với mọi số nguyên dương n. Điều này không xảy ra vì với n đủ lớn thì $u_n < 0$ vô lí. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Vậy $u_n = n + c$, với mọi n nguyên dương và c là một hằng số nguyên không âm.

Dựa theo **bài toán 4** ta thu được bài toán sau:

Bài 4.1 Tìm tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_m + n)(u_n + p)\left(u_p + m\right)$ là lập phương của một số nguyên dương với mọi số nguyên dương m, n, p.

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Nếu p là một số nguyên tố thỏa mãn $p|u_k - u_l$ thì $p|k - l$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:

TH1. $p^2|u_k - u_l$ suy ra $u_l = u_k + ap^2$, trong đó a là một số nguyên. Chọn các số D_1, D_2 đủ lớn sao cho $D_1,\ D_2 > max\{u_k, u_n\}$ và D_1, D_2 không chia hết cho p.

Lấy $n = pD_1 - u_k, m = pD_2 - u_n$ ta được

$n + u_k = pD_1 \equiv (mod\ p)$ và $n + u_k$ không chia hết cho p^2

$m + u_n = pD_2 \equiv 0(mod\ p)$ và $m + u_n$ không chia hết cho p^2.

Do $(n + u_k)(k + u_m)(m + u_n)$ là lập phương của một số nguyên dương nên $k + u_m \equiv 0(mod\ p)$. (1)

Mặt khác $n + u_l = n + u_k + u_l - u_k \equiv 0(mod\ p)$ và $n + u_l$ không chia hết cho p^2.

Theo giả thiết ta có $(n + u_l)(l + u_m)(m + u_n)$ là lập phương của một số nguyên dương nên $l + u_m \equiv 0(mod\ p)$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $k - l \equiv 0(mod\ p)$.

TH2. $p|u_k - u_l$ và $u_k - u_l$ không chia hết cho p^2. Đặt $u_k = u_l + pa$, trong đó a là số nguyên không chia hết cho p.

Chọn các số D_1, D_2 đủ lớn sao cho $D_1,\ D_2 > max\{u_k, u_n\}$ và D_1, D_2 không chia hết cho p. Khi đó lấy $n = p^3D_1 - u_k$ và $= pD_2 - u_n$. Khi đó ta được:

$n + u_k = p^3D \equiv 0(mod\ p^3)$ và $n + u_k$ không chia hết cho p^4 .

$m + u_n = pD_2 \equiv 0(mod\ p)$ và $n + u_l$ không chia hết cho p^2.

Do $(n + u_k)(k + u_m)(m + u_n)$ là lập phương của một số nguyên dương nên $k + u_m \equiv 0(mod\ p)$. (3)

Mặt khác $n + u_l = n + u_k + u_l - u_k \equiv 0(mod\ p)$ và $n + u_l$ không chia hết cho p^2.

Theo giả thiết ta có $(n + u_l)(l + u_m)(m + u_n)$ là lập phương của một số nguyên dương nên $l + u_m \equiv 0(mod\ p)$. (4)

Từ (3) và (4) ta được $k - l \equiv 0(mod\ p)$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán ta thấy nếu $u_k = u_l$ thì với số nguyên tố đủ lớn $p > max(k, l)$ theo bổ đề ta được $p|k - l$, điều này chỉ xảy ra khi $k = l$.
Cũng theo bổ đề trên dễ thấy $|u_{n+1} - u_n| = 1$ với mọi số nguyên dương n. Từ đây ta được $u_2 - u_1 = 1$ hoặc $u_2 - u_1 = -1$.
+) Nếu $u_2 - u_1 = 1$ hay $u_2 = u_1 + 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 - 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 - 1 = 1 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 - 1 = -1\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ (vô lí).
Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 + n - 1 = n + c$ với mọi số nguyên dương n. Thử lại ta thấy thỏa mãn.
+) Nếu $u_2 - u_1 = -1$ hay $u_2 = u_1 - 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 + 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 + 1 = -1 \Rightarrow u_3 = u_1 - 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 + 1 = 1\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí).
Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 - n + 1$ với mọi số nguyên dương n. Điều này không xảy ra vì với n đủ lớn thì $u_n < 0$ vô lí. Vậy trường hợp này không xảy ra.
Vậy $u_n = n + c$, với mọi n nguyên dương và c là một hằng số nguyên không âm.
Bài 4.2 (tổng quát của bài toán 4.1) . Tìm tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $\left(u_{n_1} + n_2\right)\left(u_{n_2} + n_2\right) \dots \left(u_{n_{k-1}} + n_k\right)\left(u_{n_k} + n_1\right)$ là lũy thừa bậc k của một số nguyên dương với mọi số nguyên dương $n_1, n_2, \dots, n_k$, trong đó k là số nguyên dương lớn hơn 1 cho trước.

Bây giờ ta sẽ tổng quát **bài toán 4 (IMO 2010)** theo hướng khác. Trong **bài toán 4** ta thay giả thiết bằng $(u_m + pn)(u_n + pm)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n; trong đó p là một số nguyên dương cho trước. Khi đó ta phát biểu bài toán như sau:
Bài toán A. Cho p là một số nguyên dương cho trước. Tìm tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_m + pn)(u_n + pm)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.

Trong quá trình tìm lời giải ***bài toán A***, tôi nhận thấy là bài toán rất khó và có thể không giải được trong trường hợp p là số nguyên dương bất kì. Tuy nhiên khi ta xét p trong một số trường hợp đặt biệt ta sẽ giải được bài toán. Các bài toán trong trường hợp p là các số đặc biệt sẽ lần lượt xét ở dưới đây và chúng cũng là những bài toán rất khó.

Trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:
Bổ đề 1. Cho p, q là hai số nguyên tố khác nhau và a là một số nguyên dương cho trước. Khi đó luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho $pn + a$ chia hết cho q nhưng không chia hết cho q^2.
Chứng minh.

Chọn $m = p^{q-2} + q \Rightarrow \text{pm} = p^{q-1} + pq \equiv 1(mod\ q)$ suy ra tồn tại số nguyên dương D_1 sao cho $pm = 1 + qD_1$ (1)
Chọn D sao cho $D - D_1 a$ không chia hết cho q. Lấy $n_1 = qD - a$ và kết hợp với (1) ta được: $pmn_1 = qD - a + qD_1(qD - a) = -a + q(D - D_1 a + qDD_1)$ $\Rightarrow pmn_1 + a = q(D - D_1 a + qDD_1)$. Do đó $pmn_1 + a$ chia hết cho q nhưng không chia hết cho q^2. Từ đó ta chọn $n = mn_1$ ta được kết luận của bổ đề.

<u>Bổ đề 2.</u> Cho p, q là hai số nguyên tố khác nhau và a là một số nguyên dương cho trước. Khi đó luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho $pn + a$ chia hết cho q^3 nhưng không chia hết cho q^4.
<u>Chứng minh.</u> Theo định lí Euler ta có $p^{\varphi(q^3)} \equiv 1(mod\ q^3)$
Chọn $m = p^{\varphi(q^3)-1} + q^3 \Rightarrow \text{pm} = p^{\varphi(q^3)} + pq^3 \equiv 1(mod\ q^3)$ suy ra tồn tại số nguyên dương D_1 sao cho $pm = 1 + q^3 D_1$ (2)
Chọn D sao cho $D - D_1 a$ không chia hết cho q. Lấy $n_1 = q^3 D - a$ và kết hợp với (2) ta được: $pmn_1 = q^3 D - a + q^3 D_1(q^3 D - a) = -a + q^3(D - D_1 a + q^3 DD_1)$ $\Rightarrow pmn_1 + a = q^3(D - D_1 a + q^3 DD_1)$. Do đó $pmn_1 + a$ chia hết cho q^3 nhưng không chia hết cho q^4. Từ đó ta chọn $n = mn_1$ ta được kết luận của bổ đề.
<u>Bổ đề 3.</u> Cho p, q là hai số nguyên tố khác nhau và a, k là các số nguyên dương cho trước. Khi đó luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho $pn + a$ chia hết cho q^k nhưng không chia hết cho q^{k+1}.
<u>Chứng minh.</u> Theo định lí Euler ta có $p^{\varphi(q^k)} \equiv 1(mod\ q^k)$
Chọn $m = p^{\varphi(q^k)-1} + q^k \Rightarrow \text{pm} = p^{\varphi(q^k)} + pq^k \equiv 1(mod\ q^k)$ suy ra tồn tại số nguyên dương D_1 sao cho $pm = 1 + q^k D_1$ (3)
Chọn D sao cho $D - D_1 a$ không chia hết cho q. Lấy $n_1 = q^k D - a$ và kết hợp với (3) ta được: $pmn_1 = q^k D - a + q^k D_1(q^k D - a) = -a + q^k(D - D_1 a + q^k DD_1)$ $\Rightarrow pmn_1 + a = q^k(D - D_1 a + q^k DD_1)$. Do đó $pmn_1 + a$ chia hết cho q^k nhưng không chia hết cho q^{k+1}. Từ đó ta chọn $n = mn_1$ ta được kết luận của bổ đề.
<u>Bổ đề 4.</u> Cho $c \in \mathbb{N}$ và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương m, n sao cho $(m + c + pn)(n + c + pm)$ không là số chính phương.
<u>Chứng minh.</u>
Chọn n_1 sao cho $n_1 - d$ không chia hết cho p, trong đó $d = c + 1$. Đặt $D = n_1 p + n_1 - d$ và dễ thấy D không chia hết cho p. Từ đó suy ra $pD = n_1 p^2 + n_1 p - dp = p(n_1 p - d) + n_1 p - d + d$. Đặt $n = n_1 p - d$ ta được: $pD = pn + n + c + 1$.
Bây giờ ta chọn $m = n + 1$. Khi đó $(m + c + pn)(n + c + pm) = (pn + n + c + 1)(pn + n + c + p) = pD(pD + p - 1)$ không là số chính phương vì D không chia hết cho p. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 5. Cho số nguyên dương $l > 1$, p là một số nguyên tố và a là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho số $(pn + a + (m-1)p^l)(pm + a + (n-1)p^l)$ không là số chính phương.

Chứng minh.

Do $l > 1$ nên $p^{l-1} - 1$ có ước nguyên tố q khác p. Giả sử k là số nguyên dương sao cho $p^{l-1} - 1$ chia hết cho q^k nhưng không chia hết cho q^{k+1}. Khi đó tồn tại D_1 không chia hết cho q sao cho $p^{l-1} = 1 + q^k D_1$. Gọi h là số tự nhiên sao cho $u_1 + p = q^h D_2$, trong đó D_2 không chia hết cho q.

Chọn $m = 1$ ta được:

$$(pn + a + (m-1)p^l)(pm + a + (n-1)p^l) = (pn + a)(p + a + (n-1)p^l) = \left(p^{l-1}(np + a) - a(p^{l-1} - 1) - p(p^{l-1} - 1)\right)(pn + a) \quad (4)$$

Theo **bổ đề 3** tồn tại số nguyên dương n sao cho $pn + a = q^{k+h+1}D$, trong đó D không chia hết cho q.

Do đó với $m = 1$, n được chọn như trên và kết hợp với (4) ta thu được

$$\begin{aligned}(pn + a + (m-1)p^l)&(pm + a + (n-1)p^l) \\ &= q^{k+h+1}D(p^{l-1}q^{k+h+1}D - (a+p)q^k D_1) \\ &= q^{k+h+1}D(p^{l-1}q^{k+h+1}D - q^h.D_2 q^k D_1) \\ &= q^{2h+2k}.q.D.(p^{l-1}qD - D_1 D_2)\end{aligned}$$

Không là số chính phương vì $D.(p^{l-1}qD - D_1D_2)$ không chia hết cho q. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 6. Nếu q là một số nguyên tố thỏa mãn $q | u_k - u_l$ thì $q | p(k - l)$.

Ta xét hai trường hợp sau:

TH1. $q^2 | u_k - u_l$ suy ra $u_l = u_k + aq^2$, trong đó a là một số nguyên. Theo **bổ đề 1** ta chọn được n sao cho $pn + u_k$ chia hết cho q và không chia hết cho q^2. Từ đó ta được:

$pn + u_k \equiv (mod\ q)$ và $n + u_k$ không chia hết cho q^2

$pn + u_l = pn + u_k + u_l - u_k \equiv (mod\ q)$ nhưng không chia hết cho q^2.

Mặt khác $(pn + u_k)(u_n + pk)$ và $(pn + u_l)(u_n + pl)$ là các số chính phương nên:

$\begin{cases} u_n + pk \equiv 0 (mod\ p) \\ u_n + pl \equiv 0 (mod\ p) \end{cases}$ suy ra $p(k - l) \equiv 0 (mod\ p)$.

TH2. $q | u_k - u_l$ và $u_k - u_l$ không chia hết cho q^2.

Theo **bổ đề 2** thì tồn tại số nguyên dương n sao cho: $pn + u_k$ chia hết cho q^3 nhưng không chia hết cho q^4. Khi đó ta được:

$pn + u_k$ chia hết cho q^3 nhưng không chia hết cho q^4

$pn + u_l = q^3 D + u_l - u_k \equiv 0 (mod\ q)$ và $pn + u_l$ không chia hết cho q^2.

Mặt khác $(pn + u_k)(u_n + pk)$ và $(pn + u_l)(u_n + pl)$ là các số chính phương nên:

$\begin{cases} u_n + pk \equiv 0 (mod\ p) \\ u_n + pl \equiv 0 (mod\ p) \end{cases}$ suy ra $p(k - l) \equiv 0 (mod\ q)$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 7. Nếu $u_k = u_l$ thì $k = l$.

Chứng minh.

Giả sử q là số nguyên tố đủ lớn sao cho $q > p|k-l|$. Khi đó từ giả thiết suy $q|u_k - u_l$ suy ra $q|p(k-l)$ vô lí. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 8. Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên m, n và $m > 1$ thỏa mãn đẳng thức $p^m - 1 = 2^n$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:

TH1. Nếu m là số lẻ khi đó $p^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + p + 1)$ có ước nguyên tố lẻ, vô lí.

TH2. Nếu $m = 2k$ thì $p^{2k} - 1 = 2^n \Leftrightarrow (\mathrm{p^k} - 1)(\mathrm{p^k} + 1) = 2^{\mathrm{n}}$. Từ đây suy ra tồn tại hai số tự nhiên t, s sao cho $p^k - 1 = 2^s; p^k + 1 = 2^t \Rightarrow 2^{\mathrm{t}} - 2^{\mathrm{s}} = 2 \Rightarrow \mathrm{s} = 1; \mathrm{t} = 2$. Do đó ta được $k = 1, p = 3$ vô lí.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 9. Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên m, n và $m > 1$ thỏa mãn đẳng thức $p^m + 1 = 2^n$.

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau:

TH1. Nếu m là số lẻ thì $p^m + 1 = (p+1)(p^{m-1} - p^{m-2} + \cdots - p + 1)$ có ước nguyên tố lẻ, vô lí.

TH2. Nếu m là một số chẵn, $m = 2s$.

(i) Nếu n là một số chẵn, $n = 2k$ ta có $2^{2k} \equiv 1 (mod\ 3)$ nên p chia hết cho 3 hay $p = 3$. Tiếp theo ta có: $(2^k - 1)(2^k + 1) = 3$^m. Từ đây suy ra tồn tại hai số tự nhiên t, s sao cho $2^k - 1 = 3^s; 2^k + 1 = 3^t \Rightarrow 3^{\mathrm{t}} - 3^{\mathrm{s}} = 2 \Rightarrow \mathrm{s} = 0; \mathrm{t} = 1$. Do đó ta được $k = 1, p = 3, m = 1$ vô lí.

(ii) Nếu n là một số lẻ $n = 2t + 1$ thì thay vào phương trình ta được: $(p^s)^2 - 2.(2^t)^2 = -1$ suy ra $(p^s; 2^t)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình Pell loại 2:

$x^2 - 2y^2 = -1$ (1)

Xét phương trình Pell loại 1 liên kết với phương trình trên: $x^2 - 2y^2 = 1$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(3; 2)$. Khi đó ta xét hệ phương trình: $\begin{cases} 3 = x^2 + 2y^2 \\ 2 = 2xy \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(1; 1)$. Do đó $(x_k; y_k)$ là tất cả các nghiệm của phương trình (1) và được xác định như sau:

$$x_0 = 1, x_1 = 7, x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k; y_0 = 1, y_1 = 5, y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k$$

Từ đó suy ra $p = 7$, kết hợp với n là số lẻ nên ta có các trường hợp sau:

+) $n = 6h + 1 \Rightarrow 2^{\mathrm{n}} = (64)^{\mathrm{k}}.2 \equiv 2 (mod\ 7), 7^m + 1 \equiv 1 (mod\ 7)$ suy ra trường hợp này không xảy ra.

+) $n = 6h + 5 \Rightarrow 2^{\mathrm{n}} = (64)^{\mathrm{h}}.2$^$5 \equiv 5 (mod\ 7), 7^m + 1 \equiv 1 (mod\ 7)$ suy ra trường hợp này không xảy ra.

+) $n = 6h + 3 = 3u \Rightarrow 2^n = 64^h.8 \equiv 0 \pmod{16}; 7^m + 1 = 49^s + 1 \equiv 2 \pmod{16}$

suy ra trường hợp này không xảy ra.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Bài 4.3 Cho p là một số nguyên tố. Xét tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_n + pm)(u_m + pn)$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại số tự nhiên t_n sao cho $|u_{n+1} - u_n| = p^{t_n}$.

b) Chứng minh rằng không thể xảy ra đẳng thức $|u_{n+1} - u_n| = 1$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

a) Nếu số $u_{n+1} - u_n$ có một ước nguyên tố q, với n là một số nguyên dương nào đó. Khi đó theo **bổ đề 6** ta có $\left[\begin{array}{l} p = q \\ q|p(n+1-n) \end{array}\right.$ hay $p = q$. Do đó $u_{n+1} - u_n$ chỉ có hai ước là 1 hoặc p. Do đó tồn tại số tự nhiên t_n sao cho $|u_{n+1} - u_n| = p^{t_n}$.

b) Giả sử đẳng thức $|u_{n+1} - u_n| = 1$ xảy ra với mọi số nguyên dương n.

Khi đó ta có $u_2 - u_1 = 1$ hoặc $u_2 - u_1 = -1$.

+) Nếu $u_2 - u_1 = 1$ hay $u_2 = u_1 + 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 - 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 - 1 = 1 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 - 1 = -1$ hay $u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**).

Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 + n - 1 = n + c$ với mọi số nguyên dương n.Theo **bổ đề 3** dãy xác định như vậy không thỏa mãn.

+) Nếu $u_2 - u_1 = -1$ hay $u_2 = u_1 - 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 + 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 + 1 = -1 \Rightarrow u_3 = u_1 - 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 + 1 = 1$ hay $u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**).

Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 - n + 1$ với mọi số nguyên dương n. Điều này không xảy ra vì với n đủ lớn thì $u_n < 0$ vô lí. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Vậy ta có kết luận của phần b

Bài 4.4 Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn tính chất với mọi số nguyên dương i thì $p^i + 1$ và $p^i - 1$ không có dạng 2^s, trong đó s là một số nguyên dương. Xét tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_n + pm)(u_m + pn)$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương t sao cho $|u_{n+1} - u_n| = p^t$, với mọi số nguyên dương n.

b) Chứng minh rằng $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$ với mọi $n = 2, 3, 4, ...$

Lời giải.

a) Theo **bài 4.3** ta có với mỗi số nguyên dương n thì tồn tại số tự nhiên t_n sao cho $|u_{n+1} - u_n| = p^{t_n}$, từ đây suy ra $|u_2 - u_1| = p^{t_1}$ và $|u_3 - u_2| = p^{t_2}$ và giả sử $t_2 \geq t_1$. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

TH1. Nếu $u_2 - u_1 = p^{t_1}$ và $u_3 - u_2 = p^{t_2} \Rightarrow u_3 - u_1 = p^{t_2} + p^{t_1} = p^{t_1}(p^{t_2-t_1} + 1)$, theo giả thiết nếu $t_2 > t_1$ thì $p^{t_2-t_1} + 1$ sẽ có ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí nên $t_2 = t_1$.

TH2. Nếu $u_2 - u_1 = p^{t_1}$ và $u_3 - u_2 = -p^{t_2} \Rightarrow u_1 - u_3 = p^{t_2} - p^{t_1} = p^{t_1}(p^{t_2-t_1} - 1)$, theo giả thiết nếu $t_2 > t_1$ thì $p^{t_2-t_1} + 1$ sẽ có ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí nên $t_2 = t_1$.

Do vậy ta chứng minh được $t_1 = t_2 = \cdots = t$.

Theo **bài 4.3 b** thì $t = 0$ không thỏa mãn nên t là một số nguyên dương.

b)Theo phân a ta có $|u_{n+1} - u_n| = |u_n - u_{n-1}|$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$ nên xảy ra hai trường hợp:

TH1. Nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $u_{n+1} - u_n = -(u_n - u_{n-1})$ suy ra $u_{n+1} = u_{n-1}$ theo **bổ đề 7** ta thu được $n + 1 = n - 1$ vô lí.

TH2. Nếu không tồn tại số nguyên dương n sao cho $u_{n+1} - u_n = -(u_n - u_{n-1})$ thì $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$ hay $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$ với mọi $n = 2, 3, 4, \ldots$

Bài 4.5 Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3, thỏa mãn p không có dạng $2^s + 1$ và $2^s - 1$, trong đó s là một số nguyên dương. Tìm tất cả các dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn tính chất $(u_m + pn)(u_n + pm)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.

Lời giải.

Nếu số $u_{n+1} - u_n$ có một ước nguyên tố q, với n là một số nguyên dương nào đó. Khi đó theo **bổ đề 6** ta có $\left[\begin{array}{c} p = q \\ q|p(n+1-n) \end{array}\right.$ hay $p = q$. Do đó $u_{n+1} - u_n$ chỉ có hai ước là 1 hoặc p. Do đó với mỗi số nguyên dương n thì tồn tại số tự nhiên t_n sao cho $|u_{n+1} - u_n| = p^{t_n}$, từ đây suy ra $|u_2 - u_1| = p^{t_1}$ và $|u_3 - u_2| = p^{t_2}$ và giả sử $t_2 \geq t_1$. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

TH1. Nếu $u_2 - u_1 = p^{t_1}$ và $u_3 - u_2 = p^{t_2} \Rightarrow u_3 - u_1 = p^{t_2} + p^{t_1} = p^{t_1}(p^{t_2-t_1} + 1)$.

+) Nếu $t_2 - t_1 > 1$ thì theo **bổ đề 9** ta có $p^{t_2-t_1} + 1$ không có dạng 2^s suy ra số $p^{t_2-t_1} + 1$ sẽ có ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí . Nên trường hợp $t_2 - t_1 > 1$ không xảy ra.

+) Nếu $t_2 - t_1 = 1$ thì theo giả thiết $p^{t_2-t_1} + 1 = p + 1$ không có dạng 2^s nên nó sẽ có một ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí . Nên trường hợp $t_2 - t_1 = 1$ không xảy ra.

Vậy ta có $t_1 = t_2$.

TH2. Nếu $u_2 - u_1 = p^{t_1}$ và $u_3 - u_2 = -p^{t_2}$ $\Rightarrow u_1 - u_3 = p^{t_2} - p^{t_1} = p^{t_1}(p^{t_2 - t_1} - 1)$.

+) Nếu $t_2 - t_1 > 1$ thì theo **bổ đề 8** số $p^{t_2 - t_1} - 1$ sẽ không có dạng 2^s suy ra số nó sẽ có một ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí nên trường hợp $t_2 - t_1 > 1$.

+) Nếu $t_2 - t_1 = 1$ thì theo giả thiết $p^{t_2 - t_1} - 1 = p - 1$ không có dạng 2^s nên nó sẽ có một ước nguyên tố khác $2, p$. Mặt khác theo **bổ đề 6** của thì các ước nguyên tố của $u_3 - u_1$ chỉ là 2 hoặc p vô lí . Nên trường hợp $t_2 - t_1 = 1$ không xảy ra.

Vậy trong mọi trường hợp ta có $t_1 = t_2$. Do vậy ta có $t_1 = t_2 = \cdots = l$.

Nếu $l = 0$ thì đẳng thức $|u_{n+1} - u_n| = 1$ xảy ra với mọi số nguyên dương n. Khi đó ta có $u_2 - u_1 = 1$ hoặc $u_2 - u_1 = -1$.

+) Nếu $u_2 - u_1 = 1$ hay $u_2 = u_1 + 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 - 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 - 1 = 1 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 - 1 = -1\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**).

Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 + n - 1 = n + c$ với mọi số nguyên dương n. Theo **bổ đề 3** dãy xác định như vậy không thỏa mãn điều kiện $(u_m + pn)(u_n + pm)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n.

+) Nếu $u_2 - u_1 = -1$ hay $u_2 = u_1 - 1$. Do $|u_3 - u_2| = 1 \Rightarrow |u_3 - u_1 + 1| = 1 \Rightarrow u_3 - u_1 + 1 = -1 \Rightarrow u_3 = u_1 - 2$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 + 1 = 1\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**).

Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 - n + 1$ với mọi số nguyên dương n. Điều này không xảy ra vì với n đủ lớn thì $u_n < 0$ vô lí. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Vậy $l > 0$ nên ta có đẳng thức thức $|u_{n+1} - u_n| = p^l$ xảy ra với mọi số nguyên dương n. Khi đó ta có $u_2 - u_1 = p^l$ hoặc $u_2 - u_1 = -p^l$.

+) Nếu $u_2 - u_1 = p^l$ hay $u_2 = u_1 + p^l$. Do $|u_3 - u_2| = p^l \Rightarrow \left|u_3 - u_1 - p^l\right| = p^l$ $\Rightarrow u_3 - u_1 - p^l = p^l \Rightarrow u_3 = u_1 + 2p^l$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 - p^l = -p^l\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**). Bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 + (n-1)p^l$ với mọi số nguyên dương n. Theo **bổ đề 5** nếu $l > 1$ dãy xác định như vậy không thỏa mãn điều kiện $(u_m + pn)(u_n + pm)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n. Do đó $l = 1$ hay $u_n = u_1 + (n-1)p$ với mọi số nguyên dương n, thử lại thấy thỏa mãn.

+) Nếu $u_2 - u_1 = -p^l$ hay $u_2 = u_1 - p^l$. Do $|u_3 - u_2| = p^l \Rightarrow \left|u_3 - u_1 + p^l\right| = p^l \Rightarrow u_3 - u_1 + p^l = -p^l \Rightarrow u_3 = u_1 - 2p^l$ (ta thấy không xảy ra trường hợp $u_3 - u_1 + p^l = p^l\ hay\ u_3 = u_1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí, do **bổ đề 7**). Bằng quy nạp ta suy ra $u_n = u_1 - (n-1)p^l$ với mọi số nguyên dương n. Điều này không xảy ra vì với n đủ lớn thì $u_n < 0$ vô lí. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Kết luận. Vậy dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_n = a + (n-1)p$ với mọi số nguyên dương n, trong đó a là một số nguyên dương tùy ý.