推理系统常用结论证明

2023 年 12 月 20 日

1　命题逻辑

推理规则 $(\neg^+)$

唯一一个用来给 $\vdash$ 右侧添加 $\neg$ 符号的推理规则。

$$(\neg^+): \frac{\begin{array}{c}\Sigma, A \vdash B \\ \Sigma, A \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma \vdash \neg A}$$

$$\begin{array}{lcr}
(1) & \Sigma, \neg\neg A \vdash \Sigma & (\in) \\
(2) & \neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A & (\in) \\
(3) & \neg\neg A, \neg A \vdash \neg A & (\in) \\
(4) & \neg\neg A \vdash A & (\neg^-) \\
(5) & \Sigma, \neg\neg A \vdash A & (+\ (4)) \\
(6) & \Sigma, A \vdash B & (\text{假设}) \\
(7) & \Sigma, \neg\neg A \vdash B & (\mathrm{Tr}\ (5)(6)) \\
(8) & \Sigma, \neg\neg A \vdash \neg B & (\mathrm{ibid}) \\
(9) & \Sigma \vdash \neg A & (\neg^-\ (7)(8))
\end{array}$$

$\neg\neg A \vdash A$

双重否定，书上 5.3.3 。类似还有 $A \vdash \neg\neg A$ ，用到 $(\neg^+)$ 。

$$\begin{array}{cr}
\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A & (\in) \\
\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A & (\in) \\
\neg\neg A \vdash A & (\neg^-)
\end{array}$$

$\neg A \vdash A \to B$

前件为假则蕴含式必为真，作业二第一题中涉及。

$$\begin{array}{cr}
A, \neg A, \neg B \vdash A & (\in) \\
A, \neg A, \neg B \vdash \neg A & (\in) \\
A, \neg A \vdash B & (\neg^-) \\
\neg A \vdash A \to B & (\to^+)
\end{array}$$

$A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A)$

逆否命题和原命题等价，作业二第 2 题用到。

$$A \to B, \neg B, A \vdash A \to B \qquad (\in)$$
$$A \to B, \neg B, A \vdash A \qquad (\in)$$
$$A \to B, \neg B, A \vdash B \qquad (\neg^-)$$
$$A \to B, \neg B, A \vdash \neg B \qquad (\in)$$
$$A \to B, \neg B \vdash \neg A \qquad (\neg^-)$$
$$A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A) \qquad (\to^+)$$

$A \vdash (\neg A) \to B$

$$A, \neg A, \neg B \vdash A \qquad (\in)$$
$$A, \neg A, \neg B \vdash \neg A \qquad (\in)$$
$$A, \neg A \vdash B \qquad (\neg^-)$$
$$A \vdash (\neg A) \to B \qquad (\to^+)$$

$B \vdash A \to B$

$$B, A \vdash B \qquad (\in)$$
$$B \vdash A \to B \qquad (\to^+)$$

$A \vee B \vdash (\neg A) \to B$

$$A, \neg A, \neg B \vdash A \qquad (\in)$$
$$A, \neg A, \neg B \vdash \neg A \qquad (\in)$$
$$A, \neg A \vdash B \qquad (\neg^-)$$
$$A \vdash (\neg A) \to B \qquad (\to^+)$$
$$B, \neg A \vdash B \qquad (\in)$$
$$B \vdash (\neg A) \to B \qquad (\to^+)$$
$$A \vee B \vdash (\neg A) \to B \qquad (\vee^-)$$

$\neg(A \to B) \vdash A$

尝试推出 $\neg(A \to B), \neg A \vdash A$ ，可借助 $\neg A \vdash A \to B$ 。

(1)	$\neg A \vdash A \to B$	$(\neg A \vdash A \to B)$
(2)	$\neg(A \to B) \vdash (A \to B) \to A$	$(\neg A \vdash A \to B)$
(3)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$	$(+\ (1))$
(4)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash (A \to B) \to A$	$(+\ (2))$
(5)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash A$	$(\to^-\ (3)(4))$
(6)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A$	$(\in)$
(7)	$\neg(A \to B) \vdash A$	$(\neg^-\ (5)(6))$

完整版（上述步骤展开 $\neg A \vdash A \to B$）

(1)	$A, \neg A, \neg B \vdash A$	$(\in)$
(2)	$A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$	$(\in)$
(3)	$A, \neg A \vdash B$	$(\neg^-)$
(4)	$\neg A \vdash A \to B$	$(\to^+)$
(5)	$(A \to B), \neg(A \to B), \neg A \vdash (A \to B)$	$(\in)$
(6)	$(A \to B), \neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$	$(\in)$
(7)	$(A \to B), \neg(A \to B) \vdash A$	$(\neg^-)$
(8)	$\neg(A \to B) \vdash (A \to B) \to A$	$(\to^+)$
(9)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$	$(+\ (4))$
(10)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash (A \to B) \to A$	$(+\ (8))$
(11)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash A$	$(\to^-\ (9)(10))$
(12)	$\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A$	$(\in)$
(13)	$\neg(A \to B) \vdash A$	$(\neg^-\ (11)(12))$

$\neg(A \to B) \vdash \neg B$

用 $(\neg^+)$ ，把 B 提到左边，尝试构造右边是 $A \to B$ 和 $\neg(A \to B)$ 。

$A, B \vdash B$	$(\in)$
$B \vdash A \to B$	$(\to^+)$
$\neg(A \to B), B \vdash A \to B$	$(+)$
$\neg(A \to B), B \vdash \neg(A \to B)$	$(\in)$
$\neg(A \to B) \vdash \neg B$	$(\neg^+)$

2 谓词逻辑

2.1 $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$

书上命题 5.3.3 第 1 条，给了例子。

$$\neg A(z) \vdash \neg A(z) \qquad (\in)$$

$$\neg A(z) \vdash \exists x \neg A(x) \qquad (\exists^+)$$

$$\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) \vdash \exists x \neg A(x) \qquad (+)$$

$$\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) \vdash \neg\exists x \neg A(x) \qquad (\in)$$

$$\neg\exists x \neg A(x) \vdash A(z) \qquad (\neg^-)$$

$$\neg\exists x \neg A(x) \vdash \forall x A(x) \qquad (\forall^+)$$

$$\neg\forall x A(x), \neg\exists x \neg A(x) \vdash \forall x A(x) \qquad (+)$$

$$\neg\forall x A(x), \neg\exists x \neg A(x) \vdash \neg\forall x A(x) \qquad (\in)$$

$$\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x) \qquad (\neg^-)$$

2.2 $\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$

书上命题 5.3.3 第 2 条。

$$\neg A(z) \vdash \neg A(z) \qquad (\in)$$

$$\neg A(z) \vdash \forall x \neg A(x) \qquad (\forall^+)$$

$$\neg\forall x \neg A(x), \neg A(z) \vdash \forall x \neg A(x) \qquad (+)$$

$$\neg\forall x \neg A(x), \neg A(z) \vdash \neg\forall x \neg A(x) \qquad (\in)$$

$$\neg\forall x \neg A(x) \vdash A(z) \qquad (\neg^-)$$

$$\neg\forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x) \qquad (\exists^+)$$

$$\neg\exists x A(x), \neg\forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x) \qquad (+)$$

$$\neg\exists x A(x), \neg\forall x \neg A(x) \vdash \neg\exists x A(x) \qquad (\in)$$

$$\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x) \qquad (\neg^-)$$