

Prove $\vdash \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y))$

$$\begin{array}{ll} \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) \\ \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash \forall y \neg(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) \\ \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash \neg(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) \\ \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash r(y) \\ \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash \neg \forall y r(y) \\ \neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) & \vdash \forall y r(y) \\ & \vdash \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) \end{array}$$

where at the second stage we use

$$\neg \exists y(r(y) \rightarrow \forall y r(y)) \vdash \forall y \neg(r(y) \rightarrow \forall y r(y)).$$