数理逻辑第三次作业

注：f_i^j 表示第 i 个 j 元函数符号，p_i^j 表示第 i 个 j 元谓词符号。

1

找到下列公式中变量的自由出现和界定出现。（书定义 5.2.8）

1. $\forall x_3(\forall x_1 p_1^2(x_1, x_2)) \to p_1^2(x_3, a_1))$
   自由出现：x_2
   界定出现：x_1, x_3
2. $\forall x_2 p_1^2(x_3, x_2) \to \forall x_3 p_1^2(x_3, x_2)$
   自由出现：第一个 x_3 ，第二个 x_2
   界定出现：第一个 x_2 ，第二个 x_3
3. $\forall x_2 \exists x_1 p_1^3(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \vee \neg\exists x_1 p_1^2(x_2, f_1^1(x_1))$
   自由出现：第三个 x_2
   界定出现：x_1 和第一、二个 x_2

2

将下列自然语言的句子表示为公式。

1. $\forall x(p(x) \to q(x))$
   $p(x)$ 表示 x is persistent ，$q(x)$ 表示 x can learn logic
2. $\neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$
   $p(x)$ 表示 x is politician ，$q(x)$ 表示 x is honest
3. $(\neg\forall x(p(x) \to q(x))) \wedge (\forall x(p(x) \to \neg q(x)))$
   $p(x)$ 表示 x is a bird, $q(x)$ 表示 x can fly
4. $(\forall x p(x)) \to p(a)$
   $p(x)$ 表示 x can solve the problem, a 表示 Hilary
5. $\neg\exists x(\exists y(p(y) \wedge q(x, y)))$
   $p(x)$ 表示 x is a loser, $q(x, y)$ 表示 x loves y
6. $(\forall x \exists y\ p(x, y) \wedge \neg\exists x \forall y\ p(x, y)) \vee (\exists x \forall y\ p(x, y) \wedge \exists x \forall y \neg p(x, y))$
   $p(x, y)$ 表示 x loves y
7. $(\exists x \forall y\ p(x, y)) \wedge (\exists y \forall x\ p(x, y)) \wedge \neg(\forall x \forall y\ p(x, y))$
   $p(x, y)$ 表示 you can fool x at time y

8. $\forall x((\neg p(x,x)) \to p(a,x))$

   a 表示 John, $p(x,y)$ 表示 x hates y
9. $\forall A \forall B\ p(A,B) \to (A=B)$

   A, B 表示两个集合，$p(A,B)$ 表示 A 和 B 有相同的元素
10. $\neg\exists x(\forall y\ (\neg p(y,y) \leftrightarrow p(x,y)))$

    $p(x,y)$ 表示 $x \in y$
11. $\neg\exists x(\forall y\ (\neg p(y,y) \leftrightarrow p(x,y)))$

    $p(x,y)$ 表示 x 给 y 理发

3

证明下列公式是逻辑永真的（书 5.2.5 节）：

1. $\forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$

   "$\to$" 方向（即 $\forall x A(x) \to \neg\exists x \neg A(x)$）：

   假设存在赋值 v 使得 $(\forall x A(x))^v = 1$ 并且 $(\neg\exists x \neg A(x))^v = 0$ ，

   由 $(\neg\exists x \neg A(x))^v = 0$ 说明论域中存在元素 a 使得 $(\neg A(x))^{v/a} = 1$ ，即 $(A(x))^{v/a} = 0$ 。

   而 $(\forall x A(x))^v = 1$ 说明对论域中任何元素 b 均有 $(A(x))^{v/b} = 1$ 。

   令 $b = a$ 得 $(A(x))^{v/a} = 1$ ，与 $(A(x))^{v/a} = 0$ 矛盾。

   "$\leftarrow$" 方向（即 $\neg\exists x \neg A(x) \to \forall x A(x)$）：

   假设存在赋值 v 使得 $(\neg\exists x \neg A(x))^v = 1$ 且 $(\forall x A(x))^v = 0$,

   由 $(\neg\exists x \neg A(x))^v = 1$ 说明论域中存在元素 a 使得 $(\neg A(x))^{v/a} = 0$ ，即 $(A(x))^{v/a} = 1$ 。

   而 $(\forall x A(x))^v = 0$ 说明对论域中任何元素 b 均有 $(A(x))^{v/b} = 0$ 。

   令 $b = a$ 得 $(A(x))^{v/a} = 0$ 与 $(A(x))^{v/a} = 1$ 矛盾。
2. $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$

   假设存在赋值 v 使得 $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))^v = 1\,(1)$ 且 $(\forall x(A(x) \vee B(x)))^v = 0\,(2)$ 由 (1) 得 $(\forall x A(x))^v = 1\,(3.1)$ 或 $(\forall x B(x))^v = 1\,(3.2)$ 。

   对论域中的任何元素 a ，如果 (3.1) 成立则 $(\forall x(A(x) \vee B(x)))^{v/a} = 1\,(4)$ ，如果 (3.2) 成立亦可得 (4) 。从而 (4) 与 (2) 矛盾。

4

判断下列公式是否是逻辑永真的（例题 5.2.14 下面的逻辑结论判定）：

1. $\neg\exists y \forall x(p_1^2(x,y) \leftrightarrow \neg p_1^2(x,x))$
2. $\exists x \exists y(p_1^2(x,y) \to \forall z\ p_1^2(z,y))$
3. $\exists x \exists y(p_1^1(x) \to p_2^1(y)) \to \exists x(p_1^1(x) \to p_2^1(x))$

以上三个公式都是永真的，（参考了书上的例子，例题 5.2.14 这一页最下）假设该公式

非永真，即存在赋值使得 $v(\cdots)=0$ ，由判定过程找矛盾。

第 1 个式子判定如下：

$$
\begin{aligned}
&v(\neg\exists y\forall x(p_1^2(x,y)\leftrightarrow\neg p_1^2(x,x)))=0\\
&v(\exists y\forall x(p_1^2(x,y)\leftrightarrow\neg p_1^2(x,x)))=1\\
&\mathbf{E}b(v_{y/b}(\forall x(p_1^2(x,y)\leftrightarrow\neg p_1^2(x,x)))=1)\\
&\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p_1^2(x,y)\leftrightarrow\neg p_1^2(x,x))=1)\\
&\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p_1^2(x,y))=1\quad\text{iff}\quad v_{y/b,x/a}(\neg p_1^2(x,x))=1)\\
&\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p_1^2(x,y))=1\quad\text{iff}\quad v_{y/b,x/a}(p_1^2(x,x))=0)
\end{aligned}
$$

取 $a=b$ 得到矛盾：$v_{y/b,x/b}(p_1^2(x,y))=1\quad\text{iff}\quad v_{y/b,x/b}(p_1^2(x,x))=0$ ，所以该公式是永真的。

第 2 个式子判定如下（参考了书上的提示）：

$$
\begin{aligned}
&v(\exists x\exists y(p_1^2(x,y)\to\forall z p_1^2(z,y)))=0\\
&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(p_1^2(x,y)\to\forall z p_1^2(z,y))=0)\\
&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(p_1^2(x,y)=1)\&v_{x/a,y/b}(\forall z p_1^2(z,y))=0)\\
&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(p_1^2(x,y)=1)\&\mathbf{E}c(v_{x/a,y/b,z/c}(p_1^2(z,y)=0))
\end{aligned}
$$

可找到矛盾：

$$
\begin{aligned}
&v_{x/a,y/b}(\forall z p(z,y))=1\text{ iff }\mathbf{A}c(v_{z/c,y/b}(p(z,y))=1)\\
&v_{x/a,y/b}(\forall z p(z,y))=0\text{ iff }\mathbf{E}c(v_{z/c,y/b}(p(z,y))=0)\\
&v_{x/a,y/b}(\exists z p(z,y))=1\text{ iff }\mathbf{E}c(v_{z/c,y/b}(p(z,y))=1)\\
&v_{x/a,y/b}(\exists z p(z,y))=0\text{ iff }\mathbf{A}c(v_{z/c,y/b}(p(z,y))=0)
\end{aligned}
$$

所以该公式是永真的。

第 3 个式子判定如下（参考了书上的提示）：

$$
\begin{aligned}
&v(\exists x\exists y(p_1^1(x)\to p_2^1(y))\to\exists x(p_1^1(x)\to p_2^1(x)))=0\\
&v(\exists x\exists y(p_1^1(x)\to p_2^1(y)))=1\&v(\exists x(p_1^1(x)\to p_2^1(x)))=0\\
&\mathbf{A}a\mathbf{A}b(v_{x/a,y/b}(p_1^1(x)\to p_2^1(y))=1)\&\mathbf{A}c(v_{x/c}(p_1^1(x)\to p_2^1(x))=0)\\
&\mathbf{A}a\mathbf{A}b(v_{x/a,y/b}(p_1^1(x))=1\&v_{x/a,y/b}(p_2^1(y)=0))\\
&\qquad\&\mathbf{A}c(v_{x/c}(p_1^1(x))=1\&v_{x/c}(p_2^1(x))=0)
\end{aligned}
$$

令 $c = a$ 可构造矛盾：

$$
\begin{aligned}
&v_{x/a,y/b}(p_1^1(x) \to p_2^1(y)) = 1 \\
&v_{x/a,y/b}(p_1^1(x)) = 1 \\
&v_{x/a,y/b}(p_2^1(x)) = 0
\end{aligned}
$$

所以该公式是永真的。