面向人工智能的数理逻辑

眭跃飞　编著

中国科学院大学研究生教材系列

面向人工智能的数理逻辑[1]

眭跃飞 编著

[1]本书是中国科学院大学教材出版中心资助.

序

胡世华院士和陆钟万研究员编写出版了《数理逻辑基础》(上册1981, 下册1982), 该书系统地介绍了命题逻辑和谓词逻辑, 以及Gödel不完全性定理. 该书采用当时流行的公理证明系统, 以及自然推理系统. 自然推理系统容易理解, 尤其那些对于没有数学和逻辑学基础的学生. 陆钟万研究员采用该书在中国科学院研究生院(现在的中国科学院大学)讲授数理逻辑课程, 一直到2003年. 期间陆钟万研究员根据计算机科学专业的学生的特点, 将《数理逻辑基础》中特别数学的内容进行了适当的删减, 并引入介绍模态逻辑, 形成了《面向计算机科学的数理逻辑》.

从2004年至今本人在中国科学院大学讲授数理逻辑课程. 根据学生普遍缺乏逻辑知识的特点, 在正式介绍数理逻辑之前先介绍普通逻辑中的基本概念：概念和推理; 并根据计算机科学中应用的逻辑几乎都是模态逻辑, 介绍模态逻辑以及在知识表示时我们容易出现逻辑错误的地方. 本书是根据这些年的讲义改编而成. 其主要特点为：(1) 系统地介绍自然推理系统、公理系统和Gentzen推理系统, 其中公理系统比较数学些, 自然推理系统难以实现, 而Gentzen推理系统易于理解和实现; (2) 系统地介绍一个描述逻辑的各种推理系统, 包括Gentzen推理系统和表式证明系统; (3) 系统地定义Turing可计算函数及其在Peano算术公理系统中的可定义性和可表示性, 由此给出Gödel不完全性定理的证明.

下列表格列出了本书介绍的推理系统:

单调推理系统	自然推理系统	公理系统	Gentzen推理系统	表式推理系统
命题逻辑	$\mathbf{N}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{G}_1$	$\mathbf{T}_1/\mathbf{S}_1$
谓词逻辑	$\mathbf{N}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{G}_2$	$\mathbf{T}_2/\mathbf{S}_2$
命题模态逻辑		$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{G}_3$	$\mathbf{T}_3/\mathbf{S}_3$
谓词模态逻辑			$\mathbf{G}_4$	
描述逻辑			$\mathbf{G}_5$	$\mathbf{T}_5/\mathbf{S}_5$
语义继承网络			$\mathbf{G}_6$	$\mathbf{T}_6/\mathbf{S}_6$

以及

非单调推理系统	Gentzen推理系统	表式推理系统
命题逻辑	$\mathbf{M}_1$	
描述逻辑	$\mathbf{M}_5$	$\mathbf{T}'_5/\mathbf{S}'_5$
语义继承网络	$\mathbf{M}_6$	$\mathbf{T}'_6/\mathbf{S}'_6$

由于本书是由讲义改编而成, 其中难免有各种错误, 还望读者见谅. 本人衷心地欢迎读者提出批评和意见. 联系方式: 13911230027, yfsui@ict.ac.cn.

本书由中国科学院大学教材出版中心资助.

眭跃飞
2016,10,30

内容简介

本书介绍了Aristotle考虑过的三个逻辑: 命题逻辑、谓词逻辑和模态逻辑. 对每个逻辑, 我们将介绍该逻辑的自然推理系统、公理系统和Gentzen推理系统, 并给出相应的完备性定理的证明, 其中公理系统的完备性证明利用的极大协调公式集合的方法, 而Gentzen推理系统的完备性定理的证明采用的是证明树构造方法. 作为计算机科学专业用书, 我们还介绍了可计算函数和Gödel不完备性定理, 给出了该定理的3个证明(省略可计算函数的可定义性和可表示性定理的证明): 传统的、算法的和基于Berry悖论的. 作为Gödel不完备性定理的核心证明思路, 本书介绍了对角线方法在数理逻辑和可计算理论中的几个重要应用, 包括Cantor定理、Russell悖论、说谎者悖论、停机问题的不可判定性等. 本书可作为计算机科学, 数学和哲学专业的大学生和研究生用书, 着重介绍将来研究中可能用到的证明方法和发现问题的思路.

附录目录

目　录

第一章1

绪论

Aristotle[1] 考虑过的谓词逻辑和模态逻辑形成了现代的普通逻辑; 而Ackermann和Hilbert[2]将语法语义分开来讨论的数理逻辑是第一本数理逻辑书籍. 在普通逻辑中由于语法语义没有严格区分开来, 像这样句子“这句话是真的”仍然具有真假值. 这样“这句话是假的”或者“我说谎”既不能真也不能假. 现在的数理逻辑中不存在这样的悖论. Gödel利用Peano算术的表达能力, 将“一个句子是证明的”用一个Peano算术公式来表示, 从构造出一个公式表示“我不可证明”而得到Gödel不完备性定理.

1.1 什么是逻辑?

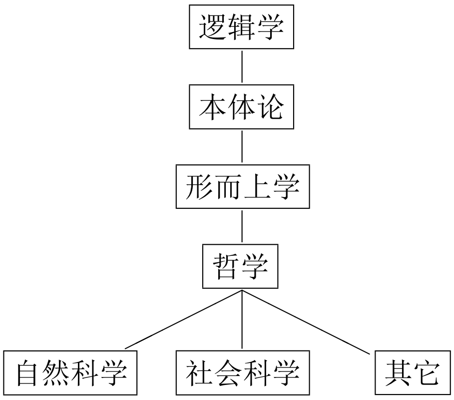
什么是逻辑? 一般逻辑书上说: 逻辑是研究人们一般思维规律的学科. 这样的定义通常不会告诉我们多少东西, 因为我们不知道或者还没有定义什么是思维, 什么是思维规律. 很多著名逻辑学家试图更精确地定义逻辑. 下面是其中的几个:

> Quine[3]: 逻辑是必然推论的科学.
>
> Kleene[4]: 逻辑是用来组织科学的知识和当作日常生活上**推理**之工具的.
>
> Mendelson[5]: 逻辑最通俗的定义之一是: **推理方法**之分析.
>
> Copi, Cohen[6]: 逻辑的研究是用来区分对的论证和错的论证的方法和原理的研究.
>
> Kneales'[7]: 逻辑是研究有效推理的规则的.
>
> Skyrms[8]: 逻辑是关于论证的前提与结论之间**论据联系强度**的学问.

其中楷书表示狭义的理解, 黑体表示广义的理解. 这里狭义的理解(楷体)是指严格的和逻辑学层次上的理解; 而广义的理解(黑体): 非严格的, 非形式的, 日常使用的, 常常可能会出现错误的. 人工智能的最终目的可以理解为: 让狭义的理解等于广义的理解.

普通逻辑的研究对象不同于其它科学在于: 自然和社会科学是以**客观, 不以思维和意识为转移**的现实对象为研究对象; 而普通逻辑研究的对象就是一般思维规律.

这里我们需要知道逻辑在整个人类知识体系中的位置. 逻辑知识是最基本的知识, 一个人的逻辑出了问题, 那么他/她什么科学的事情都做不成. 逻辑知识下面是本体论知识. 本体论知识告诉我们这个世界上什么是存在的(being), 是怎样存在的. 本体论知识下面是形而上学(metaphysics)知识. 通常我们认为世界上所有的东西是由物质(substance)和形式(form)组成. 物质是物理学研究的对象, 而形式是形而上学研究的对象. 形而上学知识下面是哲学, 哲学下面是社会科学和自然科学. 这里下面的意思是下面的知识是依赖于上面的知识的.



普通逻辑是由概念、推理和归纳组成. 我们将在第三章给出具体的介绍.

1.2 数理逻辑

通常, 一个学科的英文名称引申出2个形容词, 比如,

经济学的	*economic*	经济的	*economical*
历史学的	*historic*	历史的	*historical*
电学的	*electric*	电的	*electrical*.

而数学mathematics只有一个形容词mathematical. 因而, 数理逻辑(mathematical logic)有两个含义:

1. 用数学的严格方法来研究普通逻辑(mathematical);
2. 研究数学证明中的逻辑, 期望形式化(严格化)数学证明(mathematic∗).[1]

换言之, 数理逻辑是用数学的严格方法来研究普通逻辑. 这就是形式化的方法. 因此, 数理逻辑是用

$$\text{人工(形式)语言} \xrightarrow{\text{表示}} \text{形式命题} \xrightarrow{\text{反映}} \text{形式化的世界}.$$

[1]标记∗表示该断言在语言层次或者元语言层次是有问题的.

而普通逻辑是用

$$\text{自然语言} \xrightarrow{\text{表示}} \text{命题} \xrightarrow{\text{反映}} \text{真实世界}.$$

数理逻辑是数学分支之一. 在上个世纪八十年代, 美国数学学会列出的数学分支的顺序为:

数理逻辑与数学基础, 几何, 代数, 分析,概率统计.

数理逻辑包含4个分支: 模型论[9], 集合论[10], 递归论[11,12]和证明论[13]. 其中模型论是泛代数+逻辑, 是研究一个理论的模型的代数性质, 包括哪些性质在代数结构的运算下是保持的. 集合论是公理集合论. 这里集合理论是一个具体的谓词逻辑理论. 递归论是研究Turing机和Turing归约的数学理论. 而证明论主要研究证明的逻辑和代数性质, 包括Peano算术的证明理论.

- 数理逻辑
  - 模型论
  - 集合论
  - 递归论
  - 证明论

1.3 计算机专业的学生为什么要学数理逻辑?

作为计算机专业的学生, 为什么要学数学的数理逻辑课程? 答案是

> 因为计算机是数理逻辑的产物;
>
> 没有数理逻辑就没有当今的计算机;
>
> 没有数理逻辑就没有当今严格定义的算法概念;
>
> 没有严格定义的算法概念就没有通用Turing机;
>
> 没有通用Turing机就没有当今的计算机.

我们下面将论证这些断言.

计算装置的简要历史: Gottfried Leibniz在1670年制造了Leibniz轮(wheel), 他期望计算的机械化可以带来很大的好处. 因为他认为

> *For it is unworthy of excellent men to lose hours like slaves in the labor of computation* (Smith, 1929, 180-181).[2]

Leibniz提出过著名的

[2]Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill, 1929.

> Leibniz律(也称identity of indiscernibles): 两个对象a和b, 如果a具有b具有的每个性质, 并且b具有a具有的每个性质, 即对任意性质φ, a具有性质φ当且仅当b具有性质φ, 则a和b是恒等的(identical).

与其对应的是

> 恒等律(indiscernibility of identicals): 如果a和b是恒等的则对任何性质φ, a具有性质φ当且仅当b具有性质φ.

恒等律我们认为自然成立的. 由Leibniz律, 我们得到 Leibniz定理:

定理1.3.1 *如果$a = b$则$b = a$.*

□

相等是一个非常复杂的概念, 其含义随着上下文变化而变化. 比如复数集合上的相等不同于实数集合上的; 实数集合上的相等不同于有理数集合上的; 有理数集合上的相等不同于自然数集合上的.

恒等在现实中是模糊使用的(不妨称为相等). 因而相等是形式化中最麻烦的东西. 比如, 古希腊神话中的特修斯(Thesuese)的船[14]. 为了简单起见, 我们假设特修斯的船只有4块木板组成$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$. 航行一段时间以后, 木板老化需要更换, 假设在步骤1特修斯用木板a_2替换a_1, 那么特修斯的船变成了$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$. 我们不会因为替换一块木板而认为这不再是特修斯的船了, 即我们认为

$$\{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_1, c_1, d_1\}.$$

(不要将=理解为集合的相等.) 这样下去, 通过若干次替换, 所有的木板都换了一次.

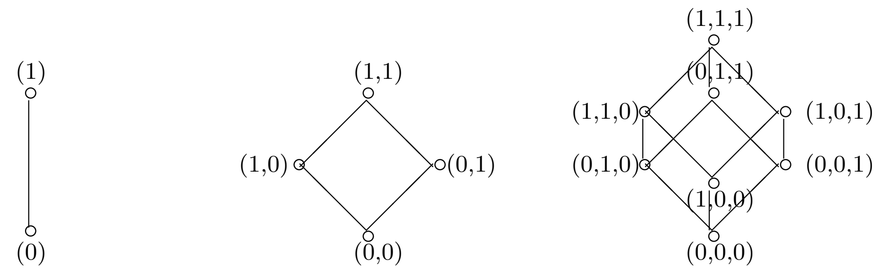
步骤	船	木板
步骤0	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
步骤1	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$
步骤2	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$
步骤3	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$
步骤4	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

我们得到如下的等式:

$$\begin{aligned}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} &= \{a_2, b_1, c_1, d_1\}\\ &= \{a_2, b_2, c_1, d_1\}\\ &= \{a_2, b_2, c_2, d_1\}\\ &= \{a_2, b_2, c_2, d_2\}.\end{aligned}$$

如果将替换下来的木板保留下来重新组成一个船, 那么特修斯就有2条相等的船.

Leibniz根据中国的易经,提出了二进制, 为布尔代数的产生提供了基础.



19世纪30年代Charles Babbage想象出全能的自动计算的机器: 解析机(analytical engine). 这里, 全能是指大部分代数和数学分析中的数值计算(因为当时没有算法的严格定义). Harvard大学的Howard Aiken教授甚至在1956年不相信存在既能计算又有商业用途的机器.

> If it should turn out that the basic logics of a machine designed for the numerical soluation of differential equations coincide with the logics of a machine intended to make bills for a department store, I would regard this as the most amazing coincidence that I have ever encountered. (Ceruzzi, 1983, p43.)[3]

Hilbert提出了著名的Hilbert*计划*, 并于1920年代提出了一个问题: 如何只用严格的证明方法证明形式系统的协调性. 于1928年Hilbert与Ackermann出版了第一本数理逻辑的书: 《理论逻辑的基础(Grundzüge der theoretischen Logik)》. 该书提出了一个形式证明系统, 以及关于这个形式证明系统的2个问题:

- *完备性问题*: 该系统是否是完备的.
- *算法问题*: 找一个算法来有效地(effectively)判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.

1930年Gödel[15]证明了: *该形式系统是完备的*. 并于1934年证明了: *在一个形式系统内证明该形式系统是否协调的是不可判定的*[16]. 这里的不可判定性是指不能证明也不能证否.

关于算法问题, 如果这个问题的算法存在将预示着所有数学问题都存在算法解; 如果存在一个问题没有算法解, 那么算法问题就没有算法解. Turing直观认为这样的算法是不存在.

对于存在算法的问题, 找到直观的算法就可以. 我们可以很容易地判定一个算法是否是一个算法. 因为直观算法定义是:

一个算法是有限的、可以机械执行的指令集合.

困难之处是如果算法不存在而要证明它不存在. 在数据库中, 一个数据项如果在数据库中存在, 则找到这个数据项就可以了; 但要说明该数据项在数据库中不出现, 则需要找遍整个数据库. 再比如, 我们无法证明永动机在宇宙中是不存在. 数据库的范围是确定的, 而宇宙的范围是不确定的.

---

[3]Ceruzzi, P. E., *Reckoners, the Prehistory of the Digital Computer from Relays to the Stored Program Concept, 1933-1945*, Westport, CN, Greenwood Press, 1983.

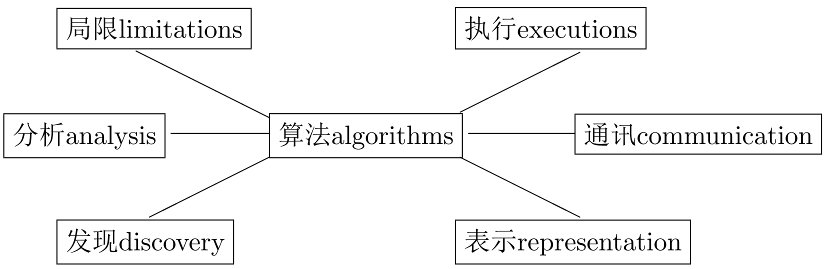
因此, 要证明该算法不存在, 就需要严格定义的算法概念, 来界定什么是算法什么不是算法. Turing[17]于1936年提出了Turing机, 由此我们可以定义通用Turing机. 这里通用Turing机可以接受一个Turing机以及一个输入x作为输入, 通用Turing机将模拟所接受的Turing机在输入x上的计算. *这正是现代计算机的理论原型*. 后来逻辑学家证明了其他计算模型的计算能力都与Turing机的计算能力相等, 包括递归函数, 0-型形式文法, 自动机等等. Turing机的研究成为数理逻辑分支之一: 递归论, 也称可计算性理论.

这样, 人们证明了*算法问题*的否定解, 即这样的算法是不存在的.

*现代计算机*的原型机是John van Neumann[18]于1944年首先制造出来的ENIAC, 它由18,000个电子管组成的.

这样, 我们定义算法可计算的这个直观概念就是Turing机可以计算的. Turing机可以计算的是算法可计算的. 而反过来, 我们不能证明算法可计算的全是Turing机可以计算的. 因此, 我们必须用著名的Church假设(Thesis): 所有直观算法可计算的都是Turing可计算的. 因此, Turing可计算函数类等价于递归函数类, 等价于0-型形式文法类等等[19], 并且在计算复杂性层次上也是等价的, 即如果一个问题在Turing模型中是多项式时间可计算的, 那么在递归函数类中也是多项式时间可计算的, 反之也然[20].

算法在计算机科学中起着中心的作用[4]. 要注意的是: 这里的算法是Turing机意义上的严格定义的算法概念, 它可以是部分函数.



从以上的论述, 我们可以看出: 计算机科学是数理逻辑的产物. 而*算法是逻辑的*; 并且*逻辑是算法的*.

1.4 计算机科学中的逻辑

图灵机是形式的, 因而计算机科学是形式的. 计算机科学用到了几乎所有的逻辑, 并且计算机科学的每个分支也产生了许多新的逻辑. 其中包括

- *经典逻辑*: 命题逻辑[21], 谓词逻辑[21], 模态逻辑[22];
- *非经典逻辑*: 时态逻辑[23], 动态逻辑[24], 非单调逻辑[25], 描述逻辑[26], 等等.

这里经典的是指亚里士多德考虑过的逻辑, 而非经典的是由经典逻辑引申出来的逻辑.

[4]Brookshear, J. G., *Computer Science, an overview*(计算机科学概论), 人民邮电出版社, Addison Wesley, 2000.

这些逻辑根据描述的对象可以分为
- *描述性质的逻辑*: 命题逻辑, 谓词逻辑, 模态逻辑;
- *描述对象的逻辑*: 描述逻辑, O-逻辑, F-逻辑;[5]
- *描述元性质的逻辑*: 模糊逻辑, 非单调逻辑, 缺省逻辑[27].

具体到计算机科学的各个分支, 我们有下列逻辑

○ 程序设计理论:

- Hoare 逻辑[28], 一种模态逻辑
- 动态逻辑[24]
- 命题μ-演算[29], 一种高阶模态逻辑

○ 数据库:

- Armstrong公理[30], 关于函数依赖关系的推理是可靠的并且完备的,

○ 信息安全:

- BAN 逻辑[31]是一种多种多模态逻辑

○ 人工智能:

- BDI逻辑[32]: BDI是特殊的模态逻辑, 其中描述的对象有两类: 主体agent与对象; 描述的断言有两类: 关于现实世界的断言和关于主体信念的断言; 断言的真假值有两类: 相对于现实世界的和相对于主体信念世界的.
- 动作(action)逻辑[32]
- 事件(event)逻辑[32]
- 情景演算(situation calculus)[33]
- $\cdots$

在所有这些计算机科学分支中, 我们还只列出一些代表性的逻辑.

1.5 符号说明

我们用N表示自然数集合, $\mathbf{N}$表示自然数的代数结构.

字母表前面的小写字母a,b,c,d表示常量, 后面的小写字母x,y,z表示变量; i,j,k,m,n表示自然数, f,g,h表示函数; 黑体的$\mathbf{f}$表示函数符号, 黑体的$\mathbf{p}$表示谓词符号.

我们用大写的字母A,B,C,D在第二章中表示集合, 其它章节中表示逻辑公式; 用大写的希腊字母Σ,Γ,Δ表示公式集合.

---

[5]描述逻辑应该属于经典逻辑. 概念的形成早于逻辑推理. 描述逻辑在网络语言和服务的表示方面有着特有的优势, 对自然语言的表示和处理也是比谓词逻辑要自然. 描述逻辑是谓词逻辑的可判定子集, 这个说法是错误的: (1) 谓词逻辑不是一个集合, 不可能有谓词逻辑的子集. 谓词逻辑的fragments不是子集; (2) 描述逻辑是一类逻辑, 有些描述逻辑不是可判定的.

在逻辑的语法中, 我们用$\neg, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$表示逻辑连接词和量词; 而在逻辑的语义中, 我们用$\sim, \&, \Rightarrow, \mathbf{A}, \mathbf{E}$表示相应的连接词和量词.

参考文献:

[1] Aristotle, Posterior Analytics[M]//Mckeon R. *The Basic Works.* Modern Library, 2001.

[2] Hilbert D., Ackermann W. *Grundzüge der theoretischen Logik*[M]. Springer-Verlag, 1928. *Principles of Mathematical Logic,* translated by L. M. Hammond, G. G. Leckie and F. Steinhardt, 1950.

[3] van Orman Quine W. *From a Logical Point of View*[M]. Harvard Univ. Press, 1980.

[4] Kleene S.C. *Mathematical Logic* [M]. John Wiley, 1967. Dover reprint, 2002

[5] Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic* [M]. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software: Monterey, Calif.,1964.

[6] 柯匹I.M., 科恩C. 逻辑学导论. 张建军潘天群译, 中国人民大学出版社, 2007.

[7] Kneale W., Kneale M. *The Development of Logic* [M]. Oxford University Press, London, UK,1962.

[8] Skyrms B. *Choice and Chance: An Introduction to inductive logic*[M]. 4th ed., Wadsworth, 2000.

[9] Chang C., Keisler H. *Model Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*[M]. 3rd ed., Elsevier, 1990.

[10] Jech T. *Set Theory*[M]. 3rd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer,2003.

[11] Rogers H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability* [M]. The MIT Press, 1967.

[12] Soare R.I. *Recursively Enumerable Sets and Degrees, a Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*[M]. Springer-Verlag, 1987.

[13] Takeuti G. Proof Theory [M]. Dove Books on Mathematics, 1977.

[14] 施瓦布. 希腊神话. 曹乃云译, 译林出版社, 2009.

[15] Gödel K. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic[M]//J. van Heijenoort, *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Harvard Univ. Press, 1967.

[16] Gödel K. On undecidable propositions of formal mathematical systems [M], Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1934.

[17] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem [J]. Proc. London Math. Soc., 1936, 42:230-265.

[18] Davis M. *Engines of logic: mathematicians and the origin of the computer*[M]. New York: Norton, 2000.

[19] van Emde Boas P. Machine models and simulations[M]//J. van Leeuwen (ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*. Volume A: Algorithms and Complexity,3-66. The MIT Press/Elsevier, 1990.

[20] 洪加威, 论计算的相似性与对偶性[J]. 中国科学, 1981, 11:248-256.

[21] Li W. *Mathematical Logic, Foundations for Information Science*[M]//Progress in Computer Science and Applied Logic, vol.25, Birkhäuser, 2010.

[22] Fitting M., Mendelsohn R.I. *First Order Modal Logic*[M]. Kluwer, 1998.

[23] Pnueli A. The Temporal logic of programs [C]//FOCS 1977, 46-57.

[24] Harel D., Kozen D., Tiuryn J. *Dynamic Logic*[M]. MIT Press, 2000.

[25] Ginsberg M.L.(ed.) *Readings in Nonmonotonic Reasoning*[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1987.

[26] Baader F., Calvanese D., McGuinness D.L., Nardi D., Patel-Schneider P.F. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, Applications*[M]. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[27] Kosko B. *Fuzzy Thinking. The New Science of Fuzzy Logic*[M]. New York: Hyperion, 1993.

[28] Hoare C.A.R. An axiomatic basis for computer programming[J]. *Communications of the ACM*, 1969, 12:576-580.

[29] Bradfield J., Stirling C. Modal mu-calculi [M]//P. Blackburn, J. van Benthem and F. Wolter, *The Handbook of Modal Logic*. Elsevier, 721-756,2006.

[30] Armstrong W.W. Dependency Structures of Data Base Relationships[C]//*IFIP Congress*,580-583, 1974.

[31] Monniaux D. Decision Procedures for the Analysis of Cryptographic Protocols by Logics of Belief [C]// *Proceedings of the 12th Computer Security Foundations Workshop*, 1999.

[32] van Harmelen F., Lifschitz V., Porter B. *Handbook of Knowledge Representation*[M]. Elsevier 2008.

[33] Reiter R. *Knowledge in Action: Logical Foundations for Specifying and Implementing Dynamical Systems*[M]. The MIT Press, 2001.

[34] Sowa J.F. *Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations*[M]. Brooks/Cole: New York, 2000.

第二章2

基础知识

从逻辑在整个人类知识中的位置来看, 学逻辑是不需要任何基础知识的. 因此, 我们可以直接读普通逻辑书籍. 而学数理逻辑需要一些基本的数学知识. 这一章给出的基础知识是使我们更好地理解数理逻辑而应该具有的.

2.1 集合

直观地, 我们定义集合(set)是具有某种性质的元素(对象)的汇集(collection)[1]. 其中性质可以看着集合的内含, 而满足性质的对象属于集合的外延.

2.1.1 基本定义

我们通常用小写字母表示元素/对象, 用大写字母表示集合. 如果一个元素a具有定义集合S的性质, 那么我们说a属于这个集合, 记为$a \in S$, 否则a属于这个集合, 记为$a \notin S$.

概念与集合是不同的两个概念[2]. 比如

张三是一个人;

(∗) 我是这个班;

(∗) 我是共产党;

我是这个班的同学;

我是共产党党员.

其中标记为∗的说明不符合语义规范.

对于概念A, 我们可以说一个元素x是一个A; 而对于集合A, 我们需要说一个元素x是集合A的一个成员.

集合是一个个体; 而概念不是一个个体. 概念是一个(复合)个体, 是由概念的外延和概念的内涵共同组成的.

学一个新概念, 我们首先搞清楚下面3点:

(1) 概念的内涵是什么. 比如: 一个集合是具有某个性质的元素的集体.

(2) 有什么特殊的外延元素; 比如对于自然数的概念, 我们有自然数概念的外延为$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

(3) 外延元素之间的相等关系.

注意: 相等关系可以通过其它基本关系定义. 比如, 通过自然数上的大小关系$\leq$, 我们可以定义自然数上的相等关系$=$: 对任何自然数n, m,

$$n = m \text{ iff } n \leq m \& m \leq n.$$

其中iff表示if and only if (当且仅当).

对于集合这个概念, 集合之间的关系包括

• 集合相等: $S = T$ iff 对所有的$x, x \in S$当且仅当$x \in T$. 即两个集合相等当且仅当两个集合具有相同的元素.

• 子集关系: $S \subseteq T$ iff 对所有的x, 如果$x \in S$则$x \in T$. 并且S为T的真子集, 表示为$S \subset T$, 如果$S \subseteq T$ 并且存在一个元素a属于T但不属于S. 即$S \subseteq T$并且$S \neq T$.

事实上, 子集关系是一个基本关系. 因为集合相等可以通常子集关系来定义: 对任何集合S, T,

$$S = T \text{ iff } S \subseteq T \& T \subseteq S.$$

而子集关系又可以通过属于关系$\in$来定义: 对任何集合S, T,

$$S \subseteq T \text{ iff 对任何的} x, x \in S \text{ 蕴涵 } x \in T.$$

因此, 在集合论中只需要一个基本关系, 就是*属于关系*:

属于关系: $\in$.

由集合相等的定义我们可以推出: *集合与构成集合的元素的次序和重复无关*. 比如下面两对集合是相等的:

$$\begin{aligned} \{0, 0, 1\} &= \{0, 1\}; \\ \{0, 1\} &= \{1, 0\}. \end{aligned}$$

空集$\emptyset$是不含任何元素的集合. 由集合相等的定义, 空集是唯一的, 并且,

命题2.1.1 *空集是任何集合的子集. 即任给一个集合A, 有*

$$\emptyset \subseteq A.$$

证明 我们需要证明: 对任何元素x, 如果$x \in \emptyset$ 则$x \in A$.

因为$x \in \emptyset$为假, 因而$x \in \emptyset$蕴含$x \in A$为真.

在逻辑学中我们约定: *如果前提为假, 则整个蕴涵式句子为真*. 当蕴含式的前提为假时, 整个蕴含的真假值与蕴含式的结论的真假值无关.

□

具有性质P的元素组成的集合通常表示为

$$S = \{x : P(x)\},$$

其中$P(x)$是关于x的性质[3]. 比如$\{x : x < 100,$ 并且x是素数$\}$ 是小于100的素数的集合. 这里, 我们需要注意两点:

- 属于这个集合的元素具有性质P;
- 不属于这个集合的元素不具有性质P.

实际上, 这样定义的集合这个概念是有问题的. Russell[4]于1900年左右给出了著名的

Russell悖论: 设$P(x) = x \notin x$是一个关于x的性质. 定义集合

$$V = \{x : x \notin x\}.$$

问题: 是否$V \in V$?

∘ 如果$V \in V$则V应该满足定义该集合的性质, 即$V \notin V$, 我们得到一个矛盾;

∘ 如果$V \notin V$则V满足定义该集合的性质, 因此$V \in V$, 我们得到一个矛盾.

因为$V \in V$只有两种可能: $V \in V$和$V \notin V$, 而不管什么情况都得到一个矛盾. 因此, $V \in V$是一个悖论.

Russell悖论的推动作用是

(1) 由Frege[1]给出的朴素集合论(naive set theory)变成*公理化*(axiomatic)*集合论*[5]: *解决办法*: $\{x \in A | P(x)\}$是一个集合, 其中满足性质P的元素必须来自一个事先给定的集合A.

(2) 类型论[6,7](type theory)的产生. 在类型论中解决Russell悖论的办法是: 将所有的集合分成若干个类型, 低类型的集合才可以构成高类型的集合. 类型论是现代程序设计语言的基本理论之一[7].

另一个关于集合的概念是2个元素的有序偶, 定义为:

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

其中a, b是两个元素.

命题2.1.2 *$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ 当且仅当$a = c$并且$b = d$.*

证明 因为

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

当且仅当$a = c$ 并且$b = d$.

□

2.1.2 集合的运算

集合的基本运算是集合的交、并、差.

- 集合S和T的*交*:

$$S \cap T = \{x : x \in S且x \in T\};$$

- 集合S和T的*并*:

$$S \cup T = \{x : x \in S或x \in T\};$$

- 集合S和T的差:

$$S - T = \{x : x \in S \text{且} x \notin T\}.$$

命题2.1.3 集合交和并具有下列性质: 对任何集合S, T, U,

$$\begin{array}{ll} \text{交换律:} & S \cup T = T \cup S; \\ & S \cap T = T \cap S; \\ \text{结合律:} & S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U; \\ & S \cap (T \cap U) = (S \cap T) \cap U; \\ \text{分配律:} & S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U); \\ & S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U). \end{array}$$

证明 分配律的证明: 对任何集合S, T, U,

$$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U).$$

根据集合的相等, 我们需要证明

$$S \cap (T \cup U) \subseteq (S \cap T) \cup (S \cap U) \tag{1}$$

并且

$$(S \cap T) \cup (S \cap U) \subseteq S \cap (T \cup U). \tag{2}$$

对于$S \cap (T \cup U) \subseteq (S \cap T) \cup (S \cap U)$, 我们需要证明: 对任何$x$,

$$\begin{array}{lll} x \in S \cap (T \cup U) & \text{当且仅当} & x \in S, \text{且} x \in T \cup U \\ & \text{当且仅当} & x \in S, \text{且} x \in T \text{或} x \in U \\ & \text{当且仅当} & x \in S \text{且} x \in T, \text{或} x \in S \text{且} x \in U, \end{array}$$

即$x \in S \cap T$, 或$x \in S \cap U$.

对于$(S \cap T) \cup (S \cap U) \subseteq S \cap (T \cup U)$, 我们需要证明: 对任何$x$,

$$\begin{array}{lll} x \in (S \cap T) \cup (S \cap U) & \text{当且仅当} & x \in S \cap T, \text{或} x \in S \cap U \\ & \text{当且仅当} & x \in S \text{且} x \in T, \text{或} x \in S \text{且} x \in U \\ & \text{当且仅当} & x \in S, \text{且} x \in T \text{或} x \in U \\ & \text{当且仅当} & x \in S, \text{且} x \in T \cup U \\ & \text{当且仅当} & x \in S \cap (T \cup U). \end{array}$$

□

注意: $\cup$和$\cap$的分配性最后归约为自然语言中的“或”和“且”的分配性. 集合运算的代数性质是对应的自然语言中的连接词的相应性质. □

给定一个集合S, S的所有子集组成的集合称为S的幂集, 记为$\wp(S)$. 则集合的幂集具有下列性质:

- 每个$\wp(S)$的元素是集合;
- $\wp(S)$中包含一个最大的元素S和
- 一个最小的元素$\emptyset$.

因此, 空集具有下列特点:

- ∘ 不同集合的子集可以不同.
- ∘ 每个集合有空集作为子集.
- ∘ 空集是每个集合的子集.

比如, 集合$\{a,b\}$的幂集为

$$\wp(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, S\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

集合$\{a,b,c\}$的幂集为

$$\wp(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, S\}.$$

集合$\{a,\{b,c\}\}$的幂集为

$$\wp(\{a,\{b,c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,\{b,c\}\}\}.$$

集合$\{a,\{b,c\}\}$的幂集为

$$\begin{array}{l}(*)\ \wp(\{a,\{b,c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,\{b,c\}\}\};\\ \wp(\{a,\{b,c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b,c\}\}, \{a,\{b,c\}\}\}.\end{array}$$

集合$\emptyset$的幂集为

$$\wp(\emptyset) = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}.$$

空集的幂集为非空集合, 这类似于$2^0 = 1$.

注意: $\{\emptyset\}$与$\emptyset$的差别. 比如: 集合$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$的幂集为

$$\wp(\{\emptyset,\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}.$$

□

给定一个集合S和S的一个子集X, X的补定义为

$$-X = S - X.$$

注意补集与集合差之间的差别: 前者的相对性和后者的绝对性.

对应于自然语言上的"否定"与"或, 且"之间的De Morgan律决定了$-$与$\cup,\cap$之间的De Morgan律.

命题2.1.4 集合差具有如下性质: 设X,Y,Z为S的子集,

$$\begin{array}{rl}\text{幂等律(idempotent):} & -(-X) = X;\\ & X\cup(-X) = S;\\ & X\cap(-X) = \emptyset;\\ \text{De Morgan律:} & -(X\cup Y) = (-X)\cap(-Y);\\ & -(X\cap Y) = (-X)\cup(-Y).\end{array}$$

证明 我们给出De Morgan律: $-(X \cup Y) = (-X) \cap (-Y)$的证明, 其它证明类似.

对任何元素x, 假设$x \in -(X \cup Y)$. 则

$$\begin{aligned}
x \notin X \cup Y \quad & \text{当且仅当} \quad x \in X\text{或者}x \in Y\text{的否定} \\
& \text{当且仅当} \quad x \in X\text{的否定并且}x \in Y\text{的否定} \\
& \text{当且仅当} \quad x \notin X\text{并且}x \notin Y \\
& \text{当且仅当} \quad x \in -X\text{并且}x \in -Y \\
& \text{当且仅当} \quad x \in -X \cap -Y.
\end{aligned}$$

□

集合的笛卡儿乘积: 给定集合S和T, 集合S和T的笛卡儿乘积$S \times T$就是S中的元素与T中的元素组成的所有序对的集合:

$$S \times T = \{\langle x, y \rangle : x \in S, y \in T\}.$$

比如, 线段与线段的笛卡儿乘积是面; 线段与面的笛卡儿乘积是立方体.

2.2 关系(relation)

定义2.2.1 给定集合S和T, 一个S与T之间的关系R就是$S \times T$的一个子集. 即

$$R \subseteq S \times T.$$

一般地, 给定集合$S_1, ..., S_n$, 一个$S_1, ..., S_n$上的关系R为$S_1 \times \cdots \times S_n$的一个子集. 一个集合$S$上的$n$-元关系$R$为$S^n(= \overbrace{S \times S \times \cdots \times S}^{n\text{-个}S})$的一个子集.

2.2.1 函数

函数是特殊的关系.

定义2.2.2 S到T的一个函数f 是S与T之间的一个关系, 满足下面条件:

$$\text{对任何}x \in S\text{和}y, y' \in T,\ \text{如果}(x, y), (x, y') \in f\ \text{则}y = y'.$$

记唯一的y(如果存在)为$f(x)$.

函数f的定义域定义为

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in S : \exists y((x, y) \in f)\};$$

值域定义为

$$\mathrm{ran}(f) = \{y \in T : \exists x((x, y) \in f)\};$$

命题2.2.3 如果f是S到T的一个函数, 则

$$\mathrm{dom}(f) \subseteq S;$$
$$\mathrm{ran}(f) \subseteq T.$$

设$S = \{a, b\}, T = \{a, c, d\}$. 关系$R = \{(a, a), (a, c), (b, d)\}$不是一个函数[1]

[1]关系数据库中有一个概念叫做函数依赖.

. 关系$f = \{(a,a),(b,d)\}$是一个函数, 其定义域为$\mathrm{dom}(f) = \{a,b\}$, 值域为$\mathrm{ran}(f) = \{a,d\}$.

函数通常分为如下的种类:

- 一一函数(injective): 一个函数f是一一的, 如果对任何$x, x' \in S$, 如果$x \neq x'$则$f(x) \neq f(x')$.
- 映上函数(surjective, 满射): 一个函数f是满(映上)的, 如果对任何$y \in T$, 存在至少一个$x \in S$使得$f(x) = y$.
- 双射函数(bijective, 满射):一个函数f是一个双射, 如果f是一一的并且满的.

比如, $f = \{(a,a),(b,c)\}$是一个一一的,但非映上的函数, 其中$S = \{a,b,c\} = T$.

2.2.2 关系的分类

一个集合S上的一元关系就是S的一个子集. 在数理逻辑学中, 关系也称为谓词, 谓词也称为关系.

一个集合S上的二元关系$R \subseteq S \times S$ 称为

- R是自反的(reflexive), 如果**对任何**$x \in S$, xRx;
- R是对称的(symmetric), 如果**对任何**$x, y \in S$, 如果xRy 则yRx;
- R是传递的(transitive), 如果**对任何**$x, y, z \in S$, 如果xRy且yRz则xRz;

一个集合S上二元关系R是一个等价关系(equivalence relation), 如果R是自反的、对称的且传递的.

给定一个等价关系R, R的一个等价类X是S的最大子集使得X中每两个元素具有关系R.

给定一个$x \in S$, 子集

$$\overline{x} = \{y \in S : xRy\}$$

是包含x的唯一的等价类.

命题2.2.4 两个等价类X和Y相等, 即$X = Y$, 当且仅当存在$x \in X, y \in Y$使得xRy.

□

定义2.2.5 集合S的子集的集合P是S的一个划分(partition), 如果P的元素两两不相交, 并且所有P的元素的并等于S.

命题2.2.6 给定集合S上的一个等价关系R, R的所有等价类组成S的一个划分.

□

反过来,

命题2.2.7 给定S的一个划分P, 定义关系R_P使得对任何$x, y \in S$,

$$xR_Py\text{当且仅当 存在一个}X \in P\text{使得}x, y \in X.$$

则R_P是一个等价关系, 并且R_P的所有等价类组成的划分就是P.

□

二元关系有几种否定方式. 二元关系的第一种否定的方式:

• R不是自反的, 如果**存在**$x \in S$使得$(x, x) \notin R$;

• R不是对称的, 如果**存在**$x, y \in S$使得xRy并且$(y, x) \notin R$;

• R不是传递的, 如果**存在**$x, y, z \in S$使得xRy, yRz且$(x, z) \notin R$.

二元关系的第二种否定的方式:

• R是非自反的(irreflexive), 如果**对任何**$x \in S, (x, x) \notin R$;

• R是非对称的(asymmetric), 如果**对任何**$x, y \in S, xRy$蕴涵$(y, x) \notin R$;

比如, 自然数集合上的"大于", "小于"是非对称关系.

二元关系的第三种否定的方式:

• R是反对称的(anti-symmetric), 如果**对任何**$x, y \in S, xRy$且yRx蕴涵$x = y$;

比如, 自然数集合上的"不小于", "不大于"是反对称关系.

二元关系的基本性质综述为如下的表:

关系	关系名称
$\forall x \exists y(xRy)$	序列的Serial
$\forall x(xRx)$	自反的Reflexive
$\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \to xRz)$	传递的Transitive
$\forall x, y(xRy \to yRx)$	对称的Symmetric
$\forall x, y, z(xRy \wedge xRz \to yRz)$	欧几里德的Euclidean
$\forall x, y, z(xRy \wedge xRz \to y = z)$	函数式的functional
$* \ \forall x, y(xRy \to yRy)$	移位自反的Shift Reflexive
$\forall x, y(xRy \to \exists z(xRz \wedge zRy))$	稠密的Dense
$*\forall x, y, z, u(xRy \wedge xRu \to \exists z(yRz \wedge uRz))$	收敛的Convergent

2.2.3 序关系

定义2.2.8 (i) 一个集合S上的自反传递的关系R称为S上的一个*前序*(也称伪序, pre-order).

(ii) 如果R是自反的、反对称的、传递的, 称R为S上的一个*偏序*(partial order).

(iii) 一个偏序R是*线性的*(或称为*全序*, linear order), 如果对任何$x, y \in S$, 要么xRy要么yRx.

通常, 我们用$\leq$表示偏序.

一个偏序$\leq$是*良序的*(well-founded), 如果它不包含无限的降链. 比如, 自然数集合上的序关系:

$$0 < 1 < 2 < 3 < ...,$$

是良定的线性序, 但整数集合上的序关系:

$$... < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < ...$$

不是良定的线性序.

定义2.2.9 假设R是一个集合S上的偏序, 且x, y是S的元素. 一个元素$z \in S$称为x和y的并(最小上界, 上确界, join, supremum) 如果
○ xRz, yRz,且
○ 对任何元素$a \in S$使得xRa且yRa, 我们有zRa.
对偶地, 一个元素$z \in S$称为x和y的交(最大下界, 下确界, meet, infimum), 如果
○ $z \leq x, z \leq y$, 且
○ 对任何元素$b \in S$使得$b \leq x$ 且$b \leq y$, 我们有$b \leq z$.

比如在自然数集合上, 定义$m|n$, 如果n能被m整除. 则$|$是一个偏序; 并且给定$m, n \in \omega$,
• m, n的下确界是m, n的最大公因子(m, n);
• m, n的上确界是m, n的最小公倍数$[m, n]$.

2.3 布尔代数

布尔代数是计算机科学的基础, 并且数理逻辑可以说是以布尔代数为基础的.

定义2.3.1 一个布尔代数$B = (U, +, \times, -, 0, 1)$是由非空集合(论域)$U$, 运算$+, \times, -$, 和常元$0, 1$组成的, 其中
(1) $+, \times$满足交换律, 结合律, 分配律;
(2) $-$满足幂等律($-(-x) = x$);
(3) $+, \times, -$满足De Morgan律; 并且
(4) 对任何$x \in U, x + (-x) = 1, x \times (-x) = 0$.

典型的布尔代数就是一个集合的幂集在集合运算组成的代数结构:

$$(\wp(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S)$$

是一个布尔代数.

最简单的布尔代数$\mathbf{B}_2 = (\{0, 1\}, +, \times, -, 0, 1)$就是2个元素组成的布尔代数, 其中
• 二元加法+:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 = 1 + 0, 1 + 1 = 1;$$

• 二元乘法×:

$$0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1;$$

• 一元逆函数$-$:

$$-0 = 1, -1 = 0.$$

这些运算满足下列性质: 对任何$x, y, z \in \{0, 1\}$,
• 结合律:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

- 分配律:

$$\begin{aligned} x \times (y+z) &= (x\times y)+(x\times z)\\ x+(y\times z) &= (x+y)\times(x+z). \end{aligned}$$

- de Morgan律:

$$\begin{aligned} &-(-x) = x\\ &-(x\times y) = (-x)+(-y)\\ &-(x+y) = (-x)\times(-y)\\ &x+(-x) = 0\\ &x\times(-x) = 1. \end{aligned}$$

2.3.1 布尔代数与偏序的关系

给定一个布尔代数$\mathbf{B} = (U,+,\times,-,0,1)$, 我们可以定义$U$上的一个二元关系$\leq$使得对任何$x,y\in U$,

$$x\leq y \text{ 当且仅当 } x+y=y;$$

等价地,

$$x\leq y \text{ 当且仅当 } x\times y=x.$$

我们可以证明: $\leq$是一个偏序, 并且在偏序$\leq$下, x和y的上确界为$x+y$, 下确界为$x\times y$.

一个元素$a\in U$是一个原子(atom), 如果$a>0$并且不存在元素$b\in U$使得$0<b<a$.

布尔代数基本定理[8,9]是说: 任何布尔代数同构于一个典型的布尔代数.

定理2.3.2 (布尔代数基本定理) *任给一个布尔代数$\mathbf{B}=(U,+,\times,-,0,1)$, 存在一个集合$S$和一个双射$f:U\to\wp(S)$使得对任何$x,y\in U$,*

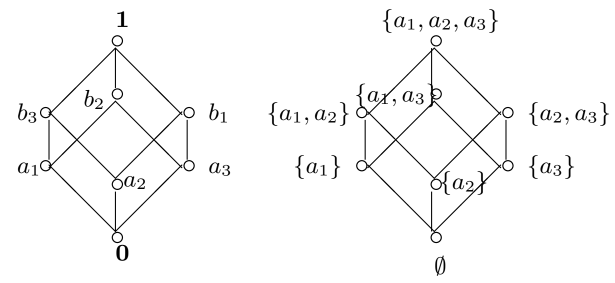
$$\begin{aligned} &f(0)=\emptyset;\\ &f(1)=S;\\ &f(x+y)=f(x)\cup f(y);\\ &f(x\times y)=f(x)\cap f(y);\\ &f(-x)=S-f(x). \end{aligned}$$

证明 给定一个布尔代数$\mathbf{B}$, 设U是所有的$\mathbf{B}$的原子集合. 定义f如下: 对任何$x\in U, f(x)$是所有小于等于x的原子的集合. 则f是$\mathbf{B}$到$\wp(S)$的一个双射, 并且f保持运算.

- $f(x+y)=f(x)\cup f(y)$, 因为任何一个原子a, $a\leq x+y$ 当且仅当$a\leq x$或者$a\leq y$;
- $f(x\times y)=f(x)\cap f(y)$, 因为任何一个原子$a$, $a\leq x\times y$ 当且仅当$a\leq x$并且$a\leq y$;
- $f(-x)=S-f(x)$, 因为任何一个原子a, $a\leq -x$ 当且仅当$a\not\leq x$, 因为$x\cap -x=0$.

□

布尔代数基本定理的证明思路:



命题2.3.3 任给一个布尔代数$\wp(S)$,

$$\wp(S) \cong \{0,1\}^S = (\mathbf{B}_2)^S.$$

证明 对任何子集$X \in S$, 定义

$$\sigma(X) = \chi_X,$$

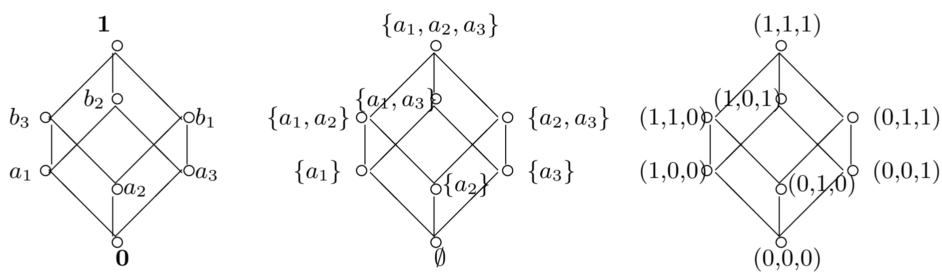
其中χ_X是X的特征函数, 即对任何$x \in S$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in X \\ 0 & \text{如果} x \notin X. \end{cases}$$

则σ是$\wp(S)$到$\{0,1\}^S$上的同构.

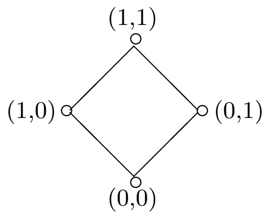
□

因此, 我们有下面的对应:

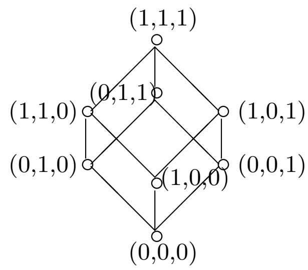


推论2.3.4 任何一个布尔代数A可以表示为布尔代数$\mathbf{B}_2$的乘积.

$\mathbf{B}_2$



$\mathbf{B}_4$



$\mathbf{B}_8$

布尔代数是分析哲学的逻辑基础, 也是计算机科学的理论基础[10].

定义2.3.5 如果集合U上的偏序$\leq$使得每两个元素的上确界$\cup$和下确界$\cap$存在, 则$(U, \leq, \cap, \cup)$称为一个格(lattice).

由布尔代数的基本性质, 我们知道: 一个布尔代数是一个格.

2.4 对角线方法

计数是在确定相等之后我们关心的第一件事情. 计数到3是人类智力上的一大突破. 心理学研究表明乌鸦至多计数到2.

2.4.1 基数与序数

定义2.4.1 两个集合S和T称为*等势的*, 如果存在S到T的双射.

一个集合S是*可数的*, 如果S与自然数或者自然数的子集是等势的.

一个集合S是*有限的*, 如果S与某个自然数是等势的. 这里, 一个自然数看着是小于该自然数的自然数组成的集合.

基数是等势关系的等价类[5]. 给定一个集合S, S的基数是

$$|S| = \{T : T\text{与}S\text{是等势的}\}.$$

定义2.4.2 $\mathbf{n} = \{T : T\text{有}n\text{个元素}\}$.

每个自然数对应一个且唯一一个基数. 无穷的基数为

$$\aleph_0 = |\omega|, \aleph_1, \aleph_2, ...$$

其中ω是自然数序: [2]

$$\omega = 0, 1, 2, ..., n, n+1, ...$$

[2] $\aleph$读着aleph.

定义2.4.3 给定两个良定序关系$(S,\leq_1)$和$(T,\leq_2)$, 如果存在一个S到T的双射f使得对任何元素$x,y\in S$,

$$x\leq_1 y \text{ iff } f(x)\leq_2 f(x)$$

则称序关系$(S,\leq_1)$和$(T,\leq_2)$是等序的.

序数是等序关系的等价类. 基数是序数, 但只有很少的序数是基数. 比如序数$\omega+1,\omega+\omega,\omega\times\omega$不是基数.

基数的运算: 任给无穷基数$\aleph$和$\aleph'$,

$$\begin{aligned}\aleph+\aleph'&=\max\{\aleph,\aleph'\},\\ \aleph\times\aleph'&=\max\{\aleph,\aleph'\}.\end{aligned}$$

无穷基数有很多有悖于我们直觉的现象, 比如

- 可数无穷集合的并是可数无穷的; 宇宙旅馆[11].
- 可数无穷集合的笛卡儿乘积是可数无穷的.

比如自然数的笛卡尔乘积$N\times N$等势于自然数集合N:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[dl] & (0,2) \arrow[r] & (0,3) \arrow[dl] & \cdots \\
(1,0) \arrow[d] & (1,1) \arrow[ur] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \\
(2,0) \arrow[ur] & (2,1) \arrow[dl] & (2,2) \arrow[ur] & (2,3) \\
(3,0) \arrow[d] & (3,1) \arrow[ur] & (3,2) & (3,3) \\
(4,0) \arrow[ur] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

这里, 在序关系$\rightarrow$下一个序对(x,y)为第几个元素$\tau(x,y)$可以计算如下: $\tau: N\times N\rightarrow N$定义为

$$\tau(x,y)=\frac{(x+y)^2-x-3y+2}{2};$$

而给定序关系$\rightarrow$下第z个元素所对应的序对为

$$\begin{aligned}x(z)&=z-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2z-\tfrac{7}{4}}-\tfrac{1}{2}\right)\left(\left(\sqrt{2z-\frac{7}{4}}-\tfrac{1}{2}\right)+1\right);\\ y(z)&=\left(\sqrt{2z-\tfrac{7}{4}}-\tfrac{1}{2}\right)-x(z)+2.\end{aligned}$$

2.4.2 幂集的基数

关于幂集的基数, 我们有下列的

定理2.4.4 元素个数为n的集合S的幂集含有2^n个元素.

证明 我们对n做自然数归纳法来证明定理.
当$n = 0$时, S为空集, $\wp(S) = \{\emptyset\}$含有一个元素.
假设定理对n成立, 我们证明对$n + 1$也成立. 设S是一个含有$n + 1$个元素的集合, 从S中任取一个元素, 设a. 设$S = S' \cup \{a\}$. 则

$$\wp(S) \quad = \quad \wp(S') \cup (\wp(S') + a),$$

其中$\wp(S') + a = \{T \cup \{a\} : T \in \wp(S')\}$.

□

比如, 设$S = \{a, b, c\}$. 则$S = S' \cup \{a\}$, 其中$S' = \{b, c\}$.

$$\begin{aligned}
\wp(S) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\
&= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \cup \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\
&= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \cup (\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} + \{a\}) \\
&= \wp(S') \cup (\wp(S') + a)
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
|\wp(S)| &= |\wp(S')| + |\wp(S') + a| \\
&= 2^n + 2^n \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

集合的势与集合运算之间的关系由下列命题给出:

命题2.4.5 给定集合S和T,

$$|S \cup T| \leq |S| + |T|,$$

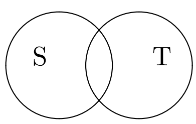
并且$|S \cup T| = |S| + |T|$当且仅当$S \cap T = \emptyset$.

□

引理2.4.6 给定集合S和T,

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

□



引理2.4.7 给定集合S, T和U,

$$\begin{array}{rcl} |S \cup T \cup U| & = & |S| + |T| + |U| \\ & & -|S \cap T| - |S \cap U| - |T \cap U| \\ & & +|S \cap T \cap U| \end{array}$$

□

比如, 设$S = \{a, b, c\}, T = \{b, c, d, e, f\}$.

$$\begin{array}{rcl} |S \cup T| & = & |\{a, b, c, d, e, f\}| = 6; \\ |S \cap T| & = & |\{b, c\}| = 2; \\ |S| & = & 3; \\ |T| & = & 5; \\ 6 & = & 3 + 5 - 2. \end{array}$$

读者可以试着给出n个集合的并的基数与n个集合的基数之间的关系.

2.4.3 Cantor定理

自然数集合是可数的, 而实数集合是不可数的. 这个结论的证明历史上第一次用到了对角线方法. 以后我们将会发现对角线方法可以用来证明停机问题的不可判定性等许多计算机科学中重要理论结论.

我们考虑0和1之间的实数集合$\mathbf{R}[0, 1]$. 每个0和1之间的实数$r \in \mathbf{R}[0, 1]$可以表示为{0,1,...,9}的无穷串:

$$r = 0.r_1 r_2 r_3 \cdots ,$$

其中$r_i \in \{0, 1, ..., 9\}$. 设

$$\begin{array}{c} 0 = 0.0000 \cdots , \\ 1 = 0.9999 \cdots . \end{array}$$

假设实数是可数的, 那么存在实数集合$\mathbf{R}[0, 1]$到自然数集合的双射. 这样, 我们可以将$\mathbf{R}[0, 1]$中实数枚举为

$$r_0, r_1, ..., r_n, ...$$

其中

$$\begin{array}{c|ccccccc} r_0 & 0.r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0n} & \cdots \\ r_1 & 0.r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & \cdots \\ r_2 & 0.r_{20} & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_m & 0.r_{m0} & r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

这时, 我们将对角线上的值+1, 其中$9+1=0$, 得到如下的形式

$$\begin{array}{c|lllllll}
r_0 & 0.r_{00}+1 & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0n} & \cdots \\
r_1 & 0.r_{10} & r_{11}+1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} & \cdots \\
r_2 & 0.r_{20} & r_{21} & r_{22}+1 & \cdots & r_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_n & 0.r_{n0} & r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}+1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

那么对角线上的数

$$0.(r_{00}+1)(r_{11}+1)\cdots(r_{nn}+1)\cdots$$

也是$\mathbf{R}[0,1]$的实数. 即存在一个实数$r \in \mathbf{R}[0,1]$使得对任何i,

$$r(i) = \begin{cases} r_{ii}+1 & \text{如果} r_{ii} \neq 9 \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

那么存在一个j使得$r = r_j$.

$$\begin{array}{c|lllllll}
r_0 & 0.r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0j} & \cdots \\
r_1 & 0.r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots \\
r_2 & 0.r_{20} & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_j & 0.r_{00}+1 & r_{11}+1 & r_{22}+1 & \cdots & r_{jj}+1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

计算$r(j)$, 我们得到

$$r(j) = r_j(j) = r_{jj} = \begin{cases} r_{jj}+1 & \text{如果} r_{jj} \neq 9 \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

即,

$$r_{jj}+1 = r_{jj}.$$

矛盾. 矛盾的原因就是我们假设实数集合是可数的.

实数集合的基数是自然数的幂集的基数.

$$|\mathbf{R}| = |2^{\mathbf{N}}| = |\{f : \mathbf{N} \to \{0,1\}\}|.$$

定理2.4.8 Cantor定理[12] 自然数的幂集基数严格大于自然数的基数.

□

这个结论可以推广到任何集合上:

定理2.4.9 任何集合的幂集的基数严格大于该集合的基数. 即任给集合A,

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|.$$

证明 反证法. 假设存在A到$\mathcal{P}(A)$的双射f. 定义集合

$$D = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

则$D \subseteq A$. 由于f是映上的, 存在一个A中的元素x使得

$$f(x) = D.$$

问$x \in D$?
若$x \in D$, 则$x \notin f(x) = D$, 即$x \notin D$;
若$x \notin D$, 即$x \notin f(x)$, 则$x \in D$.
矛盾.

□

实数的基数记为$2^{\aleph_0}$, 可以是任何大于$\aleph_0$的基数. 现在集合论[5]证明$2^{\aleph_0} = \aleph_1$是独立于ZFC, 并且$2^{\aleph_0}$等于任何大于等于$\aleph_1$的基数都是与ZFC协调的, 这里ZFC是公理集合论的公理集合.

从这我们也可以看出: 人们很难把握无穷的事物. 比如平面几何中唯一的涉及无穷的公理是平行公理: 两条平行线不会相交. 平行公理是独立于其它平面几何公理的, 因为其它公理是有限的, 只有平行公理是无线的. 因而产生了两种非欧几何: 两条平行线在无穷远处相交, 或者相距无穷远.

2.4.4 对角线与Russell悖论

我们假想将所有的性质排成一列:

$$\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$$

对每个性质φ_j, 我们定义一个集合:

$$x_j = \{x_i : x_i \in x_j\} = \{x_i : \varphi_j(x_i)\},$$

其中$\varphi_j(x) = x \in x_j$. 则所有的集合也排成一列:

$$x_0, x_1, ..., x_n, ...$$

我们构造如下矩阵:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\
\hline
x_0 & z_{00} & z_{01} & z_{02} & \cdots & z_{0n} & \cdots \\
x_1 & z_{10} & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} & \cdots \\
x_2 & z_{20} & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
x_n & z_{n0} & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

其中$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果} x_i \in x_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ 表示关系$\in$的特征函数.

通过改变对角线上的值, 我们得到下列矩阵:

$$\begin{array}{c|cccccc} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline x_0 & 1-z_{00} & z_{01} & z_{02} & \cdots & z_{0n} & \cdots \\ x_1 & z_{10} & 1-z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} & \cdots \\ x_2 & z_{20} & z_{21} & 1-z_{22} & \cdots & z_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_n & z_{n0} & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & 1-z_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

即对角线为

$$1-z_{00}, 1-z_{11}, 1-z_{22}, ..., 1-z_{nn}, ...$$

它是集合$V = \{x : x \notin x\}$的特征函数. 那么存在一个i使得行

$$x_i : z_{i0}, z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{ii}, ...$$

等于行

$$x_i : 1-z_{00}, 1-z_{11}, 1-z_{22}, ..., 1-z_{ii}, ...$$

则有:

$$z_{ii} = 1 - z_{ii}.$$

矛盾.

2.4.5 对角线方法与固定点

如果不改变对角线的值, 则

$$z_{00}, z_{11}, z_{22}, ..., z_{nn}, ...$$

是集合

$$W = \{x : x \in x\}$$

的特征序列.

设$W = x_n$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline x_0 & z_{00} & z_{01} & z_{02} & \cdots & z_{0n} & \cdots \\ x_1 & z_{10} & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} & \cdots \\ x_2 & z_{20} & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_n & z_{n0} & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

则

$$W \in W$$

是关系$\in$的固定点.

在数学和计算机科学中有两种固定点结论:

1. 基于Kleene定理[13]的固定点: 设$f: U \to U$是偏序U到U的函数. 如果f是单调的和连续的, 则存在f的固定点, 即存在$a \in U$使得$f(a) = a$.

2. 基于对角线方法的固定点. 比如, 递归论中的递归定理[14].

定理2.4.10 (Kleene定理)设f是$\wp(S)$到$\wp(S)$的映射. 如果

(1) f是单调的, 即对任何$X, Y \in \wp(S)$, $X \subseteq Y$蕴涵$f(X) \subseteq f(Y)$; 并且

(2) f是连续的, 即对任意的序列$\{X_n : n \in \omega\}$,

$$f(\bigcup_{i \geq 0} X_i) \subseteq \bigcup_{i \geq 0} f(X_i),$$

则存在f的固定点, 即存在一个$X \subseteq S$使得$X = f(X)$.

证明 定义

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & \emptyset; \\ X_1 & = & f(X_0); \\ X_2 & = & f(X_1); \\ & \cdots & \\ X_{n+1} & = & f(X_n); \\ & \cdots & \end{array}$$

定义

$$X = \bigcup_{n \in \omega} X_n.$$

则$f(X) = X$.

□

2.5 自然数上的归纳法

自然数集合为

$$N = \{0, 1, 2, ...\}.$$

自然数可以由一个常元0和一个函数符号s(加1函数)表示:

$$\begin{array}{l} 0 = s^0(0) = 0; \\ 1 = s(0) = s^1(0); \\ 2 = s(1) = s(s(0)); \\ 3 = s(2) = s(s(s(0))); \\ n+1 = s(n) = \overbrace{s(s \cdots (s(0)) \cdots)}^{n+1\text{-个 } s}. \end{array}$$

自然数也可以由空集$\emptyset$表示:

$$\begin{aligned}
&0=\emptyset;\\
&1=\{\emptyset\};\\
&2=\{\emptyset,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\};\\
&3=\{\emptyset,2\}=\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\};\\
&n+1=\{\emptyset,n\}=\overbrace{\{\emptyset,\{\emptyset,\cdots\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\cdots\}\}}^{(n+1)\text{-个}\emptyset\ \}}.
\end{aligned}$$

一般地, 我们可以定义自然数为下面的Backus范式:

$$n ::= 0|n+1.$$

其中+1是唯一的构造子. 即自然数是递归生成的, 因而就有自然数上一般归纳定义.

设$f: N^{n+1}\to N$是自然数上的函数. f定义为:对任何自然数x和自然数数组$\mathbf{x}$,

$$\begin{aligned}
&f(0,\mathbf{x})=g(\mathbf{x})\\
&f(x+1,\mathbf{x})=h(f(x,\mathbf{x}),x,\mathbf{x})
\end{aligned}$$

其中g,h是给定的函数. 那么称f是由g,h归纳定义的函数.

自然数上一般归纳原理为

归纳原理. 假定P是自然数上一个谓词. 如果

(i) $P(0)$成立; 且

(ii) 对所有的i, $P(i)$成立蕴涵$P(i+1)$成立,

则$P(n)$对所有的n 成立.

例2.5.1 证明: 对任何自然数$n, 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证明 对n作归纳.

$P(0)$: 左边=0=右边;

假定$P(i): 1+2+\cdots+i=\dfrac{i(i+1)}{2}$. 则

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+i+(i+1) &= \frac{i(i+1)}{2}+(i+1)\\
&= \frac{(i+1)}{2}(i+2)\\
&= \frac{(i+1)(i+2)}{2}.
\end{aligned}$$

□

下面是笛卡尔乘积归纳原理.

假设P是自然数上一个谓词. 如果对每个自然数序对(m,n), 假定对所有的$(m',n')\leq(m,n), P(m',n')$成立我们能证明$P(m,n)$成立, 则$P(m,n)$对所有的$m,n$成立.

如果我们定义自然数为

$$n, m ::= 0|1|n + m|n \times m,$$

其中$+, \times$是两个二元函数, 那么自然数上一般归纳定义变成了如下形式:

设$f : N^{n+1} \to N$是自然数上的函数. f定义为: 对任何自然数x和自然数数组$\mathbf{x}$,

$$\begin{aligned}
&f(0, \mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) \\
&f(1, \mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) \\
&f(x_1 + x_2, \mathbf{x}) = h_0(f(x_1, \mathbf{x}), f(x_2, \mathbf{x}), x, \mathbf{x}) \\
&f(x_1 \times x_2, \mathbf{x}) = h_1(f(x_1, \mathbf{x}), f(x_2, \mathbf{x}), x, \mathbf{x}),
\end{aligned}$$

其中g_0, g_1, h_0, h_1是给定的函数. 那么f是由g_0, g_1, h_0, h_1归纳定义的函数.

自然数上一般归纳原理变为如下的形式:

假定P是自然数上一个谓词. 则如果$P(0), P(1)$且对所有的i, j, $P(i), P(j)$成立蕴涵$P(i + j), P(i \times j)$成立, 则$P(n)$对所有的n 成立.

注意: 如果这样定义

$$n, m ::= 0|n + m|n \times m$$

那么所有自然数只有一个元素0. □

我们在数理逻辑课程中将学到结构归纳定义和结构归纳证明.

参考文献:

[1] Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic, Stanford Encyclopedia of Philosophy at plato.stanford.edu.

[2] 柯匹I.M., 科恩C. 逻辑学导论. 张建军潘天群译, 中国人民大学出版社, 2007.

[3] Biggs N.L. *Discrete Mathematics*[M]. Oxford University Press, 2002.

[4] Whitehead A.N., Russell B. *The Principles of Mathematics*[M]. Cambridge University Press, 1903.

[5] Jech T. *Set Theory*[M]. 3rd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer,2003.

[6] Hindley J.R. *Basic Simple Type Theory*[M]. Cambridge University Press, 2008.

[7] Pierce B.C. *Types and Programming Languages*[M]. MIT Press, 2002.

[8] Whitesitt J.E. *Boolean algebra and its applications*[M]. Courier Dover Publications, 1995.

[9] Jacobson N. *Basic Algebra*[M]. 2nd ed., W. H. Freeman and Company, 1985.

[10] von zur Gathen J., Gerhard J. *Modern computer algebra*[M]. 2nd ed., Cambridge University Press,2003.

[11] 《科学美国人》编辑部编著. 从惊讶到思考–数学悖论奇景. 科学技术文献出版社, 1984.

[12] Cantor G. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre [M]. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1890-1891, 75-78, 1981. English translation: Ewald, William B. (ed.), *From Immanuel Kant to David Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Volume 2. Oxford University Press. 920-922, 1996.

[13] Kleene S.C. *Introduction to Metamathematics*[M]. New York: Van Nostrand, 1952.

[14] Soare R.I. *Recursively Enumerable Sets and Degrees, a Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*[M]. Springer-Verlag, 1987.

第三章3

普通逻辑

普通逻辑的主要内容是概念和推理[1]. 普通逻辑是法律专业必学的课程. 在这一章中我们将介绍普通逻辑中的推理, 概念和悖论.

3.1 推理

推理分为演绎推理和归纳推理, 其中

- 演绎推理是从一般性的前提到特殊性的结论的推理; 特征是保真性.
- 归纳推理是从特殊性的前提到一般性的结论的推理; 特征是不保真性.

比如, 下面的三段论是保真的, 即线上的断言是真的蕴含线下的断言也是真的:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{细菌是微生物}\\ \text{酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{酵母菌是微生物.}}$$

以及

$$\frac{\begin{array}{l}\text{人总有一死}\\ \text{苏格拉底是人}\end{array}}{\text{苏格拉底总有一死.}}$$

其中线上的称为假设或者前提, 线下的称为结论.

由此, 我们可以看出: 如果前提为真, 那么结论一定为真. 这样的推理称为逻辑有效的.

下面是归纳推理的一个例子:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{乌鸦会飞}\\ \text{大雁会飞}\\ \text{天鹅会飞}\\ \text{喜鹊会飞}\\ \text{海鸥会飞}\end{array}}{\text{所有的鸟都会飞.}}$$

我们可以看出: 这个推理不是保真的, 即假设为真, 结论不一定为真. 因为企鹅和鸵鸟不会飞. 在逻辑[2] 中, 归纳推理包括类比与或然推理、因果连接、

科学和假说、以及概率等等. 因此, 归纳推理更多地像是科学方法论. 到目前为止, 还没有一种类似于谓词逻辑这样的形式系统, 来描述归纳推理, 尽管我们有归纳逻辑程序等这些称为归纳的东西.

3.1.1 演绎推理

从自然语言的角度来看, 上述的三段论也可以表示为:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{所有的细菌是微生物}\\ \text{所有的酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{所有的酵母菌是微生物.}}$$

或者

$$\frac{\begin{array}{l}\text{每个细菌是微生物}\\ \text{每个酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{每个酵母菌是微生物.}}$$

或者

$$\frac{\begin{array}{l}\text{细菌}\sqsubseteq\text{微生物}\\ \text{酵母菌}\sqsubseteq\text{细菌}\end{array}}{\text{酵母菌}\sqsubseteq\text{微生物.}}$$

其中$\sqsubseteq$是子概念关系, 这里将细菌, 微生物和酵母菌看着是概念.

逻辑推理是依靠断言的形式的. 逻辑学将断言形式分为4类:

- a类: 形式为SaL, 表示所有的S有性质L
- e类: 形式为SeL, 表示没有S有性质L
- i类: 形式为SiL, 表示有些S有性质L
- o类: 形式为SoL, 表示有些S没有性质L.

其中a,i 来自拉丁词肯定*affirmo*中的元音; e,o来自拉丁词否定*nego*中的元音.

这样, 推理

$$\frac{\begin{array}{l}\text{人总有一死}\\ \text{苏格拉底是人}\end{array}}{\text{苏格拉底总是一死.}}$$

的形式为

$$\frac{\begin{array}{l}MaL\\ SaM\end{array}}{SaL}$$

其中

- L为大概念, M为中概念, S为小概念;
- MaL是大前提(major premiss), SaM是小前提(minor premiss); SaL是结论(conclusion).

这样的推理形式分为4格:

$$
\begin{array}{cccc}
I & II & III & IV \\
\hline
ML & LM & ML & LM \\
SM & SM & MS & MS \\
\hline
SL & SL & SL & SL
\end{array}
$$

加上$*$的4种变化,

$$
\begin{array}{c}
M * L \\
S * M \\
\hline
S * L
\end{array}
$$

其中$* = a, e, i, o$. 我们一共有$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$种推理形式.

Aristotle发现其中只有19个是有效的推理形式. 后来人们发现19个中有5个'*有效的推理形式*'是非有效的, 其中包括下面的形式:

$$
\begin{array}{c}
LeM \\
MaS \\
\hline
SoL.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\text{没有学生是司机} \\
\text{所有司机是工人} \\
\hline
\text{有些工人不是学生.}
\end{array}
$$

其中$L =$ 学生, $M =$ 司机, $S =$ 工人, 和

$$
\begin{array}{l}
\text{没有有角动物是独角兽} \\
\text{所有独角兽是有角动物} \\
\hline
\text{有些有角动物不是有角动物,}
\end{array}
$$

其中$L =$ 有角动物, $M =$ 独角兽, $S =$ 有角动物. 这里, 第一句为真是因为独角兽不存在; 第二句为真是因为独角兽的定义, 使得全称断言为真.

最后人们发现有效推理的形式为下列的14个形式:

第一格: L, M, S.

如果每一M是L, 每一S是M, 则每一S是L (Barbara).

如果没有M是L, 每一S是M, 则没有S是L (Celarent).

如果每一M是L, 有的S是M, 则有的S是L (Darii).

如果没有M是L, 有的S是M, 则有的S不是L (Ferio).

第二格: M, L, S.

如果没有L是M, 每一S是M, 则没有S是L (Cesare).

如果每一L是M, 没有S是M, 则没有S是L (Camestres).

如果没有L是M, 有的S是M, 则有的S不是L (Festino).

如果每一L是M, 有的S不是M, 则有的S不是L (Baroco).

第三格: L, S, M.

如果每一M是L, 每一M是S, 则有的S是L (Darapti).

如果没有M是L, 每一M是S, 则有的S不是L (Felapton).

如果有的M是L, 每一M是S, 则有的S是L (Disamis).

如果每一M是L, 有的M是S, 则有的S是L (Datisi).

如果有的M不是L, 每一M是S, 则有的S不是L (Bocardo).

如果没有M是L, 有的M是S, 则有的S不是L (Ferison).

非有效推理的形式有:

这是一枝钢笔
这是兰色的
因此这是一枝兰色的钢笔.

和

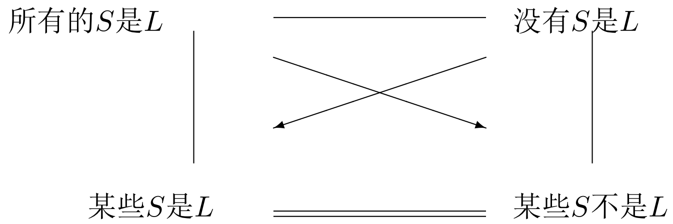
那条狗是父亲
那条狗是他的
因此那条狗是他的父亲.

一般来说, 非有效的(invalid)推理形式是列不完的. 没有一个有效的(effectively)办法将他们全部列出来. 但是, 有效的(valid)推理形式我们可能有办法将它们全部列出来. 比如, 自然数我们可以将它们全部列出来, 不是自然数的东西我们可以不能将它们全部列出来. 我们需要一个能有效地(effectively)判断一个推理是否是有效的(valid)办法.

断言之间的关系有四种:

- 反对关系(contraries): 可以同时为假, 不能同时为真;
- 下反对关系(subcontraries): 可以同时为真, 不能同时为假;
- 矛盾关系(contradictories): 不能同时为真也不能同时为假;
- 次蕴涵关系(subalternats): 当S有事例时, 上面为真蕴含下面为真.

我们主要通过反对四方(square of opposition)分析断言之间的关系:



其中

$-$表示反对关系
$=$表示下反对关系
$\rightarrow$表示矛盾关系
$|$表示次蕴涵关系.

著名的有效推理的形式是假言推理(Modus Ponens)[1]:

如果P则Q
P
所以Q.

比如

如果天下雨则地是湿的
天下雨
所以地是湿的.

[1]Modus Ponens (MP): *mode that affirms by affirming*; 演绎推理, 假言推理.

假言推理的反驳论证形式为

$$\begin{array}{l}\text{如果}P\text{则}Q\\ \text{非}Q\\ \hline \text{所以非}P.\end{array}$$

比如

$$\begin{array}{l}\text{如果天下雨则地是湿的}\\ \text{地不是湿的}\\ \hline \text{所以天没有下雨.}\end{array}$$

还有一种形式是不明推论(abduction)形式, 它是非有效的.

$$\begin{array}{l}\text{如果}P\text{则}Q\\ Q\\ \hline \text{所以}P.\end{array}$$

比如

$$\begin{array}{l}\text{如果天下雨则地是湿的}\\ \text{地是湿的}\\ \hline \text{所以天下雨.}\end{array}$$

侦探推理采用的是不明推理, 由结论推出原因. 日常生活中我们大部分使用的是不明推理.

3.2 概念

普通逻辑中另一个重要的概念是概念. 概念大概是我们见过的最复杂的**概念**. 通常一个概念是由一些性质定义的, 比如群$\mathcal{G}$是一个二元组$(G, \circ)$, 其中G是一个论域(非空的集合), $\circ$是G上的二元运算, 满足下列3个条件:

(1) $\circ$是结合的, 即对任何$x, y, z \in G$,

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z);$$

(2) 存在一个单位元$e \in G$使得对任何$x \in G$,

$$e \circ x = x \circ e = x;$$

(3) 每个元素x存在一个逆元x^-, 即

$$x \circ x^- = x^- \circ x = e.$$

比如整数集合在加法运算下构成整数加法群, 是群概念的外延中的一个元素.

一个概念α是由一个内含$I(\alpha) = X$和一个外延$E(\alpha) = Y$组成的, 使得

- 概念的内含是在概念外延中的对象所具有的共同属性的集合;
- 概念的外延是具有概念内含中所有属性的对象的集合.

这里内含是性质的集合, 而外延是对象的集合.

比如, 概念学生的内含: 在学校中学习并接受教育的人; 概念学生的外延: 在学校中学习并接受教育的人的集合.

3.2.1 概念之间的关系

概念之间的关系是是一个关系(isa, the subsumption relation, $\sqsubseteq$). 比如

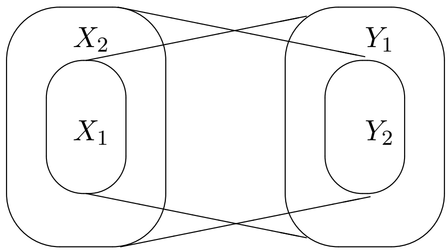
科学院的学生是一个**大学生**是一个**学生**.

由此, 我们可以看出: 给定两个概念$\alpha = (X_1, Y_1), \beta = (X_2, Y_2)$, 如果$\alpha \sqsubseteq \beta$, 那么

$$X_2 \subseteq X_1;$$
$$Y_1 \subseteq Y_2.$$

即外延增加当且仅当内含减少. 这时我们称α是β的子概念, 或者β是α的上位概念.

概念的外延与内含之间的这个关系称为Galois关联. [2]



是一个关系是传递关系:

$$\frac{\text{细菌}\sqsubseteq\text{微生物} \quad \text{酵母菌}\sqsubseteq\text{细菌}}{\text{酵母菌}\sqsubseteq\text{微生物}.}$$

注意概念与表示概念的词之间的差别. **学生**这个概念在汉语中表示为“学生”; 在英语中表示为“student”. “student”和“学生”表示相同的概念, 但作为单词,

“student”≠“学生”.

概念可以分为单独概念(个体), 比如中国科学院, 2013年9月9日, 和普遍概念, 比如工人, 汽车.

概念也可以分为

• 集合概念: 外延是由集合体组成的概念. 集合体是由许多个体组成的整体, 其逻辑特征是整体所具有的本质属性并不为其中的每个个体所具有. 比如, 班级, 政党, 森林,...

[2] Évariste Galois(1811,10,25-1932,5,31)是法国数学家, 20岁死于决斗. Galois的主要贡献是Galois定理: 如果$K \supset E \supset F$是域则$[K : F]$是有限的当且仅当$[K : E]$和$[E : F]$是有限的.

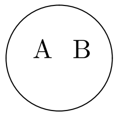
由此可以推出两个结论: 只用直尺圆规三等分一个角是不可能的; 一元五次方程没有通解. 由此引出一个概念: Galois关联(connection). 设$(A, \leq)$和$(B, \leq)$为两个偏序. 两个偏序的一个单调Galois关联由两个单调函数$f : A \to B$和$g : B \to A$组成, 使得对任何$a \in A$和$b \in B$,

$$f(a) \leq b \text{ iff } a \leq g(b).$$

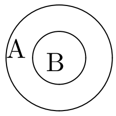
• *非集合概念*: 外延是由非集合体组成的集合. 比如, 学生, 党员, 树,...

概念之间也有其它的关系:

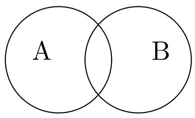
◇ *同一关系*: 两个概念是同一概念, 如果这两个概念的外延或者内含是相同的. 比如, 中国的首都/北京, 医生/大夫;



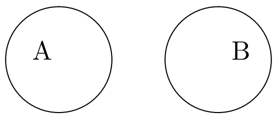
◇ *包含关系*: 一个概念是一个(isa)另一个概念, 如果前面的概念的外延包含在后面的一个概念的外延中.



◇ *交叉关系*: 两个概念是交叉的, 如果这两个概念的外延的交是非空的. 比如, 教授/科学家, 军人/大学生

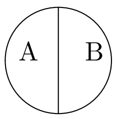


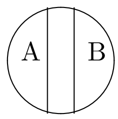
◇ *不相容关系*: 两个概念是不相容的, 如果这两个概念的外延的交是空集. 比如, 桌子/粉笔,



这里不相容关系又分为

• *矛盾关系*: 两个概念是矛盾的, 如果这两个概念的外延的交是空集, 而他们的并是某个上位概念的外延. 比如, 红色/非红色, 机动车/非机动车. 这样, 某个属性在概念A的内含中, 而其否定在概念B的内含中.





• *反对关系*: 两个概念是反对的, 如果这两个概念的外延的交是空集, 而他们的并不是某个上位概念的外延. 比如, 大学生/小学生, 长篇小说/短篇小说.

3.2.2 形式概念分析

形式概念分析是概念的数学研究. 在形式概念分析[4,5,6,7]中, 在一个多值形式背景中的一个形式概念是由Galois连结所定义的, 其中一个形式背景(一个关系, 或者一个形式系统)是一个三元组$\mathbf{C} = (U, A, J)$, 其中U是对象的集合; A是属性的集合, 而$J : U \times A \to D$是一个函数, 这里$D = \bigcup_{a \in A} D_a$, D_a是属性a的论域. 背景$\mathbf{C}$中的一个形式概念是一个序对(X, Y), 其中X是所有与

每个属性值$(a,v)\in Y$)具有J-关系的对象集合; 而Y是与每个对象$a\in X$具有J-关系的属性值的集合. 因此, 形式概念分析是逻辑中传统概念的形式化.

对任何对象子集$X\subseteq U$, 定义一个算子$\mu:2^U\to 2^D$使得

$$\mu(X)=\{(a,v)\in A\times D:\mathbf{A}x\in U(x\in X\Rightarrow(x,a,v)\in J)\},$$

并且对任何属性子集$Y\subseteq A\times D$, 定义算子$\rho:2^D\to 2^U$使得

$$\rho(Y)=\{x\in U:\mathbf{A}(a,v)\in A\times D((a,v)\in Y\Rightarrow(x,a,v)\in J)\}.$$

这样, 一个序对$\alpha=(X,Y)$是一个概念如果$\mu(X)=Y$ 并且$\rho(Y)=X$, 其中X称为概念α的外延, 记为$E(\alpha)$, 而Y称为概念α的内涵, 记为$I(\alpha)$. 换言之, (X,Y)是一个概念当且仅当X中每个对象事例的性质(a,v)在Y中, 而事例Y中每个性质(a,v)的x在X中.

设$L(\mathbf{C})$是背景$\mathbf{C}$中所有概念的集合. 定义$L(\mathbf{C})$上的一个偏序$\prec$使得对任何$\alpha,\beta\in L(\mathbf{C})$, $\alpha\prec\beta$ 如果$E(\alpha)\subset E(\beta)$. 我们称$\alpha$是$\beta$的一个子概念, 而$\beta$是$\alpha$的一个上位概念. 则, $L(\mathbf{C})$是一个格, 其中给定$\alpha,\beta\in L(\mathbf{C})$, 设$\alpha=(X_1,Y_1)$ 且$\beta=(X_2,Y_2)$ 则

$$\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=(X_1\cap X_2,\mu\rho(Y_1\cup Y_2)),\\ \alpha\cup\beta=(\rho\mu(X_1\cup X_2),Y_1\cap Y_2)\end{array}$$

分别为α和β的下确界和上确界.

我们可以验证, 算子μ和ρ具有下列性质: 对任何集合$X_1,X_2,X\subseteq U$和$Y_1,Y_2,Y\subseteq D$,

$$\begin{array}{l}X_1\subseteq X_2\Rightarrow\mu(X_2)\subseteq\mu(X_1)\\ Y_1\subseteq Y_2\Rightarrow\rho(Y_2)\subseteq\rho(Y_1)\\ X\subseteq\rho(\mu(X))\\ Y\subseteq\mu(\rho(Y))\\ \mu(X)=\mu(\rho(\mu(X)))\\ \rho(Y)=\rho(\mu(\rho(Y)))\\ X\subseteq\rho(Y)\Leftrightarrow Y\subseteq\mu(X)\Leftrightarrow X\times Y\subseteq I\end{array}$$

因此, 对任何子集$X\subseteq U$且$Y\subseteq A\times D$, $(\rho(\mu(X)),\mu(X))$和$(\rho(Y),\mu(\rho(Y)))$是形式概念.

比如, 设形式背景为

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×		×	×
x_3		×	×	×
x_4		×	×	×
x_5	×			

我们有:

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x_2\}) = \{y_1, y_3, y_4\}, \mu(\{x_2, x_3\}) = \{y_3, y_4\} \\
&\mu(\{x_1, x_4, x_5\}) = \emptyset \\
&\mu(U) = \emptyset, \mu(\emptyset) = D \times A \\
&\rho(\{y_1\}) = \{x_1, x_2, x_5\}, \rho(\{y_1, y_2\}) = \{x_1\} \\
&\rho(\{y_2, y_3\}) = \{x_1, x_3, x_4\}, \rho(\{y_2, y_3, y_4\}) = \{x_1, x_3, x_4\} \\
&\rho(\emptyset) = U, \rho(D \times A) = \{x_1\}.
\end{aligned}$$

因此, $(\{x_1, x_3, x_4\}, \{y_2, y_3, y_4\})$和$(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{y_3, y_4\})$ 为形式概念.

3.3 悖论

悖论[3]是推动逻辑发展的催化剂. 比如Russell悖论的发现推动朴素集合论发展为公理集合论.

最早的悖论大概是下面的悖论[8]:

克里特人伊壁孟德(600BC)说: 所有的克里特人都是撒谎者.

这里假定:

(1) 撒谎者不说一句真话, 并且

(2) 所有克里特人都是撒谎者的否定形式是大家(所有的克里特人)全不撒谎.

这是撒谎者悖论的原始形式. 现在的形式为

撒谎者悖论: 我说谎.

如果这句话为真，那么我说谎, 这句是谎话, 是假的; 如果这句话为假, 那么我说谎是假的, 因而我说的是真的.

理发师悖论: 给也只给不自己理发的人理发的理发师

如果这个理发师不给自己理发，那么他就得给自己理发; 如果这个理发师给自己理发，那么他就得不给自己理发.

一般地, 一个句子不为真的话, 那么它的否定肯定为真.

文字悖论: 这句话有八个字.

是假的, 但其否定

这句话没有八个字.

也是假的.

下面6个句子也构成一个悖论:

下面有三个错误的句子:

1. $2 + 2 = 4$
2. $3 \times 6 = 17$
3. $8 \div 4 = 2$
4. $13 - 6 = 5$
5. $5 + 4 = 9.$

---

[3]Paradox的意思: 1.[c]矛盾的人（或事物、情况）a person, thing or situation that has two opposite features and therefore seems strange;

2.[c][u]似非而是的隽语; 悖论; 悖论修辞a statement containing two opposite ideas that make it seem impossible or unlikely, although it is probably true; the use of this in writing.

还有Zeno悖论, Achilles和乌龟的悖论; Protagoras和他的学生Euathlus的悖论, 等等.

简言之, 普通逻辑是用

$$\text{自然语言}\xrightarrow{\text{表示}}\text{命题}\xrightarrow{\text{反映}}\text{真实世界}.$$

参考文献:

[1] 金岳霖. *形式逻辑*[M]. 人民出版社, 1979.

[2] 柯匹I.M., 科恩C. 逻辑学导论. 张建军潘天群译, 中国人民大学出版社, 2007.

[3] 《普通逻辑学》, 上海人民出版社, 2015.

[4] Ganter B., Stumme G., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*[M]. Springer-Verlag, 1998.

[5] Saquer J., Deogun J.S. Formal rough concept analysis [C]//*Rough Sets, Funny Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing, Proceedings of 7th International Workshop, RSFDGrC '99,* 91-99, 1999.

[6] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based an hierarchies of concepts[M]//I. Rival(ed.), *Ordered Sets,* Reidel, Dordecht-Boston, 445-470, 1982.

[7] Baader F., Calvanese D., McGuinness D.L., Nardi D., Patel-Schneider P.F. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, Applications*[M]. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[8] 《科学美国人》编辑部编著. 从惊讶到思考–数学悖论奇景. 科学技术文献出版社, 1984.

第四章4

命题逻辑

命题逻辑是所有形式化逻辑中最简单的一个逻辑. 其它形式化逻辑是建立在命题逻辑基础之上的. 第一个NP-完备性问题是命题逻辑中公式的可满足性(SAT)问题.

每个形式逻辑都有其被形式化的对象. 命题逻辑的被形式化对象是命题[1,2]. 命题是哲学的一个研究对象.

4.1 命题

通常, 我们认为: 现实世界的所有东西可以简单地分为3类[3,4]:

- 一类是对象(objects);
- 一类是事件(events);
- 一类是性质(properties).

这里对象包括像桌子, 人, 树这样的具体的, 可以接触到的物理对象; 也包括像1, 2, 思想, 规律等这样不可接触到的抽象对象.

所有的对象根据他们所具有的性质不同归为若干范畴. 每个范畴(category)可以是某个概念(concept)的外延(extent); 该范畴中的每个对象具有的共同性质的集合构成了这个概念的内涵. 我们可以判定的是某个对象是否具有某个性质.

对象的特点是可以具有**空间部分**,但不具有时间部分.

与对象对应的是事件或者过程. 事件是事实上发生的, 例如太阳正在升起, 等等.

事件既没有真也没有假; 它们或者出现, 或者不出现; 换言之, 或者是事实, 或者不是事实; 或者发生, 或者不发生. 我们可以判定的是他们是否事实上正在发生, 或者已经发生, 或者将要发生.

事件(过程)的特点是既具有**空间部分**, 又具有**时间部分**.

而性质是用来描述对象和事件的东西(thing). 比如, 这是一张桌子, 天是蓝的, 其中桌子, 天是具体对象, 蓝色是一个抽象对象. 现在天空的蓝色的**蓝色**是一个具体对象.

简单地讲, 命题就是一个句子所表示的意思. 不同的句子可以表示相同的命题.

定义4.1.1 命题是一个有意义的句子所表达的意思, 它对实在有某种断定或断言, 并且具有或者真或者假的性质.

如何确定一个命题的真假值, 这个问题在哲学上有着多种理论[5]:
(1) 真理论;
(2) 真理融贯论;
(3) 真理实用论;
(4) 真理描述论;
(5) 真理符合论.

真理符合论称: 一个命题如果对应(correspond)一个事实, 那么它就是真的, 否则就是假的;

真理描述论称: 一个真命题描述(不是对应)一个曾经是, 或者现在是, 或者将会是实际存在的事态; 一个假命题描述一个不曾是, 或者现在不是, 或者将来不会实际存在的事态; 或者说, 一个过去不曾发生, 或者现在没有发生, 或者将来不会发生的事态.

这些是哲学中讨论的问题.

在任何讨论中, 我们必须遵从3个最基本的**逻辑原则**:

1. **同一原则**: A是A.
2. **不矛盾原则**: 任何事物不可能既是A又是非A.
3. **排中原则**: 任何事物或者是A, 或者是非A.

命题分为简单命题和复合命题. 复合命题是由简单命题通过联接词: 非, 与, 或, 蕴涵, 等值, 联接起来的句子. 复合命题的真假值是由构成复合命题的简单命题和联接词所唯一决定的. 我们用$\mathcal{A},\mathcal{B}$表示命题.

• 非命题: 命题非$\mathcal{A}$的真假值与命题$\mathcal{A}$的真假值的关系为:

$\mathcal{A}$	非$\mathcal{A}$
0	1
1	0

其中我们用0表示假, 1表示真.

• 与命题: 命题$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的真假值定义为

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

• 或命题: 或命题分为兼容或命题和非兼容或命题.

◦ 兼容或命题: 兼容或命题$\mathcal{A}$或$^i\mathcal{B}$的真假值定义为

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$或$^i\mathcal{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

比如, “他今天或者看书或者看报纸”为真意味着“他”今天看书, 或者看报纸, 或者既看书也看报纸.

◦ 非兼容或命题: 非兼容或命题$\mathcal{A}$或$^e\mathcal{B}$的真假值定义为

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$或$^e\mathcal{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

比如, “他今晚或者在家或者去电影院看电影”为真意味着“他”今晚或者在家, 或者去电影院看电影, 但不会既在家又去电影院看电影.

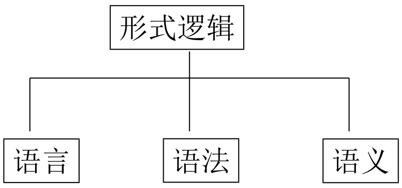
• 蕴涵命题: 命题$\mathcal{A}$蕴含$\mathcal{B}$的真假值定义为

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$蕴涵$\mathcal{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注意: 逻辑上的蕴涵不同于因果关系, 和条件命题.

4.2 命题逻辑

一个形式化的逻辑是由逻辑语言、语法和语义等3个部分组成.



命题逻辑的逻辑语言L是由下列符号所组成的:

• 一个可数多个的(原子)命题(命题变元, propositional variables)集合: $\{p_0, p_1, p_2, ...\}$,

• 逻辑连接词: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$, 和$\leftrightarrow$

• 辅助符号: (,).

下面我们将只用逻辑连接词$\neg, \rightarrow$给出定义, 而其它逻辑连接词$\vee, \wedge, \leftrightarrow$的相应定义可以由这些连接词与$\neg, \rightarrow$的关系而推出. 在不同的推理系统中, 我们将用不同的逻辑连接词集合. 比如, 在自然推理系统中, 我们用$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; 在公理系统中, 我们用$\{\neg, \rightarrow\}$; 而在Gentzen推理系统中, 我们用$\{\neg, \wedge, \vee\}$.

一个语言的表达式(expressions)就是语言上的任何一个符号串. 比如

$$p_1 \vee q_2(p_1 \neg) \rightarrow)($$

这样, 我们可以定义符号串的的段(segment), 初始段和结尾段.

大部分符号串是没有意义的(不是良定的). 我们将有意义的符号串称为公式.

定义4.2.1 语言L上的一个符号串A是一个(良定)公式, 如果要么A是一个原子命题, 要么对某个公式B 和C, $A = (\neg B)$ 或者$A = (B \to C)$.

我们也可以这样定义公式:

定义4.2.2 语言L上的公式集合是最小的集合$\mathcal{C}$满足下列条件:
(1) 对每个原子命题$p, p \in \mathcal{C}$;
(2) 如果$A \in \mathcal{C}$则$(\neg A) \in \mathcal{C}$; 并且
(3) 如果$A, B \in \mathcal{C}$则$(A \to B) \in \mathcal{C}$.
其中最小性是指在公式集合包含关系下的最小.

公式的定义可以表示为如下的Backus范式:

$$A, B ::= p|\neg A|A \to B.$$

根据数学上的约定, 我们有: 良定公式的两个定义是等价的. 即设$\mathcal{D}$是定义1中定义的公式的集合, 则$\mathcal{C} = \mathcal{D}$. 注意: 一个概念的定义中的*如果*是当且仅当的意思.

我们也可以用生成过程来定义良定公式.

定义4.2.3 设

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_0 & = & \{p : p\text{是原子公式}\}; \\ \mathcal{E}_1 & = & \{\neg p, p \to q : p, q \in \mathcal{E}_0\}; \\ & \cdots & \\ \mathcal{E}_n & = & \{\neg A, A \to B : A, B \in \mathcal{E}_{n-1}\}; \\ & \cdots & \end{array}$$

定义

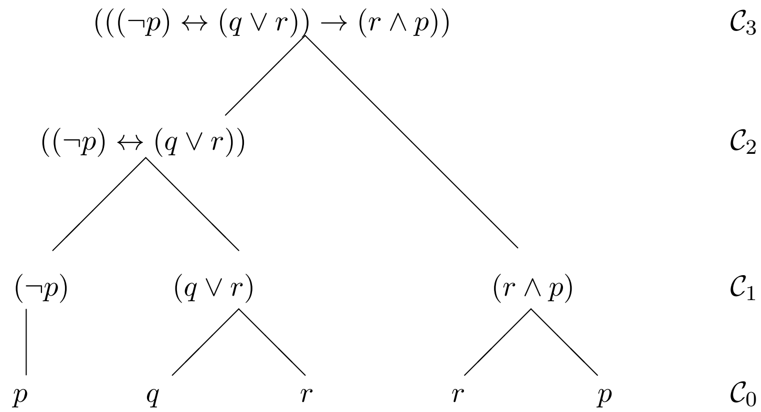
$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{E}_n.$$

一个符号串是公式当且仅当它属于$\mathcal{E}$.

命题4.2.4 $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

□

因此, 一个公式是有限长的符号串. 为了判断一个符号串是否是一个良定公式, 我们可以分解符号串得到一棵树, 并且如果每个叶节点上是一个命题变元, 则给定的符号串是一个公式. 比如公式$(((\neg p) \leftrightarrow (q \vee r)) \to (r \wedge p))$可以分解为如下的树结构, 其中叶节点为命题变元, 而中间节点为非原子的公式:



我们称命题逻辑语言为对象语言. 在讨论命题逻辑的语言中, 我们

- 用A, B, C表示公式,
- p, q, r表示原子命题,
- Σ, Γ, Δ表示公式集合.

这个讨论命题逻辑的语言称为元语言. 因此, 这里的$A, B, C; p, q, r; \Sigma, \Gamma, \Delta$为元语言中的符号.

我们称

$(\neg A)$为A的否定式(negation);
$(A \wedge B)$为A, B的合取式(conjunction);
$(A \vee B)$为A, B的析取式(disjunction);
$(A \rightarrow B)$称为A, B的蕴涵式(implication),
其中A称为蕴涵式的前件(premise),
B为蕴涵式的后件(consequence);
$(A \leftrightarrow B)$称为A, B的等值式.

A, B称为公式$(A * B)$的$*$-左右辖域, 其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. 比如在公式

(1) $$A \vee B \wedge C$$

中, 如果$\vee$的左右辖域为A和$B \wedge C$, (1)表示公式

(2) $$(A) \vee (B \wedge C);$$

如果$\vee$的左右辖域为A和B, (1)表示公式

(3) $$(A \vee B) \wedge C.$$

A是在否定式$(\neg A)$中$\neg$的辖域. 注意自然语言中否定辖域的变化:

张三杀了人;
张三没有杀人;
不是张三杀得人.

公式的结构有下列基本性质:

性质1. 每个公式是一个不空的表达式;

性质2. 每个公式中的左括号和右括号出现的个数相同;

性质3. 每个公式的任何不空的真初始段中, 左括号的个数大于右括号的个数.

因为公式是结构定义的, 这样就有基于公式的结构归纳定义和结构归纳法.

结构归纳定义: 假定f是定义在公式集合上的一个函数. 那么我们只需要给出

(1) 对每个原子命题p, $f(p)$的值;

以及

(2) 对任何公式A, B, 假定$f(A), f(B)$已经定义, 给出$f(\neg A), f(A \to B)$的值.

关于公式的结构归纳法: 假定P是关于公式的一个性质. 则

(1) 如果对每个原子命题p, $P(p)$, 即p具有性质P;

(2) 对任何公式A, 假定$P(A)$我们能证明$P(\neg A)$,

并且

(3) 对任何公式A, B, 假定$P(A), P(B)$ 我们能证明$P(A \to B)$,

则对所有的公式$A, P(A)$.

关于公式的结构, 我们还有下列结论.

定理4.2.5 每个公式A是下列3种形式之一:

1. A是原子公式;
2. 存在某个公式B使得$A = (\neg B)$; 或
3. 存在某个公式B, C使得$A = (B \to C)$.

并且A具有的形式是唯一的.

证明 我们需要证明:

(1) 每个公式具有3种形式之一;

(2) 3种形式两两不同;

(3) 每个公式的形式是唯一的.

根据公式的定义, 每个公式具有3种形式之一. 3种形式两两不同, 因为相同是符号串的相同.

我们证明每个公式的形式是唯一的. 即

如果$A = p$并且$A = q$则$A = p = q = A$;

如果$A = (\neg B_1) = (\neg B_2)$则$B_1 = B_2$;

如果$A = (B_1 \to C_1) = (B_2 \to C_2)$则$B_1 = B_2$并且$C_1 = C_2$.

□

注意: 以上是关于符号串相等的性质. =是符号串的相等. 一个相等关系总是在一个结构中的相等关系. □

定义4.2.6 一个公式A的子公式集合$\mathcal{C}(A)$定义如下:

(1) 如果$A = p$是原子公式, 则$\mathcal{C}(A) = \{p\}$;

(2) 如果对某个$B, A = (\neg B)$, 则$\mathcal{C}(A) = \{A\} \cup \mathcal{C}(B)$;

(3) 如果对某个B和$C, A = (B \to C)$, 则$\mathcal{C}(A) = \{A\} \cup \mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)$.

一个公式D是公式A的一个子公式, 如果$D \in \mathcal{C}(A)$.

比如在公式$(((\neg p) \leftrightarrow (q \vee r)) \to (r \wedge p))$的分解树中的每个节点上的公式均是该(根节点上)公式的子公式. 反之也然, 即一个公式的子公式一定出现在该公式的分解树的节点上.

4.3 形式语义

设$\mathbf{P}$是所有原子公式的集合.

定义4.3.1 真假赋值v是$\mathbf{P}$到$\{0,1\}$上的函数.

一个公式A在赋值v下的真假值, 记为$v(A)$, 基于公式结构归纳定义如下:

$$v(A) = \begin{cases} v(p) & \text{如果}A = p \\ 1 - v(B) & \text{如果对某个}B,\ A = \neg B \\ 1 - v(B) + v(C) & \text{如果对某个}B, C,\ A = B \to C. \end{cases}$$

其中

$$(B \to C)^v = \begin{cases} 0 & \text{如果}B^v = 1\text{且}C^v = 0 \\ 1 & \text{否则}. \end{cases}$$

注意: 这里$1 + 1 = 1$.

我们可以用真假值表来表示

	$\neg$
1	0
0	1

$\to$	1	0
1	1	0
0	1	1

定义

$$\begin{aligned} B \vee C &= (\neg B) \to C; \\ B \wedge C &= \neg(B \to (\neg C)); \\ B \leftrightarrow C &= (B \to C) \wedge (C \to B) \\ &= \neg((B \to C) \to \neg(C \to B). \end{aligned}$$

可以验证: 对任何赋值v,

$$\begin{aligned} (B \vee C)^v &= ((\neg B) \to C)^v; \\ (B \wedge C)^v &= (\neg(B \to (\neg C)))^v; \\ (B \leftrightarrow C)^v &= ((B \to C) \wedge (C \to B))^v = (\neg((B \to C) \to \neg(C \to B))^v. \end{aligned}$$

即

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

一个公式A在赋值v下为真, 记为$v \models A$, 如果$v(A) = 1$.

给定一个公式集合Σ, Σ在赋值v下为真, 记为$v \models \Sigma$, 如果对每个$A \in \Sigma$, $v \models A$.

给定一个公式集合Σ和赋值v, $v(\Sigma)$定义为

$$v(\Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{如果} v \models \Sigma \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

命题4.3.2 如果$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$ 则

$$v(\Sigma) = v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n).$$

$\square$

定义4.3.3 公式集合Σ是可满足的(satisfiable), 如果存在一个赋值v使得$v(\Sigma) = 1$. 这时, v称为Σ的一个模型(model).

公式A是一个重言式(永真的, tautology), 如果对任何赋值v, $v(A) = 1$;

有3个重要的基本重言式:

- $A \to (B \to A)$. 因为

A^v	B^v	$(B \to A)^v$	$(A \to (B \to A))^v$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

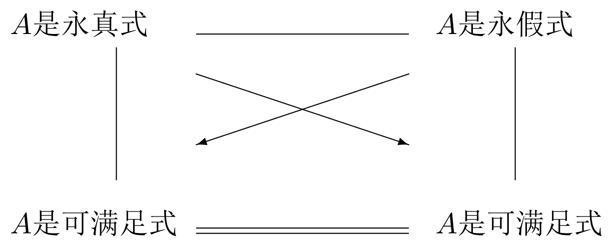
- $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$. 因为

A^v	B^v	C^v	$(B \to C)^v$	$(A \to (B \to C))^v$	$((A \to B) \to (A \to C))^v$	$(\varphi)^v$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

- $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$. 因为

A^v	B^v	$(\neg A)^v$	$(\neg B)^v$	$(\neg A \to \neg B)^v$	$(B \to A)^v$	$(\varphi)^v$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

公式A是一个矛盾式(contradictory), 如果对任何赋值v, $v(A) = 0$.

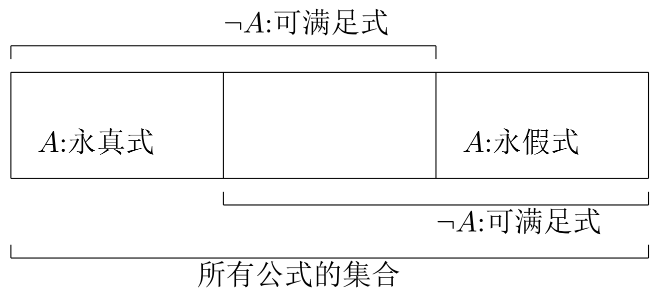


因此, 我们有下列的基本性质:

• 与矛盾式矛盾的概念是可满足式;

• 与重言式矛盾的概念是$\neg A$的可满足式.

所有的公式集合可以划分成如下3部分:



设X是永真公式的集合, Y是永假的公式集合, Z是既不永真也不永假的公式集合. 那么$X\cup Y$是可满足的公式A的集合, $Y\cup Z$是$\neg A$可满足的公式A的集合.

关于永真公式, 我们有下列的

命题4.3.4 *如果A和$A\to B$是永真的, 则B是永真的.*

□

练习4.1

1. 构造下列公式的真值表:

(1) $((p\to q)\vee\neg r)$;

(2) $((p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r)))$.

2. 利用命题变元表示简单命题, 写出表示下列命题的公式:

(a) If Mr Jones is happy, Mrs Jones is not happy; and if Mr Jones is not happy, Mrs Jones is not happy.

(b) A sufficient condition for x to be odd is that x is prime.

(c) Either Sam will come to the party and Max will not, or Sam will not come to the party and Max will enjoy himself.

(d) A necessary condition for a sequence s to converge is that s be bounded.

(e) If x is positive, x^2 is positive.

3. 确定下列公式是重言式, 矛盾式或两者都不是:

(a) $B \leftrightarrow (B \vee B)$
(b) $((A \to B) \wedge B) \to A$
(c) $(\neg A) \to (A \wedge B)$
(d) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
(e) $(A \leftrightarrow \neg B) \to A \vee B$
(f) $A \wedge (\neg(A \vee B))$
(g) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$
(h) $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge (\neg B))$
(i) $(B \leftrightarrow (B \to A)) \to A$

4. 证明下列公式序对的逻辑等价性:
(a) $T \wedge B$与B, 其中T是重言式.
(b) $T \vee B$与T, 其中T是重言式.
(c) $F \vee B$与B, 其中F是矛盾式.
(d) $F \wedge B$与F, 其中F是矛盾式.

4.3.1 逻辑结论

在自然语言中, 我们可以从一个或几个命题中推出新命题. 比如

如果天下雨则道路是湿的;
天下雨;

道路是湿的.

定义4.3.5 给定一个公式集合Σ和一个公式A, A称为是Σ的逻辑推论(logical consequence), 记为

$$\Sigma \models A,$$

如果对任何赋值v, $v(\Sigma) = 1$蕴涵$v(A) = 1$.

一般地, 在逻辑中, 称为逻辑的(logical)东西是语义的; 形式的(formal)东西是语法的. 所以, 逻辑推理是基于赋值定义的, 因而是语义的.

命题4.3.6 *$\emptyset \models A$当且仅当A是永真式.*

证明 ($\Rightarrow$) 假设$\emptyset \models A$. 则对任何赋值v, 如果$v(\emptyset) = 1$则$v(A) = 1$.
断言: $v(\emptyset) = 1$.
由定义: 如果对任何公式B, 如果$B \in \emptyset$则$v(B) = 1$. 因此, $v(\emptyset) = 1$.
$\because$ $B \in \emptyset$是假的, $\therefore$ 断言*如果*$B \in \emptyset$*则*$v(B) = 1$, 不管$v(B)$是否是真的, 是真的.
因此, 对任何赋值$v, v(A) = 1$, 即A是永真式.
($\Leftarrow$) 假设A是永真式. 则对任何赋值$v, v(A) = 1$.
对任何赋值v, 断言

$$\text{如果}\, v(\emptyset) = 1 \,\text{则}\, v(A) = 1$$

是真的. 所以,

$$\emptyset \models A.$$

□

注意: $\Sigma = \emptyset$这样的情况我们称之为平凡情况. 而在寻找证明时我们常常会由于忽视平凡情况而出现错误, 因为平凡情况通常具有一般情况不具有的性质. 例如布尔代数中的最大元和最小元是平凡元素, 其中最大元和最小元是唯一的.

在证明逻辑推论时, 我们通常

(1) 证明肯定$\Sigma \models A$断言时, 采用矛盾法;

(2) 证明否定$\Sigma \not\models A$断言时, 采用构造法.

例4.3.7 证明: $A \to B, B \to C \models A \to C$.

证明 反证法. 假设$A \to B, B \to C \not\models A \to C$. 则存在一个赋值$v$使得

$$\begin{array}{l}(1)\ v(A \to B) = 1;\\(2)\ v(B \to C) = 1;\\(3)\ v(A \to C) = 0.\end{array}$$

由(3), 我们得到

$$\begin{array}{l}(4)\ v(A) = 1;\\(5)\ v(C) = 0.\end{array}$$

由(1)和(4), 得$v(B) = 1$. 所以

$$v(B \to C) = 0.$$

矛盾, 因为一个公式A在一个赋值下不可能同时为真和为假.

□

例4.3.8 证明: $B, A \to B \not\models A$.

证明 定义一个赋值v使得

$$\begin{array}{l}v(A) = 0;\\v(B) = 1.\end{array}$$

则

$$\begin{array}{l}v(A \to B) = 1;\\v(B) = 1;\\v(A) = 0.\end{array}$$

□

命题逻辑中主要的逻辑推论包括:

• 合取符号和析取符号的交换律:

$$\begin{array}{l}A \wedge B \models |B \wedge A;\\A \vee B \models |B \vee A.\end{array}$$

- 合取符号和析取符号的结合律:

$$(A\wedge B)\wedge C\models|A\wedge(B\wedge C);$$
$$(A\vee B)\vee C\models|A\vee(B\vee C).$$

- 合取符号和析取符号的分配律:

$$(A\wedge B)\vee C\models|(A\vee C)\wedge(B\vee C);$$
$$(A\vee B)\wedge C\models|(A\wedge C)\vee(B\wedge C).$$

- 合取符号和析取符号的De Morgan律:

$$\neg(A\wedge B)\models|\neg A\vee\neg B;$$
$$\neg(A\vee B)\models|\neg A\wedge\neg B.$$

其中$A\models|B$如果$A\models B$并且$B\models A$.

一个命题公式A的语义, 记为$||A||$, 是所有使得A为真的模型(赋值)的集合.

$$||A||=\{v:v(A)=1\}.$$

因此, 两个命题公式A与B具有相同的语义当且仅当$\models A\leftrightarrow B$, 等价地, $A\models|B$.

模型或赋值也可以称为可能世界(possible worlds). 因此, 命题公式A的语义是A在其中为真的可能世界的集合.

4.3.2 逻辑结论的基本性质

定理4.3.9 命题公式A在一个赋值下的真假值只与赋值在出现在A的命题变元上的取值有关. 即设$p_1,...,p_n$是出现在A中的所有命题变元, v,w是两个赋值. 如果

$$v(p_1)=w(p_1),...,v(p_n)=w(p_n)$$

则

$$v(A)=w(A).$$

证明 对公式A作结构归纳法.

如果$A=p$是某个命题变元, 并且$v(p)=w(p)$ 则显然$v(A)=v(p)=w(p)=w(A)$.

如果$A=\neg B$并且假定结论对B成立, 则$p_1,...,p_n$是出现在B中的所有命题变元, 所以v,w在所有出现B中的命题变元上的取值相等. 由归纳假设, $v(B)=w(B)$, 所以$v(A)=v(\neg B)=1-v(B)=1-w(B)=w(\neg B)=w(A)$.

如果$A=B\rightarrow C$并且假定结论对B,C成立, 则出现在B,C中的命题变元是$p_1,...,p_n$之一, 因此, 对任何出现B中的命题变元$p,v(p)=w(p)$; 并且对任何出现C中的命题变元$q,v(q)=w(q)$. 由归纳假定, $v(B)=w(B)$,并且$v(C)=w(C)$.

所以, $v(A)=v(B\rightarrow C)=1-v(B)+v(C)=1-w(B)+w(C)=w(B\rightarrow C)=w(A)$.

□

引理4.3.10 对任何赋值v, $v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n) = 1$当且仅当对每个$1 \leq i \leq n$, $v(B) = 1$.

证明 对n作归纳. 当$n = 1$时, $v(B_1) = 1$当且仅当对每个$1 \leq i \leq 1, v(B_i) = 1$.

假设引理对$n = k$成立. 设$n = k + 1$.

$v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n) = 1$
当且仅当$v(B_1 \wedge \cdots \wedge B_{k+1}) = 1$
当且仅当$v((B_1 \wedge \cdots \wedge B_k) \wedge B_{k+1}) = 1$
当且仅当$v(B_1 \wedge \cdots \wedge B_k) = 1$并且$v(B_{k+1}) = 1$
当且仅当$(v(B_1) = 1,$并且$,...,$并且$v(B_k) = 1)$并且$v(B_{k+1}) = 1$
当且仅当对每个$1 \leq i \leq n = k + 1, v(B_i) = 1$.

□

命题4.3.11 如果$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$, 则$v(\Sigma) = v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)$.

证明 假设$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$. 对任何赋值$v$,

(1) 如果$v(\Sigma) = 1$则对每个$A \in \Sigma, v(A) = 1$, 即对每个$1 \leq i \leq n$, $v(B_i) = 1$. 因此, $v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n) = 1$;

(2) 如果$v(\Sigma) = 0$则存在某个$A \in \Sigma$使得$v(A) = 0$, 即对某个$1 \leq i \leq n$, $v(B_i) = 0$. 因此, $v(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n) = 0$.

命题4.3.12 假设A包含命题变元$p_1, ..., p_n$的一个永真式. 设B是用公式$C_1, ..., C_n$替换A中的$p_1, ..., p_n$ 得到的公式. 则B是永真的.

证明 假设A包含命题变元$p_1, ..., p_n$的一个永真式. 由于我们不能够对永真公式作结构归纳，我们先证明下列引理，由该引理得到: 由于A是永真式, $A^w = 1$, 所以, $B^v = 1$. 即B是永真式.

引理4.3.13 对任何赋值v, 定义一个赋值w使得对每个$1 \leq i \leq n$,

$$w(p_i) = v(C_i).$$

则

$$v(B) = w(A).$$

证明 对A作结构归纳.

假设$A = p_1$为命题变元. 则$B = C_1$. 因此, $v(B) = v(C_1) = w(p_1) = w(A)$.

假设$A = \neg D$,并且断言对D是成立的. 设D'是用C_i替换D中p_i的出现所得到的公式. 则$B = \neg D'$, 并且

$$v(B) = 1 - v(D') = 1 - w(D) = w(A).$$

假设$A = D \to E$, 并且断言对D, E是成立的. 设D', E'分别是用C_i替换D, E中p_i的出现所得到的公式. 根据归纳假设, $v(D') = w(D), v(E') = w(E)$. 则$B = D' \to E'$, 并且

$$\begin{aligned} v(B) &= 1 - v(D') + v(E') \\ &= 1 - w(D) + w(E) \\ &= w(D \to E) \\ &= w(A). \end{aligned}$$

□

□

练习4.2
1. 证明: B是逻辑等价于C当且仅当B 逻辑蕴涵C并且C逻辑蕴涵B.
2. 证明: B和C是逻辑等价的当且仅当$(\neg B)$和$(\neg C)$是逻辑等价的.
3. 下面哪个公式可以被$A \wedge B$逻辑蕴涵?

(a) A	(d) $((\neg A) \vee B)$	(g) $(A \to B)$
(b) B	(e) $((\neg B) \to A)$	(h) $((\neg B) \to (\neg A))$
(c) $(A \vee B)$	(f) $(A \leftrightarrow B)$	(i) $(A \wedge (\neg B))$

4.3.3 命题逻辑与布尔代数的关系[6]

设$\mathbf{F}$是所有公式的集合. 定义$\mathbf{F}$上一个关系θ使得对任何$A, B \in \mathbf{F}$,

$$A\theta B\text{当且仅当}A \models |B.$$

则θ是一个等价关系.

给定一个公式A, 定义等价类

$$[A] = \{B : A \models |B\}.$$

设$\mathbf{F}/\theta$是所有等价类的集合.

定义$\mathbf{F}/\theta$上运算: 给定$[A], [B] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$\begin{aligned} &[A] + [B] = [A \vee B]; \\ &[A] \times [B] = [A \wedge B]; \\ &-[A] = [\neg A]. \end{aligned}$$

引理4.3.14 *所定义的运算是良定的.*

证明 对任何$A' \in [A], B' \in [B]$,

$$[A' \vee B'] = [A \vee B].$$

因为如果$A'\theta A$并且$B'\theta B$则$(A' \vee B')\theta(A \vee B)$, 即如果$A' \models |A$并且$B' \models |B$则$(A' \vee B') \models |(A \vee B)$.

引理4.3.15 如果$A' \models| A$并且$B' \models| B$则$(A' \vee B') \models| (A \vee B)$.

证明 假设$A' \models| A$并且$B' \models| B$. 即$A' \models A; A \models A'; B \models B'$,并且$B' \models B$.

则$(A' \vee B') \models (A \vee B)$, 并且$(A \vee B) \models (A' \vee B')$.

□

类似地证明$\times, -$.

□

$\mathbf{F}/\theta$的最小元素和最大元素定义为

$$\mathbf{0} = [A \wedge \neg A];$$
$$\mathbf{1} = [A \vee \neg A].$$

可以看出: 最小元素是由所有矛盾的公式组成的集合, 而最大元素是由所有永真的公式组成的集合.

定理4.3.16 商结构$(\mathbf{F}/\theta, +, \times, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$是一个布尔代数.

证明 我们下面只证明结合律和De Morgan律，其它情况类似. 任给$[A], [B], [C] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$([A] + [B]) \times [C] = ([A] \times [C]) + ([B] \times [C]).$$

即,

$$([A \vee B]) \times [C] = ([A \wedge C]) + ([B \wedge C]).$$

即,

$$[(A \vee B) \wedge C] = [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)].$$

即,

$$(A \vee B) \wedge C \models| (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

如果$A \models| A', B \models| B', C \models| C'$, 则

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B) \wedge C & \models| & (A' \vee B') \wedge C' \\ (A' \wedge C') \vee (B' \wedge C') & \models| & (A \wedge C) \vee (B \wedge C). \end{array}$$

De Morgan律: 任给$[A], [B] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$-([A] + [B]) = -[A] \times -[B].$$

即,

$$-([A \vee B]) = [\neg A] \times [\neg B].$$

即,

$$[\neg(A \vee B)] = [(\neg A) \wedge (\neg B)].$$

即,

$$\neg(A \vee B) \models| (\neg A \wedge \neg B).$$

$\square$

定义$[A] \leq [B]$当且仅当$[A] + [B] = [B]$. 则我们有:

$$
\begin{array}{lll}
[A] \leq [B] & \text{当且仅当} & [A] + [B] = [B] \\
 & \text{当且仅当} & [A \vee B] = [B] \\
 & \text{当且仅当} & A \vee B \models |B \\
 & \text{当且仅当} & A \vee B \models B \\
 & \text{当且仅当} & A \models B.
\end{array}
$$

因此, $[A] \leq [B]$当且仅当B是A的逻辑推论.

4.4 自然推理系统

判断一个公式是否是永真的时我们用真假值表来判断, 其复杂性是典型的NP-完备的. 比如, 判断$\emptyset \models [A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$, 其中出现3个命题元变元, 我们需要构建$2^3$个赋值来验证.

而平时我们推理的时候, 脑袋里不是构建真假值表, 好像是利用了下面的规则:

$$
\begin{array}{l}
A \to B \\
A \\
\hline
B
\end{array}
$$

直接得到的:

$$
\begin{array}{l}
\text{如果天下雨则地是湿的} \\
\text{天下雨} \\
\hline
\text{所以地是湿的.}
\end{array}
$$

这样, 我们希望找到一个*形式推理*的方法使得$\Sigma \vdash A$表示(前提)Σ可以推理出(结论)A, 满足下列条件:

(1) 该方法不是基于赋值的, 即不是基于语义的, 而是应该基于语法(公式结构)的;

(2) 该方法是保真的(truth-preserving), 即在任何赋值v下, 当前提在赋值v下为真, 那么结论在赋值v下也为真;

(3) 该方法是完备的(complete), 每个逻辑推论在这个形式推理下可以推导出.

给定公式集合Σ和公式A, 如果A可以由Σ形式推理得出, 记为

$$\Sigma \vdash A.$$

4.4.1 自然推理系统$\mathbf{N}_1$

自然推理系统$\mathbf{N}_1$是由下列推理规则组成的[7]:

- 自反公理:

$$\text{(ref) } A \vdash A.$$

- 单调性规则:

$$(+)\ \frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \Sigma' \vdash A}$$

其中Σ'是任何公式集合.

- 推理规则:

$$(\neg^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma, \neg A \vdash B\\ \Sigma, \neg A \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma \vdash A}$$

$$(\to^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash A \to B\\ \Sigma \vdash A\end{array}}{\Sigma \vdash B} \qquad (\to^+)\ \frac{\Sigma, A \vdash B}{\Sigma \vdash A \to B}$$

$$(\wedge_1^-)\ \frac{\Sigma \vdash A \wedge B}{\Sigma \vdash A} \qquad (\wedge^+)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash A\\ \Sigma \vdash B\end{array}}{\Sigma \vdash A \wedge B}$$

$$(\wedge_2^-)\ \frac{\Sigma \vdash A \wedge B}{\Sigma \vdash B}$$

$$(\vee^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma, A \vdash C\\ \Sigma, B \vdash C\end{array}}{\Sigma, A \vee B \vdash C} \qquad (\vee_1^+)\ \frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash A \vee B}$$

$$(\vee_2^+)\ \frac{\Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash B \vee A}$$

$$(\leftrightarrow_1^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash A \leftrightarrow B\\ \Sigma \vdash A\end{array}}{\Sigma \vdash B} \qquad (\leftrightarrow^+)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma, A \vdash B\\ \Sigma, B \vdash A\end{array}}{\Sigma \vdash A \leftrightarrow B}$$

$$(\leftrightarrow_2^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash A \leftrightarrow B\\ \Sigma \vdash B\end{array}}{\Sigma \vdash A}$$

这里规则的命名规则是这样的: 如果一个逻辑连接词$*$出现在前提中, 不出现在结论中, 这个规则称为消除$*^-$-规则; 如果一个逻辑连接词$*$不出现在前提中, 出现在结论的$\vdash$的左边, 这个规则也称为消除$*^-$-规则; 如果逻辑连接词$*$出现在结论的$\vdash$的右边, 这个规则称为添加$*^+$-规则.

我们称没有前提条件的规则称为公理; 否则称为推理规则. 因此, 在自然推理系统中, 只有一个公理, 有13个推理规则.

$(\neg^-)$是反证法的形式推理形式. 可以验证相应的逻辑推理形式是正确的. 即这个形式推理规则是保真的, 即下面断言是正确的:

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma, \neg A \models B\\ \Sigma, \neg A \models \neg B\end{array}}{\Sigma \models A.}$$

下面我们给出几个形式证明的例子, 然后再给出严格的证明定义.

命题4.4.1 $(\in)$ 如果$A \in \Sigma$ 则$\Sigma \vdash A$.

证明 设$\Sigma = \{A\} \cup \Sigma' = A, \Sigma'$.

$$\begin{array}{llll}
(1) & A & \vdash A & (\mathrm{ref}) \\
(2) & A, \Sigma' & \vdash A & (+, (1)) \\
(3) & \Sigma & \vdash A & (\text{约定})
\end{array}$$

□

注意: 作为集合, $A, \Sigma' \neq \Sigma$. 我们约定$A, \Sigma' \vdash A$就是$\{A\} \cup \Sigma' \vdash A$. □

例4.4.2 证明: $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$.

$$\begin{array}{llll}
(1) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg A \to B & (\in) \\
(2) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg A & (\in) \\
(3) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash B & (\to^-, (1), (2)) \\
(4) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg B & (\in) \\
(5) & \neg A \to B, \neg B & \vdash A & (\neg^-, (3), (4)) \\
(6) & \neg A \to B & \vdash \neg B \to A & (\to^+, (5))
\end{array}$$

□

通常, 我们寻找证明时可以从结论向前提进行反向推理.

定义4.4.3 A是在命题逻辑中是由Σ*形式可证明的*, 记为$\Sigma \vdash A$, 如果存在一个断言序列

$$\Sigma_1 \vdash A_1, ..., \Sigma_n \vdash A_n$$

使得

($*1$) $\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \vdash A$;

($*2$) 对每个$k \leq n$, $\Sigma_k \vdash A_k$可由前面的断言通过一个形式推理规则得到.

在$\neg A \to B \vdash \neg B \to A$的证明中,

$$\begin{array}{l|lll|l|r}
\Sigma_1 & (1) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg A \to B & A_1 & (\in) \\
\Sigma_2 & (2) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg A & A_2 & (\in) \\
\Sigma_3 & (3) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash B & A_3 & (\to^-, (1), (2)) \\
\Sigma_4 & (4) & \neg A \to B, \neg B, \neg A & \vdash \neg B & A_4 & (\in) \\
\Sigma_5 & (5) & \neg A \to B, \neg B & \vdash A & A_5 & (\neg^-, (3), (4)) \\
\Sigma_6 & (6) & \neg A \to B & \vdash \neg B \to A & A_6 & (\to^+, (5))
\end{array}$$

关于($*2$)的意思, 比如, 如果$\Sigma_k \vdash A_k$是由($\neg^-$)得到的, 则存在$i, j < k$使得

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma_i \vdash A_i & = & \Sigma_k, \neg A_k \vdash B; \\
\Sigma_j \vdash A_j & = & \Sigma_k, \neg A_k \vdash \neg B.
\end{array}$$

其中=是符号串的相等.

再比如, 如果$\Sigma_k \vdash A_k = \Sigma', B \vee C \vdash A_k$是由($\vee^-$)得到的, 则存在$i, j < k$使得

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma_i \vdash A_i & = & \Sigma', B \vdash A_k; \\
\Sigma_j \vdash A_j & = & \Sigma', C \vdash A_k; \\
\Sigma_k & = & \Sigma' \cup \{B \vee C\}.
\end{array}$$

定理4.4.4 对任何公式A, B, C,

$$\begin{array}{ll}(a) & A \to B, A \vdash B;\\ (b) & A \vdash B \to A;\\ (c) & A \to B, B \to C \vdash A \to C;\\ (d) & A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C.\end{array}$$

证明 (a)

$$\begin{array}{llll}(1) & A \to B, A & \vdash A \to B & (\in)\\ (2) & A \to B, A & \vdash A & (\in)\\ (3) & A \to B, A & \vdash B & (\to^-, (1), (2))\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{llll}(1) & A, B & \vdash A & (\in)\\ (2) & A & \vdash B \to A & (\to^+, (1))\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{llll}(1) & A \to B, B \to C, A & \vdash A \to B & (\in)\\ (2) & A \to B, B \to C, A & \vdash A & (\in)\\ (3) & A \to B, B \to C, A & \vdash B & (\to^-, (1), (2))\\ (4) & A \to B, B \to C, A & \vdash B \to C & (\in)\\ (5) & A \to B, B \to C, A & \vdash C & (\to^-, (3), (4))\\ (6) & A \to B, B \to C & \vdash A \to C & (\to^+, (5))\end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{llll}(1) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash A & (\in)\\ (2) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash A \to B & (\in)\\ (3) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash B & (\to^-, (1), (2))\\ (4) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash A \to (B \to C) & (\in)\\ (5) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash B \to C & (\to^-, (1), (4))\\ (6) & A \to (B \to C), A \to B, A & \vdash C & (\to^-, (3), (5))\\ (7) & A \to (B \to C), A \to B & \vdash A \to C & (\to^+, (6))\end{array}$$

□

命题4.4.5 $\neg\neg A \vdash A$.

证明

$$\begin{array}{llll}(1) & \neg\neg A, \neg A & \vdash \neg A & (\in)\\ (2) & \neg\neg A, \neg A & \vdash \neg\neg A & (\in)\\ (3) & \neg\neg A & \vdash A & (\neg^-, (1), (2))\end{array}$$

因为$\neg\neg A = \neg(\neg A)$.

□

命题4.4.6 对任何公式A,B,

$$(\neg^+)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma, A\vdash B\\ \Sigma, A\vdash \neg B\end{array}}{\Sigma\vdash\neg A.}$$

证明

$$\begin{array}{lrll}
(1) & \Sigma,\neg\neg A & \vdash \Sigma & (\in)\\
(2) & \neg\neg A & \vdash A & (4.4.5)\\
(3) & \Sigma,\neg\neg A & \vdash A & (+,(2))\\
(4) & \Sigma, A & \vdash B & (\text{假设})\\
(5) & \Sigma,\neg\neg A & \vdash B & (\text{trans},(3),(4))\\
(6) & \Sigma,\neg\neg A & \vdash \neg B & (ibid)\\
(7) & \Sigma & \vdash \neg A & (\neg^-,(5),(6))
\end{array}$$

其中trans是命题逻辑的形式推理的传递性, 其证明将放在本节最后; 而$ibid$(拉丁词$ibidem$的缩写)表示同理.

□

定理4.4.7 $A\to\neg B\vdash B\to\neg A$.

证明

$$\begin{array}{lrll}
(1) & A\to\neg B, B, A & \vdash B & (\in)\\
(2) & A\to\neg B, A & \vdash \neg B & (4.4.4a)\\
(3) & A\to\neg B, B, A & \vdash \neg B & (+,(2))\\
(4) & A\to\neg B, B & \vdash \neg A & (\neg^+,(1),(3))\\
(5) & A\to\neg B & \vdash B\to\neg A & (\to^+,(4))
\end{array}$$

□

命题4.4.8 由(自反), $(+)$, $(\to^+)$以及下列规则:

(1) 如果$\Sigma\vdash\neg\neg A$,则$\Sigma\vdash A$;

(2) 如果$\Sigma\vdash A\to\neg B, A\to B$ 则$\Sigma\vdash\neg A$,

推出$(\neg^-)$.

证明 假设$\Sigma,\neg A\vdash B$和$\Sigma,\neg A\vdash\neg B$.

$$\begin{array}{rlr}
\Sigma,\neg A\vdash & B & (\text{假设})\\
\Sigma\vdash & \neg A\to B & (\to^+)\\
\Sigma,\neg A\vdash & \neg B & (\text{假设})\\
\Sigma\vdash & \neg A\to\neg B & (\to^+)\\
\Sigma\vdash & \neg\neg A & (2)\\
\Sigma\vdash & A & (1)
\end{array}$$

$\square$

注意: $\Sigma \vdash A, B$表示$\Sigma \vdash A$并且$\Sigma \vdash B$.

命题4.4.9 $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.

证明 第一种证明:

$$
\begin{array}{rll}
\neg A, A \wedge B \vdash & A \wedge B & (\in) \\
\neg A, A \wedge B \vdash & A & (\wedge^-) \\
\neg A, A \wedge B \vdash & \neg A & (\in) \\
\neg A \vdash & \neg(A \wedge B) & (\neg^-) \\
\neg B, A \wedge B \vdash & A \wedge B & (\in) \\
\neg B, A \wedge B \vdash & B & (\wedge^-) \\
\neg B, A \wedge B \vdash & \neg B & (\in) \\
\neg B \vdash & \neg(A \wedge B) & (\neg^-) \\
\neg A \vee \neg B \vdash & \neg(A \wedge B) & (\vee^-).
\end{array}
$$

第二种证明:

$$
\begin{array}{rll}
A \wedge B \vdash & A \wedge B & (\mathrm{ref}) \\
A \wedge B \vdash & A & (\wedge^-) \\
\neg A, A \wedge B \vdash & A & (+) \\
\neg A, A \wedge B \vdash & \neg A & (\in) \\
\neg A \vdash & \neg(A \wedge B) & (\neg^-) \\
A \wedge B \vdash & B & (\wedge^-) \\
\neg B, A \wedge B \vdash & B & (+) \\
\neg B, A \wedge B \vdash & \neg B & (\in) \\
\neg B \vdash & \neg(A \wedge B) & (\neg^-) \\
\neg A \vee \neg B \vdash & \neg(A \wedge B) & (\vee^-).
\end{array}
$$

第三种证明:

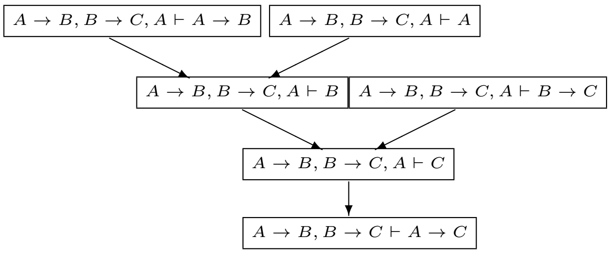
$$
\begin{array}{rll}
\neg A, A, \neg\neg B \vdash & A & (\in) \\
\neg A, A, \neg\neg B \vdash & \neg A & (\in) \\
\neg A, A \vdash & \neg B & (\neg^-) \\
\neg A \vdash & A \to \neg B & (\to^+) \\
\neg B, A \vdash & \neg B & (\in) \\
\neg B \vdash & A \to \neg B & (\to^+) \\
\neg A \vee \neg B \vdash & A \to \neg B & (\vee^-) \\
\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash & A \to \neg B & (+) \\
\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash & A \wedge B & (\in) \\
\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash & A & (\wedge^-) \\
\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash & B & (\wedge^-) \\
\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash & \neg B & (\to^-) \\
\neg A \vee \neg B \vdash & \neg(A \wedge B). &
\end{array}
$$

$\square$

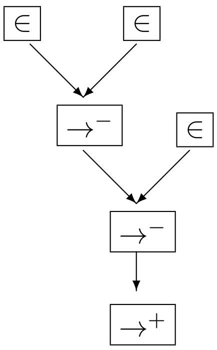
一个证明可以看作是一棵树. 比如, $A \to B, B \to C \vdash A \to C$的证明

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & A \to B, B \to C, A & \vdash A \to B & (\in) \\
(2) & A \to B, B \to C, A & \vdash A & (\in) \\
(3) & A \to B, B \to C, A & \vdash B & (\to^-, (1), (2)) \\
(4) & A \to B, B \to C, A & \vdash B \to C & (\in) \\
(5) & A \to B, B \to C, A & \vdash C & (\to^-, (3), (4)) \\
(6) & A \to B, B \to C & \vdash A \to C & (\to^+, (5))
\end{array}
$$

可以表示为一棵树:



我们可以看出: 树的叶节点上的断言是一个无条件型的推理规则, 而其它节点上断言是一个有条件型推理规则的结论.



从上面这些例子, 我们看出有3种断言的形式:

(1) 断言: $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$.

(2) 复合断言: 如果$\Sigma, A \vdash B$并且$\Sigma, A \vdash \neg B$, 则$\Sigma \vdash \neg A$.

(3) 复合断言的复合: 形式推理规则集合可以推出形式推理规则.

元语言: "This is a desk"是一个英文句子, 其中

This is a desk

是对象语言(英语)中的一个句子,而

"This is a desk"是一个英文句子

是元语言(汉语)中的一个句子; 但又不是作为对象语言的汉语中的句子.

由于$\vdash, \models$不是命题逻辑语言中的符号, 因此,

$$\Sigma \vdash A$$

或者

$$\Sigma \models A$$

都不是命题逻辑的公式, 是用来表示命题逻辑中公式之间所具有的逻辑关系.

$\Sigma \models A$是关于命题逻辑的语义性质, 但这个性质不是一个良定公式, 而是元语言中的一个(命题)断言. 因此,

- $\Sigma \models A$是关于公式集合Σ和公式A之间的语义关系的断言;
- $\Sigma \vdash A$是关于Σ和A之间的语法关系的断言.

复合断言

$$\text{如果}\Sigma, \neg A \models B\text{并且}\Sigma, \neg A \models \neg B\text{则}\Sigma \models A.$$

事实上是说

$$\begin{array}{l}\text{对任何公式集合}\Sigma\text{和公式}A, B,\\ \qquad \text{如果}\Sigma, \neg A \models B\text{并且}\Sigma, \neg A \models \neg B\text{则}\Sigma \models A.\end{array}$$

数学约定: 出现一个结论中的变元是指全称量词. 比如, 定理

$$\text{如果}b^2 - 4ac \geq 0\text{则方程}ax^2 + bx + c = 0\text{有实数根.}$$

是表示

$$\begin{array}{l}\text{对任何实数}a, b, c,\\ \qquad \text{如果}b^2 - 4ac \geq 0\text{则方程}ax^2 + bx + c = 0\text{有实数根.}\end{array}$$

类似的约定也出现在逻辑程序中.

通过关于$\models$断言的证明, 我们能够发现关于$\vdash$断言的形式证明. 下面我们举一个简单例子.

命题4.4.10 对任何公式A, B, C,

$$(A \vee B) \wedge C \models| (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

证明 首先我们证明$(A \vee B) \wedge C \models (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. 即证明: 任给一个赋值$v$, 如果$v((A \vee B) \wedge C) = 1$则$v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1$.

$\because v((A \vee B) \wedge C) = 1, \therefore v(C) = 1$并且$v(A \vee B) = 1$, 即$v(A) = 1$或者$v(B) = 1$.

如果$v(A) = 1$则$v(A \wedge C) = 1$, 所以$v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1$;

如果$v(B) = 1$则$v(B \wedge C) = 1$, 所以$v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1$.

然后我们证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$. 即证明: 任给一个赋值$v$, 如果$v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1$则$v((A \vee B) \wedge C) = 1$.

$\because v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1, \therefore v(A \wedge C) = 1$ 或者$v(B \wedge C) = 1$.

如果$v(A \wedge C) = 1$, 即$v(A) = 1$并且$v(C) = 1$则$v(A \vee B) = 1$, 所以$v((A \vee B) \wedge C) = 1$;

如果$v(B \wedge C) = 1$, 即$v(B) = 1$并且$v(C) = 1$, 则$v(A \vee B) = 1$, 所以$v((A \vee B) \wedge C) = 1$.

□

例4.4.11 证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

证明

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in) \\
(3) & A, C & \vdash A \wedge C & (\wedge^+) \\
(4) & A, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+) \\
(5) & B, C & \vdash B & (\in) \\
(6) & B, C & \vdash C & (\in) \\
(7) & B, C & \vdash B \wedge C & (\wedge^+) \\
(8) & B, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+) \\
(9) & A \vee B, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^-) \\
(10) & (A \vee B) \wedge C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) &
\end{array}
$$

这里,

$$
\begin{array}{l}
A \wedge C \vdash A \vee B, \\
A \wedge C \vdash C; \\
B \wedge C \vdash A \vee B, \\
B \wedge C \vdash C.
\end{array}
$$

反过来证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$. 为了证明

$$
\begin{array}{l}
(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B, \\
(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash C
\end{array}
$$

我们有下列证明:

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & A \wedge C & \vdash A \wedge C & (\in) \\
(2) & A \wedge C & \vdash A & (\wedge^-) \\
(3) & A \wedge C & \vdash C & (\wedge^-) \\
(4) & A \wedge C & \vdash A \vee B & (\vee^+) \\
(5) & A \wedge C & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\wedge^+) \\
(6) & B \wedge C & \vdash B \wedge C & (\in) \\
(7) & B \wedge C & \vdash B & (\wedge^-) \\
(8) & B \wedge C & \vdash C & (\wedge^-) \\
(9) & B \wedge C & \vdash A \vee B & (\vee^+) \\
(10) & B \wedge C & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\wedge^+) \\
(11) & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\vee^-).
\end{array}
$$

□

例4.4.12 证明: $A \leftrightarrow B \vdash (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

证明

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B \vdash & \quad A \to B \\ A \leftrightarrow B \vdash & \quad B \to A \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} A \to B \vdash & \quad (\neg A \vee B) \\ B \to A \vdash & \quad (A \vee \neg B) \end{aligned}$$

□

例4.4.13 证明: $A \vdash \neg A \to B$.

证明

$$\begin{aligned} A, \neg A, \neg B \vdash & \quad A \\ A, \neg A, \neg B \vdash & \quad \neg A \\ A, \neg A \vdash & \quad B \\ A \vdash & \quad \neg A \to B. \end{aligned}$$

□

例4.4.14 证明: $B \vdash A \to B$.

证明

$$\begin{aligned} B \vdash & \quad B \\ B, A \vdash & \quad B \\ B \vdash & \quad A \to B. \end{aligned}$$

□

定理4.4.15 $A \vee B \vdash \neg A \to B$.

证明

$$\begin{aligned} A \vdash & \quad \neg A \to B \\ B \vdash & \quad \neg A \to B \\ A \vee B \vdash & \quad \neg A \to B. \end{aligned}$$

□

定理4.4.16 $\neg A \to B \vdash A \vee B$.

证明

$$\begin{aligned} A \vdash & \quad A \\ A \vdash & \quad A \vee B \\ \neg(A \vee B) \vdash & \quad \neg A \\ \neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \quad \neg A \\ \neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \quad \neg A \to B \\ \neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \quad B \\ \neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \quad A \vee B \\ \neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \quad \neg(A \vee B) \\ \neg A \to B \vdash & \quad A \vee B. \end{aligned}$$

□

练习4.3:

1. 形式证明
   (1) $(A \to B) \to B \vdash (B \to A) \to A$;
   (2) $(A \to B) \to C \vdash (A \to C) \to C$;
   (3) $(A \to B) \to C \vdash (C \to A) \to (D \to A)$;[1]
   (4) $(A \wedge \neg B) \to (D \vee C), B \to \neg A, A \to \neg C \vdash A \to D$.
2. 形式证明
   (1) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$;
   (2) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$;
   (3) $\vdash A \vee \neg A$.
3. 由$(\neg^+)$和下列形式推理规则:

$$\frac{\Sigma \vdash \neg\neg A}{\Sigma \vdash A,}$$

推出$(\neg^-)$, 其中,

$$(\neg^+)\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma, A \vdash B \\ \Sigma, A \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma \vdash \neg A.}$$

4.4.2 形式推理的基本性质

定理4.4.17 (有限性定理) 如果$\Sigma \vdash A$, 则存在有限的$\Sigma^0 \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

证明 假设$\Sigma \vdash A$. 则存在断言序列

$$\Sigma_1 \vdash A_1, ..., \Sigma_n \vdash A_n$$

是一个证明, 其中$\Sigma_n = \Sigma, A_n = A$.

我们对$\Sigma \vdash A$的证明长度n作归纳, 并且对最后一步用到的形式推理规则分情况讨论.

如果最后一步使用的形式推理规则是$(\in)$则$A \in \Sigma$. 设$\Sigma^0 = \{A\}$, 有$\Sigma^0 \vdash A$.

如果最后一步使用的形式推理规则是$(+)$则存在Σ'和$i < n$使得

$$\begin{array}{l}\Sigma' \subseteq \Sigma, \\ \Sigma' \vdash A = \Sigma_i \vdash A_i.\end{array}$$

由归纳假设, 存在有限的$\Sigma^{0,\prime} \subseteq \Sigma'$使得$\Sigma^{0,\prime} \vdash A$. 设$\Sigma^0 = \Sigma^{0,\prime}$, 则有

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

[1] $*$表示该题有点难, 需要利用其它已经证明的结论, 或自己给出较长的证明.

如果最后一步使用的形式推理规则是$(\neg^-)$则存在一个公式B和$i, j < n$使得

$$\frac{\begin{array}{rl}\Sigma_i \vdash A_i = \Sigma, \neg A & \vdash B \\ \Sigma_j \vdash A_j = \Sigma, \neg A & \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \quad \vdash A.}$$

则定理对$\Sigma, \neg A \vdash B$和$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$是成立的. 我们首先证明

(1) 存在有限的$\Sigma_1 \subseteq \Sigma$使得$\Sigma_1, \neg A \vdash B$;

(2) 存在有限的$\Sigma_2 \subseteq \Sigma$使得$\Sigma_2, \neg A \vdash \neg B$.

(1) 由归纳假设, 存在有限的$\Sigma' \subseteq \{\Sigma, \neg A\}$使得$\Sigma' \vdash B$. 这里有两种情况:

a) 如果$\neg A \notin \Sigma'$, 则设$\Sigma_1 = \Sigma'$, 并有$\Sigma_1, \neg A \vdash B$;

b) 如果$\neg A \in \Sigma'$, 则设$\Sigma_1 = \Sigma' - \{\neg A\}$, 并有$\Sigma_1, \neg A \vdash B$.

类似地证明(2).

这样, 我们有

$$\begin{array}{l}\Sigma_1, \neg A \vdash B; \\ \Sigma_2, \neg A \vdash \neg B.\end{array}$$

因此

$$\begin{array}{l}\Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash B; \\ \Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash \neg B; \\ \Sigma_1, \Sigma_2 \vdash A.\end{array}$$

设$\Sigma^0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 则有

$$\Sigma^0 \vdash A,$$

因为$\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash A$.

类似地讨论其它8种形式推理规则.

□

定理4.4.18 (形式推理的传递性)

$$(\text{trans})\frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash \Sigma' \\ \Sigma' \vdash A\end{array}}{\Sigma \vdash A.}$$

证明

(1)	Σ'	$\vdash A$	(假设)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	(定理4.4.17)
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(ibid)$
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(+, (4))$
(6)	Σ	$\vdash A_1$	$(A_1 \in \Sigma')$
(7)	Σ	$\vdash A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(\to^-, (5), (6))$
(8)	Σ	$\vdash A_n \to A$	$(ibid)$
(9)	Σ	$\vdash A_n$	$(A_n \in \Sigma')$
(10)	Σ	$\vdash A$	$(\to^-, (8), (9))$

□

4.4.3 有限完备性定理

逻辑推论是事先定义好的, 而形式推论是人为给出的. 我们希望

(1) 形式推论不会推出更多的东西(可靠性);

(2) 形式推论不会推出更少的东西(完备性).

即

- **可靠性**: 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$(形式推出的结论集合包含在逻辑推出的结论集合中);
- **完备性**: 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$(逻辑推出的结论集合包含在形式推出的结论集合中).

定理4.4.19 (可靠性定理) 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$.

证明 对$\Sigma \vdash A$的形式证明长度作归纳, 并且对最后一步用到的形式推理规则分情况讨论.

情况1. 最后用到的是($\in$). 则$A \in \Sigma$. 所以$\Sigma \models A$.

情况2. 最后用的是($+$). 则存在Σ'使得

$$\begin{aligned} &\Sigma' \subseteq \Sigma, \\ &\Sigma' \vdash A. \end{aligned}$$

由归纳假设, $\Sigma' \models A$. 所以$\Sigma \models A$.

情况3. 最后用的是($\neg^-$). 则存在一个公式B使得

$$\begin{array}{rl} \Sigma, \neg A & \vdash B \\ \Sigma, \neg A & \vdash \neg B \\ \hline \Sigma & \vdash A. \end{array}$$

由归纳假设, $\Sigma, \neg A \models B$和$\Sigma, \neg A \models \neg B$. 则$\Sigma \models A$.

反证法: 假设存在一个赋值v使得$\Sigma^v = 1$并且$(A)^v = 0$. 则$(\neg A)^v = 1$, 所以, $(B)^v = (\neg B)^v = 1$. 矛盾.

类似地考虑其它情况.

$\square$

在证明有限完备性定理之前, 我们首先给出两个引理.

引理4.4.20 设A是一个含有命题变元$p_1, ..., p_n$的公式. 任给一个赋值v, 定义: 对每个$1 \leq i \leq n$,

$$A_i = \begin{cases} p_i & \text{如果} p_i^v = 1 \\ \neg p_i & \text{如果} p_i^v = 0. \end{cases}$$

则

(i) 如果$A^v = 1$则$A_1, ..., A_n \vdash A$.

(ii) 如果$A^v = 0$则$A_1, ..., A_n \vdash \neg A$.

证明 对A的结构作归纳.

假设$A=p_1$.

如果$A^v=1$则$A_1=p_1$, 且$A_1\vdash p_1$, 即$A_1\vdash A$;

如果$A^v=0$则$A_1=\neg p_1$, 且$A_1\vdash \neg p_1$, 即$A_1\vdash \neg A$.

假设$A=\neg B$并且结论对B是成立的.

(i) 如果$A^v=1$则$(B)^v=0$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash \neg B$, 即$A_1,...,A_n\vdash A$;

(ii) 如果$A^v=0$则$(B)^v=1$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash B$.

$$\begin{aligned} A_1,...,A_n\vdash &\quad B\\ B\vdash &\quad \neg\neg B\\ B\vdash &\quad \neg A\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad \neg A \end{aligned}$$

假设$A=B\to C$并且结论对B,C是成立的.

(i) 如果$A^v=1$则或者

(i1) $(B)^v=1$并且$(C)^v=1$;

(i2) $(B)^v=0$并且$(C)^v=0$; 或者

(i3) $(B)^v=0$并且$(C)^v=1$;

(i1) $(B)^v=1$并且$(C)^v=1$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash B$,并且$A_1,...,A_n\vdash C$.

$$\begin{aligned} A_1,...,A_n\vdash &\quad C\\ A_1,...,A_n,B\vdash &\quad C\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad B\to C\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad A \end{aligned}$$

(i2) $(B)^v=0$并且$(C)^v=0$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash \neg B$,并且$A_1,...,A_n\vdash \neg C$.

$$\begin{aligned} A_1,...,A_n\vdash &\quad \neg B\\ A_1,...,A_n,\neg C\vdash &\quad \neg B\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad \neg C\to\neg B\\ \neg C\to\neg B\vdash &\quad B\to C\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad A \end{aligned}$$

(i3) $(B)^v=0$并且$(C)^v=1$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash \neg B$,并且$A_1,...,A_n\vdash C$.

$$\begin{aligned} A_1,...,A_n\vdash &\quad C\\ A_1,...,A_n,B\vdash &\quad C\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad B\to C\\ A_1,...,A_n\vdash &\quad A \end{aligned}$$

(ii) 如果$A^v=0$则$(B)^v=1$并且$(C)^v=0$. 由归纳假设, $A_1,...,A_n\vdash B$,并

且$A_1,...,A_n\vdash\neg C$.

$$\begin{array}{rl}
A_1,...,A_n\vdash & B\\
A_1,...,A_n,B\to C\vdash & B\\
A_1,...,A_n,B\to C\vdash & B\to C\\
A_1,...,A_n,B\to C\vdash & C\\
A_1,...,A_n\vdash & \neg C\\
A_1,...,A_n,B\to C\vdash & \neg C\\
A_1,...,A_n\vdash & \neg(B\to C)\\
A_1,...,A_n\vdash & \neg A
\end{array}$$

□

引理4.4.21 ($\neg^*$) 如果$\Sigma,B\vdash A$并且$\Sigma,\neg B\vdash A$则$\Sigma\vdash A$.

证明

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma,B & \vdash & A\\
\Sigma & \vdash & B\to A\\
B\to A & \vdash & \neg A\to\neg B\\
\Sigma & \vdash & \neg A\to\neg B\\
\Sigma,\neg B & \vdash & A\\
\Sigma & \vdash & \neg B\to A\\
\neg B\to A & \vdash & \neg A\to B\\
\Sigma & \vdash & \neg A\to B\\
\Sigma,\neg A & \vdash & \neg A\\
\Sigma,\neg A & \vdash & \neg A\to\neg B\\
\Sigma,\neg A & \vdash & \neg B\\
\Sigma,\neg A & \vdash & \neg A\to B\\
\Sigma,\neg A & \vdash & B\\
\Sigma & \vdash & A
\end{array}$$

□

注意: 引理与($\neg^+$)和($\neg^-$)的差别:

$$(\neg^+)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma,A\vdash C\\ \Sigma,A\vdash\neg C\end{array}}{\Sigma\vdash\neg A.}\qquad(\neg^-)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma,\neg A\vdash C\\ \Sigma,\neg A\vdash\neg C\end{array}}{\Sigma\vdash A.}\qquad(\neg^*)\ \frac{\begin{array}{l}\Sigma,B\vdash A\\ \Sigma,\neg B\vdash A\end{array}}{\Sigma\vdash A.}$$

□

定理4.4.22 如果$\models A$则$\vdash A$.

证明 假设A含有命题变元$p_1, ..., p_n$. 定义一个赋值v使得对每个$1 \le i \le n, v(p_i) = 1$. 则由第一个引理, 对每个$1 \le i \le n$, $A_i = p_i$,并且

$$A_1, A_2, ..., A_n \vdash A,$$

即

$$p_1, p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{1}$$

设w是一个赋值使得

	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
$w(p)$	0	1	$\cdots$	1.

则对w运用第一个引理, 存在$A_1 = \neg p_1, A_2 = p_2, ..., A_n = p_n$,并且

$$\neg p_1, p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{2}$$

由(1),(2)和引理4.4.21, 我们得到

$$p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{3}$$

设w_1, w_2是赋值使得

	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n
$w_1(p)$	0	0	1	$\cdots$	1
$w_2(p)$	1	0	1	$\cdots$	1

则有

$$\begin{aligned} \neg p_1, \neg p_2, p_3, ..., p_n &\vdash A, \\ p_1, \neg p_2, p_3, ..., p_n &\vdash A. \end{aligned}$$

由引理4.4.21, 有

$$\neg p_2, p_3, ..., p_n \vdash A. \tag{4}$$

由(3),(4)和引理4.4.21, 我们得到

$$p_3, ..., p_n \vdash A. \tag{5}$$

设w_1, w_2, w_3, w_4是赋值使得

	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_n
$w_1(p)$	0	0	0	1	$\cdots$	1
$w_2(p)$	1	0	0	1	$\cdots$	1
$w_3(p)$	0	1	0	1	$\cdots$	1
$w_4(p)$	1	1	0	1	$\cdots$	1

则有

$$\begin{aligned} \neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n &\vdash A, \\ p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n &\vdash A, \\ \neg p_1, p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n &\vdash A, \\ p_1, p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n &\vdash A; \end{aligned}$$

分别用引理4.4.21于前2个和后2个式子, 得到

$$\begin{aligned}\neg p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n \vdash A,\\ p_2, \neg p_3, p_4, ..., p_n \vdash A.\end{aligned}$$

用引理4.4.21于上2个式子, 得到

$$\neg p_3, p_4, ..., p_n \vdash A. \tag{6}$$

由(5),(6)和引理4.4.21, 我们得到

$$p_4, ..., p_n \vdash A.$$

如此下去, 我们就证明了引理.

□

注意: 整个消除过程需要从构造一个赋值v开始到构造2^n个赋值结束. □

定理4.4.23 (有限完备性定理) *如果Σ是***有限的***并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.*

证明 假设$\Sigma \models A$. 则$\models \Sigma \to A$. 由上述证明, 有$\vdash \Sigma \to A$.

$$\begin{array}{rl} \vdash & \Sigma \to A \\ \Sigma \vdash & \Sigma \to A \\ \Sigma \vdash & \Sigma \\ \Sigma \vdash & A \end{array}$$

□

问题: 这样的证明能否推广到无穷的Σ? 即对任何公式集合Σ和公式A, 如果Σ是*无穷的*并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

$\vdash$-有限性: 如果$\Sigma \vdash A$则存在一个有限子集$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma' \vdash A.$$

$\models$-有限性? 如果$\Sigma \models A$则存在一个有限子集$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma' \models A.$$

如果有$\models$-有限性, 则完备性定理可以证明如下: 假设$\Sigma \models A$. 设$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得$\Sigma' \models A$. 由有限完备性定理, $\Sigma' \vdash A$, 由(+), $\Sigma \vdash A$.

在下一节我们将证明完备性定理, 因而我们知道: $\models$-有限性定理也是成立的.

4.5 公理系统$\mathbf{A}_1$

命题逻辑的公理系统$\mathbf{A_1}$是由如下公理和推理规则组成[8,9,10]:

- **公理**: 设A, B, C是L上的公式,
(A1) $A \to (B \to A)$;
(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
- **推理规则**: (MP, Modus Ponens): 由A和$A \to B$, 推出B; 记为

$$\begin{array}{l} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}$$

公理(Ai)称为公理模式. 当A, B, C为具体的公式而不是元变元时, 这时的公式称为公理(Ai)的事例.

下面我们给出一个公理证明的例子.

例4.5.1 证明: $\vdash_{axiom} A \to A$.

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	$(A2)$
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	$(A1)$
3.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	$(\mathrm{MP}, 1, 2)$
4.	$A \to (A \to A)$	$(A1)$
5.	$A \to A$	$(\mathrm{MP}, 3, 4)$

□

定义4.5.2 一个公式序列

$$A_1, ..., A_n$$

是一个理论T的一个证明(proof), 如果每个A_i要么是命题逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由前面的公式通过推理规则(MP)得到的公式.

一个公式A是T的定理(theorem), 记为$T \vdash_{axiom} A$, 如果存在T的一个证明$A_1, ..., A_n$使得$A_n = A$.

记$Th(T) = \{A : T \vdash_{axiom} A\}$.

如果$T = \emptyset$则$Th(\emptyset)$称为命题演算.

命题4.5.3 对任何理论T,

$$Th(\emptyset) \subseteq Th(T).$$

□

这是命题逻辑的公理系统的单调性, 它由证明的定义直接得出.

定理4.5.4 命题演算的每个定理是逻辑永真的.

证明 类似地, 我们可以证明
- 每个公理是永真的;
- 推理规则是保永真的.

这里省略.

□

注意:
- 在自然推理系统中, $\Sigma \vdash A$称为矢列式(sequent);
- 在公理系统中, $\Sigma \vdash_{axiom} A$称为一个断言, 表示Σ(公理)推出A.

4.5.1 推理定理

推理定理连接了形式推理系统和公理系统.

定理4.5.5 (推理定理) 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$则$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

证明 设$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$的公理证明为:

$$C_1, ..., C_i (= B).$$

我们证明对每个$k \leq i, \Sigma \vdash_{axiom} A \to C_k$.

当$k = 1$. 则要么C_1是一个公理, 要么$C_1 \in \Sigma$, 要么$C_1 = A$.

如果C_1是一个公理, 或者$C_1 \in \Sigma$,则

$$C_1, C_1 \to (A \to C_1), A \to C_1$$

是Σ的一个公理证明, 因此, $\Sigma \vdash_{axiom} A \to C_1$.

如果$C_1 = A$ 则由例4.5.1, 有$\vdash_{axiom} A \to A$, 更有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to A$.

假设对每个$k' < k, \Sigma \vdash_{axiom} A \to C_{k'}$. 则

(1) C_k是一个公理, 或者

(2) $C_k \in \Sigma$, 或者

(3) $C_k = A$, 或者

(4) 存在$n, m < k$和公式D使得$C_n = D \to C_k$并且$C_m = D$.

由归纳假设, $\Sigma \vdash_{axiom} A \to (D \to C_k)$并且$\Sigma \vdash_{axiom} A \to D$. 前3种情况类似于$k = 1$的情况. 我们现在考虑第4种情况. 设公理证明分别为

$$\begin{array}{l} D_1, ..., D_r (= A \to (D \to C_k)); \\ E_1, ..., E_s (= A \to D). \end{array}$$

则

$$\begin{array}{l} D_1, ..., D_r, E_1, ..., E_s; \\ (A \to (D \to C_k)) \to ((A \to D) \to (A \to C_k)), \\ (A \to D) \to (A \to C_k), \\ A \to C_k \end{array}$$

是Σ的一个公理证明. 因此,$\Sigma \vdash_{axiom} A \to C_k$.

□

根据公理和MP的形式可推理性, 得到:

(1) 如果$\vdash_{axiom} A$ 则$\vdash A$.

(2) 如果$\Sigma \vdash_{axiom} A$则$\Sigma \vdash A$.

$$\begin{array}{lll} \Sigma \vdash_{axiom} A & \text{蕴涵} & \vdash_{axiom} \Sigma \to A \\ & \text{蕴涵} & \vdash \Sigma \to A \\ & \text{蕴涵} & \Sigma \vdash A. \end{array}$$

注意: 根据定义, 可以直接得到: 如果$\Sigma \vdash_{axiom} A$则存在一个有限的集合$\Sigma' \subseteq \Sigma$ 使得$\Sigma' \vdash_{axiom} A$.

定理4.5.6 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

证明 对形式推理$\Sigma \vdash A$的证明作结构归纳. 对证明的最后一步用到的形式推理规则分情况讨论.

$(\to^-)$: 假设$\Sigma \vdash B \to A$并且$\Sigma \vdash B$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在$B \to A$和B的Σ公理证明:

$$\begin{array}{l} C_1, ..., C_i(= B \to A), \\ D_1, ..., D_j(= B). \end{array}$$

则

$$C_1, ..., C_i = B \to A, D_1, ..., D_j = B, A.$$

$(\to^+)$: 假设$\Sigma, B \vdash C$并且$A = B \to C$,则$\Sigma \vdash A$. 由推理定理得出.

$(\neg^-)$ 假设$\Sigma, \neg A \vdash B$并且$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在$\neg A \to B$和$\neg A \to \neg B$的$\Sigma$公理证明:

$$\begin{array}{l} C_1, ..., C_i(= \neg A \to B), \\ D_1, ..., D_j(= \neg A \to \neg B). \end{array}$$

则

$$\begin{array}{l} C_1, ..., C_i = \neg A \to B, D_1, ..., D_j = \neg A \to \neg B, \\ (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A), \\ (\neg A \to \neg B) \to A, \\ A. \end{array}$$

是Σ的一个公理证明.

其它情况类似.

□

因此, 命题逻辑的自然推理系统与公理系统是等价的.

4.5.2 完备性定理

任给一个赋值v, 考虑公式集合

$$\Sigma_v = \{A : (A)^v = 1\}.$$

任给一个公式A, 有也仅有一个A或者$\neg A$在这集合中, 即

- 要么$A \in \Sigma_v$要么$\neg A \in \Sigma_v$;
- $A \in \Sigma_v$ 当且仅当$\neg A \notin \Sigma_v$.

定义4.5.7 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 记为con(Σ), 如果不存在公式A使得

$$\Sigma \vdash A \text{ 并且 } \Sigma \vdash \neg A.$$

等价地,

一个公式集合Σ是协调的, 如果对任何公式A,

$$\text{要么 } \Sigma \nvdash A \text{ 要么 } \Sigma \nvdash \neg A.$$

定义4.5.8 一个公式集合Σ是极大协调的(maximally consistent), 如果Σ是协调的, 并且对任何公式集合Σ', $\Sigma' \supset \Sigma$蕴涵Σ'是不协调的.

命题4.5.9 如果Σ是极大协调公式集合, 则对每个公式A, 要么

$$\Sigma \vdash A$$

要么

$$\Sigma \vdash \neg A.$$

例子: 任给一个赋值v, 集合$\Sigma_v = \{A : (A)^v = 1\}$是一个典型的极大协调公式集合.

我们将证明反之也然: 任给一个极大协调公式集合Σ, 存在唯一的赋值v使得

$$\Sigma = \Sigma_v.$$

引理4.5.10 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

证明 我们将所有公式排成一列:

$$A_0, A_1, ..., A_n, ...$$

对n作归纳定义, 定义

$$\Sigma_0 = \Sigma;$$
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n & \text{如果}\Sigma_n \vdash \neg A_n \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} & \text{否则.} \end{cases}$$

由归纳法, 我们可以证明: 对任何n, Σ_n是协调的, 并且

断言1. Σ^*是协调的.

证明 假设Σ^*不协调, 则存在一个公式A使得$\Sigma^* \vdash A$, 并且$\Sigma^* \vdash \neg A$.

由形式推理的有限性定理, 存在有限集合$\Sigma^0, \Sigma^1 \subseteq \Sigma^*$使得$\Sigma^0 \vdash A$, 并且$\Sigma^1 \vdash \neg A$.

则$\Sigma^0 \cup \Sigma^1$是不协调的有限公式集合. 存在一个n使得$\Sigma^0 \cup \Sigma^1 \subseteq \Sigma_n$, 并且$\Sigma_n$是不协调的. 矛盾.

□

断言2. 任给公式集合Σ, Σ'和公式A使得$\Sigma \subseteq \Sigma'$, 如果$\Sigma' \cup \{A\}$是协调的, 则$\Sigma \cup \{A\}$ 是协调的.

□

断言3. Σ^*是极大的.

证明 因为

$$A_0, A_1, ..., A_n, ...$$

是所有公式的排列.

任给一个公式$A \notin \Sigma^*$, 如果$\Sigma^* \cup \{A\}$是协调的, 设$A = A_n$, 则$\Sigma_n \cup \{A\}$是协调的, 并且$A \in \Sigma_{n+1}$, 因而$A \in \Sigma^*$, 矛盾.

□

□

定理4.5.11 任给一个极大协调公式集Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma.$$

则对任何公式A, $v(A) = 1$当且仅当$A \in \Sigma$.

证明 对A作结构归纳证明.

假设$A = p$是命题变元. 则由v的定义,

$$v(A) = v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma,$$

即$A \in \Sigma$.

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} v(A) = 1 \quad & \text{当且仅当} \quad v(B) = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \notin \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad \neg B \in \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad A \in \Sigma. \end{aligned}$$

注意: 第3个'当且仅当'利用了Σ的极大协调性.

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$\begin{aligned} v(A) = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad v(B) = 1\text{并且}v(C) = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \in \Sigma\text{并且}\neg C \in \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad B \to C \notin \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad A \notin \Sigma. \end{aligned}$$

注意: 第3个'当且仅当'利用了Σ的极大协调性.

□

定理4.5.12 (完备性定理) 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

证明 假设$\Sigma \models A$. 反证, 假设$\Sigma \nvdash A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的.

设Σ^*是包含Σ的极大协调集合. 则存在一个赋值v使得对每个$B \in \Sigma^*, v(B) = 1$, 即$v(\Sigma^*) = 1$.

则$v(\Sigma) = 1$并且$v(\neg A) = 1$. 与假设$\Sigma \models A$矛盾.

□

注意: (1) 证明不仅适合无穷的Σ, 同样适用于有限的Σ.

(2) 思考问题: 公理在完备性定理的证明的什么地方起作用了?

完备性定理证明模式为:

- 假设$\Sigma \models A$并且$\Sigma \nvdash A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的;
- 每个协调集合可以扩展为一个极大协调集合;
- 一个极大协调集合存在一个模型, 使得在模型下为真的公式集合正好是极大协调集合.

一个公式A称为是命题逻辑的一个定理, 如果$\vdash A$.

推论4.5.13 命题逻辑的定理是可判定的.

□

$\vdash A$当且仅当$\models A$. 即对所有的赋值v, $(A)^v = 1$. 后者是可判定的.

练习4.4:

1. 判定下列断言的真假:

(1) 空的公式集$\emptyset$是协调的;

(2) 如果Σ_1和Σ_2是协调的, 则$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$是协调的;

(3) 如果Σ_1和Σ_2是协调的, 则$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$是协调的;

(4) 如果Σ是协调的, 则$-\Sigma$是协调的, 其中$-\Sigma$是所有不在Σ中的公式的集合;

(5) 如果Σ_1和Σ_2是两个公式集合使得$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$,并且$\Sigma_2$是协调的, 则$\Sigma_1$是协调的;

(6) 如果Σ_1和Σ_2是两个公式集合使得$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$,并且$\Sigma_1$是协调的, 则$\Sigma_2$是协调的.

2. 证明: 任给两个极大协调公式集合Σ_1和Σ_2, 存在一个公式A使得

$$A \in \Sigma_1\text{并且}\neg A \in \Sigma_2.$$

3. 证明: 给定任何一个赋值v, 公式集合$\{A : (A)^v = 1\}$是极大协调的.

4. 给定一个极大协调公式集合Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1\text{当且仅当}p \in \Sigma;$$

则$\{A : (A)^v = 1\} = \Sigma$.

证明: 这样的赋值v是唯一的.

5. 完整写出命题逻辑的完备性定理的证明(极大协调公式集合的形式).

4.5.3 范式

我们下面简单介绍一下逻辑程序中的概念.

一个文字(literal)l是一个命题变元p或是一个命题变元的否定$\neg p$; 而一个子句(clause)s是有限多个文字的析取:

$$s = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n.$$

有限多个子句的合取组成一个理论(theory)$S = s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_m$.

对偶地, 一个项(term)t是有限多个文字的合取$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$. 而有限多个项的析取组成一个余理论(co-theory)$T = t_1 \vee t_2 \vee \cdots \vee t_m$.

一个公式A是一个析取范式(disjunctive normal form, DNF), 如果存在项$A_1, ..., A_n$使得

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n.$$

公式A是一个合取范式(conjunctive normal form, CNF), 如果存在子句$A_1, ..., A_n$使得

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n.$$

定义4.5.14 如果f是一个n-元函数使得$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, 则$f$称为真值函数.

一个真值函数f与一个公式A是等值的, 如果对每个$\{0,1\}$-数组$(x_1, ..., x_n)$,

$$f(x_1, ..., x_n) = (A)^v,$$

其中v是一个赋值定义为

$$(p_1)^v = x_1, ..., (p_n)^v = x_n,$$

其中$p_1, ..., p_n$是出现在A中的命题变元符号.

命题4.5.15 *每个真值函数等值于一个只包含$\neg, \vee$和$\wedge$的公式.*

证明 设$f(x_1, ..., x_n)$是一个n-元真值函数. 则f可以表示为一个2^n行的真假值表, 每一行是由$x_1, ..., x_n$和$f(x_1, ..., x_n)$的值组成. 我们用

$$x_1^i, ..., x_n^i, f(x_1^i, ..., x_n^i)$$

表示第i行的序对.

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	$\cdots$	0	$f(0, 0, ..., 0)$
0	0	$\cdots$	1	$f(0, 0, ..., 1)$
		$\vdots$		$\vdots$
x_1^i	x_2^i	$\cdots$	x_n^i	$f(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i)$
		$\vdots$		$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	$f(1, 1, ..., 1)$

对每个$1 \le i \le 2^n$, 定义

$$B_i = p_1^i \wedge p_2^i \wedge \cdots \wedge p_n^i,$$

其中对每个$1 \le j \le n$,

$$p_j^i = \begin{cases} p_j & 如果 x_j^i = 1 \\ \neg p_j & 如果 x_j^i = 0. \end{cases}$$

设

$$A = \bigvee_{i: f(x_1^i, ..., x_n^i) = 1} B_i$$

是所有使得$f(x_1^i, ..., x_n^i) = 1$行所对应的B_i的析取. 如果不存在这样的行, 则设$A = p_1 \wedge \neg p_1$.

断言. A是与f等值的.

证明 任给一个{0,1}-序列$(x_1, ..., x_n)$, 设相应的赋值为v. 存在唯一的i使得$(x_1, ..., x_n) = (x_1^i, ..., x_n^i)$.

则$(B_i)^v = 1$, 对任何$j \neq i$, $(B_j)^v = 0$.

如果$f(x_1, ..., x_n) = 1$ 则B_i是A 的一个析取子. 因此, $(A)^v = 1$;

如果$f(x_1, ..., x_n) = 0$ 则B_i不是A 的一个析取子. 由于所有A 的析取子在赋值v取假值, 因此, $(A)^v = 0$.

因此, A与f是等值的.

□

例4.5.16 设f定义为

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

则与f等值的公式为

$$A = (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2).$$

设f定义为

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1

则与f等值的公式为

$$\begin{aligned} A = \ & (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \\ & \vee(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3). \end{aligned}$$

□

推论4.5.17 *任给一个公式A, 存在一个析取范式B使得*

$$\models A \leftrightarrow B.$$

□

根据合取和析取符号的交换律、结合律、分配律以及De Morgen律, 我们可证明下列

定理4.5.18 *任给一个公式A, 存在一个合取范式B使得*

$$\models A \leftrightarrow B.$$

证明 对公式A作结构归纳法.
假设$A = p$是一个命题变元, 则A是合取范式.
假设$A = \neg C$并且假设结论对C成立. 设D是合取范式使得$\models C \leftrightarrow D$.
设

$$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2).$$

则

$$\begin{aligned} A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\ &\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \\ &\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \\ &\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \\ &\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2') \\ &\equiv (D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2'). \end{aligned}$$

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$. 则

$$\begin{aligned} A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\ &\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\ &\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\ &\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2') \\ &\equiv ((D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\ &\equiv ((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\ &\equiv (((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_1') \\ &\quad \wedge(((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_2') \\ &\equiv (D_1' \vee E_1' \vee F_1') \wedge (D_2' \vee E_1' \vee F_1') \wedge (D_1' \vee E_2' \vee F_1') \wedge (D_2' \vee E_2' \vee F_1')) \\ &\quad \wedge(D_1' \vee E_1' \vee F_2') \wedge (D_2' \vee E_1' \vee F_2') \wedge (D_1' \vee E_2' \vee F_2') \wedge (D_2' \vee E_2' \vee F_2'). \end{aligned}$$

一般地, 设$D = (D_{11} \vee \cdots \vee D_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nm_n})$. 则有

$$\begin{aligned} A &= \neg C \equiv \neg D \\ &= \neg[(D_{11} \vee \cdots \vee D_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nm_n})] \\ &\equiv \neg(D_{11} \vee \cdots \vee D_{1m_1}) \vee \cdots \vee \neg(D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nm_n}) \\ &\equiv (\neg D_{11} \wedge \cdots \wedge \neg D_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\neg D_{n1} \wedge \cdots \wedge \neg D_{nm_n}) \\ &\equiv \bigwedge_{\substack{f:n\to N \\ f(i)\le m_i}} \bigvee_{1\le j\le n} \neg D_{jf(j)}. \end{aligned}$$

假设$A = B \to C$并且假设结论对B, C成立. 设D, E是合取范式使得$\models B \leftrightarrow D, \models C \leftrightarrow E$.

$$\begin{aligned} A &= B \to C \\ &\equiv \neg B \vee C \\ &\equiv \neg(B \wedge \neg C). \end{aligned}$$

因为$\neg C$等价于一个合取范式, $B \wedge \neg C$等价于一个合取范式. 根据$A = \neg B$的情况, 我们得到: $\neg(B \wedge \neg C)$等价于一个合取范式.

$\square$

SAT问题: 给定一个合取范式A, 判定是否存在一个赋值v使得$(A)^v = 1$. SAT问题是典型的NP-完全性问题, 而析取范式的可满足性问题是多项式时间内可判定的. 由此我们得出: 从析取范式转换为合取范式的过程不是在多项式时间内能够完成的.

4.6 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_1$

设Γ, Δ是公式集合. $\Gamma \Rightarrow \Delta$称为一个矢列式, 其中

- $\Gamma = \{A_0, ..., A_n, ...\}$;
- $\Delta = \{B_0, ..., B_m, ...\}$.

如果$\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}, \Delta = \{B_1, ..., B_m\}$是有限的公式集合, 则$\Gamma \Rightarrow \Delta$意思为

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_m.$$

如果Γ, Δ是原子(文字)公式的集合, 则我们称$\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个原子(文字)矢列式.

定义4.6.1 给定一个赋值$v, \Gamma \Rightarrow \Delta$在$v$下满足, 记为$v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$v \models \Gamma$蕴含$v \models \Delta$, 其中

- $v \models \Gamma$ 如果对**每个**公式$A \in \Gamma, v \models A$;
- $v \models \Delta$ 如果对**某个**公式$B \in \Delta, v \models B$.

等价地, $v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果要么$v \not\models \Gamma$要么$v \models \Delta$, 其中

- $v \not\models \Gamma$ 如果对**某个**公式$A \in \Gamma, v(A) = 0$;

• $v \models \Delta$ 如果对**某个**公式$B \in \Delta, v(B) = 1$.

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何赋值$v$,

$$v \models \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

比如, $A, B, C \Rightarrow C, D, E$是一个矢列式, 并且对任何赋值$v$,

$$v \models A, B, C \Rightarrow C, D, E.$$

因此, $\models A, B, C \Rightarrow C, D, E$.

4.6.1 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_1$

通过Gentzen推理系统, 我们将定义$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, 使得下列性质成立:

• 可靠性: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$;

• 完备性: $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_1$由下列公理和推理规则组成[11,12].

• **公理**:

$$\frac{\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ 是命题变元的集合.

• **推理规则**:

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg B, \Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

定义4.6.2 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是可证的, 记为$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ 使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{G}_1$中的一个推理规则得到的.

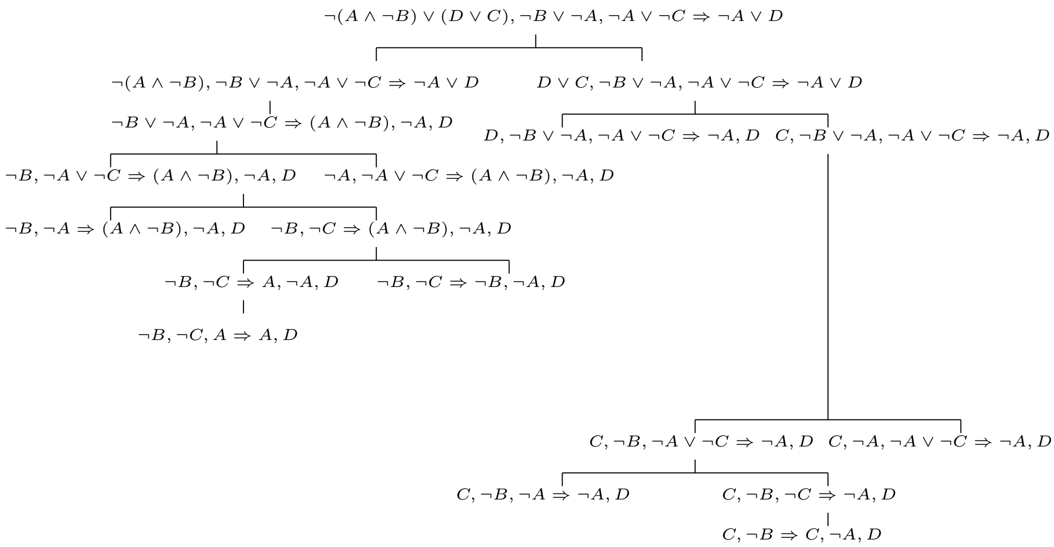
例4.6.3 证明: $\vdash \neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$.

证明

$$
\begin{array}{l}
\neg(A\wedge\neg B)\vee(D\vee C),\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A\vee D;\\
\left\{\begin{array}{l}
(100)\ \neg(A\wedge\neg B),\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A\vee D\\
(200)\ (D\vee C),\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A\vee D;
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
(100)\ \neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow(A\wedge\neg B),\neg A,D\\
\left\{\begin{array}{l}
(300)\ D,\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D\\
(400)\ C,\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D;
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
(110)\ \neg B,\neg A\vee\neg C\Rightarrow(A\wedge\neg B),\neg A,D\\
o(120)\ \neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow(A\wedge\neg B),\neg A,D
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
o(310)\ D,\neg B,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D\\
o(320)\ D,\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
(410)\ C,\neg B,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D\\
o(420)\ C,\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A,D;
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
o(111)\ \neg B,\neg A\Rightarrow(A\wedge\neg B),\neg A,D\\
(112)\ \neg B,\neg C\Rightarrow(A\wedge\neg B),\neg A,D
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
o(411)\ C,\neg B,\neg A\Rightarrow\neg A,D\\
(412)\ C,\neg B,\neg C\Rightarrow\neg A,D;
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
(112)_1\ \neg B,\neg C\Rightarrow A,\neg A,D\\
o(112)_2\ \neg B,\neg C\Rightarrow\neg B,\neg A,D
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
o(311)\ D,\neg B,\neg A\Rightarrow\neg A,D;\\
o(312)\ C,\neg B\Rightarrow C,\neg A,D;
\end{array}\right.\\
o(112)_2\ \neg B,\neg C,A\Rightarrow A,D.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

其中大括号表示分叉, o表示为公理.

上面的推理可以表示为下面的推理树:



□

Gentzen推理系统的证明是通过逻辑连接词的左右规则, 将一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$中的逻辑连接词消除, 得到命题变元组成的原子矢列式, 然后判定这些原子矢列式是否是公理; 如果均是公理, 那么给定的矢列式是可证的; 否则给定的矢列式不是可证的. 因此, Gentzen推理系统的特点是容易找到证明, 但情况组合很多.

4.6.2 可靠性定理

定理4.6.4 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性.

(**A**) 假设$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. 设$p$是一个命题变元使得$p \in \Gamma \cap \Delta$. 则对任何赋值$v$, 假设$v \models \Gamma$. 则$v \models p$, 因而, $v \models \Delta$.

($\neg^L$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow A, \Delta$. 则对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$则$v \models A, \Delta$. 对任何赋值$w$, 假设$w \models \Gamma, \neg A$. 则$w \models \Gamma$, 由归纳假设, $w \models A, \Delta$. 因为$w \not\models A, w \models \Delta$.

($\neg^R$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, B \Rightarrow \Delta$. 对任何赋值$w$, 假设$w \models \Gamma$. 则存在两种情况: (i) $v \models B$. 由归纳假设, $v \models \Delta$, 因而, $v \models \neg B, \Delta$; (ii) $v \not\models B$. 则, $v \models \neg B$, 因而, $v \models \neg B, \Delta$.

($\wedge_1^L$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma, A_1 \wedge A_2$ 则$v \models \Gamma, A_1$, 由归纳假设, $v \models \Delta$. 类似地讨论情况($\wedge_2^L$).

($\wedge^R$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta$ 并且$v \models \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$ 则存在两种情况: (i) $v \not\models B_1$或者$v \not\models B_2$. 由归纳假设, $v \models \Delta$; (ii) $v \models B_1$ 并且$v \models B_2$. 则, $v \models B_1 \wedge B_2$, 因而, $v \models B_1 \wedge B_2, \Delta$.

($\vee^L$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta$ 并且$v \models \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma, A_1 \vee A_2$ 则$v \models \Gamma$ 且$v \models A_1 \vee A_2$. 存在两种情况: 如果$v \models A_1$ 则由归纳假设, $v \models \Delta$; 并且如果$v \models A_2$ 则由归纳假设, $v \models \Delta$.

($\vee_1^R$) 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$则由假设, $v \models B_1, \Delta$. 存在两种情况: (i) $v \models B_1$, 则$v \models B_1 \vee B_2$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$; (ii) $v \models \Delta$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$. 类似地讨论情况($\vee_2^R$).

□

4.6.3 完备性定理

为了证明完备性定理, 给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 我们将$\Gamma, \Delta$中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式.

- 如果每个原子矢列式是一个公理, 那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明;
- 如果存在某个矢列式不是一个公理, 那么我们可以构造一个赋值v是$v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

直观地,

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \quad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$
$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

变成

$$(\wedge^L)\ \frac{\Gamma, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \quad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

图示如下:

$$\begin{array}{c} \Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta \\ | \\ \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta & & \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta \end{array}$$

直观地,

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \quad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$
$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

变成

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \quad (\vee^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

图示如下:

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma, A_1 \vee A_2, \Delta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta & & \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2 \Rightarrow \Delta \\ | \\ \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta \end{array}$$

定理4.6.5 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 我们将构造一个树T 使得

• 要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树, 即每个叶节点上至少有一个矢列式是公理;

• 要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

任给一个T上的节点$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

情况 ($\neg^L$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma'', \neg A \Rightarrow \Delta'$. 设

$$\Gamma'' \Rightarrow A, \Delta'$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.

情况 ($\neg^R$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma' \Rightarrow \neg B, \Delta''$. 设

$$\Gamma', B \Rightarrow \Delta''$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.

情况 ($\wedge^L$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma'', A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta'$. 设

$$\Gamma'', A_1, A_2 \Rightarrow \Delta'$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点

情况 ($\wedge^R$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma' \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta''$. 设

$$\Gamma' \Rightarrow B_1, \Delta''; \Gamma' \Rightarrow B_2, \Delta''$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的两个直接子节点

情况 ($\vee^L$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma'', A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta'$. 设

$$\Gamma'', A_1 \Rightarrow \Delta'; \Gamma'', A_2 \Rightarrow \Delta'$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的两个直接子节点

情况 ($\vee^R$). $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma' \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta''$. 设

$$\Gamma' \Rightarrow B_1, B_2, \Delta''$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点

如果T的每个叶节点是一个公理则很容易证明T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树;

否则, 设γ为一个T的树枝使得其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个赋值v 使得每个γ上的矢列式是不满足的.

设$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$为$\gamma$的叶节点. 则$\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$. 定义$v$ 如下: 对任何命题变元p,

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{如果} p \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

则v 是良定的, 因为$\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$; 并且$v \not\models \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, 因为$v \models \Gamma_0$ 并且$v \not\models \Delta_0$.

对任何$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \gamma$, 假设$v \not\models \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. 如果$\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$; 否则, 存在一个$\Gamma'' \Rightarrow \Delta'' \in \gamma$ 使得$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 是一个$\Gamma'' \Rightarrow \Delta''$的子节点. $\Gamma'' \Rightarrow \Delta''$有下列情形.

情况 1. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, B \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1 \Rightarrow \neg B, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1, B \Rightarrow \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1, B$ 并且$v \not\models \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1, v \not\models \neg B, \Delta_1$.

情况 2. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1, \neg A \Rightarrow \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1$ 并且$v \not\models A, \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma, v \models \neg A$, 并且$v \not\models \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1, \neg A$ 并且$v \not\models \Delta_1$.

情况 3. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1, A_1, A_2$ 并且$v \not\models \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1, A_1 \wedge A_2$, 并且$v \not\models \Delta$.

情况 4. 存在一个$i \in \{1, 2\}$ 使得

$$\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow B_i, \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1 \Rightarrow B_i, \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1$ 并且$v \not\models B_i, \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1$, 并且$v \not\models B_1 \wedge B_2, \Delta$.

情况 5. 存在一个$i \in \{1, 2\}$使得

$$\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, A_i \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1, A_i \Rightarrow \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1, A_i$, 并且$v \not\models \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1, A_1 \vee A_2$, 并且$v \not\models \Delta$.

情况 6. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow B_1, B_2, \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1 \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1 \Rightarrow B_1, B_2, \Delta_1$, 即, $v \models \Gamma_1$, 并且$v \not\models B_1, B_2, \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1$, 并且$v \not\models B_1 \vee B_2, \Delta$.

□

由完备性定理的证明, 我们得到如下的

推论4.6.6 *命题逻辑是可判定的, 即存在一个算法判定任给一个有限矢列式公式是否是命题逻辑的定理.*

证明 由证明树T的构造可以看出: 由于出现在一个给定的矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$中的逻辑连接词是有限的; 而每一步消除一个连接词. 因此, 有限步内构造停止.

如果每个叶节点上的矢列式是一个公理, 则给定的矢列式是一个定理, 否则不是.

□

因此, 树的构造过程就是一个判定过程.

4.7 表式证明系统

表式证明系统是对永真的公式进行的推理.

矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 即$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 当且仅当对任何赋值$v, v(\bigwedge \Gamma) = 1$蕴含$v(\bigvee \Delta) = 1$, 当且仅当对任何赋值$v$, 要么$v(\bigwedge \Gamma) = 0$要么$v(\bigvee \Delta) = 1$.

当$\Gamma = \emptyset$时, $\Rightarrow \Delta$是有效的, 当且仅当对任何赋值$v, v(\bigvee \Delta) = 1$, 当且仅当$\bigvee \Delta$是永真的; 当$\Delta = \emptyset$时, $\Gamma \Rightarrow$是有效的, 当且仅当对任何赋值$v, v(\bigwedge \Gamma) = 0$, 当且仅当$\bigwedge \Gamma$是永假的.

由于我们不能将$\neg A$的判定移动到右边(或者将$\neg B$的判定移动到左边), 我们需要将$\mathbf{G}_1$转换成下列等价的形式:

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_1'$由下列公理和推理规则组成.

- **公理**:

$$\frac{\text{incon}(\Gamma) \text{ or } \text{incon}(\Delta) \text{ or } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ 是文字的集合.

- **推理规则**:

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\neg^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg B, \Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\neg\wedge^L)\ \frac{\Gamma, \neg A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\wedge_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\neg\wedge_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\neg\vee_1^L)\ \frac{\Gamma, \neg A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\vee^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \neg B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(B_1 \vee B_2), \Delta}$$

$$(\neg\vee_2^L)\ \frac{\Gamma, \neg A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow \Delta}$$

这样, 左右规则分别构成了两个表式证明系统, 他们分别关于永真公式和永假公式是可靠的和完备的.

4.7.1 表式证明系统$\mathbf{T}_1$

矢列式$\Gamma \Rightarrow$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$, 如果对任何赋值$v$, 存在一个公式$A \in \Gamma$使得$v(A) = 0$.

表式证明系统$\mathbf{T}_1$由下列公理和推理规则组成.

- **公理**:

$$\frac{\mathbf{E}l(l, \neg l \in \Gamma)}{\Gamma \Rightarrow},$$

其中Γ是文字的集合.

- 推理规则:

$$(\neg\neg)\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma, \neg\neg A \Rightarrow}$$

$$(\wedge_1)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow} \qquad (\neg\wedge)\ \frac{\Gamma, \neg A_1 \Rightarrow \quad \Gamma, \neg A_2 \Rightarrow}{\Gamma, \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow}$$

$$(\wedge_2)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow}$$

$$(\vee)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow} \qquad (\neg\vee_1)\ \frac{\Gamma, \neg A_1 \Rightarrow}{\Gamma, \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow}$$

$$(\neg\vee_2)\ \frac{\Gamma, \neg A_2 \Rightarrow}{\Gamma, \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow}$$

定义4.7.1 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$ 是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \Rightarrow, ..., \Gamma_n \Rightarrow$ 使得$\Gamma_n \Rightarrow = \Gamma \Rightarrow$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{T}_1$中的一个推理规则得到的.

4.7.2 可靠性定理和完备性定理

定理4.7.2 (可靠性定理) *对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 如果$\vdash_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$ 则$\models_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$.*

证明 我们证明每个公理是永假的以及每个推理规则保持永假性.

($\mathbf{A}$) 假设p是一个命题变元使得$p, \neg p \in \Gamma$. 则对任何赋值v, $v \not\models \Gamma$.

($\neg\neg$) 假设对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, A$. 则对任何赋值$v$, $v \not\models \Gamma, \neg\neg A$.

($\wedge_i$) 假设对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, A_i$. 则, 对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, A_1 \wedge A_2$.

($\neg\wedge$) 假设对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, \neg A_1$, 并且$v \not\models \Gamma, \neg A_2,$. 则, 对任何赋值$v$, $v \not\models \Gamma, \neg(A_1 \wedge A_2)$.

($\vee$) 假设对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, A_1$ 并且$v \not\models \Gamma, A_2$. 则, 对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, A_1 \vee A_2$.

($\neg\vee_i$) 假设对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, \neg A_i$. 则, 对任何赋值$v, v \not\models \Gamma, \neg(A_1 \vee A_2)$.

□

为了证明完备性定理, 给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 我们将Γ中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式.

- 如果每个原子矢列式是一个公理, 那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明;
- 如果存在某个矢列式不是一个公理, 那么我们可以构造一个赋值v是$v \models \Gamma$.

定理4.7.3 (完备性定理) *对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 如果$\models_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$ 则$\vdash_{\mathbf{T}_1} \Gamma \Rightarrow$.*

证明 我们将构造一个树T 使得

- 要么T 是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树, 即每个叶节点上至少有一个矢列式是公理;

• 要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是满足的.

任给一个T上的节点$\Gamma' \Rightarrow$.

情况 $(\neg\neg)$. $\Gamma' = \Gamma'', \neg\neg A$. 设

$$\Gamma'', A \Rightarrow$$

为$\Gamma' \Rightarrow$的一个直接子节点.

情况 $(\wedge^L)$. $\Gamma' = \Gamma'', A_1 \wedge A_2$. 设

$$\Gamma'', A_1, A_2 \Rightarrow$$

为$\Gamma' \Rightarrow$的一个直接子节点

情况 $(\neg\wedge)$. $\Gamma' = \Gamma'', \neg(A_1 \wedge A_2)$. 设

$$\Gamma'', \neg A_1 \Rightarrow; \Gamma'', \neg A_2 \Rightarrow$$

为$\Gamma' \Rightarrow$的两个直接子节点

情况 $(\vee)$. $\Gamma' = \Gamma'', A_1 \vee A_2$. 设

$$\Gamma'', A_1 \Rightarrow; \Gamma'', A_2 \Rightarrow$$

为$\Gamma' \Rightarrow$的两个直接子节点

情况 $(\neg\vee)$. $\Gamma' = \Gamma'', \neg(A_1 \vee A_2)$. 设

$$\Gamma'', \neg A_1, \neg A_2 \Rightarrow$$

为$\Gamma' \Rightarrow$的一个直接子节点

如果T的每个叶节点是一个公理则很容易证明T 是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树;

否则, 设γ为一个T的树枝其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个赋值v使得每个γ上的矢列式是满足的.

设$\Gamma_0 \Rightarrow$为γ的叶节点. 则不存在命题变元p使得$p, \neg p \in \Gamma_0$. 定义v 如下: 对任何命题变元p,

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{如果} p \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

则v 是良定的, 并且$v \models \Gamma_0$.

对任何$\Gamma' \Rightarrow \in \gamma$, 假设$v \models \Gamma' \Rightarrow$. 如果$\Gamma' \Rightarrow = \Gamma \Rightarrow$ 则$\not\models \Gamma \Rightarrow$; 否则, 存在一个$\Gamma'' \Rightarrow \in \gamma$ 使得$\Gamma' \Rightarrow$ 是一个$\Gamma'' \Rightarrow$的子节点. $\Gamma'' \Rightarrow$有下列情形.

情况 1. $\begin{cases} \Gamma' = \Gamma_1, A \\ \Gamma'' = \Gamma_1, \neg\neg A. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \models \Gamma_1, A$. 因此, $v \models \Gamma_1, \neg\neg A$.

情况 2. $\begin{cases} \Gamma' = \Gamma_1, A_1, A_2 \\ \Gamma'' = \Gamma_1, A_1 \wedge A_2. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \models \Gamma_1, A_1, A_2$. 因此, $v \models \Gamma_1, A_1 \wedge A_2$.

情况 3. 存在一个$i \in \{1,2\}$ 使得

$$\begin{cases} \Gamma' = \Gamma_1, \neg A_i \\ \Gamma'' = \Gamma_1, \neg(A_1 \wedge A_2). \end{cases}$$

由归纳假设, $v \models \Gamma_1, \neg A_i$. 因此, $v \models \Gamma_1, \neg(A_1 \wedge A_2)$.

情况 4. 存在一个$i \in \{1,2\}$使得

$$\begin{cases} \Gamma' = \Gamma_1, A_i \\ \Gamma'' = \Gamma_1, A_1 \vee A_2. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \models \Gamma_1, A_i$. 因此, $v \models \Gamma_1, A_1 \vee A_2$.

情况 5. $\begin{cases} \Gamma' = \Gamma_1, \neg A_1, \neg A_2 \\ \Gamma'' = \Gamma_1, \neg(A_1 \vee A_2). \end{cases}$ 由归纳假设, $v \models \Gamma_1, \neg A_1, \neg A_2$. 因此, $v \models \Gamma_1, \neg(A_1 \vee A_2)$.

□

4.7.3 表式证明系统$\mathbf{S}_1$

矢列式$\Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{S}_1} \Rightarrow \Delta$, 如果对任何赋值$v$, 存在一个公式$B \in \Delta$使得$v(B) = 1$.

表式证明系统$\mathbf{S}_1$由下列公理和推理规则组成.

- 公理:

$$\frac{\mathbf{E}l(l, \neg l \in \Delta)}{\Rightarrow \Delta},$$

其中, Δ 是文字的集合.

- 推理规则:

$$(\neg\neg)\ \frac{\Rightarrow B, \Delta}{\Rightarrow \neg\neg B, \Delta}$$

$$(\wedge)\ \frac{\Rightarrow B_1, \Delta \quad \Rightarrow B_2, \Delta}{\Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta} \qquad (\neg\wedge_1)\ \frac{\Rightarrow \neg B_1, \Delta}{\Rightarrow \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\neg\wedge_2)\ \frac{\Rightarrow \neg B_2, \Delta}{\Rightarrow \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\vee_1)\ \frac{\Rightarrow B_1, \Delta}{\Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta} \qquad (\neg\vee)\ \frac{\Rightarrow \neg B_1, \Delta \quad \Rightarrow \neg B_2, \Delta}{\Rightarrow \neg(B_1 \vee B_2), \Delta}$$

$$(\vee_2)\ \frac{\Rightarrow B_2, \Delta}{\Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

直观地, $(\wedge)$称如果$B_1 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 并且$B_2 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 则$(B_1 \wedge B_2) \vee \bigvee \Delta$是永真的; $(\vee)$称如果$B_1 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 或者$B_2 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 则$(B_1 \vee B_2) \vee \bigvee \Delta$是永真的. 对偶地, $(\neg\wedge)$称如果$\neg B_1 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 或者$\neg B_2 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 则$\neg(B_1 \wedge B_2) \vee \bigvee \Delta$是永真的; $(\neg\vee)$称如果$\neg B_1 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 并且$\neg B_2 \vee \bigvee \Delta$是永真的, 则$\neg(B_1 \vee B_2) \vee \bigvee \Delta$是永真的.

定义4.7.4 一个矢列式$\Rightarrow \Delta$ 是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{S}} \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Rightarrow \Delta_1, ..., \Rightarrow \Delta_n$ 使得$\Rightarrow \Delta_n == \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Rightarrow \Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过一个推理规则得到的.

4.7.4 可靠性定理和完备性定理

定理4.7.5 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash \Rightarrow_{\mathbf{S}_1} \Delta$ 则$\models \Rightarrow_{\mathbf{S}_1} \Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性.

(**A**) 假设p是一个命题变元使得$p, \neg p \in \Delta$. 则对任何赋值v, 要么$v \models p$要么$v \models \neg p$. 因而, 对任何赋值$v, v \models \Delta$.

($\neg\neg$) 假设对任何赋值$v, v \models \Rightarrow B, \Delta$. 则对任何赋值$v$, 如果$v \models \Delta$, 则$v \models \neg\neg B, \Delta$. 否则, $v \models B$, 并且$v \models \neg\neg B$, 因而, $v \models \neg\neg B, \Delta$.

($\wedge$) 假设对任何赋值$v, v \models \Rightarrow B_1, \Delta$ 并且$v \models \Rightarrow B_2, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 存在两种情况: (i) $v \not\models B_1$或者$v \not\models B_2$. 由归纳假设, $v \models \Delta$; (ii) $v \models B_1$ 并且$v \models B_2$. 则, $v \models B_1 \wedge B_2$, 因而, $v \models B_1 \wedge B_2, \Delta$.

($\vee_1$) 假设对任何赋值$v, v \models \Rightarrow B_1, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 存在两种情况: (i) $v \models B_1$, 则$v \models B_1 \vee B_2$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$; 且(ii) $v \models \Delta$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$.

($\neg\wedge_1$) 假设对任何赋值$v, v \models \Rightarrow \neg B_1, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 存在两种情况: (i) $v \models \neg B_1$, 则$v \models \neg(B_1 \wedge B_2)$, 因而, $v \models \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta$; 且(ii) $v \models \Delta$, 因而, $v \models \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta$.

($\neg\vee$) 假设对任何赋值$v, v \models \Rightarrow \neg B_1, \Delta$ 并且$v \models \Rightarrow \neg B_2, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 存在两种情况: (i) $v \not\models \neg B_1$ 要么$v \not\models \neg B_2$. 由归纳假设, $v \models \Delta$; (ii) $v \models \neg B_1$ 并且$v \models \neg B_2$. 则, $v \models \neg(B_1 \vee B_2)$, 因而, $v \models \neg(B_1 \vee B_2), \Delta$.

$\square$

为了证明完备性定理, 给定一个矢列式$\Rightarrow \Delta$, 我们将Δ中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式.

- 如果每个原子矢列式是一个公理, 那么分解过程反过来是$\Rightarrow \Delta$的一个证明;
- 如果存在某个矢列式不是一个公理, 那么我们可以构造一个赋值v是$v \not\models \Delta$.

定理4.7.6 (完备性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow \Delta$, 如果$\models_{\mathbf{S}_1} \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash \Rightarrow_{\mathbf{S}_1} \Delta$.

证明 我们将构造一个树T 使得

• 要么T 是$\Rightarrow \Delta$的一个证明树, 即每个叶节点上至少有一个矢列式是公理;

• 要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

任给一个T上的节点$\Rightarrow \Delta'$.

情况 ($\neg\neg$). $\Delta' = \neg\neg B, \Delta''$. 设

$$\Rightarrow B, \Delta''$$

为$\Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.

情况 ($\wedge$). $\Delta' = B_1 \wedge B_2, \Delta''$. 设

$$\Rightarrow B_1, \Delta''; \Rightarrow B_2, \Delta''$$

为$\Rightarrow \Delta'$的两个直接子节点

情况 $(\neg\wedge)$. $\Delta' = \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta''$. 设

$$\Rightarrow \neg B_1, \neg B_2, \Delta''$$

为$\Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点

情况 $(\vee^R)$. $\Delta' = B_1 \vee B_2, \Delta''$. 设

$$\Rightarrow B_1, B_2, \Delta''$$

为$\Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点

情况 $(\neg\vee)$. $\Delta' = \neg(B_1 \vee B_2), \Delta''$. 设

$$\Rightarrow \neg B_1, \Delta''; \Rightarrow \neg B_2, \Delta''$$

为$\Rightarrow \Delta'$的两个直接子节点

如果T的每个叶节点是一个公理则很容易证明T 是$\Rightarrow \Delta$的一个证明树;

否则, 设γ为一个T的树枝其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个赋值v使得每个γ上的矢列式是不满足的.

设$\Rightarrow \Delta_0$为γ的叶节点. 则不存在文字l使得$l, \neg l \in \Delta_0$. 定义v 如下: 对任何命题变元p,

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{如果}\neg p \in \Delta_0 \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

则v 是良定的, 因为不存在文字l使得$l, \neg l \in \Delta_0$; 并且$v \not\models \Rightarrow \Delta_0$, 因为$v \not\models \Delta_0$.

对任何$\Rightarrow \Delta' \in \gamma$, 假设$v \not\models \Rightarrow \Delta'$. 如果$\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \Delta$ 则$\not\models \Rightarrow \Delta$; 否则, 存在一个$\Rightarrow \Delta'' \in \gamma$ 使得$\Rightarrow \Delta'$ 是一个$\Rightarrow \Delta''$的子节点. $\Rightarrow \Delta''$有下列情形.

情况 1. $\begin{cases} \Rightarrow \Delta' = \Rightarrow B, \Delta_1 \\ \Rightarrow \Delta'' = \Rightarrow \neg\neg B, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Rightarrow B, \Delta_1$. 因此, $v \not\models \neg\neg B, \Delta_1$.

情况 2. 存在一个$i \in \{1, 2\}$ 使得

$$\begin{cases} \Rightarrow \Delta' = \Rightarrow B_i, \Delta_1 \\ \Rightarrow \Delta'' = \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \not\models \Rightarrow B_i, \Delta_1$. 因此, $v \not\models B_1 \wedge B_2, \Delta$.

情况 3. $\begin{cases} \Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \neg B_1, \neg B_2, \Delta_1 \\ \Rightarrow \Delta'' = \Rightarrow \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Rightarrow \neg B_1, \neg B_2, \Delta_1$. 因此, $v \not\models \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta$.

情况 4. $\begin{cases} \Rightarrow \Delta' = \Rightarrow B_1, B_2, \Delta_1 \\ \Rightarrow \Delta'' = \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Rightarrow B_1, B_2, \Delta_1$. 因此, $v \not\models B_1 \vee B_2, \Delta$.

情况 5. 存在一个$i \in \{1, 2\}$使得

$$\begin{cases} \Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \neg B_i, \Delta_1 \\ \Rightarrow \Delta'' = \Rightarrow \neg(B_1 \vee B_2), \Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \not\models \Rightarrow \neg B_i, \Delta_1$. 因此, $v \not\models \neg(B_1 \vee B_2), \Delta$.

□

我们可以看出: Gentzen推理系统是表式证明系统$\mathbf{T}_1$和$\mathbf{S}_1$的组合, 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{S}_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta &= \Gamma \Rightarrow \oplus \Rightarrow \Delta. \end{aligned}$$

4.8 本章总结

命题逻辑的3个证明系统比较如下:

系统	公理个数	推理规则数量	机械性
公理系统	多	少	低
自然系统	中	中	中
Gentzen**系统**	少	多	高

自然推理系统与Gentzen推理系统之间的规则对应:

自然	Gentzen	自然	Gentzen
(ref)	$(\mathbf{A})$	$(+)$	
$(\neg^-)$			
$(\to^-)$		$(\to^+)$	$(\to^R)$
$(\wedge^-)$		$(\wedge^+)$	$(\wedge^L)$
$(\vee^-)$	$(\vee^L)$	$(\vee^+)$	$(\vee^L)$
$(\leftrightarrow^-)$		$(\leftrightarrow^+)$	$(\leftrightarrow^R)$

一个形式逻辑$\mathcal{L}$通常是由下列部分组成:

1. 一个可数集合的符号作为$\mathcal{L}$的符号(形式系统的语言).
2. $\mathcal{L}$表达式集合的子集, 称为$\mathcal{L}$的良定公式集合.
3. $\mathcal{L}$良定公式的子集, 称为$\mathcal{L}$的公理集合.
4. 良定公式上的有限多个推理规则.

一个$\mathcal{L}$证明是一个良定公式的序列$A_1, A_2, ..., A_n$使得对每个i, 要么A_i是$\mathcal{L}$的公理, 要么A_i是前面若干个良定公式由推理规则得到的.

一个$\mathcal{L}$良定公式A是$\mathcal{L}$的一个定理, 如果存在一个$\mathcal{L}$证明$A_1, A_2, ..., A_n$ 使得$A = A_n$.

命题逻辑定理的基本性质包括

- 定理的否定不是定理; 命题逻辑的定理集合是一个协调集合;
- 存在一个公式使得该公式和其否定都不是定理. 因此, 命题逻辑的定理集合不是极大协调集合;
- 定理的集合是可判定的.

参考文献:

[1] Merricks T. *Propositions*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2015.

[2] Iacona A. *Propositions*[M]. Genoa, Italy, 2002.

[3] Quine W.V. *Philosophy of Logic*[M]. NJ USA: Prentice-Hall, 1970.

[4] Sowa J.F. *Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations*[M]. Brooks/Cole: New York, 2000.

[5] Gale R.M. *The Blackwell Guide to Metaphysics*[M]. Oxford: Blackwell, 2002.

[6] Whitesitt J.E. *Boolean algebra and its applications*[M]. Courier Dover Publications, 1995.

[7] 胡世华, 陆钟万. 数理逻辑基础[M]. 科学出版社, 1982.

[8] Chiswell I., Hodges W. *Mathematical Logic*[M]. Oxford Texts in Logic 3, 2007

[9] Curry H.B. *Foundations of Mathematical Logic*[M]. Dover Pub. Inc., New York, 1977.

[10] Hamilton A.G. *Logic for Mathematicians*[M]. revised edition, Cambridge Univ. Press, 1988; 清华大学出版社, 2003.

[11] Li W. *Mathematical Logic, Foundations for Information Science*[M]. Progress in Computer Science and Applied Logic, vol.25, Birkhäuser, 2010.

[12] Takeuti G. Proof Theory [M]. Dove Books on Mathematics, 1977.

第五章5

谓词逻辑

谓词逻辑(predicate logic)也称一阶逻辑(first-order logic). 在一个集合中, 我们通常假定元素是不可分的, 因而元素称为一阶对象; 由一阶对象组成的集合称为二阶对象; 由二阶对象组成的集合称为三阶对象; 如此下去; n-阶对象是$(n-1)$-阶对象的集合. 谓词逻辑的被形式化对象是代数结构[1], 而反过来, 代数结构又构成了谓词逻辑的语义.

5.1 谓词逻辑的被形式化对象

在命题逻辑中命题变元解释为自然语言中的命题. 比如下列两个命题

张三是高的, 并且
张三是胖的.

在命题逻辑中我们没有办法区分出是关于同一个人的断言; 而在下面两个命题中

张三是高的, 并且
李四是高的.

在命题逻辑中我们没有办法区分出是两个人关于同一个性质的断言.

命题逻辑中的推理是基于逻辑连接词的. 比如

$$\frac{\text{张三是高的} \quad \text{张三是胖的}}{\text{张三是高的}} \qquad \frac{\text{张三是高的} \quad \text{张三是胖的}}{\text{张三是胖的}}.$$

逻辑推理不仅仅是基于连接词的推理. 比如, 在

$$\frac{\text{人总有一死} \quad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底总有一死}}.$$

中, 如果表示为命题逻辑的公式, 三个句子表示均为命题变元, 而命题变元之间是不存在命题逻辑推理关系的.

但是, 上面却是一个有效的推理. 这里我们利用了量词进行推理.

量词(quantifiers)包括: *所有*, *每个*,*大部分*, *存在至少n个*, *存在至多n个*, *存在一个*, *小部分*, *没有一个*等等.

在谓词逻辑中量词是逻辑的(logical), 如同逻辑连接词在命题逻辑中是逻辑的一样.

谓词逻辑被形式化的对象为*代数结构*. 代数结构是一个论域(非空的集合)和该论域上的一些函数和关系所组成的, 其中论域中的元素简称为元素, 并且我们假定: 元素是不再可分的, 是独立的, 即其存在性不依赖于其它对象的存在. 比如*父子关系*中的儿子不是独立的.

代数学中研究的代数结构大部分来之于我们在中学学的自然数、整数、实数和复数组成的代数结构.

5.1.1 自然数结构

设所有自然数组成的论域, 记为N, 其中

- 有一个特定的元素(个体)0;
- 有一个一元函数s(也表示为 $'$);
- 有一个相等关系$=$.

记$\mathbf{N} = (N, 0, s, =)$为自然数的结构.

Dedekind在1879年提出了一个数论的半公理系统, Peano修改为如下5条公理:

(P1) 0是一个自然数;

(P2) 如果x是一个自然数, 存在另一个自然数, 记为x' (称为x的后继);

(P3) 对任何自然数x, $x' \neq 0$;

(P4) 如果$x' = y'$则$x = y$;

(P5) 如果Q是一个性质使得对任意给定的自然数它可以成立也可以不成立, 并且,如果(i) 0具有性质Q, 并且(ii) 一个自然数x具有性质Q蕴含x'具有性质Q, 则所有自然数具有性质Q.

借助于一元函数s, 我们可以递归地定义二元函数: $+, \times$.

$$\begin{cases} x + 0 = x; \\ x + y' = (x + y)'. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \times 0 = 0; \\ x \times y' = x \times y + x. \end{cases}$$

加法和乘法具有下列的代数性质:

- 结合律:

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$
$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$

- 交换律:

$$x + y = y + x;$$
$$x \times y = y \times x.$$

- 分配律:

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z;$$
$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z.$$

5.1.2 整数的结构

设所有的整数的集合为Z, 其中
- 有一个特定的元素(个体)0;
- 有一个一元函数$-$;
- 有两个二元函数$+, \times$;
- 有一个相等关系$=$.

记$\mathbf{Z} = (Z, 0, -, +, \times, =)$为整数结构.

整数具有的代数性质有:
- 对所有的整数x, y, z,

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \qquad \text{(加法结合律)};$$

- 对每个整数x,

$$x + 0 = 0 + x = x; \qquad \text{(单位元)};$$

并且
- 对每个整数x,存在唯一的$-x$使得

$$x + (-x) = (-x) + x = 0. \qquad \text{(逆元)}.$$

由此, 我们得到代数结构类的一个子类: *群*.

定义5.1.1 一个论域G和G上的二元运算$\cdot$构成一个群(group), 记为$(G, \cdot)$, 如果

(1) $\cdot$的结合律: 对任何$x, y, z \in G$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

(2) 存在一个单位元e使得对每个$x \in G$,

$$x \cdot e = e \cdot x = x;$$

(3) 对每个$x \in G$, 存在一个逆元x^-使得

$$x \cdot x^- = x^- \cdot x = e.$$

如果一个群G满足交换律: 对任何$x, y \in G$,

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

称G为交换群(Abelian群).

因为对所有的整数x, y, 我们有

$$x + y = y + x.$$

因此, 整数在加法下构成一个交换群, 称为*整数加法群*.

关于整数加法和乘法, 我们还有下面两个性质:

(1) 乘法满足结合律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

(2) 乘法与加法满足分配律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

由此我们得到代数结构类的另一个子类: 环.

定义5.1.2 一个论域R和R上的两个二元运算$+, \cdot$构成一个环(ring), 记为$(R, +, \cdot)$, 如果

(1) $(R, +)$是一个群;

(2) 乘法满足结合律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

(3) 乘法与加法满足分配律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

整数在加法和乘法下构成一个交换环: 整数环.

5.1.3 有理数的结构

设Q为所有的有理数的集合.

- 有理数在加法下构成一个群, 即$(Q, +, 0)$是一个群.
- 加法与乘法满足分配律: 对每个有理数x, y, z,

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z.$$

- 关于乘法, 对每个有理数x, 如果$x \neq 0$ 则存在唯一的有理数$\frac{1}{x}$使得

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

即, $(Q - \{0\}, \times, 1)$是一个群.

一般化以后, 我们得到下面的概念.

定义5.1.3 一个论域F和F上的两个二元运算$+, \cdot$构成一个域(field), 记为$(F, +, \cdot)$, 如果$(F, +, \cdot)$是一个环, 并且$(F - \{0\}, \cdot)$是一个群.

因此, $(Q, +, \times)$是一个(有理数)域.

设R为所有实数的集合. 称$(R, +, \times, 0, 1)$为实数域, 记为$\mathbf{R}$.

- 实数在加法下构成一个群, 即$(R, +, 0)$是一个群.
- 加法与乘法满足分配律: 对每个实数x, y, z,

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z;$$

- 关于乘法, 对每个实数x, 如果$x \neq 0$ 则存在唯一的实数$\frac{1}{x}$使得

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

即, $(R - \{0\}, \times, 1)$是一个群.

5.1.4 代数性质

前面的代数结构是基于相等关系=的. 布尔代数是一类基于偏序关系的代数结构. 群环域是基于相等关系的代数结构. 布尔代数, 格等等是基于偏序关系的代数结构.

在代数结构中, 我们讨论代数结构中元素具有的代数性质之间的推理. 比如交换律和结合律等等是代数性质, 是一个代数结构的论域中的对象具有的代数性质.

我们需要一个系统, 能够脱离代数结构的论域, 对其共同的性质进行推理.

这样我们需要变元. 在自然语言中我们使用变元, 比如*我相信世上有间谍*; *我相信**某个**人是间谍*.

有了变元, 我们可以表示除了简单命题和复合命题之外的这样一类命题:

*对**每个**实数x, 如果$x \neq 0$ 则**存在**唯一的实数$\frac{1}{x}$使得*

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

其中**每个**(或**所有**)称为*全称量词*(universal quantifier); **存在**称为*存在量词*(existential quantifier).

我们还可以表示含个体变元的命题, 称为*命题函数*. 比如: x*是素数*, 但x取不同的自然数时, 其真假值也随之变化.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x是素数	$\uparrow$	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1

其中$\uparrow$表示*无定义*.

下面的两个句子是命题, 具有确定的真假值, 而不是命题函数:

对所有的自然数x, x是素数: 假
存在一个自然数x是素数: 真

量化的个体变元称为约束变元; 否则称自由变元. 不含自由变元的命题具有确定的真假值.

还有一类命题称为*混合命题*. 比如

对所有的自然数y, x整除y.

其真假值是随x变化而变化的.

如果论域是有限的, 则全称量词等价于合取, 存在量词等价于析取. 比如, 设(D, r)是一个结构, 其中$D = \{a_1, ..., a_n\}$, 并且r是D上的一个一元关系. 则

对所有的$x \in D, r(x)$

等价于

$$r(a_1)且r(a_2)且 \cdots 且r(a_n);$$

而

$$\text{存在某个}x \in D\text{使得}r(x)$$

等价于

$$r(a_1)\text{或}r(a_2)\text{或}\cdots\text{或}r(a_n).$$

总之, 代数结构具有下列特点:

- 代数结构具有一个论域(非空集合), 因而具有元素;
- 代数结构具有论域上的函数和关系;
- 量词可以出现在关于代数结构的断言中, 而断言是关于元素之间的性质.

5.2 谓词逻辑

谓词逻辑的一个逻辑语言L_2包括下列符号[2,3]:

- 若干个常元(常量)符号: $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ...$;
- 可数多个变元符号: $x_0, x_1, x_2, ...$;
- 若干个函数符号: $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ...$;
- 若干个关系符号: $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ...$;
- 逻辑连接词: $\neg, \rightarrow$;
- 量词符号: $\forall$.

其中对每个函数符号$\mathbf{f}$, 存在一个自然数n使得$\mathbf{f}$是n-元的; 而对每个谓词符号$\mathbf{p}$, 存在一个自然数m使得$\mathbf{p}$是m-元的.

注意: 我们称表示代数结构中的常元、函数和关系的符号为常元符号、函数符号和关系符号. 它们是符号, 而不是具体的常元、函数和关系.

谓词逻辑的语言是多个的, 而命题逻辑的语言是唯一的. □

我们定义下列符号:

$$\begin{array}{rcl} A \vee B & \equiv & \neg A \rightarrow B; \\ A \wedge B & \equiv & \neg(\neg A \vee \neg B); \\ \exists x A(x) & \equiv & \neg \forall x \neg A(x), \end{array}$$

存在元素x具有性质A当且仅当所有元素x不具有性质A是假的.

比如, Peano算术的逻辑语言L_{PA}包含下列符号:

- 常元(常量)符号: $\mathbf{0}$;
- 可数多个变元符号: $x_0, x_1, x_2, ...$;
- 函数符号: $\mathbf{s}; +, \times$
- 关系符号: $=$;
- 逻辑连接词: $\neg, \rightarrow$;
- 量词符号: $\forall$.

我们将出现在每个谓词逻辑语言中的符号称为逻辑符号, 其它符号称为非逻辑符号. 通过比较Peano算术的语言和一般的谓词逻辑语言, 我们知道: 变元符号、逻辑连接词和量词是逻辑的符号; 而常量符号、函数符号和关系符号是非逻辑的符号.

5.2.1 项

谓词逻辑中用来表示代数结构中元素的符号串, 我们称为项.

定义5.2.1 一个逻辑语言L_2上的符号串t称为项, 如果

(1) 要么$t = \mathbf{c}$是一个常量符号,

(2) 要么$t = x$是一个变量符号,

(3) 要么$t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$, 其中$\mathbf{f}$ 是一个n-元函数符号, $t_1, ..., t_n$是项.

形式地表示为

$$t ::= \mathbf{c}|x|\mathbf{f}(t_1, ..., t_n).$$

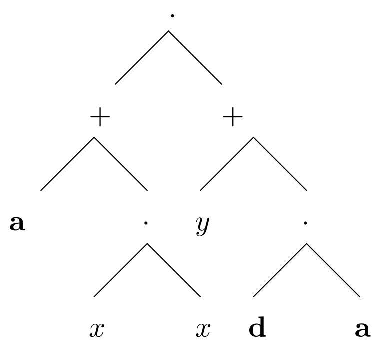
比如在Peano算术中, L_{PA}上的符号串t称为项, 如果要么$t = \mathbf{0}$, 要么$t = x$, 要么$t = \mathbf{s}t_1, t_1 + t_2, t_1 \times t_2$. 形式地表示为

$$t = \mathbf{0}|x|\mathbf{s}t_1|t_1 + t_2|t_1 \times t_2.$$

由定义, 我们可以给出一个项的抽象句法树. 比如项

$$(\mathbf{a} + x^2) \cdot (y + \mathbf{da})$$

其中$x^2 = x \cdot x, \mathbf{da} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}$, 的抽象句法树为



由于项是递归定义的, 我们得到关于项上函数的结构归纳定义和关于项的性质的结构归纳法.

定义5.2.2 (关于项上函数的归纳定义) 要定义项上的一个函数g, 我们需要

(1) 给出每个常元符号$\mathbf{c}$的定义, $g(\mathbf{c})$;

(2) 给出每个变元符号x的定义, $g(x)$;

(3) 对每个n-元函数符号$\mathbf{f}$, 假定g在项$t_1, ..., t_n$上已给出定义, 给出定义$g(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n))$.

注意$\mathbf{f}$是谓词逻辑的语言中的符号; 但g是元语言中的函数. 比如, 下面是关于项上函数的归纳定义例子.

定义5.2.3 出现在项t中的变量集合, 记为$var(t)$, 结构归纳地定义为

$$var(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{如果} t = \mathbf{c} \\ \{x\} & \text{如果} t = x \\ var(t_1) \cup \cdots \cup var(t_n) & \text{如果} t = \mathbf{t}(t_1, ..., t_n). \end{cases}$$

定义5.2.4 一个项t的大小, 记为$size(t)$, 结构归纳地定义如下:

$$size(t)=\begin{cases}1 & \text{如果}t=\mathbf{c}\\ 1 & \text{如果}t=x\\ 1+size(t_1)+\cdots+size(t_n) & \text{如果}t=\mathbf{f}(t_1,...,t_n).\end{cases}$$

即, t的大小$size(t)$是它的抽象句法树中结点的个数.

定义5.2.5 一个项t的深度, 记为$depth(t)$, 结构归纳地定义如下:

$$depth(t)=\begin{cases}1 & \text{如果}t=\mathbf{c}\\ 1 & \text{如果}t=x\\ 1+\max\{depth(t_1),...,depth(t_n)\} & \text{如果}t=\mathbf{f}(t_1,...,t_n).\end{cases}$$

即, t的深度$depth(t)$是它的抽象句法树中的深度.

比如, 项$(\mathbf{a}+x^2)\cdot(y+\mathbf{da})$的深度为

$$\begin{array}{rl} & depth((\mathbf{a}+x^2)\cdot(y+\mathbf{da}))\\ = & 1+\max\{depth(\mathbf{a}+x^2),depth(y+\mathbf{da})\}\\ = & 1+\max\{1+\max\{depth(\mathbf{a}),depth(x^2)\},\\ & \qquad\qquad 1+\max\{depth(y),depth(\mathbf{da})\}\}\\ = & 2+\max\{\max\{1,1+\max\{depth(x),depth(x)\}\},\\ & \qquad\qquad \max\{1,1+\max\{depth(\mathbf{d}),depth(\mathbf{a})\}\}\}\\ = & 2+\max\{1+\max\{1,1\},1+\max\{1,1\}\}\\ = & 2+\max\{2,2\}=4,\end{array}$$

等于抽象句法树的深度.

项的结构归纳证明: 要证明性质P对所有的项均成立, 我们需要证明

(1) 对每个常量符号$\mathbf{c}$, $P(\mathbf{c})$是成立的;

(2) 对每个变量x, $P(x)$是成立的;

(3) 对每个n-元函数符号$\mathbf{f}$, 假如$P(t_1),...,P(t_n)$是成立的, 证明$P(\mathbf{f}(t_1,...,t_n))$是成立的.

引理5.2.6 一个项t中变量的个数不大于t的大小$size(t)$, 即$|var(t)|\le size(t)$.

证明 我们对项作结构归纳法.

情况: $t=\mathbf{c}$是一个常量. 根据定义, 有: $|var(t)|=|\emptyset|=0<size(t)$.

情况: $t=x$是一个变量. 根据定义, 有: $|var(t)|=|\{x\}|=1=size(t)$.

情况: $t=\mathbf{f}(t_1,...,t_n)$. 由归纳假设, 对每个$1\le i\le n$, $|var(t_i)|\le size(t_i)$.

$$\begin{array}{rl}|var(t)| & =|var(t_1)\cup var(t_2)\cup\cdots\cup var(t_n)|\\ & \le|var(t_1)|+|var(t_2)|+\cdots+|var(t_n)|\\ & \le size(t_1)+size(t_2)+\cdots+size(t_n)\\ & <size(t).\end{array}$$

□

相应地, 我们有项上归纳原理.

项上归纳原理. 假设P是项上的一个谓词. 如果

(i) 对每个常元符号$\mathbf{c}$, $P(\mathbf{c})$成立;

(ii) 对每个变元符号x, $P(x)$成立, 并且

(iii) 假设$P(t_1),...,P(t_n)$成立, 我们能证明$P(\mathbf{f}(t_1,...,t_n))$成立,

则$P(t)$对所有的t 成立.

项上的归纳证明模式:

证明: 对t作结构归纳证明.

情况: $t=\mathbf{c}$. 证明$P(\mathbf{c})$.

情况: $t=x$. 证明$P(x)$.

情况: $t=\mathbf{f}(t_1,...,t_n)$. 假设$P(t_1),P(t_2),...,P(t_n)$, 证明$P(\mathbf{f}(t_1,...,t_n))$. □

5.2.2 公式

用来表示代数结构的代数性质的符号串我们称为公式.

定义5.2.7 一个符号串A是公式, 如果

$$A,B ::= \mathbf{p}(t_1,...,t_n)|\neg A|A\to B|\forall xA(x),$$

其中$\mathbf{p}$是一个n-元谓词符号, $t_1,...,t_n$是项, x是变量符号.

Peano算术的公式定义为

$$A,B ::= t_1=t_2|\neg A|A\to B|\forall xA(x),$$

其中t_1,t_2是项, x是变量符号.

基于公式结构的归纳定义: 结构归纳地定义出现在一个公式A中的自由变量的集合$var(A)$:

$$var(A)=\begin{cases} var(t_1)\cup\cdots\cup var(t_n) & \text{如果}A=\mathbf{p}(t_1,...,t_n)\\ var(A_1) & \text{如果}A=\neg A_1\\ var(A_1)\cup var(A_2) & \text{如果}A=A_1\to A_2\\ var(A_1(x))-\{x\} & \text{如果}A=\forall xA_1(x).\end{cases}$$

一个公式A称为一个句子(sentence), 如果$var(A)=\emptyset$.

定义5.2.8 变元符号x在公式A中是自由的(free, unbounded), 如果$x\in var(A)$. 否则, x是囿界的(界定的, bounded)

在公式

$$\forall x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0)\vee x=2\mathbf{a}$$

中, x的第一、第二和第三个出现是受限的, 因为

$$x\notin var(\forall x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0)),$$

其中$x^2 = x \cdot x$; 而x的第四个出现是自由的,

$$x \in var(x = 2\mathbf{a}).$$

因此, x在公式中是自由的, 即

$$x \in var(\forall x(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0) \vee x = 2\mathbf{a}).$$

符号是抽象的, 记号是具体的(物理的). 比如数字1是抽象的符号, 而你看到的1是记号, 是具体的. 数字1是唯一的, 而记号1是很多的. 类似于记号与符号之间的差别, 变元x是唯一的, 而变元x的出现可以有许多. 在一个公式中, 同一变元的某些出现可以是自由的, 某些出现可以是受限的.

5.2.3 语义

谓词逻辑的语义是代数结构, 其中项为代数结构的元素的名称; 而公式表示代数结构中公式中出现的项所表示的元素所具有的代数性质.

定义5.2.9 给定一个论域U, 一个解释(interpretation)I是一个映射, 使得

- 对每个常量符号$\mathbf{c}$, $\mathbf{c}^I$, 符号$\mathbf{c}$在映射I下的像, 是U中的一个元素;
- 对每个n-元函数符号$\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^I$, 符号$\mathbf{f}$在映射I下的像, 是U上的一个n-元函数;
- 对每个m-元关系符号$\mathbf{p}, \mathbf{p}^I$, 符号$\mathbf{p}$在映射I下的像, 是U上的一个m-元关系.

这样, 论域U和解释I构成一个代数结构:

$$M = (U, \{\mathbf{c}^I : \mathbf{c} \in L_2\}, \{\mathbf{f}^I : \mathbf{f} \in L_2\}, \{\mathbf{p}^I : \mathbf{p} \in L_2\}) = (U, I),$$

称为一个模型(model).

定义5.2.10 一个赋值v是从变量符号到U的一个映射.

这样我们可以归纳地定义一个项在解释I和赋值v下所对应于U中的元素. 设t是一个项, $t^{I,v}$是t在解释I和赋值v下所对应于U中的元素. 则

$$t^{I,v} = \begin{cases} \mathbf{c}^I & \text{如果} t = \mathbf{c} \\ v(x) & \text{如果} t = x \\ \mathbf{f}^I(t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v}) & \text{如果} t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n). \end{cases}$$

这样每个项在解释I和赋值v下对应U中的唯一一个元素.

我们根据项的结构归纳可以证明下面的

引理5.2.11 对每个项t, $t^{I,v} \in U$.

□

如果公式A在解释I和赋值v下是真的, 说明公式A描述的性质与结构M中关于元素之间关系的事实是吻合的; 否则是不吻合的.

定义5.2.12 给定一个公式A, A在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models A$, 如果

$$\begin{cases} (t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v}) \in \mathbf{p}^I & \text{如果} A = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n) \\ I, v \not\models B & \text{如果} A = \neg B \\ I, v \models B \Rightarrow I, v \models C & \text{如果} A = B \to C \\ \mathbf{A}a \in U(I, v_{x/a} \models B(x)) & \text{如果} A = \forall x B(x), \end{cases}$$

其中

$$v_{x/a}(y) = \begin{cases} v(y) & \text{如果} y \neq x \\ a & \text{如果} y = x \end{cases}$$

注意: $I, v \not\models B$用到了元语言中的否定:

$$not(I, v \models B).$$

□

一个公式A在解释I下为真, 记为$I \models A$, 如果对任何赋值$v, I, v \models A$. 公式A是永真的, 记为$\models A$, 如果对任何解释$I, I \models A$.

5.2.4 替换

替换也称代换(substitution). 替换的形式化过程可以概括为下列8个步骤: (1) 直觉定义, (2) 发现问题, (3) 替换应该满足的基本条件(本体论假设), (4) 修改定义, (5) 发现问题, (6) 修改定义, (7) 设定假设, (8) 正确定义.

替换的定义是非常技巧性的, 是一个非常典型的形式化过程. 许多非形式概念的形式化过程基本上是这个样子.

- $[x/s]t$表示用项s替换x在t中每个出现所得到的项;
- $[x/s]A$表示用项s替换x在A中每个**自由**出现所得到的公式.

如果$[x/s]A$定义是合适的, 我们s在A中可替换x.

比如,

[人/张三]每个人是有理性的. = (∗) 每个张三是有理性的.

[x/张三]人x是有理性的. = 张三是有理性的.

其中(∗)语法上是有些问题的.

(1) 直观地, 我们可以这样定义项的替换:

$$[x/s]t = \begin{cases} \mathbf{c} & \text{如果} t = \mathbf{c} \\ s & \text{如果} t = x \\ y & \text{如果} t = y \neq x \\ \mathbf{f}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \text{如果} t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n); \end{cases}$$

以及公式的替换:

$$[x/s]A = \begin{cases} \mathbf{p}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \text{如果} A = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n) \\ \neg [x/s]A_1 & \text{如果} A = \neg A_1 \\ [x/s]A_1 \to [x/s]A_2 & \text{如果} A = A_1 \to A_2 \\ \forall y [x/s]A_1(x) & \text{如果} A = \forall y A_1(y). \end{cases}$$

这个定义对大部分例子是对的. 比如,

$$[x/\mathbf{f}(z,w)](\forall y(x=x)) = \forall y(\mathbf{f}(z,w) = \mathbf{f}(z,w)).$$

(2) 但是对于下面的例子

$$[x/y](\forall y(\mathbf{f}(x) = x)) = \forall y(\mathbf{f}(y) = y)).$$

是有问题的. 替换前的公式是说x是函数符号$\mathbf{f}$的固定点, 而替换后的公式却说所有的y都是$\mathbf{f}$的固定点.

直觉告诉我们: 界定变量的命名是无关紧要的. 比如, 如果

$$\forall x(\mathbf{p}(x) \to \mathbf{d}(x))$$

表示每个人将会死的, 那么

$$\begin{array}{l} \forall y(\mathbf{p}(y) \to \mathbf{d}(y)), \\ \forall z(\mathbf{p}(z) \to \mathbf{d}(z)) \end{array}$$

也表示相同的断言.

(3) **替换的基本要求**: 一个封闭公式在替换下应具有它原来所要表示的意思.

如果A和$[x/s]A$要表示的意思不同, 那么A和$[x/s]A$在解释下也会不同的, 这将出现问题. 比如

$$[y/x](\forall y(\mathbf{f}(y) = y)) = \forall y(\mathbf{f}(x) = x))$$

如果A是一个句子(封闭的公式), 则应该: 对任何解释I和赋值v, $I, v \models A$当且仅当$I, v \models [x/s]A$.

为什么会出现错误？因为我们没有区别一个变量x在一个项t中的自由出现(在替换时应该替换的变量出现), 和界定出现(我们在替换时不应该替换的变量出现).

(4) 我们将定义改为如下形式:

$$[x/s]A = \begin{cases} \mathbf{p}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \text{如果} A = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n) \\ \neg[x/s]A_1 & \text{如果} A = \neg A_1 \\ [x/s]A_1 \to [x/s]A_2 & \text{如果} A = A_1 \to A_2 \\ \begin{cases} \forall y A_1(y) & \text{如果} y = x \\ \forall y [x/s]A_1(y) & \text{如果} y \neq x \end{cases} & \text{如果} A = \forall y A_1(y) \end{cases}$$

(5) 这样, 我们会有:

$$[x/y](\forall y(y = x)) = \forall y(y = y).$$

被替换前的公式含义是所有的元素等于x的赋值, 即论域只有一个元素; 而替换后的公式含义是每个元素等于自己, 是一个在任何论域和解释下均为真的公式.

出现这样现象的原因是变量扑捉(variable capture). 当朴素地用一个项s替换公式$B(x)$中的一个变量x, 在项s中的**自由**变量变成界定的现象称为变量扑捉.

(6) 为了避免出现变量扑捉, 我们修改替换定义为

$$[x/s]A = \begin{cases} \mathbf{p}([x/s]t_1,...,[x/s]t_n) & \text{如果} A = \mathbf{p}(t_1,...,t_n) \\ \neg[x/s]A_1 & \text{如果} A = \neg A_1 \\ [x/s]A_1 \to [x/s]A_2 & \text{如果} A = A_1 \to A_2 \\ \begin{cases} \forall y A_1(y) & \text{如果} y = x \\ \forall y[x/s]A_1(y) & \text{如果} y \neq x \text{ 且} y \notin var(s) \end{cases} & \text{如果} A = \forall y A_1(y) \end{cases}$$

注意: 这样定义的替换是偏函数, 因为对某些公式, 替换没有定义.

(7) 这时候, 我们

假定: 项"在界定变量的重新命名下"是相同的.

对界定变量符号重新命名以后使得不会出现变量扑捉, 然后再替换.

(8) 这样的替换就变为

$$[x/s]A = \begin{cases} \mathbf{p}([x/s]t_1,...,[x/s]t_n) & \text{如果} A = \mathbf{p}(t_1,...,t_n) \\ \neg[x/s]A_1 & \text{如果} A = \neg A_1 \\ [x/s]A_1 \to [x/s]A_2 & \text{如果} A = A_1 \to A_2 \\ \forall y[x/s]A_1(y) & \text{如果} A = \forall y A_1(y), y \neq x \text{并且} y \notin var(s). \end{cases}$$

这样定义的替换是一个全函数.

5.2.5 谓词逻辑的逻辑推论

给定公式集合Σ和一个公式A, 如果对任何解释I和赋值v, $I, v \models \Sigma$蕴涵$I, v \models A$, 称A为Σ的*逻辑推论*, 其中$I, v \models \Sigma$, 如果对每个$B \in \Sigma, I, v \models B$.

谓词逻辑的逻辑推论与命题逻辑的逻辑推论之间的一个差别是: 前者的可能模型是不可枚举的, 而后者的是可枚举性.

我们将一个解释I和一个赋值v简单地称为赋值v. 因为一个赋值一定依赖于某个解释的. $v(A) = 1$定义为$I, v \models A$. 这样,

$$v(A) = 1 \text{ 如果 } \begin{cases} (t_1^v,...,t_n^v) \in I(p) & \text{如果} A = p(t_1,...,t_n) \\ v(A_1) = 0 & \text{如果} A = \neg A_1 \\ v(A_1) = 1 \Rightarrow v(A_2) = 1 & \text{如果} A = A_1 \to A_2 \\ \mathbf{A} a \in U(v_{x/a}(A_1(x)) = 1) & \text{如果} A = \forall x A_1(x) \end{cases}$$

我们给几个逻辑推论的例子.

例5.2.13 $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.

证明 反证法. 假设$\exists x \neg A(x) \not\models \neg \forall x A(x)$. 存在一个赋值$v$使得(1) $v(\exists x \neg A(x)) = 1$; 并且(2) $v(\neg \forall x A(x)) = 0$.

由(1), 存在论域中一个元素a使得$v_{x/a}(\neg A(x))=1$, 即

$$v_{x/a}(A(x))=0.$$

由(2), $v(\forall xA(x))=1$, 即对任何论域中的元素b, $v_{x/b}(A(x))=1$. 设$b=a$, 则$v_{x/a}(A(x))=1$. 矛盾. 因为一个公式在一个解释和一个赋值下不可能既为真也为假.

□

例5.2.14 $\forall x(A(x)\to B(x))\models\forall xA(x)\to\forall xB(x)$.

证明 假设$\forall x(A(x)\to B(x))\not\models\forall xA(x)\to\forall xB(x)$. 存在一个赋值$v$使得(1) $v(\forall x(A(x)\to B(x)))=1$, 并且(2) $v(\forall xA(x)\to\forall xB(x))=0$.

由(2), 我们得

(3) $v(\forall xA(x))=1$ 并且

(4) $v(\forall xB(x))=0$.

由(1)和(3)得到: 对论域中的任何元素a, $v_{x/a}(A(x)\to B(x))=1$; 并且$v_{x/a}(A(x))=1$, 因此$v_{x/a}(B(x))=1$.

由(4), 存在论域中的元素b使得$v_{x/b}(A(x))=1$并且$v_{x/b}(B(x))=0$. 矛盾.

□

关于逻辑结论的判定是基于如下的等价：

$$\begin{array}{rll}
v(\neg A)=\mathtt{t} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{f}\\
v(A\wedge B)=\mathtt{t} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{t}\&v(B)=\mathtt{t}\\
v(A\vee B)=\mathtt{t} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{t}\text{ or }v(B)=\mathtt{t}\\
v(\forall xA(x))=\mathtt{t} & \text{iff} & \mathbf{A}a\in U(v_{x/a}(A(x)=\mathtt{t})\\
v(\exists xA(x))=\mathtt{t} & \text{iff} & \mathbf{E}a\in U(v_{x/a}(A(x)=\mathtt{t});
\end{array}$$

并且

$$\begin{array}{rll}
v(\neg A)=\mathtt{f} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{t}\\
v(A\wedge B)=\mathtt{f} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{f}\text{ or }v(B)=\mathtt{f}\\
v(A\vee B)=\mathtt{f} & \text{iff} & v(A)=\mathtt{f}\&v(B)=\mathtt{f}\\
v(\forall xA(x))=\mathtt{f} & \text{iff} & \mathbf{E}a\in U(v_{x/a}(A(x)=\mathtt{f})\\
v(\exists xA(x))=\mathtt{f} & \text{iff} & \mathbf{A}a\in U(v_{x/a}(A(x)=\mathtt{f});
\end{array}$$

比如判定公式$\neg\exists y\forall x(p(x,y)\leftrightarrow\neg p(x,x))$是否是永真公式, 根据上面的等价, 我们判定如下:

$$\begin{array}{l}
v(\neg\exists y\forall x(p(x,y)\leftrightarrow\neg p(x,x)))=0\\
v(\exists y\forall x(p(x,y)\leftrightarrow\neg p(x,x)))=1\\
\mathbf{E}b(v_{y/b}(\forall x(p(x,y)\leftrightarrow\neg p(x,x)))=1)\\
\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p(x,y)\leftrightarrow\neg p(x,x))=1)\\
\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p(x,y))=1\text{ iff }v_{y/b,x/a}(\neg p(x,x))=1)\\
\mathbf{E}b\mathbf{A}a(v_{y/b,x/a}(p(x,y))=1\text{ iff }v_{y/b,x/a}(p(x,x))=0).
\end{array}$$

取$a=b$, 我们得到如下的矛盾:

$$v_{y/b,x/b}(p(x,y))=1 \text{ iff } v_{y/b,x/b}(p(x,x))=0.$$

数学上我们约定:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

表示句子

$$\forall x\forall y(x^2-y^2=(x+y)(x-y));$$

而

$$(x+y)^2\neq x^2+y^2$$

表示句子

$$\exists x\exists y((x+y)^2\neq x^2+y^2).$$

方程

$$ax^2+bx+c=0$$

表示句子$\exists x(ax^2+bx+c=0)$; 而$\forall x(ax^2+bx+c=0)$蕴涵$a=b=c=0$, 表示函数$f(x)=ax^2+bx+c\equiv 0$为恒等于0的函数.

类似地, 我们这里:

$$\forall x(A(x)\to B(x))\models\forall xA(x)\to\forall xB(x)$$

表示: 对任何公式$A(x),B(x)$,

$$\forall x(A(x)\to B(x))\models\forall xA(x)\to\forall xB(x).$$

而

$$\forall xA(x)\to\forall xB(x)\not\models\forall x(A(x)\to B(x))$$

表示: 存在公式$A(x),B(x)$使得

$$\forall xA(x)\to\forall xB(x)\not\models\forall x(A(x)\to B(x))$$

类似于命题逻辑, 否定的断言我们用构造法.

例5.2.15 $\forall xA(x)\to\forall xB(x)\not\models\forall x(A(x)\to B(x))$.

证明 存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall xA(x)\to\forall xB(x)\not\models\forall x(A(x)\to B(x))$.
取$A(x)=\mathbf{p}(x),B(x)=\mathbf{q}(x)$.
构造赋值I,v使得
(1) $I,v\models\forall x\mathbf{p}(x)\to\forall x\mathbf{q}(x)$; 并且
(2) $I,v\not\models\forall x(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{q}(x))$.
设$U=\{a,b\}$, 定义$\mathbf{p}^I=\{a\},\mathbf{q}^I=\{b\}$, 并且对每个变量符号$y$, $v(y)=a$. 则

$$\begin{aligned}&I,v\not\models\forall x\mathbf{p}(x)\\&I,v\models\forall x\mathbf{p}(x)\to\forall x\mathbf{q}(x);\\&I,v\models\mathbf{p}(x);\\&I,v\not\models\mathbf{q}(x).\end{aligned}$$

因此

$$I,v\not\models\forall x(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{q}(x)).$$

□

练习5.1:

1. 在系列公式中找出变量的自由出现和界定出现:

(a) $\forall x_3(\forall x_1 \mathbf{p}(x_1, x_2) \to \mathbf{p}(x_3, \mathbf{c}))$;

(b) $\forall x_2 \mathbf{p}(x_3, x_2) \to \forall x_3 \mathbf{p}(x_3, x_2)$;

(c) $(\forall x_2 \exists x_1 \mathbf{p}_1(x_1, x_2, \mathbf{f}_1(x_1, x_2)) \vee \neg \exists x_1 \mathbf{p}_2(x_2, \mathbf{f}_2(x_1))$.

2. 将下列自然语言句子表示为公式:

(1) Anyone who is persistent can learn logic.

(2) No politician is honest;

(3) Not all birds can fly, and all birds cannot fly.

(4) If everyone can solve the problem, Hilary can.

(5) Nobody loves a loser.

(6) Everyone loves somebody and no one loves everybody, or somebody loves everybody and someone loves nobody.

(7) You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you cannot fool all the people all the time.

(8) John hates all people who do not hate themselves.

(9) Any sets that have the same members are equal.

(10) There is no set belonging to precisely those sets that do not belong to themselves.

(11) There is no barber who shaves precisely those men who do not shave themselves.

3. 对下列公式和给定的解释, 给出下列公式的真假值:

公式为:

(i) $\mathbf{p}(\mathbf{f}(x_1, x_2), \mathbf{c})$, 其中$\mathbf{c}$为常量符号;

(ii) $\mathbf{p}(x_1, x_2) \to \mathbf{p}(x_2, x_1)$;

(iii) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(\mathbf{p}(x_1, x_2) \wedge p(x_2, x_3) \to \mathbf{p}(x_1, x_3))$,

解释为:

(a) 论域为正整数集合, $\mathbf{p}^I(y, z)$为$y \geq z$; $\mathbf{f}^I(y, z) = yz$, 且$\mathbf{c}^I$为2.

(b) 论域为整数集合, $\mathbf{p}^I(y, z)$ 为$y = z$; $\mathbf{f}^I(y, z)$ 为$y + z$, 且$\mathbf{c}^I = 0$.

(c) 论域为所有整数集合的集合, $\mathbf{p}^I(y, z)$ 为$y \subseteq z$; $\mathbf{f}^I(y, z)$ 为$y \cap z$, 且$\mathbf{c}^I$为空集$\emptyset$.

4. 用自然语言描述下列公式在下列解释下所表示的断言:

(1) $\forall x \forall y(\mathbf{p}(x, y) \to \exists x(\mathbf{q}(z) \wedge \mathbf{p}(x, z) \wedge \mathbf{p}(z, y)))$, 其中论域为实数集合, $\mathbf{p}^I(x, y)$表示$x < y$, 而$\mathbf{q}^I(z)$表示z是一个有理数.

(2) $\forall x(\mathbf{q}_1(x) \to \exists y(\mathbf{q}_2(y) \wedge \mathbf{p}(y, x)))$, 其中论域为所有的天数和人, $\mathbf{q}_1^I(x)$表示x为日期, $\mathbf{q}_2^I(y)$表示y是一个傻瓜, 而$\mathbf{p}^I(y, x)$表示y在x出生.

(3) $\forall x \forall y(\mathbf{q}_1(x) \wedge \mathbf{q}_2(y) \to \mathbf{p}(\mathbf{f}(x, y)))$, 其中论域为所有整数的集合, $\mathbf{q}_1^I(x)$表示x 是奇数, $\mathbf{q}_2^I(x)$表示x是偶数, 而$\mathbf{f}^I(x, y)$表示$x + y$.

(4) 对下列公式, 假设论域为所有人的集合, 而$\mathbf{p}^I(x, y)$表示x爱y. 给出下列公式的解释:

(i) $\exists x \forall y \mathbf{p}(x, y)$;

(ii) $\forall y\exists x\mathbf{p}(x,y)$;
(iii) $\exists x\exists y\forall z(\mathbf{p}(y,z)\to\mathbf{p}(x,z))$;
(iv) $\exists x\forall y\neg\mathbf{p}(x,y)$.

5. 证明下列公式是逻辑永真的:
(1) $\forall xA(x)\leftrightarrow\neg\exists\neg A(x)$;
(2) $\exists x\forall yA(x,y)\to\forall y\exists xA(x,y)$;
(3) $(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))\to\forall x(A(x)\vee B(x))$;
(4) $\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\forall xB(x))$.

6. 判定下列公式是否是永真的:
(1) $\exists x(\mathbf{p}(x)\to\forall y\mathbf{p}(y))$;
(2) $\forall x(\mathbf{q}_1(x)\vee\mathbf{q}_2(x))\to(\forall x\mathbf{q}_1(x)\vee\forall x\mathbf{q}_2(x))$;
(3) $\exists x\exists y(\mathbf{p}(x,y)\to\forall z\mathbf{p}(z,y))$;
(4) $\exists x\exists y(\mathbf{q}_1(x)\to\mathbf{q}_2(y))\to\exists x(\mathbf{q}_1(x)\to\mathbf{q}_2(x))$.

提示: (3)
$$\begin{aligned}&v(\exists x\exists y(\mathbf{p}(x,y)\to\forall z\mathbf{p}(z,y)))=0\\&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(x,y)\to\forall z\mathbf{p}(z,y))=1)\\&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(x,y)=1)\Rightarrow v_{x/a,y/b}(\forall z\mathbf{p}(z,y))=1)\\&\mathbf{A}a,b(v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(x,y)=1)\Rightarrow\mathbf{A}c(v_{x/a,y/b,z/c}(\mathbf{p}(z,y))=1))\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&v(\exists x\exists y(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(y))\to\exists x(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(x)))=0\\&v(\exists x\exists y(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(y)))=1\&v(\exists x(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(x)))=0\\&\mathbf{E}a,b(v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(y))=1)\&\mathbf{A}c(v_{x/c}(\mathbf{p}(x)\to\mathbf{p}(x))=1)\\&\mathbf{E}a,b(v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(x)=1)\Rightarrow v_{x/a,y/b}(\mathbf{p}(y))=1))\\&\qquad\&\mathbf{A}c(v_{x/c}(\mathbf{p}(x))=1\Rightarrow v_{x/c}(\mathbf{p}(x))=1)).\end{aligned}$$

□

5.3 自然推理系统$\mathbf{N}_2$

谓词逻辑的自然推理系统$\mathbf{N}_2$是$\mathbf{N}_1$加上下列推理规则组成的:

$$(\forall^-)\ \frac{\Sigma\vdash\forall xA(x)}{\Sigma\vdash A(t)}\qquad(\forall^+)\ \frac{\Sigma\vdash A(x)}{\Sigma\vdash\forall xA(x)}$$
$$(\exists^-)\ \frac{\Sigma,A(x)\vdash B}{\Sigma,\exists xA(x)\vdash B}\qquad(\exists^+)\ \frac{\Sigma\vdash A(t)}{\Sigma\vdash\exists xA(x)}$$

其中在规则$(\forall^+)$中x不在Σ中自由出现, 而在规则$(\exists^-)$中x不在Σ和B中自由出现. 这两个条件是必须的. 比如否则, 规则$(\forall^+)$会导致下列错误的推理:

$$\begin{aligned}x+x=0\vdash&\quad x+x=0\qquad\text{(ref)}\\x+x=0\vdash&\quad\forall x(x+x=0).\end{aligned}$$

而规则$(\exists^-)$会导致下列错误的推理:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0\vdash&\quad\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0\qquad\text{(ref)}\\\exists x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0)\vdash&\quad\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0\\\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0)\vdash&\quad\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0\\\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0)\vdash&\quad\forall x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0)\quad(\forall^+).\end{aligned}$$

注意: 在($\exists^+$)中, $A(x)$是用x替换$A(t)$中(可以部分出现的)t. □

在含有等词符号$\equiv$的谓词逻辑语言中, 我们需要加上一个公理和一个推理规则:

- 公理: ($\equiv^+$) $\vdash x \equiv x$;
- 推理规则: ($\equiv^-$) $\dfrac{\Sigma \vdash A(t_1), t_1 \equiv t_2}{\Sigma \vdash A(t_2)}$.

通过这个公理和推理规则, 我们可以证明:

$\equiv$的对称性: $\vdash x \equiv y \to y \equiv x$

$\equiv$的传递性: $\vdash x \equiv y \wedge y \equiv z \to x \equiv z$

定义5.3.1 公式A是Σ-形式可推理的, 记为$\Sigma \vdash A$, 如果存在一个断言序列

$$\Sigma_1 \vdash A_1, ..., \Sigma_n \vdash A_n$$

使得

(1) $\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \vdash A$;

(2) 对每个$k \le n$, $\Sigma_k \vdash A_k$可由前面的断言通过一个形式推理规则得到.

5.3.1 证明的例子

我们下列给出两个推理的例子.

命题5.3.2 (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;

(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;

证明 (1)

$$\begin{array}{rcll}
A(x,y) & \vdash & A(x,y) & (\in) \\
A(x,y) & \vdash & \exists x A(x,y) & (\exists^+) \\
A(x,y) & \vdash & \exists y \exists x A(x,y) & (\exists^+) \\
\exists y A(x,y) & \vdash & \exists y A(x,y) & (\exists^-) \\
\exists x \exists y A(x,y) & \vdash & \exists y A(x,y) & (\exists^-)
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcll}
\forall y A(z,y) & \vdash & \forall y A(z,y) & (\mathrm{ref}) \\
\forall y A(z,y) & \vdash & A(z,t) & (\forall^-) \\
\forall y A(z,y) & \vdash & \exists x A(x,t) & (\exists^+) \\
\forall y A(z,y) & \vdash & \forall y \exists x A(x,y) & (\forall^+) \\
\exists x \forall y A(x,y) & \vdash & \forall y \exists x A(x,y). & (\exists^-)
\end{array}$$

□

命题5.3.3 (1) $\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;

(2) $\neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.

证明 我们只给出(1)的证明, (2)的证明留给读者.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A(z) & \vdash & \exists x\neg A(x) \\
\neg\exists x\neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \exists x\neg A(x) \\
\neg\exists x\neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \neg\exists x\neg A(x) \\
\neg\exists x\neg A(x) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x\neg A(x) & \vdash & \forall x A(x) \\
\neg\forall x A(x), \neg\exists x\neg A(x) & \vdash & \neg\forall x A(x) \\
\neg\forall x A(x) & \vdash & \exists x\neg A(x).
\end{array}
$$

□

命题5.3.4 (1) $\forall x(A(x)\to B(x))\vdash\forall xA(x)\to\forall xB(x)$;
(2) $A\to\forall xB(x)\vdash\forall x(A\to B(x))$, 其中$x$不在$A$中出现;
(3) $\forall xA(x)\to B\vdash\dashv\exists x(A(x)\to B)$, 其中$x$不在$B$中出现;
(4) $\exists xA(x)\to B\vdash\dashv\forall x(A(x)\to B)$, 其中$x$不在$B$中出现.

证明 (3) 我们首先考虑证明

$$\forall xA(x)\to B\models|\exists x(A(x)\to B).$$

先考虑

$$\forall xA(x)\to B\models\exists x(A(x)\to B).$$

反证: 假设存在模型v使得

$$(1)\ v(\forall xA(x)\to B)=1$$

并且

$$(2)\ v(\exists x(A(x)\to B)=0.$$

则不存在论域中的元素a使得$v_{x/a}(A(x)\to B)=1$, 即对论域中的每个元素a, $v_{x/a}(A(x)\to B)=0$, 即对论域中的每个元素a,

$$v_{x/a}(A(x))=1$$

并且

$$v_{x/a}(B)=0.$$

由(1), $v(\forall xA(x))=1$蕴含$v(B)=1$; 即对论域中每个元素$a, v_{x/a}(A(x))=1$蕴含$v(B)=1$. 矛盾.

然后考虑

$$\exists x(A(x)\to B)\models\forall xA(x)\to B.$$

反证: 假设存在模型v使得

$$(1)\ v(\forall xA(x)\to B)=0$$

并且

$$(2)\ v(\exists x(A(x) \to B) = 1.$$

则$v(\forall xA(x)) = 1$并且$v(B) = 0$. 即对论域中的每个元素$a, v_{x/a}(A(x)) = 1$; 并且$v(B) = 0$. 这等价于: 对论域中的每个元素$a, v_{x/a}(A(x)) = 1$; 并且$v_{x/a}(B) = 0$. 因为任给公式B和赋值v, 如果x不自由出现在公式B中, 则对任何元素$a \in U, v(B) = v_{x/a}(B)$.

存在一个元素a使得$v_{x/a}(A(x)) = 1$蕴涵$v_{x/a}(B) = 1$. 矛盾.

形式证明为:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x\neg(A(x) \to B) \\
\forall x\neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x\neg(A(x) \to B) \\
\forall x\neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall xA(x) \\
\forall xA(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \neg B \\
\forall xA(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall xA(x) \\
\forall xA(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall xA(x) \to B \\
\forall xA(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & B \\
\forall xA(x) \to B & \vdash & \exists x(A(x) \to B).
\end{array}$$

□

数学中, 我们用(i)斜体(意大利体)的字母表示数学变量; (ii) 英文单词的缩写为正体. 问题: e应该是斜体还是正体? 微分符号d是斜体还是正体?

练习5.2:

1. 用自然推理规则证明下列断言:
   (1) $\neg\exists xA(x) \vdash\dashv \forall x\neg A(x)$;
   (2) $\exists xA(x) \to B \vdash\dashv \forall x(A(x) \to B)$, 其中$x$不出现在$B$ 中.
2. 证明下面断言:
   (1) $\vdash \forall x\forall y\mathbf{r}(x, y) \to \forall x\mathbf{r}(x, x)$, 其中$\mathbf{r}$是一个二元谓词符号;
   (2) $\vdash \forall xA(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$;
   (3) $\vdash (\exists xA(x) \to \forall xB(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))$;
   (4) $\vdash \exists y(\mathbf{r}(y) \to \forall y\mathbf{r}(y))$, 其中$\mathbf{r}$ 是一个一元谓词符号.

5.3.2 完备性定理

命题5.3.5 设Σ是$\mathcal{L}$上的一个理论.

(1) Σ是协调的当且仅当Σ的每个有限子集是协调的;

(2) $\Sigma \cup \{A\}$是不协调的当且仅当$\Sigma \vdash \neg A$;

□

定理5.3.6 (可靠性定理) 任给一个公式集合Σ和一个公式A, 如果$\Sigma \vdash A$ 则$\Sigma \models A$.

证明 我们证明每个公理是永真的并且每条推理规则是保永真的.

任给一个模型M.

对于$(\forall^-)$, 假设对任何赋值$v, M, v \models \Sigma$蕴含$M, v \models \forall x A(x)$. 为了证明对任何赋值$v, M, v \models \Sigma$蕴含$M, v \models A(t)$, 假设$M, v \models \Sigma$. 则$M, v \models \forall x A(x)$. 则对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M, v_{x/a} \models A(x)$. 令$c = t^{I,v}$, 有

$$M, v_{x/t^{I,v}} \models A(x),$$

即, $M, v \models A(t)$.

对于$(\forall^+)$, 假设对任何赋值$v, M, v \models \Sigma$蕴含$M, v \models A(x)$. 为了证明对任何赋值$v, M, v \models \Sigma$蕴含$M, v \models \forall x A(x)$, 假设$M, v \models \Sigma$. 由归纳假设, $M, v \models A(x)$. 对于模型M的论域中的任意元素a,$M, v_{x/a} \models \Sigma$, 因此, $M, v_{x/a} \models A(x)$. 即对于模型M的论域中的任意元素a, $M, v_{x/a} \models A(x)$, 即$M, v \models \forall x A(x)$.

规则$(\exists^-)$和$(\exists^+)$的情况类似.

□

定理5.3.7 (完备性定理)[4] 任给一个公式集合Σ和一个公式A, 如果$\Sigma \models A$ 则$\Sigma \vdash A$.

证明 类似于命题逻辑的完备性定理的证明, 我们有:

引理5.3.8 给定一个协调理论Σ, 存在一个极大协调理论Σ'使得$\Sigma' \supseteq \Sigma$.

给定一个极大协调的公式集合Σ, 我们希望构造一个模型$M = (U, I)$使得对任何句子A,

$$I \models A\text{当且仅当}A \in \Sigma.$$

当$A = \exists x B(x)$时, 假设定理对$B(x)$成立, 则对任何赋值v,

$$\begin{array}{rll} v(A) = 1 & \text{当且仅当} & v(\exists x B(x)) = 1 \\ & \text{当且仅当} & v'(B(x)) = 1 \\ & \text{当且仅当} & B(x) \in \Sigma \\ & \text{当且仅当} & A \in \Sigma. \end{array}$$

第三个当且仅当我们是得不到.

当$A = \exists x B(x)$时, 如果$A \in \Sigma$时

$$\text{存在}\mathbf{c} \in C\text{使得}\Sigma \vdash \exists x B(x) \to B(\mathbf{c})$$

则$\Sigma \vdash B(\mathbf{c})$, 且$B(\mathbf{c}) \in \Sigma$.

由归纳假设, $I \models B(\mathbf{c})$, 即$I, v_{x/\mathbf{c}^I} \models B(x)$, 且$I \models A$.

定义5.3.9 设Σ是逻辑语言L_2上的一个理论, C是L_2中的常量符号集合. 如果对每个只含一个自由变量的公式$A(x)$, 存在一个常量$\mathbf{c} \in C$使得

$$\Sigma \vdash \exists x A(x) \to A(\mathbf{c}),$$

则称C为Σ在L_2上的见证集合.

引理5.3.10 设Σ是逻辑语言L_2上的一个协调理论. 则存在一个常量符号集合C和Σ的一个协调扩张Σ' 使得C是Σ'在$L_2 \cup C$上的见证集合.

证明 给定逻辑语言L_2, 设C包含可数多个常量符号使得$C \cap L_2 = \emptyset$, 记为

$$C = \{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, ...\}.$$

将$L_2 \cup C$上的所有公式排成一列为

$$A_0(x_0), A_1(x_1), ...$$

定义一个理论序列$\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, ...$ 使得

(1) $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$;

(2) 每个理论Σ_i是协调的;

(3) $\Sigma' = \bigcup_i \Sigma_i$满足引理.

Σ_i的构造如下:

第一步: 设$\mathbf{d}_0 \in C$是在$A_0(x_0)$中不出现的常量符号. 设

$$\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\exists x_0 A_0(x_0) \to A_0(\mathbf{d}_0)\}.$$

则Σ_1是协调的. 否则, $\Sigma_0 \vdash \neg(\exists x_0 A_0(x_0) \to A_0(\mathbf{d}_0))$. 则

$$\Sigma_0 \vdash \exists x_0 A_0(x_0)$$

且

$$\Sigma_0 \vdash \neg A_0(\mathbf{d}_0).$$

由于$\mathbf{d}_0$不在Σ_0中出现, 因此,

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma_0 & \vdash & \forall y \neg A_0(y); \\
 & \vdash & \forall y \neg A_0(y) \to \neg A_0(x_0); \\
\Sigma_0 & \vdash & \neg A_0(x_0); \\
\Sigma_0 & \vdash & \forall x_0 \neg A_0(x_0); \\
\Sigma & \vdash & \neg \exists x_0 A_0(x_0); \\
\Sigma & \vdash & \exists x_0 A_0(x_0).
\end{array}$$

矛盾.

第$n+1$步: 由归纳假设, C中出现在Σ_n中的常量符号个数只有有限多个. 在C中存在一个常量符号$\mathbf{d}_n$使得$\mathbf{d}_n$不出现在$\Sigma_n \cup \{A_n(x_n)\}$中. 定义

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\exists x_n A_n(x_n) \to A_n(\mathbf{d}_n)\}.$$

类似于第一步, 可以证明Σ_{n+1}是协调的.

显然, Σ'是协调的.

断言1. C是Σ'在$L_2 \cup C$上的见证集合.

设$A(x)$是$L_2 \cup C$上只含一个自由变量的公式. 则存在一个n使得$A(x) = A_n(x_n)$. 由构造得知, $\exists x_n A_n(x_n) \to A_n(\mathbf{d}_n) \in \Sigma_{n+1} \subseteq \Sigma'$. 因此, $\Sigma' \vdash \exists x_n A_n(x_n) \to A_n(\mathbf{d}_n)$.

一个项t是基项, 如果t中不含变量. 注意: 由于模型的论域是基项, 以下的讨论是在语法中进行.

断言2: 如果Σ是语言L_2上的一个协调理论, C是Σ在L_2中的一个见证集合, 则存在一个Σ的模型M使得每个M的元素是L_2上的基项.

根据第一基本引理, 将Σ扩张为L_2上的一个极大协调理论Σ_1. 则C也是Σ_1在L上的一个见证集合.

不妨假设Σ就是满足Σ_1条件的理论. 我们证明Σ具有模型M.

定义C上一个关系$\sim$: 对任何$\mathbf{c}, \mathbf{d} \in C$,

$$\mathbf{c} \sim \mathbf{d} \text{当且仅当} \mathbf{c} \equiv \mathbf{d} \in \Sigma.$$

由于Σ是极大协调的, 我们有下列

断言3. $\sim$是一个等价关系, 即对任何$\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in C$,

(i) $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}$;

(ii) $\mathbf{c} \sim \mathbf{d}$ 蕴含$\mathbf{d} \sim \mathbf{c}$;

(iii) $\mathbf{c} \sim \mathbf{d}$和$\mathbf{d} \sim \mathbf{e}$蕴含$\mathbf{c} \sim \mathbf{e}$.

证明(i): 设x是一个变量.

$$\begin{array}{ll}
\vdash & x \equiv x \\
\vdash & \forall x(x \equiv x) \\
\vdash & \forall x(x \equiv x) \to \mathbf{c} \equiv \mathbf{c} \\
\vdash & \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}.
\end{array}$$

因此, $\Sigma \vdash \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$. 由极大性, $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$, 所以, $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}$.

证明(ii): 设x, y, z是3个不同的变量.

$$\begin{array}{ll}
\vdash & x \equiv y \to (x \equiv x \to y \equiv x) \\
\vdash & x \equiv x \to (x \equiv y \to y \equiv x) \\
\vdash & x \equiv x \\
\vdash & x \equiv y \to y \equiv x \\
\vdash & \forall x(x \equiv y \to y \equiv x) \\
\vdash & \forall x(x \equiv y \to y \equiv x) \to (\mathbf{c} \equiv y \to y \equiv \mathbf{c}) \\
\vdash & \mathbf{c} \equiv y \to y \equiv \mathbf{c} \\
\vdash & \mathbf{c} \equiv \mathbf{d} \to \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}
\end{array}$$

因此, 如果$\mathbf{c} \equiv \mathbf{d} \in \Sigma$则$\Sigma \vdash \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}$. 由极大性, $\mathbf{d} \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$, 所以, $\mathbf{d} \sim \mathbf{c}$.

类似地证明(iii).

定义商结构

$$U = C/\sim = \{[\mathbf{c}]_\sim : \mathbf{c} \in C\},$$

其中$[\mathbf{c}]_\sim$是$\mathbf{c}$在等价关系$\sim$中所在的等价类. 下面我们用$[\mathbf{c}]$表示$[\mathbf{c}]_\sim$.

定义解释I.

(a) 设$\mathbf{d}$是L_2中的一个常量符号.

$$\begin{array}{ll} \vdash & \mathbf{d} \equiv \mathbf{d} \\ \vdash & \exists x(\mathbf{d} \equiv x). \end{array}$$

由于C是Σ在L_2上的见证集合, 存在一个$\mathbf{c} \in C$使得

$$\Sigma \vdash \exists x(\mathbf{d} \equiv x) \to \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}.$$

因此, $\Sigma \vdash \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}$, 且$\mathbf{d} \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$.

定义

$$\mathbf{d}^I = [\mathbf{c}].$$

(b) 设$\mathbf{c}$为C中的一个常量符号, 则定义

$$\mathbf{c}^I = [\mathbf{c}].$$

(c) 设$\mathbf{f}$是L_2上一个n-元函数符号. 对任何$[\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n] \in U$, 定义

$$\mathbf{f}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n]) = [\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n)].$$

则$\mathbf{f}^I$是良定的. 事实上这不是良定的, 因为$\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n)$不是$C$中的元素, $[\mathbf{c}]$只有对C中的元素$\mathbf{c}$才有意义. 类似上述证明, 我们可以证明: 存在$\mathbf{c} \in C$使得$\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$; 并且$\mathbf{c}$选择不依赖于$\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$的选择, 即, 如果$[\mathbf{d}_1] = [\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{d}_n] = [\mathbf{c}_n]$则$\mathbf{f}(\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_n) \sim \mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n)$. 因此, $[\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n)]$实际上表示的是$[\mathbf{c}]$.

(d) 设$\mathbf{p}$是L_2上一个n-元关系符号. 对任何$[\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n] \in U$, 定义

$$\mathbf{p}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n]) \text{ 当且仅当 } \mathbf{p}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Sigma.$$

这个定义是良定的, 即如果$[\mathbf{c}_1] = [\mathbf{d}_1], ..., [\mathbf{c}_n] = [\mathbf{d}_n]$则$\mathbf{p}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Sigma$当且仅当$\mathbf{p}(\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_n) \in \Sigma$.

断言4. $M = (U, I)$是Σ的一个模型.

我们对句子A的结构作归纳证明:

$$I \models A \text{ 当且仅当 } A \in \Sigma.$$

对原子断言分3种情况: (1) $t \equiv \mathbf{c}$: $t = \mathbf{c}; t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$; (2) $t \equiv s$: (3) $\mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$.

1. 对L_2上的一个基项t和$\mathbf{c} \in C$, $A = t \equiv \mathbf{c}$. 对t作归纳证明:

1.1. 如果t为一个常量符号$\mathbf{d}$: 如果$I \models \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}$, 则存在$\mathbf{c}_1 \in C$使得$\mathbf{d} \equiv \mathbf{c}_1 \in \Sigma$, 且$\mathbf{d}^I = [\mathbf{c}_1]$. 由于$\mathbf{c}^I = [\mathbf{c}]$, 因此$[\mathbf{c}_1] = [\mathbf{c}]$, 即,

$$\begin{array}{l} \mathbf{c}_1 \sim \mathbf{c}, \\ \mathbf{c}_1 \equiv \mathbf{c} \in \Sigma, \\ \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}_1 \in \Sigma, \\ \mathbf{d} \equiv \mathbf{c} \in \Sigma, \end{array}$$

其中$\mathbf{c}_1$是$\exists x(x = \mathbf{d})$的见证.

如果$\mathbf{d} \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$ 则$\mathbf{d}^I = [\mathbf{c}] = \mathbf{c}^I$, 因此$I \models \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}$.

1.2. 如果$t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$: 假设$t_1^I = [\mathbf{c}_1] = \mathbf{c}_1^I, ..., t_n^I = [\mathbf{c}_n] = \mathbf{c}_n^I$. 则$I \models t_1 \equiv \mathbf{c}_1, ..., t_n \equiv \mathbf{c}_n$. 由归纳假设,

$$t_1 \equiv \mathbf{c}_1, ..., t_n \equiv \mathbf{c}_n \in \Sigma. \tag{$*$}$$

如果$I \models \mathbf{f}(t_1, ..., t_n) \equiv \mathbf{c}$, 则$\mathbf{f}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n]) = [\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n)] = [\mathbf{c}]$, 所以$\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$. 由$(*)$, 得$\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$;

如果$\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$,则$\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \equiv \mathbf{c} \in \Sigma$, 即$\mathbf{f}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n]) = [\mathbf{c}]$, 所以$I \models \mathbf{f}(t_1, ..., t_n) \equiv \mathbf{c}$.

2. 对L_2上的基项t和s, $A = t \equiv s$. 设$t^I = [\mathbf{c}_1], s^I = [\mathbf{c}_2]$.

$$\begin{array}{l} I \models t \equiv \mathbf{c}_1, s \equiv \mathbf{c}_2, \\ t \equiv \mathbf{c}_1, s \equiv \mathbf{c}_2 \in \Sigma. \end{array}$$

如果$I \models t \equiv s$则$[\mathbf{c}_1] = [\mathbf{c}_2]$, 即$\mathbf{c}_1 \equiv \mathbf{c}_2 \in \Sigma$, 所以$t \equiv s \in \Sigma$.

如果$t \equiv s \in \Sigma$,则$\mathbf{c}_1 \equiv \mathbf{c}_2 \in \Sigma$,因此,$\mathbf{c}_1 \sim \mathbf{c}_2$, 即$[\mathbf{c}_1] = [\mathbf{c}_2]$, 所以$I \models t \equiv s$.

3. $A = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$.

如果$I \models \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$则$\mathbf{p}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n])$, 其中$t_1^I = [\mathbf{c}_1], ..., t_n^I = [\mathbf{c}_n]$, 即$\mathbf{p}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Sigma$, 所以$\mathbf{p}(t_1, ..., t_n) \in \Sigma$.

如果$\mathbf{p}(t_1, ..., t_n) \in \Sigma$,则$\mathbf{p}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Sigma$, 即$\mathbf{p}^I([\mathbf{c}_1], ..., [\mathbf{c}_n])$在$M$中成立, 所以$I \models \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$.

关于逻辑连接词的情况类似于命题逻辑中的证明, 这里省略.

情况$A = \exists x B(x)$. 如果$I \models A$ 则存在$[\mathbf{c}] \in U$使得$I \models B(x/[\mathbf{c}])$, 因此$I \models B(\mathbf{c})$. 由归纳假设得, $B(\mathbf{c}) \in \Sigma$. 因此, $\Sigma \vdash \exists x B(x)$, 即$A \in \Sigma$.

如果$A \in \Sigma$则由C是Σ在L_2上的见证集合, 存在$\mathbf{c} \in C$使得$\Sigma \vdash \exists x B(x) \to B(\mathbf{c})$. 因此$\Sigma \vdash B(\mathbf{c})$, 且$B(\mathbf{c}) \in \Sigma$. 由归纳假设, $I \models B(\mathbf{c})$, 即$I \models B(x/[\mathbf{c}])$, 且$I \models A$.

□

推论5.3.11 (广义完备性定理) 设Σ是逻辑语言L_2上的一个理论, 则Σ是协调的当且仅当Σ有模型.

□

推论5.3.12 (紧致性定理) L_2中的理论Σ有模型当且仅当Σ的每个有限子集有模型.

□

定义5.3.13 一个推理系统$\vdash$是单调的, 如果对任何公式集合Σ, Δ和公式A, $\Sigma \vdash A$并且$\Sigma \subseteq \Delta$蕴含$\Delta \vdash A$.

谓词逻辑有如下的基本性质:

命题5.3.14 (1) $\vdash$是单调的, 传递的和有限性的.
(2) $\models$ 是单调的, 传递的和可数性的
(3) 存在一个公式A使得A有模型, 但A不具有有限模型.

□

这里, $\vdash$具有有限性是指: 如果对任何一个定理A, 存在一个有限序列$A_1, ..., A_n$是一个证明, 并且$A_n = A$. 而$\models$具有可数性是指, 任给一个公式A, 如果A有模型, 则A具有论域为可数的模型.

5.4 公理系统$\mathbf{A}_2$

谓词逻辑的公理系统$\mathbf{A}_2$由下列公理和推理规则组成:

- **公理**:

(A1) $A \to (B \to A)$;
(A2) $A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
(A4) $\forall x A(x) \to A(t)$, 其中t是在$A(x)$中对x自由的一个项, 即t可替换x;
(A5) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ 如果A中不含任何自由出现的x.

- **推理规则**:

1. (MP, Modus Ponens): 由A和$A \to B$, 推出B;
2. 推广(Gen, generalization): 由A, 推出$\forall x A$.

定义5.4.1 一个公式序列

$$A_1, ..., A_n$$

是谓词理论T的一个证明(proof), 如果每个A_i要么是谓词逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由推理规则(MP,Gen)和前面的公式得到的.

一个公式A是T的定理(theorem), 记为$T \vdash_{axiom} A$, 如果存在T的一个证明$A_1, ..., A_n$使得$A_n = A$. 记$Th(T) = \{A : T \vdash_{axiom} A\}$.

如果$T = \emptyset$则$Th(\emptyset)$称为谓词演算, 或一阶逻辑演算.

命题5.4.2 对任何理论T,

$$Th(\emptyset) \subseteq Th(T).$$

□

这是谓词逻辑的单调性.

例5.4.3 $\vdash_{axiom} \forall x\forall yA \to \forall y\forall xA.$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \forall x\forall yA & (\text{假设})\\
(2) & \forall x\forall yA\to\forall yA & (\text{公理A4})\\
(3) & \forall yA & (1,2,\mathrm{MP})\\
(4) & \forall yA\to A & (\mathrm{A4})\\
(5) & A & (3,4,MP)\\
(6) & \forall xA & (5,\mathrm{Gen})\\
(7) & \forall y\forall xA & (6,\mathrm{Gen}).
\end{array}$$

□

5.4.1 公理推理与形式推理的差别

在形式推理规则中, $\dfrac{\Sigma\vdash A}{\Sigma\vdash B}$是说: 如果对任何解释$I$和赋值$v$, $I,v\models\Sigma$蕴含$I,v\models A$, 则对任何解释J和赋值w, $J,w\models\Sigma$蕴含$J,w\models A$.

在形式理论中, 每个公理是永真的, 即在任何解释I和赋值v下是真的; 形式理论的推理规则是保永真的, 即如果一个句子A是由另外一个或两个句子B通过推理规则得到的, 且B是永真的, 则A是永真的.

如果由A公理推出B, 记为$A\vdash_{axiom} B$, 则对任何解释I, 如果对任何赋值v, $I,v\models A$则对任何赋值v, $I,v\models B$.

对于由A和$A\to B$推出B, 则对任何解释I

对任何赋值v, $I,v\models A, A\to B$
蕴含
对任何赋值v, $I,v\models B$.

对于由$A(x)$推出$\forall xA(x)$, 则对任何解释I,

"对任何赋值v, $I,v\models A(x)$"

蕴含

"对任何赋值v, $I,v\models\forall xA(x)$.

注意: 错误的理解是: 对任何解释I和赋值v,

$$I,v\models A(x)\text{蕴含}I,v\models\forall xA(x).$$

命题5.4.4 如果t在$A(x)$可替换x, 则

$$\forall xA(x)\vdash_{axiom} A(t).$$

□

命题5.4.5 设t在$A(x,t)$可替换x, 则

$$A(t,t)\vdash_{axiom}\exists xA(x,t),$$

其中$A(t,t)$是用t替换$A(x,t)$中所有自由出现的x得到的公式.

□

注意与自然推理系统中规则之间的差别和联系:

$$
\begin{array}{llll}
(\forall^-) & \dfrac{\Sigma \vdash \forall x A(x)}{\Sigma \vdash A(t)} & (\forall^-_w) & \dfrac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(t)} \\
(\exists^+) & \dfrac{\Sigma \vdash A(t)}{\Sigma \vdash \exists x A(x)} & (\exists^+_w) & \dfrac{\vdash A(t)}{\vdash \exists x A(x)},
\end{array}
$$

其中x不在Σ中出现, $_w$表示减弱的情况, 即Σ为空集的情况.

定义5.4.6 一个谓词理论是一个谓词公式的集合.

一个理论中不同于谓词逻辑公理的公式称为该谓词理论的真公理.

Peano**算术理论**: 设$L_{PA} = \{', \mathbf{0}, =\}$.

$$
\begin{array}{l}
x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3); \\
x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'; \\
\mathbf{0} \neq x_1'; \\
x_1' = x_2' \to x_1 = x_2; \\
A(\mathbf{0}) \wedge \forall x (A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x),
\end{array}
$$

其中$A(x)$是L_{PA}上任何公式. 这个公理系统称为Peano算术, 记为PA.

定义5.4.7 设T是一个谓词理论. T的一个模型是L_2的一个解释, 在这个解释下所有T的公理为真.

定义5.4.8 一个谓词理论T是协调的, 如果不存在公式A使得A和$\neg A$是T的定理; 否则T是不协调的.

推论5.4.9 谓词演算是协调的.

□

对于不协调的理论T, 每个公式都是T的定理.

命题逻辑中的推导定理在谓词逻辑中不成立: 对任何公式A, B, 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$ 则$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$. 因为, 存在公式$A$ 使得$A \vdash_{axiom} \forall x A$是成立的, 但$\vdash_{axiom} A \to \forall x A$不一定成立.

比如: 设T为谓词演算, $A = \mathbf{p}(x)$. 设论域中含有2个元素a, b, 并且解释I使得$a \in \mathbf{p}^I, b \notin \mathbf{p}^I$. 定义赋值$v$为$x^v = a$. 则

$$
\begin{array}{l}
v \models \mathbf{p}(x); \\
v \not\models \forall x \mathbf{p}(x).
\end{array}
$$

定理5.4.10 (推导定理) 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$, 并且在证明$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$中没有用到推广规则, 则有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

□

推论5.4.11 如果A是封闭公式, 并且$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$, 则有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

□

命题5.4.12 对任何公式A, B, $\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall xA \leftrightarrow \forall xB)$.

证明

$$\begin{array}{l}
\forall x(A \to B) \\
\forall xA \\
A \to B \\
A \\
B \\
\forall xB \\
\forall x(A \leftrightarrow B), \forall xA \vdash \forall xB \\
\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall xA \to \forall xB \\
\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall xB \to \forall xA \\
\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall xA \leftrightarrow \forall xB \\
\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall xA \leftrightarrow \forall xB).
\end{array}$$

□

谓词逻辑的形式推理与命题逻辑的形式推理在可计算性方面的差别:

• 命题逻辑定理集合是可判定的: 因为一个公式只含有限多个命题变元, 与公式的真假值相关的赋值也只有有限多个. 通过枚举有限多个赋值下公式的真假值从而判断公式是否是一个永真公式;

• 谓词逻辑定理集合是半可判定的: 一个公式所涉及的代数结构可能是无穷的. 其半可判定性从下一节的Gentzen推理系统中可以看出.

5.5 Gentzen推理系统

给定一个模型$M = (U, I)$和赋值$v, \Gamma \Rightarrow \Delta$在$(M, v)$下满足, 记为$I, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$I, v \models \Gamma$蕴含$I, v \models \Delta$, 其中

• $I, v \models \Gamma$ 如果对每个公式$A \in \Gamma, I, v \models A$;

• $I, v \models \Delta$ 如果对某个公式$B \in \Delta, I, v \models B$;

定义

$$v(\Gamma) = \min\{v(A) : A \in \Gamma\};$$
$$v(\Delta) = \max\{v(B) : B \in \Delta\}.$$

例5.5.1 $\Rightarrow \neg\exists y \forall x(p(x, y) \leftrightarrow \neg p(x, x))$是一个矢列式.

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何模型$M$和赋值$v$,

$$I, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

5.5.1 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2$

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2$由一个公理和若干个推理规则组成[5,6,7,8,9].

• **公理**:

$$\frac{\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ 是原子公式的集合.

- 逻辑连接词的推理规则:

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg B, \Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

- 量词的推理规则:

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B(x), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta}$$

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma, A(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\exists^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta}$$

其中t是一个项, x是一个不自由出现在Γ和Δ中的新的变量符号.

定义5.5.2 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是可证的, 记为$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个序列$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ 使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n$, $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{G}_2$中的一个推理规则得到的.

例5.5.3 无穷长的证明例子:

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), A(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1), A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2), A(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), A(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1), A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2), \exists y A(\mathbf{c}_2, y) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), A(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1), A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), A(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1), \exists y A(\mathbf{c}_1, y) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), A(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \exists y A(\mathbf{c}, y) \Rightarrow \\
A(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \Rightarrow \\
\exists y A(\mathbf{a}, y) \Rightarrow \\
\forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow
\end{array}$$

例5.5.4 无穷长的证明例子:

$$
\begin{array}{l}
\vdots \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), B(\mathbf{c},\mathbf{c}_1), B(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2), B(\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), B(\mathbf{c},\mathbf{c}_1), B(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2), \forall y B(\mathbf{c}_2, y) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), B(\mathbf{c},\mathbf{c}_1), B(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), B(\mathbf{c},\mathbf{c}_1), \forall y B(\mathbf{c}_1, y) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), B(\mathbf{c},\mathbf{c}_1) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}), \forall y B(\mathbf{c}, y) \\
\Rightarrow B(\mathbf{a},\mathbf{c}) \\
\Rightarrow \forall y B(\mathbf{a}, y) \\
\Rightarrow \exists x \forall y B(x, y)
\end{array}
$$

例5.5.5 非无穷长的证明例子:

$$
\begin{array}{l}
\Rightarrow A(\mathbf{c},\mathbf{c}) \\
\Rightarrow \exists y A(\mathbf{c}, y) \\
\Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)
\end{array}
$$

和

$$
\begin{array}{l}
A(\mathbf{c},\mathbf{c}) \Rightarrow \\
\forall y A(\mathbf{c}, y) \Rightarrow \\
\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow
\end{array}
$$

从以上例子, 我们可以看出: $(\forall^R)$和$(\exists^L)$产生的一个常量符号, 运用到$(\exists^R)$和$(\forall^L)$中. $(\forall^R)$和$(\exists^L)$一旦产生过一个常量符号, 相应的公式就不再使用了, 如同$(\wedge^L)$等这样的逻辑连接词规则一样. 而$(\exists^R)$和$(\forall^L)$一直在那里, 一旦有新的常量符号出现就使用一次.

产生常量符号的规则:

$$
\frac{\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta} \quad \frac{\Gamma, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta;}
$$

假设存在一个常量符号$\mathbf{c}$. 则有

$$
\frac{\Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta}
$$

假设存在两个常量符号$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$.

$$
\frac{\left[\begin{array}{l}\Gamma, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta\end{array}\right.}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\left[\begin{array}{l}\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_2), \Delta\end{array}\right.}{\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta}
$$

5.5.2 可靠性和完备性

定理5.5.6 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性. 给定一个模型M和一个赋值v.

对于公理, 假设$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, 其中$\Gamma, \Delta$是原子公式的集合. 假设$M, v \models \Gamma$. 则, 存在一个原子公式$l$使得$l \in \Gamma \cap \Delta$, 并且根据归纳假设, $M, v \models l$, 因此, $M, v \models \Delta$.

对于$(\forall^L)$, 假设$M, v \models \Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta$. 为了证明$M, v \models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta$, 假设$M, v \models \Gamma, \forall x A(x)$. 则对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M, v_{x/a} \models A(x)$. 令$a = t^{I,v}$, 我们有

$$M, v_{x/t^{I,v}} \models A(x),$$

即, $M, v \models A(t)$. 根据归纳假设, 我们有$M, v \models \Delta$.

对于$(\forall^R)$, 假设$M, v \models \Gamma \Rightarrow B(x), \Delta$. 为了证明$M, v \models \Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta$, 假设$M, v \models \Gamma$. 根据归纳假设, $M, v \models B(x), \Delta$. 如果$M, v \models \Delta$则$M, v \models \forall x B(x), \Delta$. 否则, 假设$M, v \models B(x)$. 因为$x$不在$\Gamma$和$\Delta$中出现, 对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M, v_{x/a} \models \Gamma$, 并且, $M, v_{x/a} \models B(x)$. 即对于模型M的论域中的任意元素a, $M, v_{x/a} \models B(x)$. 因此, 我们有$M, v \models \forall x B(x)$.

□

为了证明完备性定理, 我们仍然采用命题逻辑中完备性定理的证明思路, 即, 给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 将$\Gamma, \Delta$中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式:

- 如果每个原子矢列式是一个公理, 那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明;
- 如果有某个矢列式不是一个公理, 那么可以构造一个赋值v是$v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

比较

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \quad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$
$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

对应地,

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(x), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta}$$

变成

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(\mathbf{c}_1), ..., A(\mathbf{c}_n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(\mathbf{c}), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta};$$

对偶地, 我们有

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \quad \begin{array}{l} (\vee_1^R)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta} \\ (\vee_2^R)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta} \end{array}$$

相应地

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma, A(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\exists^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x), \Delta}$$

变成

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\exists^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(\mathbf{c}_1), ..., A(\mathbf{c}_n), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x), \Delta}$$

其中$\mathbf{c}$是一个新的常量符号, $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$是现有的常量符号.

定理5.5.7 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 为简单起见, 我们假设逻辑语言中不含函数符号.

给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 我们将构造一棵树$T$, 使得要么

(i) 对T的每个枝ξ, 存在ξ的叶节点上的一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, 使得$\Gamma' \cap \Delta' \neq \emptyset$; 要么

(ii) 存在一个模型M和一个赋值v, 使得$M, v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow \Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$为原子的, 或者$\Gamma', \forall x A(x) \Rightarrow \Delta'$或$\Gamma' \Rightarrow \exists x B(x), \Delta'$使得出现在$\xi$上的常量符号$\mathbf{c}$均使用过, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$
\begin{cases}
\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \neg A \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\Gamma_1, B \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \neg B, \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1(\mathbf{c}), [\forall x A_1(x)] \Rightarrow \Delta_1 \\ \forall x A_1(x)\text{使用过}\mathbf{c} \end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, [\forall x A_1(x)] \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \& \forall x A_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c}) \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}), \Delta_1 \\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中} \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta_1 \\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中} \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \exists x A_1(x) \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}), [\exists x B_1(x)], \Delta_1 \\ \exists x B_1(x)\text{使用过}\mathbf{c} \end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow [\exists x B_1(x)], \Delta_1 \in \xi \\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \& \exists x B_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c}) \end{array}\right.
\end{cases}
$$

其中不同于逻辑连接词, 矢列式$\Gamma_1, [\forall x A_1(x)] \Rightarrow \Delta_1$中的公式$\forall x A_1(x)$表示这个矢列式使用一个常量符号$\mathbf{c}$以后仍然保留, 因为对以后出现的常量符号, 它仍然需要使用. 类似地, 对于矢列式$\Gamma_1 \Rightarrow [\exists x B_1(x)], \Delta_1$.

如果我们将

$$
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_2, \Delta_1 \end{array}\right.
$$

看作

$$
\Gamma_1, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \qquad \Gamma_1 \Rightarrow B_1, B_2, \Delta_1
$$

那么树T的每个节点上有且只有一个矢列式.

定理5.5.8 如果对T的每个枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$为$\mathbf{G}_2$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理5.5.9 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$, 使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$ 均不是$\mathbf{G}_2$的公理, 则存在一个模型M和一个赋值v使得$M, v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝, 使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{G}_2$的公理.

定义公式集合

$$
\begin{array}{l} \Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Gamma', \\ \Theta^R = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta', \end{array}
$$

以及一个模型$M=(U,I)$和赋值v如下:

- U为所有出现在ξ中的常量符号的集合;
- 对每个常量符号$\mathbf{c}, I(\mathbf{c})=\mathbf{c}$,并且对每个$n$-元谓词符号$p$,

$$I(p)=\{(\mathbf{c}_1,...,\mathbf{c}_n):p(\mathbf{c}_1,...,\mathbf{c}_n)\in\Theta^L\};$$

- $v(x)=\mathbf{c}$, 其中$\mathbf{c}\in U$.

对节点$\Gamma'\Rightarrow\Delta'\in\xi$作归纳, 我们证明$v(\Gamma')=1$(即$M,v\models\Gamma'$) 并且$v(\Delta')=0$(即$M,v\not\models\Delta'$).

情况 1. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2,\neg A_1\Rightarrow\Delta_2\in\eta$. 则$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个直接子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2\Rightarrow A_1,\Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2,A_1)=0$. 因此, $v(\Gamma_2,\neg A_1)=1$并且$v(\Delta_2)=0$.

情况 2. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2\Rightarrow\neg B_1,\Delta_2\in\eta$. 则$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个直接子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2,B_1\Rightarrow\Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2,B_1)=1$并且$v(\Delta_2)=0$. 因此, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2,\neg B_1)=0$.

情况 3. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2,\forall xA_1(x)\Rightarrow\Delta_2\in\eta$. 则对每个$c\in U$, $\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2',A_1(c),[\forall xA_1(x)]\Rightarrow\Delta_2'$. 由归纳假设, 对每个$c\in U$, $v(\Gamma_2',A_1(c))=1$并且$v(\Delta_2')=0$. 因此, $v(\Gamma_2,\forall xA_1(x))=1$并且$v(\Delta_2)=0$.

情况 4. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2\Rightarrow\forall xB_1(x),\Delta_2\in\eta$. 则$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个直接子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2\Rightarrow B_1(c),\Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2,B_1(c))=0$. 因此, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2,\forall xB_1(x))=0$.

情况 5. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2,\exists xA_1(x)\Rightarrow\Delta_2\in\eta$. 则$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2',A_1(c)\Rightarrow\Delta_2'$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2,A_1(c))=1$并且$v(\Delta_2)=0$. 因此, $v(\Gamma_2,\exists xA_1(x))=1$并且$v(\Delta_2)=0$.

情况 6. $\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_2\Rightarrow\exists xB_1(x),\Delta_2\in\eta$. 则对每个$c\in U$, $\Gamma'\Rightarrow\Delta'$有一个直接子节点$\in\xi$包含矢列式$\Gamma_2'\Rightarrow B_1(c),[\exists xB_1(x)],\Delta_2'$. 由归纳假设,$v(\Gamma_2')=1$并且$v(\Delta_2',B_1(c))=0$. 因此, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2,\exists xB_1(x))=0$.

关于逻辑连接词的验证类似于命题逻辑中相应的验证.

□

由完备性定理的证明, 我们得到如下的

推论5.5.10 *谓词逻辑是半可判定的, 即存在一个算法枚举出所有的谓词逻辑矢列式定理.*

证明 由证明树的构造可以看出: 如果$\Gamma\Rightarrow\Delta$是一个定理, 则有限步内构造停止; 否则构造过程要么在有限步内停止并告诉我们该矢列式不是定理, 要么构造过程不停止.

□

因此, 树的构造过程(完备性定理的证明)也是一个判定过程.

5.5.3 完备性定理证明的解释

如何理解这些规则以及规则在完备性定理证明中的作用？假设只有有限多个项$t_1, ..., t_n$, 那么

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\exists^R)\ \frac{\left[\begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow B(t_1), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B(t_2), \Delta \\ \cdots \\ \Gamma \Rightarrow B(t_n), \Delta \end{array}\right.}{\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta}$$

其中[表示或者, {表示同时成立.

因此, 如果对某个不出现在Γ和Δ中的常量符号$\mathbf{c}$, 具有$\models \Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta$; 如果对某个常量符号$\mathbf{c}$, 均有$\models \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta$. 对偶地, 如果对某个常量符号$\mathbf{c}$, 具有$\models \Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta$; 如果对某个不出现$\Gamma$和$\Delta$的常量符号$\mathbf{c}$, 有$\models \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta$.

在构造证明树的过程中, 遇到$\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta$, 我们找一个新的常量符号$\mathbf{c}$使得$\Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta$. 而遇到$\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta$, 我们对每个出现的常量符号$\mathbf{d}$有一个矢列式$\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{d}), \Delta$.

$$\begin{array}{lcl} \Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta & \qquad & \Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta \\ \qquad\Bigg| & & \qquad\Bigg| \\ \Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta & & \begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{d}_1), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{d}_2), \Delta \\ \cdots \\ \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{d}_n), \Delta \end{array} \end{array}$$

其中$\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_n$是当前出现在证明树中的常量符号.

对偶地, 每个$i \leq n$,

$$(\forall^L)\ \frac{\left[\begin{array}{l} \Gamma, A(\mathbf{d}_1) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A(\mathbf{d}_2) \Rightarrow \Delta \\ \cdots \\ \Gamma, A(\mathbf{d}_n) \Rightarrow \Delta \end{array}\right.}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta}$$

因此, 如果对某个常量符号$\mathbf{c}$, 有$\models \Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta$ 那么$\models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta$; 如果对某个不出现在$\Gamma$和$\Delta$中的一个常量符号$\mathbf{c}$, 有$\models \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta$ 那么$\models \Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta$.

在构造证明树的过程中, 遇到$\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta$, 我们对每个出现的常量符号$\mathbf{c}$ 有一个下节点$\Gamma, A(\mathbf{c}) \Rightarrow \Delta$; 而遇到$\Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta$, 我们找一个新的常量符号$\mathbf{c}$使得$\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta$.

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta & \qquad & \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta \\
\Big| & & \Big| \\
\Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}), \Delta & & \begin{array}{l} \Gamma, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta \\ \cdots \\ \Gamma, A(\mathbf{c}_n) \Rightarrow \Delta \end{array}
\end{array}
$$

对于两个规则分别为($\exists^L$)和($\exists^R$), 那么左规则产生一个新的常量符号, 应用到右规则上. 这时, 左规则不再有任何作用了, 但右规则需要对以后产生的常量符号作用. 比如,假设两个左规则和一个右规则, 则有下列分解:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma_1, \exists x A_1(x) \Rightarrow \Delta_1 & \\
\Gamma_1, A_1(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta_1; & \Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta \\
 & \left[\begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_2), \Delta. \end{array} \right. \\
\Gamma_2, \exists x A_2(x) \Rightarrow \Delta_2 & \\
\Gamma_2, A_2(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta_2; &
\end{array}
$$

图示如下

$$
\begin{array}{cccc}
\Gamma_1, \exists x A_1(x) \Rightarrow \Delta_1 & \Gamma_2, \exists x A_2(x) \Rightarrow \Delta_2 & \qquad & \Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta \\
\Big| & \Big| & & \Big| \\
\Gamma_1, A_1(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta_1 & \Gamma_2, A_2(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta_2 & & \begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow B(\mathbf{c}_2), \Delta \end{array}
\end{array}
$$

对于两个规则分别为($\forall^L$)和($\forall^R$), 那么右规则产生一个新的常量符号, 应用到左规则上. 这时, 右规则不再有任何作用了, 但左规则需要对以后产生的常量符号作用. 比如,假设两个右规则和一个左规则, 则有下列分解:

$$
\begin{array}{ll}
 & \Gamma_1 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_1 \\
\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta & \Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}_1), \Delta_1; \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta; \end{array} \right. & \begin{array}{l} \\ \Gamma_2 \Rightarrow \forall x B_2(x), \Delta_2 \end{array} \\
 & \Gamma_2 \Rightarrow B_2(\mathbf{c}_2), \Delta_2.
\end{array}
$$

图示如下

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta & \Gamma_1 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_1 & \Gamma_2 \Rightarrow \forall x B_2(x), \Delta_2 \\
\Big| & \Big| & \Big| \\
\begin{array}{l} \Gamma, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta \end{array} & \Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}_1), \Delta_1 & \Gamma_2 \Rightarrow B_2(\mathbf{c}_2), \Delta_2
\end{array}
$$

比如,假设两个右规则和一个左规则, 则有下列分解:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma_1 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_1 & \Gamma_3, \exists x A_1(x) \Rightarrow \Delta_3 \\
\Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}_1), \Delta_1; & \Gamma_3, A_1(\mathbf{d}_1) \Rightarrow \Delta_3; \\
 & \\
\Gamma_2 \Rightarrow \forall x B_2(x), \Delta_2 & \Gamma_4, \exists x A_2(x) \Rightarrow \Delta_4 \\
\Gamma_2 \Rightarrow B_2(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta_2; & \Gamma_4, A_2(\mathbf{d}_2) \Rightarrow \Delta_4; \\
 & \\
\Gamma_5, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta_5 & \Gamma_6 \Rightarrow \exists x B(x), \Delta_6 \\
\left[\begin{array}{l}
\Gamma_5, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta_5 \\
\Gamma_5, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta_5 \\
\Gamma_5, A(\mathbf{d}_1) \Rightarrow \Delta_5 \\
\Gamma_5, A(\mathbf{d}_2) \Rightarrow \Delta_5;
\end{array}\right. &
\left[\begin{array}{l}
\Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta_6 \\
\Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{c}_2), \Delta_6 \\
\Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{d}_1), \Delta_6 \\
\Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{d}_2), \Delta_6.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

图示如下

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Gamma_1, \exists x A_1(x) \Rightarrow \Delta_1 \\ \Big| \\ \Gamma_1, A_1(\mathbf{d}_1) \Rightarrow \Delta_1 \end{array}
&
\begin{array}{c} \Gamma_2, \exists x A_2(x), \Delta_2 \\ \Big| \\ \Gamma_2, A_2(\mathbf{d}_2) \Rightarrow \Delta_2 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Gamma_1 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_1 \\ \Big| \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_1(\mathbf{c}_1), \Delta_1 \end{array}
&
\begin{array}{c} \Gamma_2 \Rightarrow \forall x B_2(x), \Delta_2 \\ \Big| \\ \Gamma_2 \Rightarrow B_2(\mathbf{c}_2), \Delta_2 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Gamma_5, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta_5 \\ \Big| \\ \Gamma_5, A(\mathbf{c}_1) \Rightarrow \Delta_5 \\ \Gamma_5, A(\mathbf{c}_2) \Rightarrow \Delta_5 \\ \Gamma_5, A(\mathbf{d}_1) \Rightarrow \Delta_5 \\ \Gamma_5, A(\mathbf{d}_2) \Rightarrow \Delta_5 \end{array}
&
\begin{array}{c} \Gamma_6 \Rightarrow \exists x B(x), \Delta_6 \\ \Big| \\ \Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{c}_1), \Delta_6 \\ \Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{c}_2), \Delta_6 \\ \Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{d}_1), \Delta_6 \\ \Gamma_6 \Rightarrow B(\mathbf{d}_2), \Delta_6 \end{array}
\end{array}
$$

对于$\exists x(A_1(x)\vee A_2(x))$和$\exists xA_1(x)\vee\exists xA_2(x)$, 我们有下列分解:

$$
\begin{array}{l}
\Gamma,\exists x(A_1(x)\vee A_2(x))\Rightarrow\Delta\\
\Gamma,A_1(\mathbf{c})\vee A_2(\mathbf{c})\Rightarrow\Delta\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,A_1(\mathbf{c})\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_2(\mathbf{c})\Rightarrow\Delta;\end{array}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma\Rightarrow\exists x(B_1(x)\vee B_2(x)),\Delta\\
\Gamma\Rightarrow B_1(c)\vee B_2(\mathbf{c}),\Delta\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{c}),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_2(\mathbf{c}),\Delta\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\Gamma,\exists xA_1(x)\vee\exists xA_2(x)\Rightarrow\Delta\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,\exists xA_1(x)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\exists xA_2(x)\Rightarrow\Delta\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,A_1(\mathbf{c}_1)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_2(\mathbf{c}_2)\Rightarrow\Delta;\end{array}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma\Rightarrow\exists xB_1(x)\vee\exists xB_2(x),\Delta\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow\exists xB_1(x),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow\exists xB_2(x),\Delta\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{c}_1),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_2(\mathbf{c}_1),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{c}_2),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_2(\mathbf{c}_2),\Delta\end{array}\right.
\end{array}
$$

对于$\forall x(A_1(x)\vee A_2(x))$ 和$\forall xA_1(x)\vee\forall xA_2(x)$, 我们有下列分解:

$$
\begin{array}{l}
\Gamma,\forall x(A_1(x)\vee A_2(x))\Rightarrow\Delta\\
\Gamma,A_1(\mathbf{d})\vee A_2(\mathbf{d})\Rightarrow\Delta\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,A_1(\mathbf{d})\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_2(\mathbf{d})\Rightarrow\Delta;\end{array}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma\Rightarrow\forall x(B_1(x)\vee B_2(x)),\Delta\\
\Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{d})\vee B_2(\mathbf{d}),\Delta\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{d}),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_2(\mathbf{d}),\Delta\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\Gamma,\forall xA_1(x)\vee\forall xA_2(x)\Rightarrow\Delta\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,\forall xA_1(x)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\forall xA_2(x)\Rightarrow\Delta\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma,A_1(\mathbf{d}_1)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_1(\mathbf{d}_2)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_2(\mathbf{d}_1)\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,A_2(\mathbf{d}_2)\Rightarrow\Delta;\end{array}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma\Rightarrow\forall xB_1(x)\vee\forall xB_2(x),\Delta\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow\forall xB_1(x),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow\forall xB_2(x),\Delta\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma\Rightarrow B_1(\mathbf{d}_1),\Delta\\ \Gamma\Rightarrow B_2(\mathbf{d}_2),\Delta\end{array}\right.
\end{array}
$$

自然推理系统与Gentzen推理系统之间的对应关系如下表所示:

自然推理	Gentzen推理	自然推理	Gentzen推理
(ref)	$(\mathbf{A})$	$(+)$	
$(\neg^-)$			
$(\to^-)$		$(\to^+)$	$(\to^R)$
$(\wedge^-)$		$(\wedge^+)$	$(\wedge^L)$
$(\vee^-)$	$(\vee^L)$	$(\vee^+)$	$(\vee^L)$
$(\leftrightarrow^-)$		$(\leftrightarrow^+)$	$(\leftrightarrow^R)$
$(\forall^-)$		$(\forall^+)$	$(\forall^R)$
$(\exists^-)$	$(\exists^L)$	$(\exists^+)$	$(\exists^R)$

5.6 表式证明系统

同样, Gentzen推理系统可以看作两个表式证明系统的并.

5.6.1 表式证明系统$\mathbf{T}_2$

给定一个模型$M=(U,I)$和赋值$v,\Gamma\Rightarrow$在(M,v)下满足, 记为$I,v\models\Gamma\Rightarrow$, 如果$I,v\not\models\Gamma$, 其中$I,v\not\models\Gamma$ 如果对某个公式$A\in\Gamma,I,v\not\models A$.

$\Gamma\Rightarrow$是有效的, 记为$\models\Gamma\Rightarrow$, 如果对任何模型$M=(U,I)$和任何赋值$v,I,v\models\Gamma\Rightarrow$.

表式证明系统$\mathbf{T}_2$由下列公理和推理规则组成.

- 公理:

$$\frac{\mathbf{E}l(l,\neg l\in\Gamma)}{\Gamma\Rightarrow}$$

其中Γ 是文字的集合.

- 逻辑连接词的推理规则:

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow}{\Gamma,\neg\neg A\Rightarrow}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma,A_1\Rightarrow}{\Gamma,A_1\wedge A_2\Rightarrow} \qquad \frac{\Gamma,\neg A_1\Rightarrow \quad \Gamma,\neg A_2\Rightarrow}{\Gamma,\neg(A_1\wedge A_2)\Rightarrow}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma,A_2\Rightarrow}{\Gamma,A_1\wedge A_2\Rightarrow}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma,A_1\Rightarrow\quad\Gamma,A_2\Rightarrow}{\Gamma,A_1\vee A_2\Rightarrow} \qquad (\neg\vee_1^L)\ \frac{\Gamma,\neg A_1\Rightarrow}{\Gamma,\neg(A_1\vee A_2)\Rightarrow}$$

$$(\neg\vee_2^L)\ \frac{\Gamma,\neg A_2\Rightarrow}{\Gamma,\neg(A_1\vee A_2)\Rightarrow}$$

- 量词的推理规则:

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma,A(t)\Rightarrow}{\Gamma,\forall xA(x)\Rightarrow} \qquad (\neg\forall^L)\ \frac{\Gamma,\neg A(x)\Rightarrow}{\Gamma,\neg\forall xA(x)\Rightarrow}$$

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma,A(x)\Rightarrow}{\Gamma,\exists xA(x)\Rightarrow} \qquad (\neg\exists^L)\ \frac{\Gamma,A(t)\Rightarrow}{\Gamma,\neg\exists xB(x)\Rightarrow}$$

其中t是一个项, x是一个不自由出现在Γ中的新的变量符号.

定义5.6.1 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow$ 是可证的, 记为$\vdash\Gamma\Rightarrow$, 如果存在一个序列$\Gamma_1\Rightarrow,...,\Gamma_n\Rightarrow$ 使得$\Gamma_n=\Gamma$, 并且对每个$1\leq i\leq n,\Gamma_i\Rightarrow$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{T}_2$中的一个推理规则得到的.

5.6.2 可靠性和完备性

定理5.6.2 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma\Rightarrow$, 如果$\vdash_{\mathbf{T}_2}\Gamma\Rightarrow$ 则$\models_{\mathbf{T}_2}\Gamma\Rightarrow$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性. 给定一个模型M和一个赋值v.

对于公理, 假设存在一个文字l使得$l,\neg l\in\Gamma$, 其中Γ是文字的集合. 则要么$M,v\models l$, 要么$M,v\models\neg l$. 因此, $M,v\models\Gamma\Rightarrow$.

对于$(\forall^L)$, 假设$M, v \models \Gamma, A(t) \Rightarrow$. 为了证明$M, v \models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow$, 假设$M, v \models \Gamma$并且$M, v \not\models A(t)$. 则我们有

$$M, v \not\models \forall x A(x),$$

即$M, v \models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow$.

对于$(\exists^L)$, 假设$M, v \models \Gamma, A(x) \Rightarrow$. 为了证明$M, v \models \Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow$, 假设$M, v \models \Gamma$. 根据归纳假设, $M, v \not\models A(x)$. 因为x不自由出现在Γ中, 对于模型M的论域中的任意元素a, $M, v_{x/a} \models \Gamma$, 并且, $M, v_{x/a} \not\models A(x)$. 即对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M, v_{x/a} \not\models A(x)$. 因此, 我们有$M, v \not\models \exists x A(x)$, 即$M, v \models \Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow$.

类似地我们可以证明其它情况.

□

定理5.6.3 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 如果$\models \Gamma \Rightarrow$ 则$\vdash \Gamma \Rightarrow$.

证明 为简单起见, 我们假设逻辑语言中不含函数符号.

给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 我们将构造一棵树T, 使得要么

(i) 对T的每个枝ξ, 存在ξ的叶节点上的一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow$是一个公理; 要么

(ii) 存在一个模型M和一个赋值v, 使得$M, v \models \Gamma$.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow$为原子的, 或者$\Gamma', \forall x A(x) \Rightarrow$或$\Gamma', \neg\exists x A(x) \Rightarrow$使得出现在$\xi$上的常量符号$\mathbf{c}$均使用过, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\begin{cases}
\Gamma_1, A \Rightarrow & \text{如果}\Gamma_1, \neg\neg A \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, \neg A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, \neg A_2 \Rightarrow\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, \neg A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, \neg A_2 \Rightarrow\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, A_1(\mathbf{c}), [\forall x A_1(x)] \Rightarrow_1 \\ \forall x A_1(x)\text{使用过}\mathbf{c}\end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, [\forall x A_1(x)] \Rightarrow_1 \in \xi \\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \&\forall x A_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c})\end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, \neg A_1(\mathbf{c}) \Rightarrow \\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \neg\forall x A_1(x) \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, A_1(\mathbf{c}) \Rightarrow \\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \exists x A_1(x) \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, \neg A_1(\mathbf{c}), [\neg\exists x A_1(x)] \Rightarrow \\ \neg\exists x A_1(x)\text{使用过}\mathbf{c}\end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, [\neg\exists x A_1(x)] \Rightarrow \in \xi \\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \&\neg\exists x A_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c})\end{array}\right.
\end{cases}$$

其中不同于逻辑连接词, 矢列式$\Gamma_1, [\forall x A_1(x)] \Rightarrow$中的公式$\forall x A_1(x)$表示这个矢列式使用一个常量符号$\mathbf{c}$以后仍然保留, 因为对以后出现的常量符号, 它仍然需要使用. 类似地, 对于矢列式$\Gamma_1, [\neg\exists x B_1(x)] \Rightarrow$.

定理5.6.4 如果对T的每个枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$为$\mathbf{T}_2$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树.

定理5.6.5 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$, 使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$ 均不是$\mathbf{T}_2$的公理, 则存在一个模型M和一个赋值v使得$M, v \models \Gamma$.

证明 设ξ为T的枝, 使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$不是$\mathbf{T}_2$的公理.

定义公式集合

$$\Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \in \xi} \Gamma'.$$

以及一个模型$M = (U, I)$和赋值v如下:

- U为所有出现在ξ中的常量符号的集合;
- 对每个常量符号$\mathbf{c}$, $I(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$,并且对每个$n$-元谓词符号$p$,

$$I(p) = \{(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) : p(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Theta^L\};$$

- $v(x) = \mathbf{c}$, 其中$\mathbf{c} \in U$.

对节点$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$作归纳, 我们证明$v(\Gamma') = 1$(即$M, v \models \Gamma'$).

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \neg\neg A_1 \Rightarrow \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Gamma_2, A_1 \Rightarrow$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(A_1) = v(\neg\neg A_1) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \neg A_1) = 1$.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \forall x A_1(x) \Rightarrow \in \eta$. 则对每个$c \in U$, $\Gamma' \Rightarrow$有一个子节点$\in \xi$包含矢列式$\Gamma_2', A_1(c), [\forall x A_1(x)] \Rightarrow$. 由归纳假设, 对每个$c \in U$, $v(\Gamma_2', A_1(c)) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \forall x A_1(x)) = 1$.

情况 3. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \neg\forall x A_1(x) \Rightarrow \in \eta$. 则存在一个不出现在$\Gamma_2$中的常量符号$c$使得$\Gamma' \Rightarrow$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Gamma_2, \neg A_1(c) \Rightarrow$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, \neg A_1(c)) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \neg\forall x A_1(x)) = 1$.

情况 4. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \exists x A_1(x) \Rightarrow_2 \in \eta$. 则存在一个不出现在$\Gamma_2$中的常量符号$c$使得$\Gamma' \Rightarrow$有一个子节点$\in \xi$包含矢列式$\Gamma_2', A_1(c) \Rightarrow$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, A_1(c)) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \exists x A_1(x)) = 1$.

情况 5. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \neg\exists x A_1(x) \Rightarrow \in \eta$. 则对每个$c \in U$, $\Gamma' \Rightarrow$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Gamma_2', \neg A_1(c), [\neg\exists x A_1(x)] \Rightarrow$. 由归纳假设,$v(\Gamma_2', \neg A_1(c)) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \neg\exists x A_1(x)) = 1$.

关于逻辑连接词的验证类似于命题逻辑中相应的验证.

□

5.6.3 表式证明系统$\mathbf{S}_2$

给定一个模型$M=(U,I)$和赋值$v, \Rightarrow\Delta$在(M,v)下满足, 记为$I,v\models\Rightarrow\Delta$, 如果$I,v\models\Delta$, 其中$I,v\models\Delta$ 如果对某个公式$B\in\Delta, I,v\models B$.

表式证明系统$\mathbf{S}_2$由一个公理和若干个推理规则组成.

- 公理:

$$\frac{\mathbf{E}l(l,\neg l\in\Delta)}{\Rightarrow\Delta}$$

其中Δ 是文字的集合.

- 逻辑连接词的推理规则:

$$(\neg\neg^R)\ \frac{\Rightarrow B,\Delta}{\Rightarrow\neg\neg B,\Delta}$$

$$(\wedge^R)\ \frac{\Rightarrow B_1,\Delta\quad\Rightarrow B_2,\Delta}{\Rightarrow B_1\wedge B_2,\Delta}\qquad(\neg\wedge_1^R)\ \frac{\Rightarrow\neg B_1,\Delta}{\Rightarrow\neg(B_1\wedge B_2),\Delta}\qquad(\neg\wedge_2^R)\ \frac{\Rightarrow\neg B_2,\Delta}{\Rightarrow\neg(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\vee_1^R)\ \frac{\Rightarrow B_1,\Delta}{\Rightarrow B_1\vee B_2,\Delta}\qquad(\vee_2^R)\ \frac{\Rightarrow B_2,\Delta}{\Rightarrow B_1\vee B_2,\Delta}\qquad(\neg\vee^R)\ \frac{\Rightarrow\neg B_1,\Delta\quad\Rightarrow\neg B_2,\Delta}{\Rightarrow\neg(B_1\vee B_2),\Delta}$$

- 量词的推理规则:

$$(\forall^R)\ \frac{\Rightarrow B(x),\Delta}{\Rightarrow\forall xB(x),\Delta}\qquad(\neg\forall^R)\ \frac{\Rightarrow\neg B(t),\Delta}{\Rightarrow\neg\forall xB(x),\Delta}$$

$$(\exists^R)\ \frac{\Rightarrow B(t),\Delta}{\Rightarrow\exists xB(x),\Delta}\qquad(\neg\exists^R)\ \frac{\Rightarrow\neg B(x),\Delta}{\Rightarrow\neg\exists xB(x),\Delta}$$

其中t是一个项, x是一个不自由出现在Δ中的新的变量符号.

定义5.6.6 一个矢列式$\Rightarrow\Delta$ 是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{S}_2}\Rightarrow\Delta$, 如果存在一个序列$\Rightarrow\Delta_1,...,\Rightarrow\Delta_n$ 使得$\Delta_n=\Delta$, 并且对每个$1\le i\le n,\Rightarrow\Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{S}_2$中的一个推理规则得到的.

5.6.4 可靠性和完备性

定理5.6.7 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$, 如果$\vdash\Rightarrow\Delta$ 则$\models\Rightarrow\Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性. 给定一个模型M和一个赋值v.

对于公理, 假设存在文字l使得$l,\neg l\in\Delta$, 其中Δ是文字的集合. 则要么$M,v\models l$, 要么$M,v\models\neg l$. 因此, $M,v\models\Delta$.

对于$(\forall^R)$, 假设$M,v\models\Rightarrow B(x),\Delta$. 根据归纳假设, $M,v\models B(x),\Delta$. 如果$M,v\models\Delta$则$M,v\models\Rightarrow\forall xB(x),\Delta$. 否则, 假设$M,v\models B(x)$. 因为$x$不在$\Delta$中出现, 对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M,v_{x/a}\models B(x)$. 即对于模型M的论域中的任意元素a, $M,v_{x/a}\models B(x)$, 即$M,v\models\forall xB(x)$. 因此, $M,v\models\Rightarrow\forall xB(x),\Delta$.

对于$(\neg\forall^R)$, 假设$M,v\models\Rightarrow\neg B(t),\Delta$. 根据归纳假设, $M,v\models\neg B(t),\Delta$. 如果$M,v\models\Delta$则$M,v\models\Rightarrow\neg\forall xB(x),\Delta$. 否则, 假设$M,v\models\neg B(t)$. 因此存在模型$M$的论域中的一个元素$a=t^{I,v}$使得$M,v_{x/a}\models\neg B(x)$, 即$M,v\models\neg\forall xB(x)$. 因此, $M,v\models\Rightarrow\neg\forall xB(x),\Delta$.

类似地, 我们可以证明其余情况.

$\square$

定理5.6.8 (完备性定理) *对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$, 如果$\models\Rightarrow\Delta$ 则$\vdash\Rightarrow\Delta$.*

证明 为简单起见, 我们假设逻辑语言中不含函数符号.

给定一个矢列式$\Rightarrow\Delta$, 我们将构造一棵树T, 使得要么

(i) 对T的每个枝ξ, 存在ξ的叶节点上的一个矢列式$\Rightarrow\Delta'$是一个公理; 要么

(ii) 存在一个模型M和一个赋值v使得$M,v\not\models\Delta$.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Rightarrow\Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$'\Rightarrow\Delta'$为原子的, 或者$\Rightarrow\neg\forall xB(x),\Delta'$或$\Rightarrow\exists xB(x),\Delta'$使得出现在$\xi$上的常量符号$\mathbf{c}$均使用过, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Rightarrow B,\Delta_1 & \text{如果}\Rightarrow\neg\neg B,\Delta_1\in\xi\\
\left\{\begin{array}{l}\Rightarrow B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow B_2,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow B_1\wedge B_2,\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow\neg B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow\neg B_2,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow\neg(B_1\wedge B_2),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow B_2,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow B_1\vee B_2,\Delta_1\in\xi\\
\left\{\begin{array}{l}\Rightarrow\neg B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow\neg B_2,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow\neg(B_1\vee B_2),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow B_1(\mathbf{c}),\Delta_1\\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}_1\Rightarrow\forall xB_1(x),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow\neg B_1(\mathbf{c}),[\neg\forall xB_1(x)],\Delta_1\\ \neg\forall xB_1(x)\text{使用过}\mathbf{c}\end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l}\Rightarrow[\neg\forall xB_1(x)],\Delta_1\in\xi\\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta\subseteq\xi\\ \&\neg\forall xB_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c})\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow B_1(\mathbf{c}),[\exists xB_1(x)],\Delta_1\\ \exists xB_1(x)\text{使用过}\mathbf{c}\end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l}\Rightarrow[\exists xB_1(x)],\Delta_1\in\xi\\ \mathbf{Ec}(\mathbf{c}\text{出现在某个节点}\eta\subseteq\xi\\ \&\exists xB_1(x)\text{没有使用过}\mathbf{c})\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow\neg B_1(\mathbf{c}),\Delta_1\\ \mathbf{c}\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow\neg\exists xB_1(x),\Delta_1\in\xi
\end{array}\right.$$

其中不同于逻辑连接词, 矢列式$\Rightarrow[\neg\forall xB_1(x)],\Delta_1$中的公式$\neg\forall xB_1(x)$表示这个矢列式使用一个常量符号$\mathbf{c}$以后仍然保留, 因为对以后出现的常量符号, 它仍然需要使用. 类似地, 对于矢列式$\Rightarrow[\exists xB_1(x)],\Delta_1$.

定理5.6.9 *如果对T的每个枝$\xi\subseteq T$, 存在一个矢列式$\Rightarrow\Delta'\in\xi$为$\mathbf{S}_2$的公理, 则T是$\Rightarrow\Delta$的一个证明树.*

证明 由T的定义, T是$\Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理5.6.10 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$, 使得每个矢列式$\Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{S}_2$的公理, 则存在一个模型$M$和一个赋值$v$使得$M, v \not\models \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝, 使得每个矢列式$\Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{S}_2$的公理.
定义公式集合

$$\Theta^R = \bigcup_{\Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta',$$

以及一个模型$M = (U, I)$和赋值v如下:

- U为所有出现在ξ中的常量符号的集合;
- 对每个常量符号$\mathbf{c}, I(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$,并且对每个$n$-元谓词符号$p$,

$$I(p) = \{(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) : \neg p(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \Theta^R\};$$

- $v(x) = \mathbf{c}$, 其中$\mathbf{c} \in U$.

对节点$\Rightarrow \Delta' \in \xi$作归纳, 我们证明$v(\Delta') = 0$(即$M, v \not\models \Delta'$).

情况 1. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \neg\neg B, \Delta_2 \in \eta$. 则$\Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Rightarrow B_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Delta_2, B_1) = 0$. 因此, $v(\neg\neg B_1, \Delta_2) = 0$.

情况 2. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则存在一个新的常量符号$c$使得$\Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Rightarrow B_1(c), \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Delta_2, B_1(c)) = 0$. 因此, $v(\Delta_2, \forall x B_1(x)) = 0$.

情况 3. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \neg\forall x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则对每个常量符号$c \in U$, $\Rightarrow \Delta'$有一个子节点$\in \xi$包含矢列式$\Rightarrow \neg B_1(c), [\neg\forall x B_1(x)], \Delta_2'$. 由归纳假设, 对每个$c \in U$, $v(\neg B_1(c), \Delta_2') = 0$. 因此, $v(\neg\forall x B_1(x), \Delta_2) = 0$.

情况 4. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \exists x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则对每个$c \in U$, $\Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点$\in \xi$包含矢列式$\Rightarrow B_1(c), [\exists x B_1(x)], \Delta_2'$. 由归纳假设,$v(\Delta_2', B_1(c)) = 0$. 因此, $(\Delta_2, \exists x B_1(x)) = 0$.

情况 5. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \neg\exists x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则存在一个新的常量符号$c$使得$\Rightarrow \Delta'$有一个子节点$\in \xi$包含矢列式$\Rightarrow \neg B_1(c), \Delta_2'$. 由归纳假设, $v(\neg A_1(c), \Delta_2) = 0$. 因此, $v(\neg\exists x A_1(x), \Delta_2) = 0$.

关于逻辑连接词的验证类似于命题逻辑中相应的验证.

□

5.7 逻辑程序

每个谓词逻辑理论可以转换为一个逻辑程序[10,11].

5.7.1 前束范式

类似于命题逻辑中的合取范式和析取范式, 谓词逻辑中有前束范式.

定义5.7.1 一个公式A是前束范式的, 如果

$$A = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n B(x_1, ..., x_n),$$

其中Q_i或者是$\forall$或者是$\exists$, 并且$B(x_1, ..., x_n)$不含量词.

设在公式A中把$QxB(x)$的某些出现替换为$QyB(y)$而得到的公式A', 使得

$$A \models |A';$$
$$A \vdash |A'.$$

定理5.7.2 对任何公式A, 存在一个前束范式B使得

$$A \models |B;$$
$$A \vdash |B.$$

证明 我们通过下面的等价公式,

等式的左边	等式的右边	条件
$\neg\forall xA(x)$	$\exists\neg A(x)$	
$\neg\exists xA(x)$	$\forall x\neg A(x)$	
$A \wedge QxB(x)$	$Qx(A \wedge B(x))$	x不出现在A中
$A \vee QxB(x)$	$Qx(A \vee B(x))$	x不出现在A中
$\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$	$\forall x(A(x) \wedge B(x))$	
$\exists xA(x) \vee \exists xB(x)$	$\exists x(A(x) \vee B(x))$	
$Q_1xA(x) \wedge Q_2yB(y)$	$Q_1xQ_2y(A(x) \wedge B(y))$	x不出现在B中 y不出现在A中
$Q_1xA(x) \vee Q_2yB(y)$	$Q_1xQ_2y(A(x) \vee B(y))$	x不出现在B中 y不出现在A中

将每个公式转换为一个前束范式.

□

Skolem化: 对每个前束范式

$$B = \forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n\exists xA(x_1, ..., x_n, x),$$

引入一个新的函数符号$\mathbf{f}^B$使得对任何$x_1, ..., x_n$, $\mathbf{f}^B(x_1, ..., x_n)$表示满足$A(x_1, ..., x_n, x)$的$x$. 这样,

$$B \vdash \forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_nA(x_1, ..., x_n, \mathbf{f}^B(x_1, ..., x_n))$$
$$\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_nA(x_1, ..., x_n, \mathbf{f}^B(x_1, ..., x_n)) \vdash B.$$

这个过程称为Skolem化(Skolemization).

通过Skolem化, 每个公式等值于一个无存在量词的前束范式. 而无存在量词的前束范式是一个逻辑程序.

比如,

$$\exists x\forall yp(x, y) \to \forall y\exists xp(x, y)$$
$$\exists x\forall yp(x, y) \to \forall w\exists zp(z, w)$$
$$\forall x\exists y\neg p(x, y) \vee \forall w\exists zp(z, w)$$
$$\forall x\exists y\forall w\exists z(\neg p(x, y) \vee p(z, w)$$
$$\forall x\forall w(\neg p(x, \mathbf{f}(x)) \vee p(\mathbf{g}(x, w), w));$$

或者

$$\begin{array}{l}\exists x \forall y p(x,y) \rightarrow \forall y \exists x p(x,y)\\ \forall x \neg p(x,\mathbf{f}(x)) \vee \forall w p(\mathbf{g}(w),w)\\ \forall x \forall w(\neg p(x,\mathbf{f}(x)) \vee p(\mathbf{g}(w),w)).\end{array}$$

Skolem化保持可满足性. 也就是:

定理5.7.3 给定一个公式A, 设A的Skolem化以后的公式为A'. 如果存在一个谓词逻辑的模型M使得$M \models A$则存在一个模型M'使得$M' \models A'$.

证明 假设

$$M \models \forall x_1, ..., x_n \exists y p(x_1, ..., x_n, y).$$

存在一个解释I'使得

$$M' \models \forall x_1, ..., x_n p(x_1, ..., x_n, \mathbf{f}(x_1, ..., x_n)),$$

其中$\mathbf{f}$是新的函数符号.

设M的论域为U, 定义U上的n-元函数F使得对任何$a_1, ..., a_n \in U$, 如果存在$a \in U$使得$p^I(a_1, ..., a_n, a)$, 则选取某个这样的a, 定义

$$F(a_1, ..., a_n) = a.$$

$F(a_1, ..., a_n)$是一个函数.

I'是一个解释扩展I使得$\mathbf{f}^I = F$. 由定义, 对任何$a_1, ..., a_n \in U$, $F(a_1, ..., a_n) \in U$, 并且

$$p^I(a_1, ..., a_n, F(a_1, ..., a_n)),$$

即

$$I \models \forall x_1, ..., x_n p(x_1, ..., x_n, \mathbf{f}(x_1, ..., x_n)).$$

$\square$

5.7.2 逻辑程序

公式$A(x_1, ..., x_n)$的泛化是指公式$\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, ..., x_n)$, 如果$A(x_1, ..., x_n)$中所含的自由变元在$\{x_1, ..., x_n\}$之中.

一个子句是下列形式的公式的泛化:

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_n \rightarrow l'_1 \vee \cdots \vee l'_m.$$

我们将这个子句记为

$$\pi = l'_1, ..., l'_m \leftarrow l_1, ..., l_n.$$

定义5.7.4 给定一个子句π,

- 称为一个**规则**, 如果$m \geq 1$且$n \geq 1$, $l'_1, ..., l'_m \leftarrow l_1, ..., l_n$;
- 称为一个**事实**, 如果$n = 0$, 即$l'_1, ..., l'_m \leftarrow$;
- 称为一个**目标**, 如果$m = 0$, 即$\leftarrow l_1, ..., l_n$.

在子句$l'_1, ..., l'_m \leftarrow l_1, ..., l_n$中, $l'_1, \cdots, l'_m$称为**规则头**, 记为$head(\pi)$; $l_1, ..., l_n$称为**规则体**, 记为$body(\pi)$. 每个l_j称为**子目标**.

一个逻辑程序是子句的一个集合. 换言之, 一个子句的集合称为一个逻辑程序.

定义5.7.5 一个子句π是

• Horn的, 如果$m \leq 1$并且每个子目标是一个原子公式, 即$q \leftarrow p_1, ..., p_n$;

• 一般Horn的, 如果$m \leq 1$; 即$l' \leftarrow l_1, ..., l_n$;

• 正析取的, 如果$m \geq 1$且每个子目标是一个原子公式; 即$l'_1, ..., l'_m \leftarrow p_1, ..., p_n$;

• 析取的, 如果$m \geq 1$.

一个逻辑程序是Horn的, 如果每个子句是Horn的. 类似地定义一般Horn程序, 正析取程序和析取程序.

一个逻辑程序的Herbrand域是语言$\mathcal{L}$ 上所有基项的集合, 记为$U_{\mathcal{L}}$.

(1) 如果$\mathbf{c}$是常量符号, 则$\mathbf{c} \in U_{\mathcal{L}}$;

(2) 如果$\mathbf{f}$是函数符号, 并且$t_1, ..., t_n \in U_{\mathcal{L}}$则$\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) \in U_{\mathcal{L}}$.

比如, 设$\mathcal{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, 则

$$U_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}.$$

如果$\mathcal{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{f}\}$, 则

$$U_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))), ...\}.$$

为阅读方便, 下面将用黑体表示函数符号, 斜体p, q, r表示关系或原子公式.

$HB_{\mathcal{L}}(HB)$为语言$\mathcal{L}$上所有的基原子公式的集合, 称为Herbrand基底(base).

为了描述逻辑程序的语义, 我们需要:

1．一个非空的定义域表示所考虑的真实世界的对象;

2．一个映射将函数符号和谓词符号映射到给定定义域上的函数和关系;

3．变量符号的指派函数, 将变量符号映射到定义域中的元素; 和

4．计算项所表示的对象和一个公式的真假值的过程.

逻辑程序语义是由逻辑语言所决定的:

• 定义域是Herbrand域的子集;

• 常量符号的解释就是自己;

• 函数符号的解释是将任何一个项映射到另一个项的函数.

定义5.7.6 一个逻辑程序Γ的Herbrand解释是Herbrand基的一个子集$I \subseteq HB$.

解释I满足原子公式p,记为$I \models p$, 如果$p \in I$. 因此,

$$I \models A \text{ 如果} \begin{cases} I \not\models B & \text{当}A = \neg B \\ I \models B\text{或者}I \models C & \text{当}A = B \vee C \\ \mathbf{A}t \in U_{\mathcal{L}}(I \models B(t)) & \text{当}A = B(x). \end{cases}$$

给定一个逻辑程序Γ, 它的一个Herbrand解释I是Γ的一个Herbrand模型, 如果对任何替换Θ和子句π, $body(\pi)\Theta \subseteq I$ 蕴涵$head(\pi)\Theta \cap I \neq \emptyset$.

例5.7.7 设$\mathcal{L}=\{\mathbf{a},\mathbf{g},p,q,r\}$, 且

$$\begin{aligned}\Pi=\{p(x)\vee q(\mathbf{g}(x)) &\leftarrow r(x),\\ r(\mathbf{a}) &\leftarrow \}.\end{aligned}$$

则

$$U_{\mathcal{L}}=\{\mathbf{a},\mathbf{g}(\mathbf{a}),\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{a})),...\},$$

且

$$HB_{\mathcal{L}}=\{p(\mathbf{a}),q(\mathbf{a}),r(\mathbf{a}),p(\mathbf{g}(\mathbf{a})),q(\mathbf{g}(\mathbf{a})),r(\mathbf{g}(\mathbf{a})),...\}.$$

因此, 一个解释$I=\{r(\mathbf{a}),p(\mathbf{a})\}$是$\Pi$的一个模型. 同样, $I'=\{r(\mathbf{a}),q(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\}$也是$\Pi$的一个模型.

□

Γ的一个Herbrand模型也是Γ的一个模型. 反过来对逻辑程序也成立.

命题5.7.8 给定一个逻辑程序Γ, Γ有一个模型当且仅当Γ 有一个Herbrand模型.

证明 设M'为Γ的一个模型. 定义一个Γ的Herbrand模型M如下:

$$M=\{p(t_1,...,t_n):M'\models p(t_1,...,t_n)\}.$$

我们可以对子句的长度作归纳, 证明M是Γ的一个Herbrand模型.

□

注意: 如果Γ是一个谓词逻辑理论, 但不是逻辑程序, 该命题可能不成立. 比如, 设$\mathcal{L}=\{\mathbf{0},',p\}$, 并且

$$\Gamma=\{\neg p(\mathbf{0}),\neg p(\mathbf{0}'),\neg p(\mathbf{0}''),...,\neg p(\mathbf{0}^{(n)}),...,\exists xp(x)\}.$$

则Γ是协调的.

设论域$U=\{0,1,2,3,...,\omega\}, p^I=\{\omega\}$. 设解释为$\mathbf{0}^I=0,(t')^I=t^I+1$. 则$I\models\Gamma$.

但Γ没有Herbrand模型. 因为Herbrand域为$\{\mathbf{0},\mathbf{0}',...,\mathbf{0}^{(n)},...\}$. 没有Herbrand基

$$\{p(\mathbf{0}),p(\mathbf{0}'),...,p(\mathbf{0}^{(n)}),...\}$$

的子集满足Γ.

□

例5.7.9 设$\mathcal{L}=\{\mathbf{a},p\}$, 并且

$$\Gamma=\{p(\mathbf{a}),\exists x\neg p(x)\}.$$

Π是可满足的. 定义

$$U=\{0,1\},p^I=\{0\},\mathbf{a}^I=0,$$

则$I\models\Pi$.

$HB_{\mathcal{L}}=\{p(\mathbf{a})\}$只有两个子集:

(i) $\emptyset$, 和

(ii) $\{p(\mathbf{a})\}$.

而两个子集均不是Γ的模型.

□

定理5.7.10 如果Π是不可满足的, 则存在Π的基子句的有限子集是不可满足的.

□

设$\mathcal{L}=\{p,q\}$, 并且

$$A=\neg(\forall x(p(x)\to q(x))\to(\forall xp(x)\to\forall xq(x))).$$

将A转换为子句:

$$\forall x(p(x)\to q(x))\wedge\forall xp(x)\wedge\exists x\neg q(x).$$

引入新的函数$\mathbf{a}$, 得到逻辑程序:

$$\Gamma=\{q(x)\leftarrow p(x),p(y)\leftarrow,\neg q(\mathbf{a})\leftarrow\}.$$

基子句的集合为

$$\{q(\mathbf{a})\leftarrow p(\mathbf{a}),p(\mathbf{a})\leftarrow,\neg q(\mathbf{a})\leftarrow\}.$$

则Γ有1个模型: $\{p(\mathbf{a}),\neg q(\mathbf{a})\}$.

作为一个应用, 谓词演算的半可判定性也可以如下证明. 谓词演算中公式A的永真性的半可判定过程如下:

(1) 将公式A转换为$\neg A$;

(2) 将$\neg A$转换为子句形式;

(3) 生成ground子句所有的有限子集; 并且

(4) 对每个有限子集, 验证有限子集是否是不可满足的.

如果每个子集是不可满足的, 则A是永真式.

5.7.3 Horn逻辑程序

一个Horn逻辑程序Π的最小模型语义定义为所有Π的逻辑推论的基原子公式的集合:

$$LMS(\Pi)=\{A:\Pi\models A\},$$

其中$\Pi\models A$表示: 每个Π的Herbrand模型也是A的Herbrand模型.

定理5.7.11 设Γ为一个Horn逻辑程序, 并且$\mathcal{M}(\Gamma)$表示Γ的所有Herbrand模型的集合. 则模型的交性质成立, 即,

$$LMS(\Gamma)=\bigcap_{M\in\mathcal{M}(\Gamma)}M$$

是Γ的一个Herbrand模型.

证明

$$\begin{aligned} p \in LMS(\Pi) & \Leftrightarrow \Pi \models p \\ & \Leftrightarrow \Pi \cup \{\neg p\}\text{是不协调的} \\ & \Leftrightarrow \Pi \cup \{\neg p\}\text{没有Herbrand模型} \\ & \Leftrightarrow \neg p\text{在所有}\Pi\text{的Herbrand模型中为假} \\ & \Leftrightarrow p\text{包含在所有}\Pi\text{的模型} \\ & \Leftrightarrow p \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}(\Pi)} M. \end{aligned}$$

□

这是Horn逻辑程序的基本性质: 一个Horn逻辑程序Γ的两个Herbrand模型的交集也是Γ的Herbrand模型.

设Γ为一个Horn逻辑程序. 定义一个映射$f_\Gamma : 2^{HB} \to 2^{HB}$ 为

$$f_\Gamma(X) = \{head(\pi)\Theta : \pi \in \Gamma, body(\pi)\Theta \subseteq X\},$$

其中Θ为一个替换.

命题5.7.12 如果Γ为一个Horn逻辑程序, 则f_Γ是单调的和有限的.

证明 根据Kleene固定点引理, f_Γ^ω是Γ的最小的Herbrand模型, 其中f_Γ^ω是f_Γ的最小固定点:

$$\begin{aligned} & f_\Gamma^0 = \emptyset, \\ & f_\Gamma^1 = f_\Gamma(\emptyset), \\ & \ldots \\ & f_\Gamma^{n+1} = f_\Gamma(f_\Gamma^n), \\ & \ldots \\ & f_\Gamma^\omega = \bigcup_{n\in\omega} f_\Gamma^n. \end{aligned}$$

□

注意: 对于允许逻辑程序具有无穷多个子句的时候, 到达固定点的最小序数可能不是ω. □

5.8 知识表示中的谓词逻辑

在用谓词逻辑表示知识[12,13]时, 我们常常容易出现一些逻辑问题. 下面我们列出其中的一些.

- "所有天鹅是白的"表示为

$$\forall x(x\text{是白的} \wedge x\text{是天鹅}).$$

这样世界上也就只有天鹅而没有其他东西了.

"有些天鹅是白的"表示为

$$\exists x(x\text{是天鹅} \to x\text{是白的})$$

是错误的, 因为只要有一个东西不是天鹅, 整个句子是真的.

在自然语言中, 全称的析取(蕴含)句子和存在的合取句子是有意义的, 反之不然, 即通常全称的合取句子和存在的析取句子没有太大的意思. 因为

$$\forall x(x\text{是天鹅} \wedge x\text{是白的}) \Leftrightarrow \forall x(x\text{是天鹅}) \wedge \forall x(x\text{是白的}),$$
$$\exists x(\neg x\text{是天鹅} \vee x\text{是黑的}) \Leftrightarrow \exists x\neg(x\text{是天鹅}) \vee \exists x\neg(x\text{是白的}).$$

• 蕴含式$A \to B$只意味着要么A为假要么B为真, 并不是指可以由A 推出B, 或者B是A为真的结果等等.

如果$A \vdash B$则在任何解释下, A为真蕴涵B为真.

因此, $A \to B$与$A \vdash B$是不等价的. 因为前者是公式, 而后者是元语言中的断言.

由推理定理, 当A, B为句子时, $A \vdash B$和$\vdash A \to B$是等价的.

句子

> 如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎; 如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.

如果表示为

$$\text{阑尾炎}(x) \leftrightarrow (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x))$$

则是不正确的. 其中

$$\text{阑尾炎}(x) \to (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x))$$

是正确的. 但

$$(\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x)) \to \text{阑尾炎}(x)$$

是不正确的. 因为前件: 如果你不压腹部的, 压右腹部$(x) \to$ 松开疼(x)自然为真; 但这时候不能说你得了阑尾炎.

正确的形式为

$$(\text{压右腹部}(x) \wedge \text{松开疼}(x)) \to \text{阑尾炎}(x).$$

即

$$\text{压右腹部}(x) \to (\text{松开疼}(x) \leftrightarrow \text{阑尾炎}(x)).$$

• 用项替换受限变量.

比如, $\exists x A(x)$表示“有一个人活了120岁”. 我们不能用任何一个项(尤其是不含自由变元符号的项)去代替变量符号x. 例如, $\exists x A(t)$表示“存在一个人, 张三活了120岁”, 其中t表示“张三”.

You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you cannot fool all the people all the time.

设

$p(x)$表示x是一个人;
$t(y)$表示y是一个时间点;
$q(x, y)$表示你在时间y能愚弄x.

那么, 第一句表示为,

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y(t(y) \to q(x,y))),$$

因为$\exists x(p(x) \wedge \forall y(t(y) \to q(x,y)))$ iff

$$\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y)).$$

则整个句子表示为

$$\begin{aligned}&\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))\\ &\wedge \exists y \forall x(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))\\ &\wedge \neg \forall x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y)).\end{aligned}$$

也可以表示为

$$\begin{aligned}&\neg(\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y)) \wedge \exists y \forall x(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))\\ &\to \forall x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))).\end{aligned}$$

即That you fool some of the people all of the time and you fool all the people some of the time,**does not imply** that you can fool all the people all the time.

注意: $\exists x \forall y A(x,y) \wedge \exists y \forall x A(x,y) \to \forall x \forall y A(x,y)$不是永真式.

如果表示为:

$$\begin{aligned}&\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y)) \wedge \exists y \forall x(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y))\\ &\to \neg \forall x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y))).\end{aligned}$$

即**If** you fool some of the people all of the time and you fool all the people some of the time, **then** you cannot fool all the people all the time.

或者

$$\begin{aligned}&\Diamond \exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y)) \wedge \Diamond \exists y \forall x(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y))\\ &\wedge \neg \Diamond \forall x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to p(x,y))).\end{aligned}$$

即**It is possible** that you fool some of the people all of the time, **It is possible** that you fool all the people some of the time, and **It is impossible** that you cannot fool all the people all the time.

参考文献:

[1] Jacobson N. *Basic Algebra*[M]. 2nd ed., W. H. Freeman and Company, 1985.

[2] Manin Yu.I. *A Course in Mathematical Logic*[M]. Graduate Text in Mathematics 053, 1977.

[3] Barwise J. An Introduction to First-Order Logic[M]//Barwise,J.(ed.), *Handbook of Mathematical Logic. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Amsterdam, NL: North-Holland. 1982.

[4] Chang C., Keisler H. *Model Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*[M]. 3rd ed., Elsevier, 1990.

[5] Li W. *Mathematical Logic, Foundations for Information Science*[M]. Progress in Computer Science and Applied Logic, vol.25, Birkhäuser, 2010.

[6] Ebbinghaus H.D., Flum J., Thomas W. *Mathematical Logic*[M]. Springer-Verlag, 1984.

[7] Gallier J. *Logic For Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*[M].

[8] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. *Computability and Logic*(5th ed.)[M]. Cambridge University Press, 2007.

[9] Takeuti G. Proof Theory [M]. Dove Books on Mathematics, 1977.

[10] Lloyd J.W. *Foundations of Logic Programming*[M]. 2nd ed., Springer-Verlag, 1987.

[11] Kowalski R.A. The early years of logic programming[J]. *Communications of the ACM*,1988, 31:38-43.

[12] Sowa J.F. *Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations*[M]. Brooks/Cole: New York, 2000.

[13 Davis E. *Representations of Commonsense Knowledge*[M]. Elsevier, 1990.

[14] Jech T. *Set Theory*[M]. 3rd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer,2003.

[15] Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic, Stanford Encyclopedia of Philosophy at plato.stanford.edu.

第六章6

Peano算术与Gödel不完备性定理

谓词逻辑的完备性定理也称为Gödel完备性定理. 这个完备性是关于逻辑系统的. 比如谓词逻辑的完备性定理是说永真的公式是可证的, 即

- 在自然推理系统中, $\models \Sigma \vdash A$ 蕴含$\Sigma \vdash A$是可证的;
- 在公理系统中, $\Sigma \models A$蕴含$\Sigma \vdash A$;
- 在Gentzen推理系统中, $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 蕴含$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

关于逻辑理论也有一个完备性. 一个理论T是完备的, 如果对任何公式A, 或者$T \vdash A$ 或者$T \vdash \neg A$. 比如在命题逻辑中, 在一个赋值下为真的公式集合是完备的, 也就是极大协调的; 在谓词逻辑中, 在一个解释和赋值下为真的公式集合是完备的; 在一个解释下为真的句子集合关于句子是完备的. Gödel不完备性定理[1,2]是说Peano算术理论是不完备的, 即存在一个公式A使得A和$\neg A$都不是Peano算术的定理. 因而, 存在一个公式A在自然数标准模型中是真的而在Peano算术中是不可证的.

6.1 Peano算术

Peano算术语言L_{PA}包含下列符号[3]:

1. 常量符号: $\mathbf{0}$;
2. 函数符号: $\mathbf{s}$ (表示+1的算子); $+, \times$ (表示加法和乘法);
3. 相等关系符号: $\equiv$;
4. 逻辑符号和量词符号: $\neg, \rightarrow, \forall$;
5. 变量符号: $x_0, x_1, x_2, ...$

项定义为:

$$t ::= \mathbf{0}|x|\mathbf{s}t_1|t_1 + t_2|t_1 \times t_2.$$

公式定义为

$$A ::= t_1 \equiv t_1|\neg A_1|A_1 \rightarrow A_2|\forall x A_1(x).$$

由$\mathbf{0}$和$\mathbf{s}$我们可以归纳定义出$+$和$\cdot$:

$$t+r=\begin{cases} t & \text{如果} r=\mathbf{0} \\ \mathbf{s}(t+r_1) & \text{如果} r=\mathbf{s}r_1 \end{cases}$$
$$t\cdot r=\begin{cases} \mathbf{0} & \text{如果} r=\mathbf{0} \\ (t\cdot r_1)+t & \text{如果} r=\mathbf{s}r_1 \end{cases}$$

我们将Peano算术解释到算术的标准结构$\mathbf{N}$中, 其中:
- 论域为自然数集合;
- $\equiv^I$为自然数的相等;
- $\mathbf{0}^I=0$;
- $\mathbf{s}^I=\lambda x.(x+1)$.

给定一个赋值v, 项的解释为:

$$t^{I,v}=\begin{cases} 0 & \text{如果} t=\mathbf{0} \\ v(x) & \text{如果} t=x \\ t_1^{I,v}+1 & \text{如果} t=\mathbf{s}t_1 \\ t_1^{I,v}+t_2^{I,v} & \text{如果} t=t_1+t_2 \\ t_1^{I,v}\times t_2^{I,v} & \text{如果} t=t_1\times t_2 \end{cases}$$

公式A在解释I和赋值v下为真, 记为$\mathbf{N},v\models A$, 如果

$$\begin{cases} t_1^{I,v}=t_2^{I,v} & \text{如果} A=t_1\equiv t_2 \\ \mathbf{N},v\not\models A_1 & \text{如果} A=\neg A_1 \\ \mathbf{N},v\models A_1\Rightarrow \mathbf{N},v\models A_2 & \text{如果} A=A_1\to A_2 \\ \mathbf{A}n\in N(\mathbf{N},v_{x/n}\models A_1(x)) & \text{如果} A=\forall x A_1(x) \end{cases}$$

比如:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\not\models \forall x\exists y(x\equiv \mathbf{s}y); \\ \mathbf{N} &\models \forall x\exists y(x\equiv y+y\vee x\equiv \mathbf{s}(y+y)); \\ \mathbf{N} &\models \forall x\forall y(\mathbf{ss0}\times(x\times x)\equiv(y\times y)\to x\equiv\mathbf{0}). \end{aligned}$$

6.1.1 Peano算术公理系统

Peano算术公理系统PA由下列公理组成:

(S1) $\mathbf{s}x\not\equiv\mathbf{0}$;
(S2) $\mathbf{s}x\equiv\mathbf{s}y\to x\equiv y$;
(S3) $x+\mathbf{0}\equiv x$;
(S4) $x+\mathbf{s}y\equiv\mathbf{s}(x+y)$;
(S5) $x\times\mathbf{0}\equiv\mathbf{0}$;
(S6) $x\times\mathbf{s}y\equiv(x\times y)+x$;
(S7) $A(\mathbf{0})\wedge\forall x(A(x)\to A(\mathbf{s}x))\to\forall xA(x)$,

其中$A(x)$是L_{PA}上任何公式.

Peano算术公理系统PA可以简化为下面的3个公理(模式):

(P1) $\mathbf{s}x \not\equiv \mathbf{0}$;
(P2) $\mathbf{s}x \equiv \mathbf{s}y \to x \equiv y$;
(P3) $A(\mathbf{0}) \wedge \forall x(A(x) \to A(\mathbf{s}x)) \to \forall x A(x)$,
其中$A(x)$是L_{PA}上任何公式.

定义6.1.1 一个L_{PA}上的封闭公式A是PA定理, 如果$PA \vdash_{axiom} A$. 所有PA定理组成的集合, 记为$Th(PA)$, 称为PA理论.

引理6.1.2 对任何项t,s,r, 下面公式是PA的定理:
(1) $t \equiv r \wedge t \equiv s \to r \equiv s$;
(2) $t \equiv r \to t' \equiv r'$;
(3) $\mathbf{0} \not\equiv t'$;
(4) $t' \equiv r' \to t \equiv r$;
(*5) $t + \mathbf{0} \equiv t$;
(6) $t + r' \equiv (t+r)'$;
(7) $t \times \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$;
(8) $t \times r' \equiv (t \times r) + t$.

□

命题6.1.3 对任何项t,s,r, 下面公式是PA的定理:
(1) $t \equiv t$;
(2) $t \equiv r \to r \equiv t$;
(3) $t \equiv r \wedge r \equiv s \to t \equiv s$;
(4) $r \equiv t \wedge s \equiv t \to r \equiv s$;
(5) $t \equiv r \to t + s \equiv r + s$;
(6) $t \equiv \mathbf{0} + t$;
(7) $t' + r \equiv (t+r)'$;
(8) $t + r \equiv r + t$;
(9) $t \equiv r \to s + t \equiv s + r$;
(10) $(t+r) + s \equiv t + (r+s)$;
(11) $t \equiv r \to t \times s \equiv r \times s$;
(12) $\mathbf{0} \cdot t \equiv \mathbf{0}$;
(13) $t' \times r \equiv t \times r + r$.

证明 (1)

$$\begin{array}{l} t + \mathbf{0} \equiv t \\ (t + \mathbf{0} \equiv t) \to (t + \mathbf{0} \equiv t \to t \equiv t) \\ t + \mathbf{0} \equiv t \to t \equiv t \\ t \equiv t. \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{l} t \equiv r \wedge t \equiv t \to r \equiv t \\ t \equiv t \wedge t \equiv r \to r \equiv t \\ t \equiv r \to r \equiv t. \end{array}$$

(5) 对公式$x = y \to x + z = y + z$作归纳证明.

(5.1)

$$
\begin{aligned}
&x+\mathbf{0}=x\\
&y+\mathbf{0}=y\\
&x=y\\
&x+\mathbf{0}=y\\
&x+\mathbf{0}=y+\mathbf{0}\\
&\vdash_{PA} x=y\to x+\mathbf{0}=y+\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

(5.2)

$$
\begin{aligned}
&x=y\to x+z=y+z\\
&x=y\\
&x+z'=(x+z)'\\
&y+z'=(y+z)'\\
&x+z=y+z\\
&(x+z)'=(y+z)'\\
&x+z'=(y+z)'\\
&x+z'=y+z'\\
&\vdash_{PA}(x=y\to x+z=y+z)\to(x=y\to x+z'=y+z').
\end{aligned}
$$

利用归纳公理, 得到

$$\vdash_{PA} \forall z(x=y\to x+z=y+z).$$

利用规则A4, 得到

$$\vdash_{PA} t=r\to t+s=r+s.$$

□

不含自由变元的项称为基项. 在Peano算术中基项只有$\overbrace{\mathbf{s}\cdots\mathbf{s}}^{n\text{-个}\mathbf{s}}\mathbf{0}$, 记为$\mathbf{0}^{(n)}$或者$\mathbf{n}$.

注意: 基项$\mathbf{n}$与自然数n是不同的: 一个是语法中的符号串, 一个是标准模型中的元素. □

我们可以验证PA的每个真公理在$\mathbf{N}$中是真的. **注意**: 我们验证时用到了自然数归纳法.

我们称$\mathbf{N}$为PA的标准模型. 如果PA的一个模型与$\mathbf{N}$不同构, 那么这个模型称为PA的非标准(nonstandard)模型.

定义6.1.4 一个理论T是完备的, 如果对L_{PA}上的任何封闭公式A, 要么$T\vdash A$, 要么$T\vdash\neg A$.

6.2 递归函数

递归函数[4,5]是由原始递归函数得到的. 原始递归函数用来证明Gödel不完备性定理是足够的.

6.2.1 直观算法可计算性

直观地, 我们定义: 一个算法是可机械执行的有限多个指令集合. 由直观算法计算的函数称为直观算法可计算函数. 直观算法可计算函数具有下列特点:

• 一个算法是有限多个指令的集合, 比如任何经典的数学算法可以用有限多个自然语言的词来描述;

• 有一个计算主体, 通常是人, 能够根据指令做相应的计算.

• 有一些设备用来制造、存储和回溯计算中的步骤.

• 设P是指令集合, 而T是计算主体. 则T对P的反应应该是这样的: 对任何给定输入, 计算是离散步骤执行的, 没有使用连续办法或模拟设备.

• T对P的反应应该是这样的: 一个计算的执行是确定的, 没有借助于随机办法或设备,

这样, 给定一个算法, 我们很容易判断这个算法是否满足算法的条件, 是不是一个算法.

由此产生了下列问题: 对(1)输入的大小, (2)指令集合的大小, (3)可用的记忆存储空间的大小, (4)计算主体T的capacity或能力应该有所限制以及(5)一个计算的长度是否应该有一个固定的上界. 这些限制对于可计算函数是多余的.

比如辗转相除法是计算两个自然数的最大公因子的算法.

输入: 自然数n, m

输出: (n, m)

如果$n > m$ 则$[n, m] := [n - m, m]$;

如果$n = m$ 则$(n, m) = n$;

如果$n < m$ 则$[n, m] = [n, m - n]$.

比如,

$$[7, 5] = [2, 5] = [2, 3] = [2, 1] = [1, 1].$$

因此, $(7, 5) = 1$. 即7和5是互素的.

6.2.2 原始递归函数

Dedekind引入定义在自然数集合上函数的研究, 并称其为递归论. 递归定义函数的能力是非常强的, 同时也有其局限性. 这个局限性导致了与Turing可计算性等价的递归函数的定义.

定义6.2.1 一个$(m+1)$-元函数f 是由g 和h通过原始递归定义的, 如果

$$\begin{array}{rcl} f(n_1, ..., n_m, 0) & = & g(n_1, ..., n_m) \\ f(n_1, ..., n_m, n+1) & = & h(n_1, ..., n_m, n, f(n_1, ..., n_m, n)) \end{array}$$

其中g是m-元函数, h是$(m+2)$-元函数.

比如, $+$可以通过s递归定义, 而$\times$可以通过$+$递归定义得到.

定义6.2.2 原始递归函数类是最小的函数类满足下列条件:

1. 包含下列初始函数

$$\begin{array}{l} o(n)=0 \\ s(n)=n+1 \\ p_i^m(n_1,...,n_m)=n_i, 1\le i\le m, \end{array}$$

其中p_i^m称为投影函数.

2. 在复合下封闭, 即, 给定原始递归函数$g_1,...,g_m,h$,

$$f(n_1,...,n_m)=h(g_1(n_1,...,n_m),...,g_m(n_1,...,n_m))$$

也是原始递归的, 其中g,h是m-元函数.

3. 在原始递归下封闭, 即, 给定原始递归函数g和h, 如果f是由g和h通过原始递归定义的, 则f是原始递归的.

一个函数f是原始递归的, 如果f属于原始递归函数类. 大部分数论函数是原始递归的. 比如自然数加法和除法, 素数分解等等都是原始递归的.

定义6.2.3 一个函数f是原始递归函数, 如果存在一个定义函数序列$f_1,f_2,...,f_k$使得对每个$i\le k$, f_i要么是初始函数, 要么前面的函数是通过复合构造或者原始递归构造得到的.

比如, $f(n_1,n_2)=n_1+n_2$是原始递归函数, 因为

$$\begin{array}{l} f_1=\lambda n.n+1 \\ f_2=\lambda n.n \\ f_3=\lambda n_1n_2n_3.n_2 \\ f_4=f_1\circ f_3 \\ \left\{\begin{array}{l} f_5(0,n_2)=f_2(n_2) \\ f_5(n_1+1,n_2)=f_4(n_1,f_5(n_1,n_2)) \end{array}\right. \end{array}$$

则$f_5=f=\lambda n_1n_2.n_1+n_2$.

根据原始递归函数的定义, 我们得到如下的

定理6.2.4 *原始递归函数是全函数.*

证明 我们对原始递归函数的结构作归纳来证明.

很容易看出, 初始函数是全函数.

如果$g_1,...,g_m,h$是全函数, 那么通过复合定义的函数f也是全函数;

如果g,h是全函数, 那么通过递归定义的函数f也是全函数.

□

定义6.2.5 一个自然数子集$A\subseteq N$是原始递归的, 如果其特征函数χ_A是原始递归的.

不是所有直观可计算函数是原始递归的. 换言之, 原始递归函数不是所有的直观算法可计算函数. 比如Ackermann函数$A(m,n)$是一个直观可计算的, 但不是原始递归函数, 其中Ackerman函数定义如下:

$$\begin{cases} f(0,m,n) = m+n; \\ f(1,m,n) = n\cdot m; \\ f(2,m,n) = n^m; \\ f(l+1,m,n) = \text{result of applying } n \text{ to itself } m-1 \text{ times} \\ \qquad\qquad\quad \text{under the } l\text{-th level operation } \lambda n_1 n_2 . f(l,n_1,n_2). \end{cases}$$

或者:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{如果} m=0 \\ A(m-1,1) & \text{如果} m>0 \text{且} n=0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{如果} m>0 \text{ 且} n>0. \end{cases}$$

那么

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{如果} m=0 \\ 2+(n+3)-3 & \text{如果} m=1 \\ 2(n+3)-3 & \text{如果} m=2 \\ 2^{n+3}-3 & \text{如果} m=3 \\ \overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{(n+3)\text{-个}2} -3 & \text{如果} m=4. \end{cases}$$

原始递归函数具有下列特点: 一个函数是原始递归的当且仅当存在一个自然数m 使得如果一个Turing机计算这个函数, 那么Turing机将在$A(m,n)$步内停机, 这里n是原始递归函数的变元之和.

一个变元的原始递归函数是直观算法可枚举的, 即存在一个算法将所有的一元原始递归函数枚举出来, 比如

$$f_0, f_1, ..., f_n, ...$$

我们构造如下矩阵:

	0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
f_0	$f_0(0)$	$f_1(1)$	$f_0(2)$	$\cdots$	$f_0(n)$	$\cdots$
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$\cdots$	$f_1(n)$	$\cdots$
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$\cdots$	$f_2(n)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
f_m	$f_m(0)$	$f_m(1)$	$f_m(2)$	$\cdots$	$f_m(n)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

通过改变对角线上的值, 我们得到下列矩阵:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\
\hline
f_0 & f_0(0)+1 & f_1(1) & f_0(2) & \cdots & f_0(n) & \cdots \\
f_1 & f_1(0) & f_1(1)+1 & f_1(2) & \cdots & f_1(n) & \cdots \\
f_2 & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2)+1 & \cdots & f_2(n) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
f_n & f_n(0) & f_n(1) & f_n(2) & \cdots & f_n(n)+1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

即对角线为

$$
\begin{array}{l}
f_0(0)+1, \\
f_1(1)+1, \\
f_2(2)+1, \\
\cdots \\
f_n(n)+1, \\
\cdots
\end{array}
$$

也是直观算法可计算的. 那么存在一个i使得行

$$f_i(0)=f_0(0)+1, f_i(1)=f_1(1)+1, f_i(2)=f_2(2)+1, ..., f_i(i)=f_i(i)+1, ...$$

即

$$f(i)=f_i(i)+1.$$

矛盾.

因此, 所有原始递归函数不可能是所有的直观算法可计算函数.

这个对角线方法可以推广为: 任给一个可算法枚举的可计算函数集合, 如果该集合中的每个函数是全函数, 那么存在一个直观算法可计算函数不在这个集合中.

因此, 原始递归函数类是直观算法可计算函数类的真子集.

6.2.3 Turing机和Turing可计算函数

一台Turing机由下列几个部分组成:

• 一条分为若干个间隔的带子. 每个间隔包含$\{0,1,B\}$中的一个符号, 其中B表示空间隔. 带子向左右方向均是无穷的. 间隔总是假设包含符号B, 除非我们特意将0,1放在里面.

• 一个能在带子上读/写并且能左右移动的读头. 读头每次只能左移或者右移一个间隔.

• 一个状态记录器, 记录该Turing机的状态. 一台Turing机的状态只有有限多个. 其中有一个特殊状态: 开始状态. 这些状态决定着该机器的动作.

• 一个有限的指令集合, 其中每个指令告诉机器在一个状态下、读头读到某个符号时如何改变间隔中的符号、左移或者右移、改变目前的状态为一个新的状态.

形式地, 一台Turing机M是一个5-元组(Q,Γ,δ,q_0,F), 其中

• Q是有限的非空的状态集合;

• $\Gamma=\{0,1,B\}$是一个有限的、非空的带子符号集合; 其中$B\in\Gamma$是空符号(是唯一一个可以无穷次出现在带子上的符号);

• $\delta:(Q\setminus F)\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ 是一个部分函数, 称为转移函数, 其中L表示左移, R表示右移. 如果δ在当前状态和带子符号下无定义, 则机器停止;

• $q_0\in Q$为初始状态;

• $F\subseteq Q$为终止状态. 这时, 初始状态下的输入被M-接受.

一个构件σ是形为

$$c_1\cdots c_iq_jc_{i+1}\cdots c_n$$

的符号串, 其中$c_i\in\{0,1,B\}$, q_j是当前的状态, 读头指在c_{i+1}所在的间隔上.

一个构件$\sigma=c_1\cdots c_iq_jc_{i+1}\cdots c_n$是终止的, 如果$q_j\in F$.

一个构件序列$\sigma_1,...,\sigma_m$称为一个输入为x的计算, 如果$\sigma_1=q_0\quad\overbrace{1\cdots 1}^{(x+1)\text{-多个1's}}$, 并且对每个$k\le m$,

$$c_{k(i_k+z)}q_{j_k+1}c_{k(i_k+z)}=\begin{cases}c_{k(i_k-1)}q_{j_k+1}c_{ki_k}i' & \text{如果}(q_{j_k},c_{k(i_{k+1})},q_{j_k+1},i',L)\in M\\ i'q_{j_k+1}c_{k(i_k+2)} & \text{如果}(q_{j_k},c_{k(i_{k+1})},q_{j_k+1},i',R)\in M\\ c_{k(i_k)}q_{j_k+1}i' & \text{如果}(q_{j_k},c_{k(i_{k+1})},q_{j_k+1},i',-)\in M\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_k&=c_{k1}\cdots c_{ki_k}q_{j_k}c_{k(i_k+1)}\cdots c_{kn_k}\\ \sigma_{k+1}&=c_{k1}\cdots c_{k(i_k+z)}q_{j_k+1}c_{k(i_k+z)}\cdots c_{kn_k}.\end{aligned}$$

一个构件序列$\sigma_1,...,\sigma_m$称为一个输入为m、输出为n的计算, 如果$\sigma_1=q_0\quad\overbrace{1\cdots 1}^{(m+1)\text{-多个1's}}$, 并且$\sigma_m=\overbrace{1\cdots q_m\cdots 1}^{n\text{-多个1's}}$, 并且$q_m\in F$.

$f:N\to N$是图灵可计算的, 如果存在一个图灵机M使得对任何输入m, $M(m)$停机当且仅当$f(m)=n$.

比如加法Turing机$M=(Q,\Gamma,\delta,q_0,F)$由下列指令组成:

$$\begin{array}{llll}\delta=\{ & q_01R1q_0; & q_00R0q_1; & q_11R1q_1;\\ & q_1BLBq_2; & q_21L0q_3; & q_31L0q_5;\\ & q_30L0q_4; & q_40L0q_4; & q_41L0q_5\}\end{array}$$

其中$Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\},\Gamma=\{0,1,B\}$ 并且$F=\{q_5\}$. 比如$0+0,2+$

1和$2+0$的计算分别如下:

	$q_0111011B$	$q_011101B$
q_0101B	$1q_011011B$	$1q_01101B$
$1q_001B$	$11q_01011B$	$11q_0101B$
$10q_11B$	$111q_0011B$	$111q_001B$
$101q_1B$	$1110q_111B$	$1110q_21B$
$10q_21B$	$11101q_11B$	$11101q_2B$
$1q_300B$	$111011q_1B$	$1110q_31B$
q_4100B	$11101q_21B$	$111q_300B$
q_5000B	$1110q_310B$	$11q_3100B$
	$1110q_500B$	$11q_5000B$

6.2.4 递归函数

Gödel的不完备性定理使得Gödel于1934将原始递归函数推广到一般递归函数.

定义6.2.6 递归函数类是最小的函数类包含原始递归函数和在μ-算子下封闭:

- 在μ-算子下封闭: 如果$g(n_1,n_2)$是递归函数, 则

$$f(n_1)=\mu n_2(g(n_1,n_2)=0)=\begin{cases} n_2 & \text{如果存在}n\text{使得}g(n_1,n)=0 \\ \uparrow & \text{否则} \end{cases}$$

是递归函数, 其中n_2是最小的n使得$g(n_1,n)=0$.

由μ-算子的定义, 我们可以看出$f(n_1)=\mu n_2(g(n_1,n_2)=0)$不一定是全函数.

定义6.2.7 一个函数f是递归函数, 如果存在一个定义函数序列$f_1,f_2,...,f_k$使得对每个$i\leq k$, f_i要么是初始函数, 要么前面的函数是通过复合构造、原始递归构造或者μ-算子得到的.

定义6.2.8 一个自然数子集$A\subseteq N$是递归的, 如果其特征函数χ_A是递归的.

定理6.2.9 *一个自然数上的函数f是Turing可计算的, 当且仅当f是递归的.*

证明 证明省略, 具体证明可见[4].

□

由于算法是一个直观的和非形式的定义的概念, 而Turing机是严格的形式定义的概念. 要说明所有Turing机可计算的自然数函数类等于所有算法可计算的函数类, 这是一件不可能证明的事情. 因此, Church提出了

Church**假设**. *所有算法可计算的函数是Turing可计算的.*

到现在为止, 我们还没有发现Church假设的反例.

6.2.5 Turing可计算函数的基本性质

由于一台Turing机是由有限指令集合所决定的, 而有限指令集合只有可数无穷多个. 如同所有有限自然数子集的集合是有效可枚举的, 所有Turing机也是有效可枚举的, 即存在一个直观算法将所有Turing罗列出来:

$$T_0, T_1, ..., T_k, ...$$

设相应的Turing可计算函数也可以罗列为

$$f_0, f_1, ..., f_k, ...$$

因此, 对任何Turing可计算函数f, 存在无穷多个i使得

$$f_i = f.$$

因为设f是由Turing机T计算的. 那么在T中加上任何多个无用指令所得到的Turing机所计算的函数与T是相同的.

定理6.2.10 (Kleene范式定理) *存在一个谓词$T(i, n_1, n_2)$ (称为Kleene T-谓词)以及一个原始递归函数$U(n_2)$使得*

$$f_i(n_1) = U(\mu y T(i, n_1, n_2)).$$

证明 这个定理的形式证明很长. 我们这里只给出非形式的证明.

$T(i, n_1, n_2)$表示: n_2是第i个Turing机T_i在输入n_1下的计算的编码. 为了判断$T(i, n_1, n_2)$是否成立, 我们由i有效地得到Turing机T_i, 然后解码n_2为构件序列: $c_1, ..., c_k$, 验证$c_1, ..., c_k$是否为Turing机在输入n_1下的计算序列. 如果是, $U(n_2)$为c_k中含有1的间隔的个数.

□

定理6.2.11 (枚举定理) *存在一个递归函数$f(i, n)$使得对任何自然数$i, n \in N$,*

$$f(i, n) = f_i(n).$$

证明 设$f(i, n) = U(\mu m T(i, n, m))$.

□

停机问题: 是否存在一个算法判断: 任给一个Turing机T_i和一个输入$n, T_i(n)$是否停机. 即函数

$$f(i, n) = \begin{cases} 1 & \text{如果} f_i(n)\downarrow \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

是否是可计算函数?

定理6.2.12 *$\lambda in.f(i, n)$不是Turing-可计算的.*

证明 假设$\lambda in.f(i,n)$是Turing-可计算的. 我们定义一个函数$h(n)$使得对任何自然数n,

$$h(n) = \begin{cases} f_n(n)+1 & \text{如果} f(n,n)=1 \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

那么h是直观可计算的. 根据Church假设, h是Turing-可计算的. 那么, 存在一个i使得

$$h = f_i.$$

则

$$h(i) = \begin{cases} f_i(i)+1 & \text{如果} f_i(i)\downarrow \\ 0 & \text{否则} \end{cases} = f_i(i),$$

矛盾.

□

这个证明过程可以用对角矩阵来描述: 我们能构造如下矩阵,

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ \hline f_0 & f_0(0) & f_1(1) & f_0(2) & \cdots & f_0(n) & \cdots \\ f_1 & f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(n) & \cdots \\ f_2 & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ f_m & f_m(0) & f_m(1) & f_m(2) & \cdots & f_m(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

通过改变对角线上的值, 我们得到下列矩阵:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ \hline f_0 & f_0(0)+1 & f_1(1) & f_0(2) & \cdots & f_0(n) & \cdots \\ f_1 & f_1(0) & f_1(1)+1 & f_1(2) & \cdots & f_1(n) & \cdots \\ f_2 & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2)+1 & \cdots & f_2(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ f_n & f_m(0) & f_n(1) & f_n(2) & \cdots & f_n(n)+1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

即对角线为函数$\lambda i.f_i(i)+1$ 是直观算法可计算的. 那么存在一个i使得

$$f_i = \lambda i.(f_i(i)+1).$$

当输入为i时, 我们有:

$$f(i) = \begin{cases} f_i(i)+1 & \text{如果} f_i(i)\downarrow \\ 0 & \text{否则} \end{cases} = \begin{cases} f_i(i) & \text{如果} f_i(i)\downarrow \\ \uparrow & \text{否则}. \end{cases}$$

矛盾.

推论6.2.13 停机问题是不可判定的.

□

6.2.6 可定义性和可表示性

我们将公式进行如下的分类:

- Δ_0表示所有不含量词的PA公式;
- Σ_1表示所有形为$\exists x A(x)$的PA公式, 其中$A(x)$是Δ_0;
- Π_1表示所有形为$\forall x A(x)$的PA公式, 其中$A(x)$是Δ_0;
- Σ_{k+1}表示所有形为$\exists x A(x)$的PA公式, 其中$A(x)$是Π_k;
- Π_{k+1}表示所有形为$\forall x A(x)$的PA公式, 其中$A(x)$是Σ_k.

由Kleene范式定理, 我们得到可定义性定理.

定义6.2.14 一个函数$f: N^m \to N$是可定义的, 如果存在一个PA公式$A(x_1, ..., x_m, y)$使得对任何$n_1, ..., n_m \in N$和$n \in N$,

$$f(n_1, ..., n_m) = n \text{ iff } \mathbf{N} \models A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m, \mathbf{n}).$$

定理6.2.15 (可定义性定理) *对任何Turing可计算函数$f: N^m \to N$, 存在一个Σ_1-公式$A(x_1, ..., x_m, y)$ 使得对任何$n_1, ..., n_m \in N$和$n \in N$,*

$$f(n_1, ..., n_m) = n \text{ iff } \mathbf{N} \models A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m, \mathbf{n}).$$

证明 我们可由Kleene范式定理6.2.10得到.

□

对任何Turing可判定集合$X \subseteq N^m$, 存在一个Σ_1-公式$A(x_1, ..., x_m)$ 使得对任何$n_1, ..., n_m \in N$,

$$(n_1, ..., n_m) \in X \text{ iff } \mathbf{N} \models A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m).$$

即$X = \{(n_1, ..., n_m) : \mathbf{N} \models A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)\}$.

定义6.2.16 一个自然数上的m-元关系R在PA中是可表示的, 如果存在一个公式$A(x_1, ..., x_m)$使得对任何自然数$n_1, n_2, ..., n_m \in N$,

(i) 如果$R(n_1, ..., n_m)$成立则$PA \vdash A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)$;

并且

(ii) 如果$R(n_1, ..., n_m)$不成立则$PA \vdash \neg A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)$.

注意: 与下面的定义的差别: *定义(*)*. 一个自然数上的m-元关系R在PA中是可表示的, 如果存在一个公式$A(x_1, ..., x_m)$使得对任何自然数$n_1, n_2, ..., n_m \in N$,

$$R(n_1, ..., n_m) \text{ iff } PA \vdash A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m).$$

因为这不一定成立: $PA \nvdash A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)$ iff $PA \vdash \neg A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)$. □

比如, 对任何自然数n, 要么

$$PA \vdash \exists x(x \times \mathbf{2} \equiv \mathbf{n}),$$

要么

$$PA \vdash \neg\exists x(x \times \mathbf{2} \equiv \mathbf{n}).$$

因此, 关系'是偶数'是可表示的.

命题6.2.17 设m, n为自然数,
(i) 如果$m \neq n$则$PA \vdash \neg(\mathbf{m} \equiv \mathbf{n})$;
(ii) 如果$m = n$则$PA \vdash \mathbf{m} \equiv \mathbf{n}$.

证明 假设$n > m$. 存在$k > 0$使得$n = m + k$. 由(S2), 得

$$PA \vdash \mathbf{m} \equiv \mathbf{m} + \mathbf{k} \to \mathbf{m} - 1 \equiv \mathbf{m} + \mathbf{k} - 1;$$

重复, 我们得到

$$\begin{array}{lll} PA & \vdash & \mathbf{m} \equiv \mathbf{m} + \mathbf{k} \to \mathbf{0} \equiv \mathbf{k}; \\ PA & \vdash & \mathbf{m} \equiv \mathbf{m} + \mathbf{k} \to \mathbf{0} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{k} - \mathbf{1}); \\ PA & \vdash & \neg(\mathbf{0} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{k} - \mathbf{1}) \to \neg(\mathbf{m} \equiv (\mathbf{m} + \mathbf{k})); \\ PA & \vdash & \neg(\mathbf{0} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{k} - \mathbf{1})); \\ PA & \vdash & \neg(\mathbf{m} \equiv (\mathbf{m} + \mathbf{k})). \end{array}$$

□

定义6.2.18 $m \leq n$ 当且仅当 $\mathbf{N} \models \exists z(z + \mathbf{n} \equiv \mathbf{m})$.

命题6.2.19 设m, n为自然数,
(i) 如果$m \leq n$则$PA \vdash \exists x(\mathbf{m} + x \equiv \mathbf{n})$;
(ii) 如果$m \not\leq n$则$PA \vdash \neg\exists x(\mathbf{m} + x \equiv \mathbf{n})$.

□

定义6.2.20 一个自然数上的m-元函数f在PA中是可表示的, 如果存在一个公式$A(x_1, ..., x_m, y)$使得对任何自然数$n_1, n_2, ..., n_m, n \in N$,
(i) 如果$f(n_1, ..., n_m) = n$则$PA \vdash A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m, \mathbf{n})$;
(ii) 如果$f(n_1, ..., n_m) \neq n$则$PA \vdash \neg A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m, \mathbf{n})$;
并且
(iii) $PA \vdash \exists! x A(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_k, x)$.

注意: (iii)不能改为

$$(*) \quad PA \vdash \forall x_1 ... \forall x_k \exists! x A(x_1, ..., x_k, x).$$

□

比如, $f(m, n) = m + n$是可表示的:
(i) 如果$p = m + n$则$PA \vdash \mathbf{p} \equiv \mathbf{m} + \mathbf{n}$;
(ii) 如果$p \neq m + n$则$PA \vdash \neg(\mathbf{p} \equiv \mathbf{m} + \mathbf{n})$;
(iii) $PA \vdash \exists! x(x \equiv \mathbf{m} + \mathbf{n})$.
再比如, $f(m) = 2m$是可表示的:
(i) 如果$n = 2m$则$PA \vdash \mathbf{n} \equiv \mathbf{m} \times \mathbf{2}$;
(ii) 如果$n \neq 2m$则$PA \vdash \neg(\mathbf{n} \equiv \mathbf{m} \times \mathbf{2})$;
(iii) $PA \vdash \exists! x(x \equiv \mathbf{m} \times \mathbf{2})$.

假设$n = 2m$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{2} &\equiv \mathbf{m} \times \mathbf{ss0} \\
&\equiv (\mathbf{m} \times \mathbf{s0}) + \mathbf{m} \\
&\equiv ((\mathbf{m} \times \mathbf{0}) + \mathbf{m}) + \mathbf{m} \\
&\equiv (\mathbf{0} + \mathbf{m}) + \mathbf{m} \\
&\equiv \mathbf{m} + \mathbf{m} \\
&\equiv \mathbf{m} + \mathbf{m} \\
&\equiv \mathbf{2m} \\
&\equiv \mathbf{n}
\end{aligned}$$

注意: 可表示的函数:

$$n_1 + sn_2 \equiv s(n_1 + n_2);$$
$$n_1 \times sn_2 \equiv (n_1 \times n_2) + n_1.$$

□

由于公式只有可数多个, 而所有自然数上的函数个数是不可数的. 因此, 我们有下列的

命题6.2.21 不是所有的自然数上的函数在PA中是可表示的.

□

同理, 不是所有的自然数上的关系在PA中是可表示的.

定理6.2.22 一个自然数上的关系(函数)是可表示的, 当且仅当它是递归的.

证明 证明省略, 具体证明可见[4].

□

6.3 Gödel不完备性定理[6,7]

下面的判定是直观算法可判定, 因而是递归的:

- 一个符号串是否为公式, 是递归的;
- 一个公式串是否为证明, 是递归的;
- 一个公式串是否为某个公式的证明, 是递归的.

给定一个逻辑语言L包含下列符号:

$$(,), ,, \neg, \rightarrow, \forall, x_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{f}_k, \mathbf{r}_k.$$

定义编码函数g为

$$\begin{array}{ll}
g(() = 3; & g()) = 5; \\
g(,) = 7; & g(\neg) = 9; \\
g(\rightarrow) = 11; & g(\forall) = 13; \\
g(x_k) = 7 + 8k; & g(\mathbf{c}_k) = 9 + 8k; \\
g(\mathbf{f}_k) = 11 + 8 \times 3^k; & g(\mathbf{r}_k) = 13 + 8 \times 3^k.
\end{array}$$

注意: 逻辑语言中的符号的Gödel编码是奇数.

如果$u_1u_2\cdots u_k$是L上的一个符号串, 定义

$$g(u_1u_2\cdots u_k)=2^{g(u_1)}\times 3^{g(u_2)}\times\cdots\times p_k^{g(u_k)}.$$

这样, 非空的符号串的Gödel编码是偶数, 每个素数的指数是奇数.

如果$s_1,...,s_k$是L_{PA}上的符号串, 定义

$$g(s_1,s_2,...,s_k)=2^{g(s_1)}\times 3^{g(s_2)}\times\cdots\times p_k^{g(s_k)}.$$

这样, 非空的符号串的串的Gödel编码是偶数, 每个素数的指数是偶数.

下列自然数上的关系是递归的, 因此是可表示的:

- G_1 : $G_1(n)$成立当且仅当n是一个PA公式的Gödel编码;
- G_2 : $G_2(n)$成立当且仅当n是一个PA逻辑公理的Gödel编码;
- G_3 : $G_3(n)$成立当且仅当n是一个PA的证明的Gödel编码;
- G_4 : $G_4(m,n)$成立当且仅当m是一个Gödel编码为n的公式在PA中的一个证明的Gödel编码;
- W : $W(m,n)$成立当且仅当m是一个含自由变元x的公式$A(x)$的Gödel编码, n为公式$A(\mathbf{m})$在PA中的一个证明的Gödel编码, 其中非形式地, $W(m,n)$当且仅当n是m的证明.

根据关系W的可表示性, 存在一个公式$A(x,y)$使得对任何自然数m,n,

如果$W(m,n)$成立, 则$PA\vdash A(\mathbf{m},\mathbf{n})$;
如果$W(m,n)$不成立, 则$PA\vdash\neg A(\mathbf{m},\mathbf{n})$.

定义公式

$$B(x)=\forall y\neg A(x,y).$$

$B(x)$表示任何一个y不是x的一个证明, 换言之, 不存在x的一个证明. x不可证明的.

设q为公式$B(x)$的Gödel编码. 定义

$$C=\forall y\neg A(\mathbf{q},y).$$

C表示不存在$\mathbf{q}$的一个证明. 即我是不可证明. 因此, 对任何自然数n, $W(q,n)$不成立. 即

> 对任何自然数n, 这是不成立的: q是一个公式$B(x)$的Gödel编码, n是公式$B(\mathbf{q})$在PA中的一个证明的Gödel编码.

即

> 对任何自然数n, n不是公式$B(\mathbf{q})$在PA中的一个证明的Gödel编码.

即

公式$B(\mathbf{q})$(即C)在PA中是不可证明的.

定义6.3.1 一个L_{PA}上的理论T是ω-协调的, 如果对任何含自由变元x的公式$B(x)$, 如果对每个自然数n, $B(\mathbf{n})$ 是T的定理, 则$\neg\forall x B(x)$不是T的一个定理.

命题6.3.2 如果PA是不协调的, 则PA是完备的.

□

命题6.3.3 如果PA是ω-协调的, 则PA是协调的.

证明 设$B(x) = x \equiv x$. 则$PA \nvdash \neg\forall x(x \equiv x)$. 对每个自然数$n$, $PA \vdash \mathbf{n} \equiv \mathbf{n}$.

□

定理6.3.4 (Gödel不完备定理) 假设PA是ω-协调的, 则$C = \forall y \neg A(\mathbf{q}, y)$不是$PA$的定理, 并且$\neg C$也不是.

因此, 如果PA是ω-协调的, 则PA不是完备的.

证明 假设C是PA的定理. 设r是C在PA中一个证明的Gödel编码. 则

$$W(q, r)\text{成立}.$$

由W的可表示性,

$$PA \vdash A(\mathbf{q}, \mathbf{r}).$$

但$PA \vdash C$, 即

$$PA \vdash \forall y \neg A(\mathbf{q}, y);$$

由此推出$PA \vdash \neg A(\mathbf{q}, \mathbf{r})$. 由$PA$的$\omega$-协调性, 我们得到矛盾.

因此, C不是PA的定理.

则不存在C在PA中的证明. 不存在自然数r使得r是C在PA中一个证明的Gödel编码. 即, 对任何自然数r, $W(q, r)$不成立.

由W的可表示性, 对任何自然数r,

$$PA \vdash \neg A(\mathbf{q}, \mathbf{r}).$$

由PA的ω-协调性,

$$\neg\forall y \neg A(\mathbf{q}, y)$$

不是PA的定理, 即$\neg C$不是PA的定理.

□

推论6.3.5 假设PA是ω-协调的. 存在一个句子C使得C在标准解释$\mathbf{N}$中为真, 并且C不是PA的定理.

□

6.4 Gödel不完备定理的另一种陈述

Gödel不完备定理的另一种陈述[8]是

定理6.4.1 (Gödel不完备定理) *不存在一个算法使得它的输出集合包含所有的真的算术命题, 而不包含任何假的算术命题.*

数学命题可以表示为算术命题. 如果这样的算法存在的话, 任何一个断言是否是数学定理就可以算法可判定了. 任给一个表示为算术命题的数学命题A, 为判定A是否为数学定理, 运用这样算法于A和$\neg A$. 则要么A在该算法的输出中要么$\neg A$在该算法的输出中.

直观上, 这样的算法是不存在的. 正是基于这个直观, 产生了Gödel不完备性定理和Turing机作为算法的精确定义.

假设M是一个算法它的输出集合不含任何假的算术命题. 设$O(M)$是M的输出集合. 我们将证明

断言. *存在一个真的算术命题不在M的输出集合中.*

公式$A(x)$称为是可运用于n, 如果$A(\mathbf{n}) \in O(M)$.

预设1. *任何一个算法可计算函数M, M的输出集是可以用L_{PA}的公式表示的.*

预设2. *PA理论可以是一个算法的输出集.*

预设2的证明很长. 由于涉及可计算函数的定义, 我们这里省略证明. 一般来说, 一个公理集合为可计算的谓词理论, 其可推导的公式集合是一个可计算函数的值域. 因而推导是半可判定的.

设$A(x, y)$表示编码为x的公式可运用于y.

公式	编码	运用于0	运用于1	运用于2	$\cdots$	运用于m	$\cdots$
A_0	0	$A(0,0)$	$A(0,1)$	$A(0,2)$	$\cdots$	$A(0,m)$	$\cdots$
A_1	1	$A(1,0)$	$A(1,1)$	$A(1,2)$	$\cdots$	$A(1,m)$	$\cdots$
A_2	2	$A(2,0)$	$A(2,1)$	$A(2,2)$	$\cdots$	$A(2,m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
A_n	n	$A(n,0)$	$A(n,1)$	$A(n,2)$	$\cdots$	$A(n,m)$	$\cdots$

其中, 如果编码为n的公式可运用于自然数m的话, 设$A(n, m) = 1$;否则为0.

通过对角线法, 我们得到

公式	编码	运用于0	运用于1	运用于2	$\cdots$	运用于n	$\cdots$
A_0	0	$\neg A(0,0)$	$A(0,1)$	$A(0,2)$	$\cdots$	$A(0,n)$	$\cdots$
A_1	1	$A(1,0)$	$\neg A(1,1)$	$A(1,2)$	$\cdots$	$A(1,n)$	$\cdots$
A_2	2	$A(2,0)$	$A(2,1)$	$\neg A(2,2)$	$\cdots$	$A(2,n)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
A_n	n	$A(n,0)$	$A(n,1)$	$A(n,2)$	$\cdots$	$\neg A(n,n)$	$\cdots$

设n为公式$\neg A(x,x)$的编码. 则$A_n(x)=\neg A(x,x)$. 在行A_n中我们有:

公式	编码	运用于0	运用于1	运用于2	$\cdots$	运用于n	$\cdots$
A_0	0	$A(0,0)$	$A(0,1)$	$A(0,2)$	$\cdots$	$A(0,n)$	$\cdots$
A_1	1	$A(1,0)$	$A(1,1)$	$A(1,2)$	$\cdots$	$A(1,n)$	$\cdots$
A_2	2	$A(2,0)$	$A(2,1)$	$A(2,2)$	$\cdots$	$A(2,n)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
A_n	n	$\neg A(0,0)$	$\neg A(1,1)$	$\neg A(2,2)$	$\cdots$	$\neg A(n,n)$	$\cdots$

我们有2种解读$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})$的方法:

- 从公式$A(x,y)$的定义: $A_n(x)$不能运用n;
- 从$A_n(x)$的定义: $A_n(x)$能运用于n.

如果$A_n(x)$能运用于n, 即$A(\mathbf{n},\mathbf{n})$为真, 则$A_n(\mathbf{n})\in O(M)$, 即$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})\in O(M)$. 但$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})$为真, 与关于$M$的假设矛盾.

因此$A_n(x)$不能运用于n, 即$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})$是真的. 但$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})\notin O(M)$, 否则$A_n(x)$可运用于$n$, 矛盾.

公式$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})$为真, 但$\neg A(\mathbf{n},\mathbf{n})\notin O(M)$. 因此不存在一个算法使得其输出集正好是真的算术命题集合.

□

对于所有PA的定理, 不存在一个算法使得其输出集正好是所有PA公理系统的定理. 因此, 存在一个L_{PA}的公式A使得

(1) A是真的命题;

(2) A不是PA的定理;

(3) $\neg A$不是PA的定理.

所有PA定理组成的理论是不完备的(incomplete).

Gödel**不完备性定理**. 存在一个算术语言L_{PA}上的公式A使得$PA\nvdash A$并且$PA\nvdash\neg A$.

Gödel**第二不完备性定理**. 设con(PA)表示PA是协调的算术公式. 则

$$PA\nvdash \mathrm{con}(PA).$$

Gödel第二不完备性定理是说PA的协调性不能用PA推理得出. 2个Gödel不完备性定理对于任何表示能力比PA强的理论都成立.

6.5 基于Berry悖论的不完备性定理的证明

Berry**悖论**[9]: 不能用少于18个字描述的最小正整数.[1]

'不能用少于18个字描述的正整数'是存在的.

一个非空的正整数集合存在最小的元素.

因此, 存在'不能用少于18个字描述的最小正整数'.

[1]Berry's Paradox: The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables, has just been named in eighteen syllables. 或者, The smallest positive integer not definable in under sixty letters.

定义6.5.1 一个公式$A(x)$命名自然数n, 如果

$$\forall x(A(x) \leftrightarrow x \equiv \mathbf{n}) \in O(M).$$

比如,

$$\forall x(x + x \equiv \mathbf{4} \leftrightarrow x \equiv \mathbf{2}) \in O(M).$$

因此, **2**可以由一个公式命名.

由定义, 我们直接得到如下的

命题6.5.2 一个公式至多命名一个自然数.

□

任给一个公式$A(x)$, 如果

$$\begin{aligned}&\forall x(A(x) \leftrightarrow x \equiv \mathbf{n}) \in O(M),\\&\forall x(A(x) \leftrightarrow x \equiv \mathbf{m}) \in O(M)\end{aligned}$$

则

$$\mathbf{N} \models \forall x(x \equiv \mathbf{n} \leftrightarrow x \equiv \mathbf{m})$$

即$\mathbf{n} \equiv \mathbf{m}$, 即$n = m$.

命题6.5.3 对任何自然数i, 只有有限多个(16^i个)公式含有i个符号.

□

因此, 对任何自然数m, 只有有限多个公式少于m个符号.

命题6.5.4 对任何自然数m, 存在一个最小的数不被任何一个少于m个符号的公式所命名.

□

任何一个算法可计算函数M, M的输出集是可以用L_{PA}的公式表示的.

设$C(x, z)$是一个公式, 表示x是一个数被有z个符号的公式所命名.

引理6.5.5 公式$C(x, z)$是存在的.

□

设

$$B(x, y) \equiv \exists z(z < y \wedge C(x, z)).$$

$B(x, y)$表示x是一个数被少于y个符号的公式所命名. 设

$$A(x, y) \equiv \neg B(x, y) \wedge \forall a(a < x \rightarrow B(a, y)).$$

$A(x, y)$表示x是最小的数不被任何少于y个符号的公式所命名. 设

$$k = A(x, y)\text{中出现的符号个数}.$$

则$k > 3$.

定义

$$A(x) \equiv \exists y(y \equiv \mathbf{10} \times \mathbf{k} \wedge A(x,y)).$$

$A(x)$表示x是不被少于$10k$个符号的公式所命名的最小的数.

$\mathbf{10} = \overbrace{\mathbf{s}\cdots\mathbf{s}}^{10-个}0$含有11个符号.
$\mathbf{k}$含有$k+1$个符号.
$A(x,y)$含有k个符号.
$A(x)$含有$2k+24$个符号.
由于$k>3, 2k+24<10k$. 因此

命题6.5.6 $A(x)$含有少于$10k$个符号.

□

设n是不被少于$10k$个符号的公式所命名的最小的数.

命题6.5.7 n不被$A(x)$所命名.

□

因此,

$$(\forall x(A(x) \leftrightarrow x \equiv \mathbf{n})) \notin O(M).$$

但$\forall x(A(x) \leftrightarrow x \equiv \mathbf{n})$是真命题.

定理6.5.8 (Gödel不完备定理) 不存在一个算法它的输出元素包含所有的真的算术命题, 而不包含任何假的算术命题.

□

推论6.5.9 任给一个可判定集合的算术理论T, 存在一个真的公式A使得

$$T \nvdash A.$$

□

参考文献:

[1] Gödel K. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic[M]//J. van Heijenoort, *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Harvard Univ. Press, 1967.

[2] Gödel K. On undecidable propositions of formal mathematical systems [M]//Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1934.

[3] Dedekind R. Essays on the Theory of Numbers[M]//*Continuity and Irrational Numbers,* Dover: New York.

[4] Rogers H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*[M]. The MIT Press, 1967.

[5] Soare R.I. *Recursively Enumerable Sets and Degrees, a Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*[M]. Springer-Verlag, 1987.

[6] Ebbinghaus H.D., Flum J., Thomas W. *Mathematical Logic*[M]. Springer-Verlag, 1984.

[7] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. *Computability and Logic*[M]. 5th ed., Cambridge University Press, 2007.

[8] Boolos G. A new proof of the Gödel Incompleteness Theorem [M], *Notices of the American Mathematical Society* 36(1989), 388-90; Reprinted in his *Logic, Logic, and Logic*. Harvard Univ. Press: 383-88, 1998.

[9] Chaitin G. The Berry Paradox[J]. *Complexity*,1995, 1:26-30.

第七章7

模态逻辑

模态逻辑[1]是Aristotle讨论过的逻辑之一:

> 任何东西, 当它是什么的时候, **必然**是什么; 并且任何东西, 当它不是什么的时候, **必然**不是什么. 但是, 不是每个是什么的东西**必然**是什么; 并且不是每个不是什么的东西**必然**不是什么. 因为当一个东西是什么的时候**必然**是什么, 与无条件地说这个东西**必然**是什么是不同的. 类似于不是什么的东西. 这样的解释对于矛盾断言(们)也成立: 每个东西**必然**是或不是什么; 并且**将**是或不是什么; 但却不能说一个或另一个是**必然**是的. 我的意思是, 比如: 这是**必然的**: 明天要么有海战要么没有海战; 但明天发生海战**不是必然的**, 明天不发生海战也**不是必然的**, 尽管明天或者发生海战或者不发生海战是**必然的**.

因此, Kant认为Aristotle发现关于逻辑的所有东西[2], 而逻辑历史学家Prantl[3]由此推出

> Any logician after Aristotle who said anything new was confused, stupid, or perverse.

7.1 模态词

模态词[1] 是描述断言的真假*方式(程度)*的.比如,

地球是圆的必然为真;

地球是方的可能为假;

我认为地球是圆

均涉及到模态词.

我们可以将模态词看着是作用在语句上的算子, 产生一个新的语句. 而谓词逻辑只能描述关于个体的陈述, 而不能描述关于语句的陈述. 比如, **我相信***地球是圆的*; *这个计划***可能***会成功的*. 这种语句是谓词逻辑不可表示的.

[1] modality: [1]形式; 样式; 方式; 形态the particular way in which sth exists, is experienced or is done; 2.情态the idea expressed by modals; 3.感觉模式; 感觉形式the kind of senses that the body uses to experience things.

比如, 设公式A表示"地球是圆的", 如果用i表示"我",关系$b(x,y)$表示x相信y, 则用$b(i,A)$表示我相信地球是圆的. 但A为公式, 在谓词逻辑中公式是不能出现在项的位置上.

在实际生活中我们经常使用模态推理. 比如,

$$\begin{array}{l}\text{每个人必然有头}\\ \text{汤姆是一个人}\\ \hline \text{汤姆必然有头;}\end{array}$$

是合适的, 而

$$\begin{array}{l}\text{每个拳击手必然有手}\\ \text{约翰是一个拳击手}\\ \hline \text{约翰必然有头.}\end{array}$$

是不合适的. 这是因为当汤姆是人的时候汤姆有头; 而约翰是拳击手时约翰有手; 但约翰不是拳击手而只是人时, 约翰不一定有手. 换言之, 汤姆的历史与汤姆有头的历史是相同的; 而约翰的历史与约翰为拳击手的历史是不不同的. 因此, 模态推理是一个很复杂的问题, 它涉及本体论层次的问题.

为了表示这样带模态词的断言, 我们有三种处理方法:

(i) 设法消除公式A, 合成一个新关系表示$b(i,A)$, 所得到的断言结构将不同我们自然语言的陈述.

(ii) 扩展逻辑系统使得允许将一个个体符号和一个语句联系成一个新的语句.

(iii) 引入作用语句上的算子.

模态逻辑采用第三种办法: 引入作用语句上的算子.

我们可以用下列表来表示**命题逻辑**, **谓词逻辑和模态逻辑**的特点:

	关于	语法特点	语义特点
命题逻辑	命题	$\neg, \to$	
谓词逻辑	对象的性质	$\neg, \to, \forall$	
命题模态逻辑	命题的模态	$\neg, \to, \Box$	

其中$\Box$是一个模态词, 表示**必然**.

计算机科学中涉及的模态词很多. 我们简单地给出一个模态词的分类:

逻辑	模态词符号	符号的意思
模态逻辑	$\Box$	什么是必然的
	$\Diamond$	什么是可能的
道义逻辑	$\mathbf{O}$	什么是有义务的
	$\mathbf{P}$	什么是允许的
	$\mathbf{F}$	什么是禁止的
时序逻辑	$\mathbf{G}$	什么将总是成立的
	$\mathbf{F}$	什么将是成立的
	$\mathbf{H}$	什么以前总是成立的
	$\mathbf{P}$	什么以前是成立的
认知逻辑	$\mathbf{B}_a$	什么是主体a相信的
	$\mathbf{K}_a$	什么是主体a知道的

其中a是一个主体.

如同∃与∀是对偶的, 每个模态词□均有一个对偶模态词$\Diamond = \neg\Box\neg$. 比如

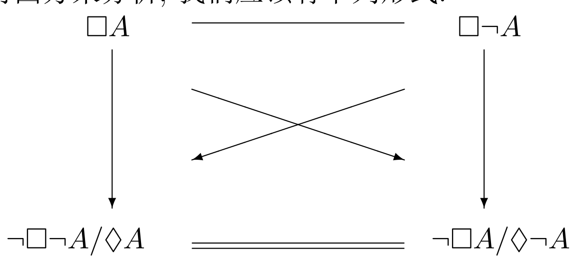
$\Box A$	$\Diamond A$
A必然为真	A可能为真
主体a知道A	主体a不知道A为假
主体a相信A	主体a不怀疑A
在任何时刻A都为真	存在某时刻A 为真

如何定义$\Box A$的真假值？因为□是一元算子, 如同¬一样, 其中真假值的可能选择是:

A	A	$\neg A$	$*$	$\star$
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

只有$*$和$\star$可以选择, 而$\Box A$的真假值不应等于$*$和$\star$的.

用反对四方来分析, 我们应该有下列形式:



比如,

$$\begin{array}{ll}\Box A: & \text{地球必然是圆的}\\ \Box\neg A: & \text{地球必然不是圆的}\\ \Diamond A: & \text{地球可能是圆的}\\ \Diamond\neg A: & \text{地球可能不是圆的.}\end{array}$$

$\Box A$和$\Box\neg A$的真假值应该不同. 而$*$和$\star$没有办法通过真假值来区分$\Box A$和$\Box\neg A$. 而从这个反对四方来看, 模态词□很像全称量词∀; 而◊很像存在量词∃.

7.2 命题模态逻辑

命题模态逻辑[4,5,6]的语言L_3是在命题逻辑语言L_1上加模态词符号□. 命题模态逻辑的公式定义如下.

定义7.2.1 命题模态逻辑的公式集合是满足下列条件的最小表达式集合:

1. 每个命题变元是一个公式;
2. 如果A是公式则$\neg A$也是公式;
3. 如果A和B是公式则$A \to B$也是公式;
4. 如果A是公式, 则$\Box A$也是公式.

即

$$A, B ::= p|\neg A|A \to B|\Box A.$$

命题模态逻辑的语义是可能世界语义, 其中一个可能世界是一个命题逻辑的模型. 每个不含模态词的公式在一个可能世界中有真假值是独立的, 而含模态词的公式$\Box A$的真假值是由A在不同可能世界中的真假值所决定的.

定义7.2.2 一个框架F是由

(1) 一个非空的集合W, 其元素称为可能世界(possible worlds); 和

(2) W上的一个二元关系R, 称为可达关系(accessibility relation),

所组成. 一个这样的框架记为$F = (W, R)$. 如果$(w, w') \in R$ 我们称w'是由w可达的.

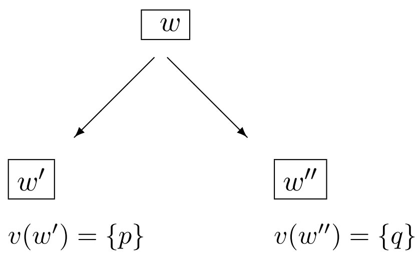
定义7.2.3 一个命题模态模型M是一个三元组(W, R, v), 其中v是W到命题变元集合的映射.

对于命题变元p和可能世界$w \in W$, 如果$p \in v(w)$ 则称p在可能世界w中为真, 记为$M, w \models p$.

给定一个模型$M = (W, R, v)$和一个可能世界$w \in W$, 一个公式A在w中为真(记为$M, w \models A$)定义如下: $M, w \models A$当且仅当

$$\begin{cases} p \in v(w) & \text{如果}A = p \\ M, w \not\models B & \text{如果}A = \neg B \\ M, w \models B \Rightarrow M, w \models C & \text{如果}A = B \to C \\ \mathbf{A}w'((w, w') \in R \Rightarrow M, w' \models B) & \text{如果}A = \Box B \end{cases}$$

例7.2.4 设$M = (\{w, w', w''\}, \{(w, w'), (w, w'')\}, v)$, 其中$v(w) = \emptyset, v(w') = \{p\}, v(w'') = \{q\}$.

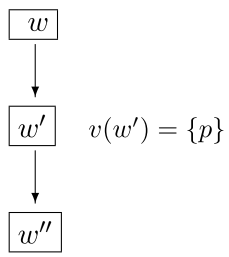


则

$$w \not\models (\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q).$$

因为$w \models \Diamond p \wedge \Diamond q$, 而$w \not\models \Diamond(p \wedge q)$. 因为, $w' \not\models p \wedge q$, 并且$w'' \not\models p \wedge q$.

例7.2.5 设$M = (\{w, w', w''\}, \{(w, w'), (w', w'')\}, v)$, 其中$v(w) = \emptyset = v(w''), v(w') = \{p\}$.



则

$$w \not\models \Box p \to \Box\Box p.$$

因为$w \models \Box p$, 而$w \not\models \Box\Box p$.

命题7.2.6 对任何模型(W, R, v)的任何$w \in W$, 均有

$$w \models \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B).$$

证明 假设$w \models \Box(A \wedge B)$. 则对任意$w' \in W$使得$(w, w') \in R, w' \models A \wedge B$; 即$w' \models A$, 并且$w' \models B$.

由于w'是任意的w'使得$(w, w') \in R$, 因此我们有

$$w \models \Box A;$$
$$w \models \Box B,$$

因而

$$w \models \Box A \wedge \Box B.$$

$\Box$

给定一个模型(W, R, v), 称模型(W, R, v)是基于框架(W, R)的.

• 一个公式A在模型(W, R, v)中是永真的, 记为$(W, R, v) \models A$, 如果A在W的每个可能世界中为真;

• 给定一个框架(W, R), 一个公式A在框架(W, R)中是永真的, 记为$(W, R) \models A$, 如果A在基于(W, R)的模型中是永真的;

命题逻辑, 谓词逻辑和模态逻辑的比较:

	关于	语法特点	语义特点
命题逻辑	命题	$\neg, \to$	$v : P \to \{0, 1\}$
谓词逻辑	对象的性质	$\neg, \to, \forall$	(U, I)
命题模态逻辑	命题的模态	$\neg, \to, \Box$	(W, R, v)

其中在模态逻辑中的$v : W \to 2^P$.

我们可以验证下面公式是永真公式:

$$\models \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B);$$
$$\models (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B);$$
$$\models \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B);$$
$$\models \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B).$$

比较谓词逻辑中的永真公式:

$$\vdash \forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x);$$
$$\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x));$$
$$\vdash \exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge \exists x B(x);$$
$$\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)).$$

我们注意模态词与量词之间的相似性.

7.2.1 不同的命题模态逻辑

不同于命题逻辑和谓词逻辑, 命题模态逻辑有很多个. 而模态逻辑公式的满足性有3个层次:

$$\begin{array}{l} M, w \models A \\ M \models A \\ \models A; \end{array}$$

而命题逻辑只有2个: $v \models A$和$\models A$. 并且根据对框架进行分类, 我们得到第4个层次的永真性.

一个框架(W, R)是

(1) 自反的, 如果对任意的$w \in W, (w, w) \in R$;

(2) 对称的, 如果对任意的$w, w' \in W, (w, w') \in R$蕴涵$(w', w) \in R$;

(3) 传递的, 如果对任意的$w, w', w'' \in W, (w, w'), (w', w'') \in R$蕴涵$(w, w'') \in R$;

(4) 序列的(serial), 如果对任意的$w \in W$,存在某个$w' \in W$使得$(w, w') \in R$.

根据框架中可达关系R的不同性质, 我们分为如下的框架类:

逻辑	框架条件
K	没有条件
D	序列的
T	自反的
B	自反的,对称的
K4	传递的
S4	自反的, 传递的
S5	自反的, 对称的, 传递的

注意: 这里不同的框架类实际上定义了一个逻辑. 由语义决定一个逻辑.

给定一个框架类**F**, 一个公式A在框架类**F**中是永真的, 记为$\mathbf{F} \models A$, 如果A在**F**的每个框架中是永真的.

7.2.2 公理系统$\mathbf{A}_3$

命题模态逻辑的公理系统由下列公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$\begin{array}{l} \text{(A1) } A \to (B \to A) \\ \text{(A2) } (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \text{(A3) } (\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \\ \text{(A4) } \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B). \end{array}$$

- **推理规则**:

$$\begin{array}{rl} \text{(MP)}: & \dfrac{A, A \to B}{B} \\ \text{必然律(Nec)}: & \dfrac{A}{\Box A}. \end{array}$$

例7.2.7 正则性推理规则:

$$\text{(Reg)} \quad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}.$$

其证明为

$$\begin{array}{lr} A \to B & \text{假设} \\ \Box(A \to B) & \text{(Nec)} \\ \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) & \text{(A4)} \\ \Box A \to \Box B & \text{(MP)}. \end{array}$$

□

命题7.2.8 证明: $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$.

证明

$$\begin{array}{ll} (1) & (A \wedge B) \to A \\ (2) & \Box(A \wedge B) \to \Box A \\ (3) & (A \wedge B) \to B \\ (4) & \Box(A \wedge B) \to \Box B \\ (5) & (\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to ((\Box(A \wedge B) \to \Box B) \\ & \to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B))) \\ (6) & (\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)) \\ (7) & \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B). \end{array}$$

其中(5)用到了命题逻辑中的永真公式: $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$. □

对于不同的框架类, 我们只需添加适当的公理就得到相应的公理系统:

名称	公理模式	框架条件
D	$\Box A \to \Diamond A$	序列的
T	$\Box A \to A$	自反的
4	$\Box A \to \Box\Box A$	传递的
B	$A \to \Box\Diamond A$	对称的
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	对称的, 传递的

和

逻辑	公理模式	框架条件
D	D	序列的
T	T	自反的
K4	4	传递的
B	T, B	自反的,对称的
S4	$T, 4$	自反的, 传递的
S5	$T, 5$	自反的, 对称的, 传递的

注意: $T, 5$等价于$T, 4, B$.

类似于命题逻辑, 我们可以定义

定义7.2.9 一个公式序列

$$A_1, ..., A_n$$

是一个理论T的一个**K**-证明, 如果每个A_i要么是命题模态逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由推理规则(MP)和前面的公式得到的.

一个公式A是T的**K**-定理, 记为$T \vdash_{axiom} A$, 如果存在T的一个证明$A_1, ..., A_n$使得$A_n = A$.

记$Th(T) = \{A : T \vdash_{axiom} A\}$.

命题7.2.10 对任何理论T,

$$\mathbf{K} \subseteq Th(T).$$

□

由**K**-证明的定义, 我们得到命题模态逻辑的单调性.

定理7.2.11 (可靠性定理) 命题模态演算的每个定理是逻辑永真的.

证明 我们证明每一条公理都是永真的, 且每一个推理规则都是保永真的. 我们这里省略.

□

7.2.3 完备性定理

命题7.2.12 如果Σ是一个极大协调公式集合, 并且关于推理是封闭的, 即对任何公式$A, \Sigma \vdash_{axiom} A$蕴含$A \in \Sigma$, 则对任何公式$A$, 要么$A \in \Sigma$, 要么$\neg A \in \Sigma$.

□

例7.2.13 任给一个模型(M, R, v)和可能世界w, 集合$\{A : M, v, w \models A\}$是一个典型的极大协调公式集合.

给定一个极大协调公式集合Σ, 我们构造一个典型模型M使得对任何公式A,

$$M \models A \text{ iff } \Sigma \vdash_{axiom} A.$$

类似于命题逻辑, 我们有下列:

引理7.2.14 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

□

定义模型$M = (W, R, v)$, 其中
- W为所有极大协调公式集合的集合;
- $R \subseteq W^2$, 其中对任何$w, w' \in W, (w, w') \in R$ 当且仅当$\{A : \Box A \in w\} \subseteq w'$;
- $p \in v(w)$ 当且仅当$p \in w$.

定理7.2.15 对任何公式A和可能世界$w \in W$, 如果$M, v, w \models A$则$A \in w$.

证明 对A作结构归纳证明.

假设$A = p$是命题变元. 则由v的定义, 对任何可能世界w,

$$M, v, w \models p \text{当且仅当} p \in w.$$

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} M, v, w \models A \quad & \text{当且仅当} \quad M, v, w \not\models B \\ & \text{当且仅当} \quad B \notin w \\ & \text{当且仅当} \quad \neg B \in w \\ & \text{当且仅当} \quad A \in w. \end{aligned}$$

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$\begin{aligned} M, v, w \models B \to C \quad & \text{当且仅当} \quad M, v, w \models B \Rightarrow M, v, w \models C \\ & \text{当且仅当} \quad B \in w \Rightarrow C \in w \\ & \text{当且仅当} \quad B \to C \in w \end{aligned}$$

假设$A = \Box B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} M, v, w \models \Box B \quad & \text{当且仅当} \quad \mathbf{A} w'((w, w') \in R \Rightarrow M, v, w' \models B) \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{A} w'((w, w') \in R \Rightarrow B \in w') \\ & \text{当且仅当} \quad \Box B \in w. \end{aligned}$$

□

定理7.2.16 (完备性定理) 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

证明 我们定义$M = (W, R, v)$使得

• W为所有包含Σ的极大协调公式集合的集合;

• $R \subseteq W^2$, 其中对任何$w, w' \in W, (w, w') \in R$ 当且仅当$\{A : \Box A \in w\} \subseteq w'$;

• $v(p, w) = 1$ 当且仅当$p \in w$.

对任何公式A的结构作归纳证明: 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

□

7.3 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_3$

我们将使用带标记的命题模态逻辑[4], 其逻辑语言是命题模态逻辑语言加上

• 二元关系符号$\mathbf{R}$;

• 可能世界标记符号: $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, ...$

这样, 前缀公式(prefixed formulas)定义为

$$\mathbf{A} ::= \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') | \mathbf{w} : A,$$

其中A为命题模态逻辑的公式.

定义7.3.1 一个带可能世界标记的命题模态模型M是一个三元组(W,R,v), 其中

• $v:\mathbf{W}\rightarrow W$将可能世界标记映射为可能世界, 使得$W=v(\mathbf{W})$, 其中$\mathbf{W}$所有可能世界标记的集合;

• $R=\{(v(\mathbf{w}),v(\mathbf{w}')):\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\}$, 并且

• v将可能世界标记映射为命题变元集合.

给定一个模型$M=(W,R,v)$, 一个公式A为真(记为$M,v\models A$)定义如下:

$$\begin{cases} p\in v(\mathbf{w}) & \text{如果}A=\mathbf{w}:p\\ \top & \text{如果}A=\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\\ M,v\not\models \mathbf{w}:B & \text{如果}A=\mathbf{w}:\neg B\\ M,v\models \mathbf{w}:B\& M,v\models \mathbf{w}:C & \text{如果}A=\mathbf{w}:(B\wedge C)\\ M,v\models \mathbf{w}:B \text{ or } M,v\models \mathbf{w}:C & \text{如果}A=\mathbf{w}:(B\vee C)\\ \mathbf{A}\mathbf{w}'((v(\mathbf{w}),v(\mathbf{w}'))\in R\Rightarrow M,v\models \mathbf{w}':B) & \text{如果}A=\mathbf{w}:\Box B \end{cases}$$

设Γ,Δ是带标记的公式集合. 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$在M中被满足, 记为$M\models\Gamma\Rightarrow\Delta$, 如果对任何赋值$v$, $M,v\models\Gamma$蕴含$M,v\models\Delta$, 其中$M,v\models\Gamma$ 如果对每个公式$A\in\Gamma$, $M,v\models A$; 并且$M,v\models\Delta$ 如果对某个公式$B\in\Delta$, $M,v\models B$.

一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{G}_3}\Gamma\Rightarrow\Delta$, 如果对任何模型$M$, $M\models\Gamma\Rightarrow\Delta$.

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_3$由下列公理和推理规则组成:

• **公理**:

$$(\mathbf{A})\ \frac{\Gamma\cap\Delta\neq\emptyset}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

其中Γ,Δ为原子前缀公式集合.

• **推理规则**:

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:A,\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:\neg A\Rightarrow\Delta}\qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:B\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B,\Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}\qquad (\wedge^R)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta\\ \Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta\end{array}}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\wedge B_2,\Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma,\mathbf{w}:A_1\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\mathbf{w}:A_2\Rightarrow\Gamma\end{array}}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta}\qquad (\vee_1^R)\frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\Box^L)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}'')\in\Delta\\ \Gamma,\mathbf{w}'':A\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma,\mathbf{w}:\Box A\Rightarrow\Delta}\qquad (\Box^R)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightsquigarrow\Delta\\ \Gamma\Rightarrow\mathbf{w}':B,\Delta\end{array}}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta}$$

其中$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界常量, 并且$\mathbf{w}''$是一个可能世界常量; $\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\in\Delta_1$表示$\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')$已经在$\Delta_1$中; 而$\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightsquigarrow\Delta_1$表示$\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')$被枚举进入$\Delta_1$中.

定义7.3.2 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是$\mathbf{G}_3$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{G}_3} \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过一个推理规则得到的.

我们有如下的

定理7.3.3 (可靠性定理)对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{G}_3} \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{G}_3} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 且每一个推理规则都是保有效的.

给定一个模型$M = (W, R, v)$ 和一个赋值v.

对于公理($\mathbf{A}$), 假设$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$并且$M, v \models \Gamma$, 则$M, v \models \mathbf{w} : A, \Delta$.

对于$(\neg^L)$, 假设$M, v \models \Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : A, \Delta$. 为了证明$M, v \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg A \Rightarrow \Delta$, 假设$M, v \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg A$. 则$M, v \models \Gamma$且根据归纳假设$M, v \models \Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : A, \Delta$, 我们有$M, v \models \mathbf{w} : A, \Delta$. 因为$M, v \models \mathbf{w} : \neg A$,并且$M, v \not\models \mathbf{w} : A$, 因此, $M, v \models \Delta$. $(\neg^R)$的情况类似.

对于$(\wedge)$和$(\vee)$, 证明与命题逻辑中的类似, 这里就省略了.

对于$(\Box^L)$, 假设

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Delta \\ M, v \models \Gamma, \mathbf{w}'' : A \text{蕴含} M, v \models \Delta. \end{array}$$

为了证明$M, v \models \Gamma, \mathbf{w} : \Box A \Rightarrow \Delta$, 假设$M, v \models \Gamma, \mathbf{w} : \Box A$. 则, 对于任意的可能世界常量$\mathbf{w}'$满足$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Delta$蕴含$M, v \models \mathbf{w}' : A$. 取$\mathbf{w}' = \mathbf{w}''$, 则$M, v \models \mathbf{w}'' : A$. 由归纳假设, 我们有$M, v \models \Delta$.

对于$(\Box^R)$, 假设$M, v \models \Gamma$蕴含$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta$并且$M, v \models \mathbf{w}' : B, \Delta$. 为了证明$M, v \models \Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : \Box B, \Delta$, 假设$M, v \models \Gamma$. 根据归纳假设, $M, v \models \mathbf{w}' : A, \Delta$. 如果$M, v \models \Delta$ 则$M, v \models \mathbf{w} : \Box A, \Delta$. 否则, 假设$M, v \models \mathbf{w}' : A$. 由于$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界变量, $\mathbf{w}'$不出现在Γ, 因此对任何可能世界w使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta$, $M, v_{\mathbf{w}'/w} \models \mathbf{w}' : A$, 即$M, v \models \mathbf{w} : \Box A$. 因而, $M, v \models \mathbf{w} : \Box A, \Delta$.

□

7.3.1 完备性定理

定理7.3.4 (完备性定理)对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$,

$$\models_{\mathbf{G}_3} \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{G}_3} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

证明 我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个模型M 使得每个γ中的矢列式在M中是不有效的.

与规则$(\wedge^L), (\vee^R)$不分叉以及$(\wedge^R), (\vee^L)$分叉不同. 规则$(\Box^R)$产生新的可能世界标记, 而规则$(\Box^L)$使用这些可能世界标记.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow \Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$为原子的, 或者$\Gamma', \mathbf{w}:\Box A \Rightarrow \Delta'$, 使得没有可能世界标记$\mathbf{w}''$出现在某个节点$\subseteq \xi, \mathbf{w}:\Box A$没有使用过$\mathbf{w}''$, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:A, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w}:\neg A \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\Gamma_1, \mathbf{w}:B \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:\neg B, \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, \mathbf{w}:A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, \mathbf{w}:A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w}:A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, \mathbf{w}:A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, \mathbf{w}:A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w}:A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:B_1 \vee B_2, \Delta_1 \in \xi
\end{array}\right.$$

并且

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, \mathbf{w}':A_1, [\mathbf{w}:\Box A_1] \Rightarrow \Delta_1 \\ \mathbf{w}:\Box A_1\text{使用过}\mathbf{w}'' \end{array}\right. & \text{如果}\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, [\mathbf{w}:\Box A_1] \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \mathbf{E}\mathbf{w}'(\mathbf{w}'\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \&\mathbf{w}:\Box A_1\text{没有使用过}\mathbf{w}' \\ \&\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta_1) \end{array}\right. \\
\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}':B_1, \Delta_1 \\ \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Delta_1 \\ \mathbf{w}'\text{不出现在当前}T\text{中} \end{array} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}:\Box B_1, \Delta_1 \in \xi
\end{array}\right.$$

定理7.3.5 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 其叶节点上存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$为$\mathbf{G}_3$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理7.3.6 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得其叶节点上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{G}_3$的公理, 则存在一个模型$M = (W, R, v)$使得$M \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝使得其叶节点上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$不是$\mathbf{G}_3$的公理. 设$\eta$为$\xi$的叶节点. 设

$$\begin{array}{l} \Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \eta} \Gamma', \\ \Theta^R = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \eta} \Delta'. \end{array}$$

定义一个模型$M = (W, R, v)$如下:

• W为出现在ξ中的所有可能世界符号$\mathbf{w}$的集合;

• $R = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') : \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R\}$;

• 对符号$\mathbf{w}, I(\mathbf{w}) = \{p : \mathbf{w}:p \in \Theta^L\}$.

我们对节点$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$做归纳证明$v(\Theta^L) = 1$并且$v(\Theta^R) = 0$, 即, 对每个$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi, v(\Gamma') = 1$ 并且$v(\Delta') = 0$.

我们对ξ的节点η做归纳证明: 对每个η上的矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, 均有$v(\Gamma')=1$并且$v(\Delta')=0$.

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \mathbf{w}: \neg A_1 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}: A_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2)=1$ 并且$v(\Delta_2, \mathbf{w}: A_1)=0$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}: \neg A_1)=1$ 并且$v(\Delta_2)=0$.

其它逻辑连接词类似.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \mathbf{w}: \Box A_1 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则对每个可能世界标记$\mathbf{w}' \in W$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有一个子节点包含矢列式$\Gamma_2, \mathbf{w}': A_1 \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}': A_1)=1$ 并且$v(\Delta_2)=0$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}: \Box A_1)=1$ 并且$v(\Delta_2)=0$.

情况 3. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}: \Box B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则存在一个可能世界标记$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta_2$并且$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}': B_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2, \mathbf{w}': B_1)=0$. 因此, $v(\Gamma_2)=1$并且$v(\Delta_2, \mathbf{w}: \Box B_1)=0$.

$\Box$

对于两个规则分别为$(\Box^L)$和$(\Box^R)$, 那么右规则产生一个新的常量符号, 应用到左规则上. 这时, 右规则不再有任何作用了, 但左规则需要对以后产生的可能世界标记使用. 比如,假设两个右规则和一个左规则, 则有下列分解:

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}
\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}: \Box B_1, \Delta_1 \\
\left[\begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1'') \rightsquigarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}_1'': B_1, \Delta_1; \end{array}\right. \\
\\
\Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}: \Box B_2, \Delta_2 \\
\left[\begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2'') \rightsquigarrow \Delta_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}_2'': B_2, \Delta_2; \end{array}\right.
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\Gamma, \mathbf{w}: \Box A \Rightarrow \Delta \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma, \mathbf{w}_1'': A, \Delta \\ \Gamma, \mathbf{w}_2'': A, \Delta. \end{array}\right.
\end{array}
\end{array}
$$

图示如下

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}: \Box B_1, \Delta_1 & & \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}: \Box B_2, \Delta_2 \\
| & & | \\
\begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1'') \rightsquigarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}_1'': B_1, \Delta_1 \end{array} & & \begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2'') \rightsquigarrow \Delta_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}_2'': B_2, \Delta_2 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\Gamma, \mathbf{w}: \Box A \Rightarrow \Delta \\
| \\
\Gamma, \mathbf{w}_1'': A, \mathbf{w}_2'': A \Rightarrow \Delta
\end{array}
$$

7.3.2 带标记谓词逻辑的Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2'$

类似地, 我们可以给出带项标记的谓词逻辑的Gentzen推理系统.

带标记的谓词逻辑公式定义为

$$A, B ::= (t_1, ..., t_n) : p|\alpha : \neg A|\alpha : A \wedge B|\alpha : A \vee B|\alpha : \forall x A,$$

其中α是项标记序列, 定义为:

$$\alpha ::= (t_1, ..., t_n)|\alpha_1 \wedge \alpha_2|\alpha_1 \vee \alpha_2|\alpha(x, \forall).$$

设Γ, Δ是带项标记的公式集合. $\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个矢列式. 如果$\Gamma, \Delta$是原子公式的集合, $\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个原子矢列式.

给定一个模型M和赋值$v, \Gamma \Rightarrow \Delta$在$(M, v)$下满足, 记为$M, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$M, v \models \Gamma$蕴含$M, v \models \Delta$, 其中

• $M, v \models \Gamma$ 如果对每个公式$A \in \Gamma, M, v \models A$;

• $M, v \models \Delta$ 如果对某个公式$B \in \Delta, M, v \models B$;

其中$M, v \models \alpha : A$ 当且仅当

$$\begin{cases} (t_1^{I,v'}, ..., t_n^{I,v'}) \in I(p) & \text{如果} A = (t_1, .., t_n) : p \text{ 且} \alpha = (t_1, ..., t_n) \\ M, v \not\models \alpha : B & \text{如果} A = \neg B \\ M, v \models \alpha_1 : B \& M, v \models \alpha_2 : C & \text{如果} A = B \wedge C \text{ 且} \alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ M, v \models \alpha_1 : B \text{ or } M, v \models \alpha_2 : C & \text{如果} A = B \vee C \text{ 且} \alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \\ \mathbf{A} a \in U(M, v_{x/a} \models \alpha(x, \forall) : B) & \text{如果} A = \forall x B \end{cases}$$

其中

$$v'(y) = \begin{cases} v(y) & \text{如果} y \notin \mathrm{dom}(\alpha) \\ t^{I,v} & \text{如果} y \in \mathrm{dom}(\alpha), (y, t) \in \alpha \end{cases}$$

并且

$$v_{x/a}(\alpha(x, \forall)) = \begin{cases} (v_{x/a}(t_1), ..., v_{x/a}(t_n)) & \text{如果} \alpha = (t_1, ..., t_n) \\ v_{x/a}(\alpha_1) \wedge v_{x/a}(\alpha_2) & \text{如果} \alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ v_{x/a}(\alpha_1) \vee v_{x/a}(\alpha_2) & \text{如果} \alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \\ \mathbf{A} b(\alpha_1(x, b)) & \text{如果} \alpha = \alpha_1(x, \forall) \end{cases}$$

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{G}_2'} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何模型$M$和赋值$v$,

$$M, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2'$由一个公理和若干个推理规则组成.

• **公理**:

$$\frac{\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ 是原子公式的集合.

• 逻辑连接词的推理规则:

$(\neg^L)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha:A,\Delta}{\Gamma,\alpha:\neg A\Rightarrow\Delta}$ $(\neg^R)\ \dfrac{\Gamma,\alpha:B\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha:\neg B,\Delta}$

$(\wedge_1^L)\ \dfrac{\Gamma,\alpha_1:A_1\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha_1\wedge\alpha_2:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$ $(\wedge^R)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha_1:B_1,\Delta\quad \Gamma\Rightarrow\alpha_2:B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha_1\wedge\alpha_2:B_1\wedge B_2,\Delta}$

$(\wedge_2^L)\ \dfrac{\Gamma,\alpha_2:A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha_1\wedge\alpha_2:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$

$(\vee^L)\ \dfrac{\Gamma,\alpha_1:A_1\Rightarrow\Delta\quad \Gamma,\alpha_2:A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha_1\vee\alpha_2:A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta}$ $(\vee_1^R)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha_1:B_1,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha_1\vee\alpha_2:B_1\vee B_2,\Delta}$

$(\vee_2^R)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha_2:B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha_1\vee\alpha_2:B_1\vee B_2,\Delta}$

• 量词的推理规则:

$(\forall^L)\ \dfrac{\Gamma,\alpha(x,t):A\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha:\forall xA\Rightarrow\Delta}$ $(\forall^R)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha(x,\forall):B,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha:\forall xB,\Delta}$

$(\exists^L)\ \dfrac{\Gamma,\alpha(x,\forall):A\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha:\exists xA\Rightarrow\Delta}$ $(\exists^R)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\alpha(x,t):B,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha:\exists xB,\Delta}$

其中t是一个项, x是一个新的变量符号.

定义7.3.7 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$在$\mathbf{G}_2'$中是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{G}_2'}\Gamma\Rightarrow\Delta$ 如果存在一个序列$\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,...,\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n$ 使得$\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n=\Gamma\Rightarrow\Delta$, 并且对每个$1\leq i\leq n,\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过$\mathbf{G}_2'$中的一个推理规则得到的.

定理7.3.8 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$, 如果$\vdash_{\mathbf{G}_2'}\Gamma\Rightarrow\Delta$ 则$\models_{\mathbf{G}_2'}\Gamma\Rightarrow\Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的以及每个推理规则保持有效性. 给定一个模型M和一个赋值v.

对于公理, 假设$\Gamma\cap\Delta\neq\emptyset$, 其中$\Gamma,\Delta$是原子公式的集合. 假设$M,v\models\Gamma$. 则, 存在一个原子公式$l$和项标记$\alpha$使得$\alpha:l\in\Gamma\cap\Delta$, 并且根据归纳假设, $M,v\models\alpha:l$, 因此, $M,v\models\Delta$.

对于$(\forall^L)$, 假设$M,v\models\Gamma,\alpha(x,t):A\Rightarrow\Delta$. 为了证明$M,v\models\Gamma,\alpha:\forall xA\Rightarrow\Delta$, 假设$M,v\models\Gamma,\alpha:\forall xA$. 则对于模型$M$的论域中的任意元素$a$, $M,v_{x/a}\models\alpha:A$. 令$a=t^{I,v}$, 我们有: $M,v\models\alpha(x,t):A$. 根据归纳假设$M,v\models\Gamma,\alpha(x,t):A\Rightarrow\Delta$, 我们有$M,v\models\Delta$.

对于$(\forall^R)$, 假设$M,v\models\Gamma\Rightarrow\alpha(x,x):A,\Delta$. 为了证明$M,v\models\Gamma\Rightarrow\alpha:\forall xA,\Delta$, 假设$M,v\models\Gamma$. 根据归纳假设, $M,v\models\alpha(x,x):A,\Delta$. 如果$M,v\models\Delta$则$M,v\models\alpha:\forall xA,\Delta$. 否则, 假设$M,v\models\alpha(x,x):A$. 因为$x$不在$\Gamma$和$\Delta$中出现, 对于模型$M$的论域中的任意元素$c$, $M,v_{x/a}\models\Gamma$, 并且, $M,v_{x/a}\models\alpha(x,x):A$, 即, $M,v_{x/a}\models\alpha:A$. 因此, 我们有$M,v\models\alpha:\forall xA$.

$\square$

给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 将$\Gamma, \Delta$中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式.

• 如果每个原子矢列式是一个公理, 那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明;

• 如果有某个矢列式不是一个公理, 那么可以构造一个模型M和赋值v是$M, v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

定理7.3.9 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models_{\mathbf{G}_2'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash_{\mathbf{G}_2'} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow \Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$为原子的, 或者$\Gamma', \alpha : \forall x A(x) \Rightarrow \Delta'$或$\Gamma' \Rightarrow \alpha : \exists x B(x), \Delta'$使得出现在$\xi$上的常量符号$c$均使用过, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow \alpha : A, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \alpha : \neg A \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1, \alpha : B \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \alpha : \neg B, \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1, \alpha : A_1, \alpha : A_2 \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \alpha : A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow \alpha : B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \alpha : B_2, \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \alpha : B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \in \xi \\ \begin{cases} \Gamma_1, \alpha : A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, \alpha : A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1, \alpha : A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1 \Rightarrow \alpha : B_1, \alpha : B_2, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \alpha : B_1 \vee B_2, \Delta_1 \in \xi \end{cases}$$

并且

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \Gamma_1, \alpha(x,c) : A_1, [\alpha : \forall x A_1(x)] \Rightarrow \Delta_1 \\ \alpha : \forall x A_1(x)\text{使用过}c \end{array} \right. & \text{如果}\begin{cases} \Gamma_1, [\alpha : \forall x A_1(x)] \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \mathbf{E}c(c\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \&\alpha : \forall x A_1(x)\text{没有使用过}c) \end{cases} \\ \begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \alpha(x,c) : B_1, \Delta_1 \\ c\text{不出现在}T\text{中} \end{array} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \alpha : \forall x B_1, \Delta_1 \in \xi \\ \begin{array}{l} \Gamma_1, \alpha(x,c) : A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ c\text{不出现在}T\text{中} \end{array} & \text{如果}\Gamma_1, \alpha : \exists x A_1 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \alpha(x,c) : B_1, [\alpha : \exists x B_1(x)], \Delta_1 \\ \alpha : \exists x B_1(x)\text{使用过}c \end{array} \right. & \text{如果}\begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow [\alpha : \exists x B_1(x)], \Delta_1 \in \xi \\ \mathbf{E}c(c\text{出现在某个节点}\eta \subseteq \xi \\ \&\alpha : \exists x B_1(x)\text{没有使用过}c) \end{cases} \end{cases}$$

定理7.3.10 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$为$\mathbf{G}_2'$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理7.3.11 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{G}_2'$的公理, 则存在一个模型$M$和一个赋值$v$使得$M, v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{G}_2'$的公理. 设

$$\Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Gamma',$$
$$\Theta^R = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta'.$$

定义一个模型$M = (U, I)$和赋值v如下:

• U为出现在ξ中的所有常量符号的集合;

• 对每个常量符号$c, I(c) = c$, 并且对每个n-元谓词符号$p, I(p) = \{(c_1, ..., c_n) : (c_1, ..., c_n) : p \in \Theta^L\}$;

• $v(x) = x$.

我们对ξ的节点η做归纳证明对每个η上的矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, 均有$v(\Gamma') = 1$并且$v(\Delta') = 0$. 我们只考虑全称量词的情况，其它情况类似.

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \alpha : \forall x A_1(x) \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则对每个常量符号$c \in U, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有一个子节点包含矢列式$\Gamma_2, \alpha(x, c) : A_1 \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, \alpha(x, c) : A_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2, \alpha : \forall x A_1(x)) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \alpha : \forall x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则存在一个常量符号$c$使得$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow \alpha(x, c) : B_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, \alpha(x, c) : B_1) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, \alpha : \forall x B_1(x)) = 0$.

□

7.3.3 命题模态逻辑到谓词逻辑的翻译

自然语言的翻译是将一个(对象)语言翻译到(元)语言中, 使得被翻译的句子的意思与翻译的句子意思尽可能接近的[6,7]. 逻辑之间的翻译σ需要在3个层次上进行:

• 在逻辑语言层次上, 将对象逻辑语言翻译到元语言中;

• 在语法层次上, 将公式A翻译到元逻辑的公式$\sigma(A)$中, 并且

• 在语义层次上, 将对象语言的模型M翻译到元逻辑的模型$\sigma(M)$中,

使得对任何对象逻辑中的公式A以及模型M,

$$M \models A \text{ 当且仅当 } \sigma(M) \models \sigma(A).$$

命题模态逻辑是第一个涉及到翻译的逻辑. 因为命题逻辑和谓词逻辑是最基本的逻辑. 谓词逻辑不能翻译到命题逻辑, 因为命题逻辑太简单.

命题模态逻辑可以翻译到谓词逻辑中, 其中可能世界是个体对象, 可达关系是唯一的二元关系符号, 命题变元翻译为一元谓词符号, 模态词翻译为一个带卫兵(guarded)的量词公式.

设σ是命题模态逻辑到谓词逻辑的翻译. 则

• 在逻辑语言层次上,

$$\begin{aligned}&\sigma(p)=\mathbf{p};\\&\sigma(\neg)=\neg;\\&\sigma(\wedge)=\wedge;\\&\sigma(\vee)=\vee;\\&\sigma(\Box)=\forall x(\mathbf{R}(w,x)\to\sigma(\cdot)).\end{aligned}$$

• 在公式层次上, 对任何一个可能世界符号w,

$$\sigma_w(A)=\begin{cases}\mathbf{p}(w) & \text{如果}A=p\\ \neg\sigma_w(A_1) & \text{如果}A=\neg A_1\\ \sigma_w(A_1)\wedge\sigma_w(A_2) & \text{如果}A=A_1\wedge A_2\\ \sigma_w(A_1)\vee\sigma_w(A_2) & \text{如果}A=A_1\vee A_2\\ \forall x(\mathbf{R}(w,x)\to\sigma_w(A_1)(x)) & \text{如果}A=\Box A_1\end{cases}$$

这样的公式$\forall y(R(x,y)\to A(y))$称为带卫兵的公式. 如果全称公式均是带卫兵的, 那么这样的谓词逻辑是可判定的. 因而命题模态逻辑是可判定的.

• 在语义层次上, 给定一个命题模态逻辑的模型$M=(W,R,v)$, 定义$\sigma(M)=(U',I')$, 其中$U'=W,I'(\mathbf{R})=R$, 对每个原子命题$p,I'(\mathbf{p})=v(p)$.

设v'使得对任何可能世界$w,v'(w)=w$.

则我们有下列的定理:

定理7.3.12 任给命题模态逻辑的公式A, 模型M以及任意可能世界$w\in W$,

$$M,w\models A \text{ 当且仅当 } \sigma(M)\models\sigma_w(A).$$

证明 我们对公式结构作归纳来证明定理.

如果A是原子公式p, 则

$$\begin{aligned}M,w\models p\quad&\text{当且仅当}\quad w\in I(p)\\&\text{当且仅当}\quad w\in I'(\mathbf{p})\\&\text{当且仅当}\quad \sigma(M),v'\models\mathbf{p}(w).\end{aligned}$$

如果$A=\neg A_1$, 则

$$\begin{aligned}M,w\models A\quad&\text{当且仅当}\quad M,w\not\models A_1\\&\text{当且仅当}\quad \sigma(M),v'\not\models\sigma_w(A_1)\\&\text{当且仅当}\quad \sigma(M),v'\models\neg\sigma_w(A_1)\\&\text{当且仅当}\quad \sigma(M),v'\models\sigma_w(\neg A_1)\\&\text{当且仅当}\quad \sigma(M),v'\models\sigma_w(A).\end{aligned}$$

如果$A = A_1 \wedge A_2$, 则

$$\begin{array}{lll} M, w \models A & \text{当且仅当} & M, w \models A_1 \& M, w \models A_2 \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1) \& \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1) \wedge \sigma_w(A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1 \wedge A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A). \end{array}$$

如果$A = A_1 \vee A_2$, 则

$$\begin{array}{lll} M, w \models A & \text{当且仅当} & M, w \models A_1 \text{ or } M, w \models A_2 \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1) \text{ or } \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1) \vee \sigma(A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A_1 \vee A_2) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(A). \end{array}$$

如果$A = \Box A_1$, 则

$$\begin{array}{lll} M, w \models A & \text{当且仅当} & \forall w'(R(w, v') \Rightarrow M, v' \models A_1) \\ & \text{当且仅当} & \forall w'(R(w, v') \Rightarrow \sigma(M), v' \models \sigma_{w'}(A_1)) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \forall w'(\mathbf{R}(w, v') \rightarrow \sigma_{w'}(A_1)) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma_w(\Box A_1) \\ & \text{当且仅当} & \sigma(M), v' \models \sigma(A). \end{array}$$

□

7.4 表式证明系统

Fitting给出模态逻辑的表式证明系统, 用来证明一个公式的永真性, 即一个公式是永真的当且仅当这个公式在表式证明系统中是可证的. 当我们考虑一个公式集合Δ, 那么Δ在表式证明系统中是可证的当且仅当Δ的析取是永真的. 对偶地, 我们可以给出一个对偶的表式证明系统(称为余表式证明系统)使得一个公式集合Γ在该系统中是可证的当且仅当$\neg\Gamma$是永真的, 等价地, Γ中公式的合取是永假的.

这样, 表式证明系统和余表式证明系统是Gentzen推理系统的2个特例. 因为一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当在任何赋值下, Γ为真蕴含Δ为真, 其中Γ是合取, 而Δ是析取. 等价地, $\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当在任何赋值下, 要么$\Gamma$中有一个公式为假, 要么$\Delta$中有一个公式为真. 这样, 当$\Gamma = \emptyset$时, $\Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当Δ是永真的; 而当$\Delta = \emptyset$时, $\Gamma \Rightarrow$是有效的当且仅当Γ是永假的.

形式地, $\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当

$$\mathbf{A}v\mathbf{A}w(\mathbf{A}A \in \Gamma(v(A, w) = 1) \Rightarrow \mathbf{E}B \in \Delta(v(B, w) = 1)),$$

当且仅当

$$\mathbf{A}v\mathbf{A}w(\mathbf{E}A\in\Gamma(v(A,w)=0)\text{ or }\mathbf{E}B\in\Delta(v(B,w)=1)).$$

因此, 当$\Gamma=\emptyset$时, $\models\Rightarrow\Delta$当且仅当

$$\mathbf{A}v\mathbf{A}w(\mathbf{E}B\in\Delta(v(B,w)=1));$$

而当$\Delta=\emptyset$时, $\models\Gamma\Rightarrow$当且仅当

$$\mathbf{A}v\mathbf{A}w(\mathbf{E}A\in\Gamma(v(A,w)=0)).$$

7.4.1 表式证明系统$\mathbf{T}_3$

设Δ是公式集合. 一个矢列式$\Rightarrow\Delta$在M中被满足, 记为$M\models\Rightarrow\Delta$, 如果对可能世界$w$, $M,v,w\models\Delta$.

一个矢列式$\Rightarrow\Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta$, 如果对任何模型$M, M\models\Rightarrow\Delta$.

表式证明系统$\mathbf{T}_3$ 由下列公理和推理规则组成:

- 公理:

$$(\mathbf{A})\ \frac{\mathbf{E}l(l,\neg l\in\Delta)}{\Rightarrow\Delta}$$

其中,Δ是文字断言的集合.

- 推理规则:

$$(\wedge)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta\quad\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\wedge B_2,\Delta}\qquad(\neg\wedge_1)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_1,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg(B_1\wedge B_2),\Delta,}$$

$$(\neg\wedge_2)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_2,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg(B_1\wedge B_2),\Delta,}$$

$$(\vee_1)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}\qquad(\neg\vee)\frac{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_1,\Delta\quad\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_2,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg(B_1\vee B_2),\Delta}$$

$$(\vee_2)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\neg\neg)\ \frac{\Rightarrow\mathbf{w}:B,\Delta}{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg\neg B\Delta}$$

$$(\Box)\ \frac{\begin{array}{l}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightsquigarrow\Delta\\ \Rightarrow\mathbf{w}':B,\Delta\end{array}}{\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta}\qquad(\neg\Box)\ \frac{\begin{array}{l}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}'')\in\Delta\\ \Rightarrow\mathbf{w}'':\neg B,\Delta\end{array}}{\Rightarrow\mathbf{w}:\neg\Box B,\Delta}$$

其中$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界常量, 并且$\mathbf{w}''$是一个可能世界常量.

定义7.4.1 一个矢列式$\Rightarrow\Delta$是$\mathbf{T}_3$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta$如果存在一个矢列式序列$\Rightarrow\Delta_1,...,\Rightarrow\Delta_n$使得$\Delta_n=\Delta$, 并且对每个$1\leq i\leq n,\Rightarrow\Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过一个推理规则得到的.

我们有如下的

定理7.4.2 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta\text{ 蕴含 }\models_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta.$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 且每一个推理规则都是保有效的.

给定一个模型$M=(W,R,v)$和一个可能世界w.

对于公理(**A**), 假设$\mathbf{w}:p,\mathbf{w}:\neg p\in\Delta$. 则要么$M,v',w\models\mathbf{w}:p$要么$M,v',w\models\mathbf{w}:\neg p$, 因而$M,v',w\models\Rightarrow\Delta$.

对于$(\neg\neg)$, 假设$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:B,\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:\neg\neg B,\Delta$, 根据归纳假设$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:B,\Delta$, 因此, $M,v',w\models\mathbf{w}:\neg\neg B,\Delta$.

对于$(\wedge),(\vee),(\neg\wedge)$和$(\neg\vee)$, 证明与命题逻辑中的类似, 这里就省略了.

对于$(\Box)$, 假设对任何可能世界标记$\mathbf{w}'$, $\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\in\Delta$ 且$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}':B,\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta$, 假设$M,v',w\not\models\Delta$. 根据归纳假设, 对于任意的可能世界常量$w''$满足$\mathbf{R}(w,w'')\in\Delta$, $M,v',w''\models\mathbf{w}'':B$. 因此, 我们有: $M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta$.

对于$(\neg\Box^R)$, 假设对某个可能世界标记$\mathbf{w}''$, $\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}'')\in\Delta$以及$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}'':\neg B,\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Rightarrow\mathbf{w}:\neg\Box B,\Delta$, 根据归纳假设, 如果$M,v',w\models\Delta$ 则$M,v',w\models\mathbf{w}:\neg\Box B,\Delta$. $M,v',w\models\mathbf{w}'':\neg B$. 因而$M,v',w\models\mathbf{w}:\neg B$, 即, $M,v',w\models\mathbf{w}:\neg\Box B,\Delta$.

□

定理7.4.3 (完备性定理)对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$,

$$\models_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{T}_3}\Rightarrow\Delta.$$

证明 我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Rightarrow\Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma\in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Rightarrow\Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Rightarrow\Delta'$为原子的, 或者$\Rightarrow[\neg\Box B],\Delta'$均使用过出现在$\xi$上的可能世界符号$\mathbf{w}'$, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\begin{cases}
\Rightarrow\mathbf{w}:B,\Delta_1 & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:\neg\neg A,\Delta_1\in\xi\\
\begin{cases}\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta_1\end{cases} & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\wedge B_2,\Delta_1\in\xi\\
\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_1,\mathbf{w}:\neg B_2,\Delta_1 & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:\neg(B_1\wedge B_2),\Delta_1\in\xi\\
\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\mathbf{w}:B_2,\Delta_1 & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta_1\in\xi\\
\begin{cases}\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_1,\Delta_1\\ \Rightarrow\mathbf{w}:\neg B_2,\Delta_1\end{cases} & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:\neg(B_1\vee B_2),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightsquigarrow\Delta_1\\ \Rightarrow\mathbf{w}':B',\Delta_1\\ \mathbf{w}'\text{没有出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Rightarrow\mathbf{w}':B,[\mathbf{w}:\neg\Box B],\Delta_1\\ \mathbf{w}:\neg\Box B\text{使用过}\mathbf{w}'\end{array}\right. & \text{如果}\begin{cases}\Rightarrow[\mathbf{w}:\neg\Box B],\Delta_1\in\xi\\ \mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\in\Delta_1\\ \mathbf{w}:\neg\Box B\text{没有使用过}\mathbf{w}'\end{cases}
\end{cases}$$

定理7.4.4 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Rightarrow \Delta' \in \xi$为$\mathbf{T}_3$的公理, 则$T$是$\Rightarrow \Delta$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理7.4.5 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得每个矢列式$\Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{T}_3$的公理, 则存在一个模型$M$和可能世界$w$使得$v', w \not\models \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝使得每个矢列式$\Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{T}_3$的公理. 设

$$\Theta^R = \bigcup_{\Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta'.$$

定义一个模型$M = (W, R, v)$如下:

- W是出现在ξ中的$\mathbf{w}$的集合;
- $R = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') : \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R\}$;
- 对每个命题变元p, $v(p) = \{\mathbf{w} : \mathbf{w} : p \in \Theta^R\}$.

我们对ξ的节点η做归纳证明对每个η上的矢列式$\Rightarrow \Delta'$, 均有$v(\Delta') = 0$. 我们只给出$\Box B$的证明, 其它情况类似.

情况 1. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \mathbf{w} : \Box B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则存在一个可能世界标记$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Delta_2$, 并且$\Rightarrow \Delta'$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Rightarrow \mathbf{w}' : B_1, \Delta_2$. 由归纳假设, 对这个$\mathbf{w}'$, $v(\mathbf{w}' : B_1, \Delta_2) = 0$. 因此, $v(\mathbf{w} : \Box B_1, \Delta_2) = 0$.

情况 2. $\Rightarrow \Delta' = \Rightarrow \mathbf{w} : \neg\Box B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则对每个可能世界标记$\mathbf{w}'' \in W$, $\Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Rightarrow \mathbf{w}'' : B_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Delta_2, \mathbf{w}'' : \neg B_1) = 0$. 因此, $v(\Delta_2, \mathbf{w} : \neg\Box B_1) = 0$.

$\Box$

7.4.2 表式证明系统$\mathbf{S}_3$

设Γ是公式集合. 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$在M中被满足, 记为$M \models \Gamma \Rightarrow$, 如果对任何赋值$v$和可能世界$w$, $M, v, w \not\models \Gamma$, 其中$M, v, w \models \Gamma$ 如果对每个公式$A \in \Gamma$, $M, v, w \models A$.

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{S}_3} \Gamma \Rightarrow$, 如果对任何模型$M$, $M \models \Gamma \Rightarrow$. 因此, $\Gamma \Rightarrow$是有效的当且仅当Γ是永假的.

表式证明系统$\mathbf{S}_3$ 由下列公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A})\ \frac{\mathbf{E}l(l, \neg l \in \Gamma)}{\Gamma \Rightarrow}$$

其中Γ是文字断言的集合.

- **推理规则**:

$$(\wedge_1)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: A_1 \Rightarrow}{\Gamma, \mathbf{w}: (A_1 \wedge A_2) \Rightarrow} \qquad (\neg\wedge)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_1 \Rightarrow \\ \Gamma, \mathbf{w}: \neg A_2 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow}$$

$$(\wedge_2)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: A_2 \Rightarrow}{\Gamma, \mathbf{w}: (A_1 \wedge A_2) \Rightarrow}$$

$$(\vee)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \mathbf{w}: A_1 \Rightarrow \\ \Gamma, \mathbf{w}: A_2 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: A_1 \vee A_2 \Rightarrow} \qquad (\neg\vee_1)\frac{\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_1 \Rightarrow}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow}$$

$$(\neg\vee_2)\frac{\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_2 \Rightarrow}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow}$$

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: A \Rightarrow}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg\neg A \Rightarrow}$$

$$(\Box)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Gamma \\ \Gamma, \mathbf{w}'': A \Rightarrow\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: \Box A \Rightarrow} \qquad (\neg\Box)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Gamma \\ \Gamma, \mathbf{w}': \neg A \Rightarrow\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg\Box A \Rightarrow}$$

其中$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界常量, 并且$\mathbf{w}''$是一个可能世界常量.

定义7.4.6 一个矢列式$\Rightarrow \Delta$是$\mathbf{S}_3$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{S}_3} \Rightarrow \Delta$如果存在一个矢列式序列$\Rightarrow \Delta_1, ..., \Rightarrow \Delta_n$使得$\Rightarrow \Delta_n == \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Rightarrow \Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过一个推理规则得到的.

我们有如下的

定理7.4.7 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$,

$$\vdash_{\mathbf{S}_3} \Gamma \Rightarrow \ \text{蕴含}\ \models_{\mathbf{S}_3} \Gamma \Rightarrow .$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 且每一个推理规则都是保有效的.

给定一个模型$M = (W, R, v)$和一个可能世界w.

对于公理($\mathbf{A}$), 假设$\mathbf{w} : l, \mathbf{w} : \neg l \in \Gamma$. 则对模型$M$和可能世界$w$, 要么$M, w \models \mathbf{w} : l$, 要么$M, w \models \mathbf{w} : \neg l$. 因而$M, w \models \Gamma \Rightarrow$.

对于($\neg$), 假设$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : A \Rightarrow$, 即不存在赋值和可能世界使得$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : A$. 为了证明$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg\neg A \Rightarrow$, 假设存在赋值和可能世界使得$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg\neg A$. 则$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : A$. 矛盾.

对于($\wedge$)和($\vee$), 证明类似, 这里就省略了.

对于($\Box$), 假设对某个可能世界标记$\mathbf{w}''$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Gamma$, $M, w \models \Gamma, \mathbf{w}'' : A \Rightarrow$. 为了证明$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : \Box A \Rightarrow$, 假设$M, w \models \Gamma$. 则, 对于某个可能世界常量$w''$满足$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Gamma, M, w'' \not\models \mathbf{w}'' : A$, 即$M, w \not\models \mathbf{w} : \Box A$, 即$M, v \models \Gamma, \mathbf{w} : \Box A \Rightarrow$.

对于($\neg\Box$), 假设对每个可能世界标记$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Gamma$, $M, v \models \Gamma, \mathbf{w}' : \neg A \Rightarrow$. 为了证明$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg\Box A \Rightarrow$, 假设$M, w \models \Gamma$并且$M, w \not\models \mathbf{w} : \neg\Box A$. 则对每个可能世界$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Gamma$, $M, w \not\models \mathbf{w}'' : \neg A$. 因此, $M, w \not\models \mathbf{w} : \neg\Box A$, 即$M, w \models \Gamma, \mathbf{w} : \neg\Box A \Rightarrow$.

□

定理7.4.8 (完备性定理)对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$,

$$\models_{\mathbf{S}_3} \Gamma \Rightarrow \ \text{蕴含}\ \vdash_{\mathbf{S}_3} \Gamma \Rightarrow .$$

证明 我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow$为原子的, 或者$\Gamma', [\mathbf{w} : \Box A] \Rightarrow$使得出现在$\xi$上的可能世界符号$\mathbf{w}'$均使用过, 则该节点为一个叶节点;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\begin{cases}
\Gamma_1, \mathbf{w} : A \Rightarrow & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg\neg A \Rightarrow \in \xi \\
\Gamma_1, \mathbf{w} : A_1, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \in \xi \\
\begin{cases} \Gamma_1, \mathbf{w} : \neg A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, \mathbf{w} : \neg A_2 \Rightarrow \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \in \xi \\
\begin{cases} \Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \Rightarrow \\ \Gamma_1, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \vee A_2 \Rightarrow \in \xi \\
\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg A_1, \mathbf{w} : \neg A_2 \Rightarrow & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg(A_1 \vee A_2) \Rightarrow \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, \mathbf{w}'' : A_1, [\mathbf{w} : \Box A_1] \Rightarrow \\ \mathbf{w} : \Box A_1\text{使用过}\mathbf{w}'' \end{array} \right. & \text{如果}\begin{cases} \Gamma_1, [\mathbf{w} : \Box A_1] \Rightarrow \in \xi \\ \mathbf{E}\mathbf{w}''(\mathbf{w}''\text{出现在}\xi \\ \&\mathbf{w} : \Box A_1\text{没有使用过}\mathbf{w}'' \\ \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Gamma_1 \end{cases} \\
\left[\begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Gamma_1 \\ \Gamma_1, \mathbf{w}' : \neg A_1 \Rightarrow \\ \mathbf{w}'\text{不出现在}T\text{中} \end{array} \right. & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg\Box A_1 \Rightarrow \in \xi
\end{cases}$$

其中公式A'是A中每个$\mathbf{w}$的出现变换为$\mathbf{w}'$所得到的公式.

定理7.4.9 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$为$\mathbf{S}_3$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow$的一个证明树.

定理7.4.10 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$均不是$\mathbf{S}_3$的公理, 则存在一个模型$M$和可能世界$w$使得$v', w \not\models \Gamma \Rightarrow$.

证明 设ξ为T的枝使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \in \xi$不是$\mathbf{S}_3$的公理. 设

$$\Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \in \xi} \Gamma'.$$

定义一个模型$M = (W, R, v)$如下:

• W是出现在ξ中的$\mathbf{w}$的集合;

• $R = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') : \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^L\}$;

• 对每个命题变元$p, v(p) = \{\mathbf{w} : \mathbf{w} : \neg p \in \Theta^L\}$.

我们对ξ的节点η做归纳证明对每个η上的矢列式$\Gamma' \Rightarrow$, 均有$v(\Gamma') = 1$.

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \mathbf{w} : \Box A_1 \Rightarrow \in \eta$. 则对每个可能世界标记$\mathbf{w}''$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Theta^L$, $\Gamma' \Rightarrow$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, \mathbf{w}'' : A_1 \Rightarrow$. 由归纳假设, 对每个这样的$\mathbf{w}'$, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}'' : A_1) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w} : \Box A_1) = 1$.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow = \Gamma_2, \mathbf{w} : \neg\Box A_1 \Rightarrow \in \eta$. 则存在一个新的可能世界标记$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^L$并且$\Gamma' \Rightarrow$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, \mathbf{w}' : \neg A_1 \Rightarrow$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}' : \neg A_1) = 1$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w} : \neg\Box A_1) = 1$.

□

我们可以看出: Gentzen推理系统是表式证明系统$\mathbf{T}_3$和$\mathbf{S}_3$的组合, 表示为

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{T}_3 \oplus \mathbf{S}_3.$$

7.4.3 注释

由于在表式证明系统中我们只考虑矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个方面. 这样, 推理规则$(\neg^L)$和$(\neg^R)$不能使用. 我们只能使用下列的规则:

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\neg^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg B, \Delta}.$$

为了能够分解$\neg(A_1 \wedge A_2), \neg(A_1 \vee A_2), \neg\Box A_1$这样的公式, 我们需要增加相应的规则. 这样, Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2'$就变成了如下的$\mathbf{G}_2''$.

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_2''$由一个公理和若干个推理规则组成.

• **公理**:

$$\frac{\text{incon}(\Gamma) \text{ or } \text{incon}(\Delta) \text{ or } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ为原子公式集合.

• **推理规则**:

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w} : A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{w} : A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_1, \Delta \\ \Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_2, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{w} : A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \mathbf{w} : A_1 \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow \Gamma\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w} : A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R) \frac{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\Box^L)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Gamma \\ \Gamma, \mathbf{w}'' : A \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w} : \Box A \Rightarrow \Delta} \qquad (\Box^R)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma \Rightarrow \mathbf{w}' : B, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : \Box B, \Delta}$$

并且

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg\neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\neg^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg\neg B, \Delta}$$

$$(\neg\wedge^L)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_1 \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, \mathbf{w}: \neg A_2 \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: \neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\wedge_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\neg\wedge_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg(B_1 \wedge B_2), \Delta}$$

$$(\neg\vee_1^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{w}: A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\vee^R)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg B_1, \Delta \\ \Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg B_1, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \neg(B_1 \vee B_2), \Delta}$$

$$(\neg\vee_2^L)\ \frac{\Gamma, \mathbf{w}: \neg A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{w}: A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\neg\square^L)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma, \mathbf{w}': A \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \mathbf{w}: \square A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\square^R)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Delta \\ \Gamma \Rightarrow \mathbf{w}'': B, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{w}: \square B, \Delta}$$

其中$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界常量, 并且$\mathbf{w}''$是一个可能世界常量.

7.5 谓词模态逻辑

谓词模态逻辑的语言L_3'是谓词逻辑语言L_2加上模态词$\square$.

谓词模态逻辑的语义有很多种，比如常论域语义(即每个可能世界的论域相同), 可变论域语义, 单调增(减)论域语义, 个体概念语义等等. 我们给出个体概念语义.

在一个可能世界w去判定公式$\square A$的真假性, 我们需要判断对任何可能世界w'使得$(w, w') \in R$, A在w'中的真假性, 其中$\square A(c)$是关于常量符号c的, 那么A在w'中是对元素(c, w')的判断, 这里c在w'中对应的元素. 因此, 对每个可能世界w, 我们需要知道(c, w); 类似地, 当$\square A(x)$含有一个变元符号x, 那么$\square A(x)$在w中是关于x在w中的取值(记为(x, w)), 而当$(w, w') \in R$, $A(x)$是关于x在w'中的取值(x, w'); 而当我们在可能世界w中判定$\forall x \square A(x)$的真假值时, 对可能世界w的论域D_w中的每个元素a, $\square A(x/a)$为真, 即对任何可能世界w'使得$(w, w') \in R$, $A(x/a)$在w'中为真, 这时需要在可能世界w'的论域中有一个元素a'对应于a, 使得$A(x/a')$在w'中为真. 设$a' = (a, w')$. 这样$\lambda w.(a, w)$是一个个体概念. 同样, $\lambda w.(c, w), \lambda x.(x, w)$也是个体概念.

定义7.5.1 一个谓词模态模型M是一个四元组(W, R, U, I), 其中$U = \bigcup_{w \in W} U_w$, U_w是可能世界w的论域, 并且

- 对每个常量符号c和可能世界w, $I(c, w) \in U_w$;
- 对每个n-元函数符号f和可能世界w, $I(f, w) : U_w^n \to U_w$; 并且
- 对每个n-元谓词符号p和可能世界w, $I(p, w) \subseteq U_w^n$;

并且对每个可能世界$w \in W$和元素$a \in U_w$, 对任何可能世界$w' \in W$, $a(w')$, 记为(a, w'), 是一个元素对应于U_w中的a.

一个赋值v是变元和可能世界到论域的函数, 即对任何变元x和可能世界$w, v(x,w)\in U_w$, 满足下列条件:

$$v(x,w')=(v(x,w),w').$$

给定一个模型$M=(W,R,U,I)$, 一个可能世界$w\in W$, 项t在w中的解释$t^{I,v,w}$定义为

$$t^{I,v,w}=\begin{cases} I(c,w) & \text{如果}t=c \\ v(x,w) & \text{如果}t=x \\ I(f,w)(t_1^{I,v,w},...,t_n^{I,v,w}) & \text{如果}t=f(t_1,...,t_n) \end{cases}$$

这样项t在不同的可能世界中可以取不同的值. $\lambda w.t^{I,v,w}$可以看作t在模型M的不同可能世界中取不同值的整体，也称个体概念(individual concept). 因而我们也称命题逻辑和谓词逻辑为外延性逻辑, 而模态逻辑为内含性逻辑.

一个公式A在v和w中为真, 记为$M,v,w\models A$, 定义如下: $M,v,w\models A$ 当且仅当

$$\begin{cases} (t_1^{I,v,w},...,t_n^{I,v,w})\in I(p,w) & \text{如果}A=p(t_1,...,t_n) \\ M,v,w\not\models B & \text{如果}A=\neg B \\ M,v,w\models B\&M,v,w\models C & \text{如果}A=B\wedge C \\ M,v,w\models B \text{ or } M,v,w\models C & \text{如果}A=B\vee C \\ \mathbf{A}a\in U_w(M,v_{x/(a,w)},w\models B(x)) & \text{如果}A=\forall xB(x) \\ \mathbf{A}w'((w,w')\in R\Rightarrow M,v,w'\models B') & \text{如果}A=\Box B \end{cases}$$

其中B'是B的转换, 将公式B中的每个$(t,\mathbf{w})$出现转换为$(t,\mathbf{w}')$所得到的公式. 具体地,

$$B'=\begin{cases} (t_1',...,t_n')\in I(p,w) & \text{如果}B=p(t_1,...,t_n) \\ \neg B' & \text{如果}B=\neg B_1 \\ B_1'\wedge B_2' & \text{如果}B=B_1\wedge B_2 \\ B_1'\vee B_2' & \text{如果}B=B_1\vee B_2 \\ \forall xB_1'((x,w')) & \text{如果}B=\forall xB_1(x) \\ \Box B_1' & \text{如果}B=\Box B_1 \end{cases}$$

其中

$$t'=\begin{cases} (c,w') & \text{如果}t=c \\ (x,w') & \text{如果}t=x \\ f(t_1',...,t_n') & \text{如果}t=f(t_1,...,t_n) \end{cases}$$

类似地, 我们定义带可能世界标记的公式和带可能世界标记的矢列式.

设Γ,Δ是公式集合. 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$在M中被满足, 记为$M\models\Gamma\Rightarrow\Delta$, 如果对任何赋值$v$和可能世界$w$, $M,v,w\models\Gamma$蕴含$M,v,w\models\Delta$, 其中$M,v,w\models\Gamma$ 如果对每个公式$A\in\Gamma, M,v,w\models A$; 并且$M,v,w\models\Delta$ 如果对某个公式$B\in\Delta, M,v,w\models B$.

一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{G_4}}\Gamma\Rightarrow\Delta$, 如果对任何模型$M, M\models\Gamma\Rightarrow\Delta$.

7.5.1 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_4$

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_4$ 由下列公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A})\ \frac{\Gamma\cap\Delta\neq\emptyset}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

其中Γ,Δ是原子断言的集合.

- **推理规则**:

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}\qquad (\wedge^R)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta\\ \Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta\end{array}}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\wedge B_2,\Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma,\mathbf{w}:A_1\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\mathbf{w}:A_2\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma,\mathbf{w}:A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta}\qquad (\vee_1^R)\frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:A,\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:\neg A\Rightarrow\Delta}\qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:B\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\neg B,\Delta}$$

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma,\mathbf{w}:A((t,\mathbf{w}))\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathbf{w}:\forall xA(x)\Rightarrow\Delta}\qquad (\forall^R)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:B((x,\mathbf{w})),\Delta}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\forall xB(x),\Delta}$$

$$(\Box^L)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}'')\in\Gamma\\ \Gamma,\mathbf{w}'':A''\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma,\mathbf{w}:\Box A\Rightarrow\Delta}\qquad (\Box^R)\ \frac{\begin{array}{c}\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightsquigarrow\Gamma\\ \Gamma\Rightarrow\mathbf{w}':B',\Delta\end{array}}{\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\Box B,\Delta}$$

其中$\mathbf{w}'$是一个新的可能世界常量, 并且$\mathbf{w}''$是一个可能世界常量; A''是A的转换, 将公式A中的每个$(t,\mathbf{w})$出现转换为$(t,\mathbf{w}'')$所得到的公式; B'是B的转换, 将公式B中的每个$(t,\mathbf{w})$出现转换为$(t,\mathbf{w}')$所得到的公式.

定义7.5.2 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$是$\mathbf{G}_4$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{G}_4}\Rightarrow\Delta$如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,...,\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n$使得$\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n=\Gamma\Rightarrow\Delta$, 并且对每个$1\leq i\leq n,\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过一个推理规则得到的.

在这个Gentzen推理系统中, 我们用到了如下定义的项

$$\mathbf{t},\mathbf{s}::=(\mathbf{c},\mathbf{w})|(x,\mathbf{w})|\mathbf{f}(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$$

和公式:

$$A,B::=\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')|\mathbf{w}:A.$$

设v'是v加上将可能世界符号映射到W中的映射.

给定一个模型$M=(W,R,U,I)$和一个可能世界$w\in W$, 项$\mathbf{t}$在w中的解释$\mathbf{t}^{I,v',w}$定义为

$$\mathbf{t}^{I,v',w}=\begin{cases}I(\mathbf{c},v'(\mathbf{w})) & \text{如果}\mathbf{t}=(\mathbf{c},\mathbf{w})\\ v(x,v'(\mathbf{w})) & \text{如果}\mathbf{t}=(x,\mathbf{w})\\ I(\mathbf{f})((t_1^{I,v',w},v'(\mathbf{w}))...,(t_n^{I,v',w},v'(\mathbf{w}))) & \text{如果}\mathbf{t}=\mathbf{f}((t_1,\mathbf{w}),...,(t_n,\mathbf{w}))\end{cases}$$

一个公式$\mathbf{A}$在v'和w中为真, 记为$M,v',w\models A$, 定义如下: $M,v',w\models\mathbf{A}$ 当且仅当

$$\begin{cases}((t_1^{I,v',w},v'(\mathbf{w})),...,(t_n^{I,v',w},v'(\mathbf{w})))\in I(\mathbf{p}) & \text{如果}\mathbf{A}=\mathbf{w}:\mathbf{p}((t_1,\mathbf{w}),...,(t_n,\mathbf{w}))\\ M,v',w\not\models\mathbf{B} & \text{如果}\mathbf{A}=\neg\mathbf{B}\\ M,v',w\models\mathbf{B}\&M,v,w\models\mathbf{C} & \text{如果}\mathbf{A}=\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}\\ M,v',w\models\mathbf{B}\text{ or }M,v,w\models\mathbf{C} & \text{如果}\mathbf{A}=\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\\ \mathbf{A}(a,w)\in U_w(M,v'_{x/(a,w)},w\models B(x)) & \text{如果}\mathbf{A}=\mathbf{w}:\forall x\mathbf{B}(x)\\ \mathbf{A}w'((v'(\mathbf{w}),w')\in R\Rightarrow M,v',w'\models\mathbf{B}) & \text{如果}\mathbf{A}=\mathbf{w}:\Box\mathbf{B}\end{cases}$$

我们有如下的

定理7.5.3 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{G_4}}\Gamma\Rightarrow\Delta\text{ 蕴含 }\models_{\mathbf{G_4}}\Gamma\Rightarrow\Delta.$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 且每一个推理规则都是保有效的.

给定一个模型$M=(W,R,U,I)$,赋值v和一个可能世界w.

对于公理$(\mathbf{A})$, 假设$\Gamma\cap\Delta\neq\emptyset$并且$M,v',w\models\Gamma$. 因而$M,v',w\models\Delta$.

对于$(\neg^L)$, 假设$M,v',w\models\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:A,\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\neg A\Rightarrow\Delta$, 假设$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\neg A$. 则$M,v',w\models\Gamma$且根据归纳假设, $M,v',w\models\mathbf{w}:A,\Delta$. 因为$M,v,w\models\mathbf{w}:\neg A$,并且$M,v',w\not\models\mathbf{w}:A$, 因此, $M,v',w\models\Delta$. $(\neg^R)$的情况类似.

对于$(\wedge)$和$(\vee)$, 证明与命题逻辑中的类似, 这里就省略了.

对于$(\forall^L)$, 假设$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:A((t,\mathbf{w}))\Rightarrow\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\forall xA(x)\Rightarrow\Delta$, 假设$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\forall xA(x)$. 则对于论域$U_w$中的任意元素$(a,w)$, $M,v'_{x/(a,w)},w\models A(x)$. 令$(a,w)=t^{I,v',w}\in U_w$, 我们有

$$M,v'_{(x/t^{I,v',w}},w\models\mathbf{w}:A((x,\mathbf{w})),$$

即, $M,v',w\models\mathbf{w}:A((t,\mathbf{w}))$. 根据归纳假设, 我们有$M,v',w\models\Delta$.

对于$(\forall^R)$, 假设$M,v',w\models\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:A((x,\mathbf{w})),\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}:\forall xA(x),\Delta$, 假设$M,v',w\models\Gamma$. 根据归纳假设, $M,v',w\models\mathbf{w}:A((x,\mathbf{w})),\Delta$. 如果$M,v',w\models\Delta$则$M,v',w\models\mathbf{w}:\forall xA(x),\Delta$. 否则, 假设$M,v',w\models\mathbf{w}:A((x,\mathbf{w}))$. 因为$x$不在$\Gamma$和$\Delta$中出现, 对于论域$U_w$中的任意元素$(a,w)$, $M,v'_{x/(a,w)},w\models\Gamma$, 并且, $M,v,w\models\mathbf{w}:A(x/(a,w))$, 即, $M,v'_{(x/(a,w)},w\models\mathbf{w}:A(x)$. 因此, 我们有$M,v',w\models\mathbf{w}:\forall xA(x)$.

对于$(\Box^L)$, 假设对任何$\mathbf{w}''$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}'')\Rightarrow\Delta$, 均有$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}'':A\Rightarrow\Delta$. 为了证明$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\Box A\Rightarrow\Delta$, 假设$M,v',w\models\Gamma,\mathbf{w}:\Box A$. 则, 对于任意的可能世界$w''$满足$(w,w'')\in R,M,v,w''\models A$, 即, $M,v',w\models\mathbf{w}'':A$. 根据假设, 我们有$M,v',w\models\Delta$.

对于$(\Box^R)$, 假设对某个不出现在Γ和Δ中的可能世界符号$\mathbf{w}'$, $\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\in\Delta$,

$$M,v',w\models\Gamma\Rightarrow\mathbf{w}':A,\Delta.$$

为了证明$M, v', w \models \Gamma \Rightarrow \mathbf{w} : \Box A, \Delta$, 假设$M, v', w \models \Gamma$. 根据归纳假设, $M, v', w \models \mathbf{w}' : A, \Delta$. 如果$M, v', w \models \Delta$ 则$M, v', w \models \mathbf{w} : \Box A, \Delta$. 否则, 假设$M, v', w \models \mathbf{w}' : A$. 如果$M, v, w \models \mathbf{w}' : A$ 则因为$\mathbf{w}'$ 是一个新的可能世界标记, 对于任意的w'使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Delta$, 均有$M, v', w' \models A$, 因而$M, v', w \models \Box A$, 即, $M, v', w \models \mathbf{w} : \Box A, \Delta$.

□

定理7.5.4 (完备性定理)对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$,

$$\models_{\mathbf{G}_4} \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{G}_4} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

证明 我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

树T构造如下:

• T的根节点为$\Gamma \Rightarrow \Delta$;

• 对节点ξ, 如果在ξ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$为原子的, 并且没有在任何节点$\eta \subseteq \xi$上的公式要求注视, 则该节点为一个叶节点, 其中一个公式$\mathbf{w} : \Box A_1, \mathbf{w} : \forall x A(x)$或者$\mathbf{w} : \Diamond B_1, \mathbf{w} : \exists x B(x)$ 在某个节点$\eta \subseteq \xi$要求注视, 如果在某个介于η和ξ之间的某个节点ζ上出现一个还没有使用于$\mathbf{w} : \Box A_1, \mathbf{w} : \forall x A(x)$或者$\mathbf{w} : \Diamond B_1, \mathbf{w} : \exists x B(x)$的常量符号$c$或者可能世界标记$\mathbf{w}'$;

•否则, ξ有下列直接子节点:

$$\begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : A, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : \neg A \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1, \mathbf{w} : B \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : \neg B, \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1, \mathbf{w} : A_1, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_2, \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \in \xi \\ \begin{cases} \Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, \mathbf{w} : A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1, \mathbf{w} : A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1, \mathbf{w} : B_2, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1 \vee B_2, \Delta_1 \in \xi \end{cases}$$

并且

$$\begin{cases} \begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1((\mathbf{c}, \mathbf{w})), \Delta_1 \\ \mathbf{c}\text{不出现在}T\text{中} \end{array} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : \forall x B_1(x), \Delta_1 \in \xi \\ \begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \rightsquigarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w}' : B_1, \Delta_1 \\ \mathbf{w}'\text{不出现在}T\text{中} \end{cases} & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \mathbf{w} : \Box B_1, \Delta_1 \in \xi \end{cases}$$

并且

• 对每个$\xi = \Gamma_2, \mathbf{w} : \forall x A(x) \Rightarrow \Delta_2 \in T$和每个出现的常量符号$\mathbf{c}$使得$\xi$没有作用于$\mathbf{c}$, 并且对每个$\xi$的子节点上的矢列式$\Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3$, 设$\Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3$的子节点包含矢列式$\Gamma_3, \mathbf{w} : A((\mathbf{c}, \mathbf{w})) \Rightarrow \Delta_3$, 并我们称$\delta$已经作用过$\mathbf{c}$;

- 对每个$\xi = \Gamma_2, \mathbf{w} : \Box A \Rightarrow \Delta_2 \in T$和每个出现的符号$\mathbf{w}''$使得$\delta$没有作用于$\mathbf{w}''$, 并且对每个$\xi$的子节点上的矢列式$\Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}'') \in \Delta_3$, 设$\Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3$的子节点包含矢列式$\Gamma_3, \mathbf{w}'' : A' \Rightarrow \Delta_3$, 并我们称$\xi$已经作用过$\mathbf{w}''$,

其中公式A'是A中每个$(c, \mathbf{w})/(x, \mathbf{w})$的出现变换为$(c, \mathbf{w}')/(x, \mathbf{w}')$所得到的公式.

定理7.5.5 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$为$\mathbf{G}_4$的公理, 则$T$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

证明 由T的定义, T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树.

定理7.5.6 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{G}_4$的公理, 则存在一个模型$M$,赋值$v'$和可能世界$w$使得$M, v', w \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 设ξ为T的枝使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{G}_4$的公理. 设

$$\Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Gamma',$$
$$\Theta^R = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta'.$$

定义一个模型$M = (W, R, U, I)$和赋值v如下:

- W是出现在ξ中的$\mathbf{w}$的集合;
- $R = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') : \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R\}$;
- $U_{\mathbf{w}}$为出现在T中的所有常量符号$(\mathbf{c}, \mathbf{w})$的集合;
- 对每个常量符号$\mathbf{c}$和可能世界$\mathbf{w}$, $I(\mathbf{c}, \mathbf{w}) = (\mathbf{c}, \mathbf{w})$, 并且对每个$n$-元谓词符号$p$, $I(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \{((\mathbf{c}_1, \mathbf{w}), ..., (\mathbf{c}_n, \mathbf{w})) : \mathbf{p}((\mathbf{c}_1, \mathbf{w}), ..., (\mathbf{c}_n, \mathbf{w})) \in \Theta^L\}$;
- $v(x, \mathbf{w}) = (x, \mathbf{w})$.

我们对ξ的节点η做归纳证明对每个η上的矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, 均有$v(\Gamma') = 1$并且$v(\Delta') = 0$.

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \mathbf{w} : \forall x A_1 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则, 对每个$(d, \mathbf{w}) \in U_{\mathbf{w}}$, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, \mathbf{w} : A_1(x/(d, \mathbf{w})) \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, 对每个$(d, \mathbf{w}) \in U_{\mathbf{w}}$, $v(\Gamma_2, \mathbf{w} : A_1(x/(d, \mathbf{w})) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w} : \forall x A_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w} : \forall x B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w} : B_1(x/(\mathbf{d}, \mathbf{w})), \Delta_2$, 其中$\mathbf{d}$不出现在$\Gamma_2$和$\Delta_2$中. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, \mathbf{w} : B_1(x/(\mathbf{d}, \mathbf{w})) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, \mathbf{w} : \forall x B_1) = 0$.

情况 3. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \mathbf{w} : \Box A_1 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则对每个$\mathbf{w}' \in U$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R$, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, \mathbf{w}' : A_1 \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, 对每个$\mathbf{w}'$使得$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R$, $v(\Gamma_2, \mathbf{w}' : A_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2, \mathbf{w} : \Box A_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$.

情况 4. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w} : \Box B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则对某个不出现在$\Gamma_2$和$\Delta_2$中的可能世界标记$\mathbf{w}'$, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow \mathbf{w}' : B_1, \Delta_2$并且$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \Theta^R$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, \mathbf{w}' : B_1) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, \mathbf{w} : \Box B_1) = 0$.

$\Box$

7.5.2 谓词模态逻辑到谓词逻辑的翻译

任何东西均可表示在谓词逻辑中. 比如二阶逻辑可以翻译到谓词逻辑中, 得到多类逻辑(many-sorted logic). 模态逻辑可以在谓词逻辑中得到表示, 描述逻辑可以翻译到谓词逻辑的节段(fragments). 但是, 任何转换/翻译/表示均会失去一些东西, 或者在翻译的逻辑中推出的东西比被翻译的逻辑中推出的东西要多. 比如, 二阶逻辑到谓词逻辑的翻译, 二阶逻辑是不完备的, 但翻译的谓词逻辑的节段是完备的. 因为在这个节段中一个集合的幂集不能在谓词逻辑中表示. 同样, 在模态逻辑到谓词逻辑的翻译中, 根据模态逻辑的对应理论(correspondence theory), 有些框架类可以用一个谓词逻辑的公式来表示; 但有些框架类不能用一个谓词逻辑的公式来表示.

因此, 尽管其它逻辑均可以翻译到谓词逻辑, 但是谓词逻辑不能替换这些逻辑. 在人工智能的经典逻辑中, 谓词模态逻辑在人工智能的应用中仍然存在很多逻辑问题和本体论的问题有待解决. 在逻辑上, 谓词模态逻辑的语义通常不能表示自然语言所表示的含义. 因为谓词模态逻辑的语义是形式语义. 不同于动态逻辑对程序行为的形式化, 其中程序本身是形式的, 动态逻辑只是用逻辑的方法来表示程序的动态行为, 其实程序本身也可以通过等价的递归函数, 形式语义等办法来表示其动态行为.

自然语言的语义是非形式的. 谓词模态逻辑的语义是形式的. 因此, 我们只能在谓词模态逻辑中表示自然语言某些被形式化的方面.

设σ是谓词模态逻辑到谓词逻辑的翻译. 则

- 在逻辑语言层次上,

$$
\begin{array}{l}
\sigma(c) = \mathbf{c}; \\
\sigma(x) = x; \\
\sigma(p) = \mathbf{p}; \\
\sigma(\neg) = \neg; \\
\sigma(\wedge) = \wedge; \\
\sigma(\vee) = \vee; \\
\sigma(\forall) = \forall; \\
\sigma(\Box) = \forall x(\mathbf{R}(w,x) \to \sigma(\cdot)).
\end{array}
$$

其中

◦ c是谓词模态逻辑中一个常量符号, $\mathbf{c}$为谓词逻辑中的一元函数符号;

◦ x是谓词模态逻辑中一个变量符号, $\mathbf{x}$为谓词逻辑中的一元函数符号;

◦ p是谓词模态逻辑中一个n-元谓词符号, $\mathbf{p}$为谓词逻辑中的$(n+1)$-元谓词符号;

- 在项和公式层次上, 对任何一个可能世界符号w,

$$
\sigma_w(t) = \begin{cases} \mathbf{c}(w) & 如果 t = c \\ \mathbf{x}(w) & 如果 t = x \end{cases}
$$

并且

$$\sigma_w(A)=\begin{cases}\mathbf{p}(\sigma(t_1),...,\sigma(t_n)) & \text{如果}A=p(t_1,...,t_n)\\ \neg\sigma_w(A_1) & \text{如果}A=\neg A_1\\ \sigma_w(A_1)\wedge\sigma_w(A_2) & \text{如果}A=A_1\wedge A_2\\ \sigma_w(A_1)\vee\sigma_w(A_2) & \text{如果}A=A_1\vee A_2\\ \forall x\sigma_w(A_1(x)) & \text{如果}A=\forall xA_1(x)\\ \forall\mathbf{w}'(\mathbf{R}(\mathbf{w},\mathbf{w}')\rightarrow\sigma_{w'}(A_1)) & \text{如果}A=\Box A_1\end{cases}$$

• 在语义层次上, 给定一个谓词模态逻辑的模型$M=(W,R,U,I)$, 定义$\sigma(M)=(U',I')$, 其中

$$\begin{aligned}&U'=U\times W,\\&I'(\mathbf{c})=(I(c),w),\\&I'(\mathbf{x})=(v(x),w),\\&I'(\mathbf{R})=R,\\&I'(\mathbf{p})=\{((a_1,w),...,(a_n,w)):(a_1,...,a_n)\in I(p,w)\}.\end{aligned}$$

对于任何赋值v, 设v'使得对任何变量x和可能世界w, $v'(x)=(v(x,w),w)$. 则我们有下列的定理:

命题7.5.7 任何一个项t,

$$(t^{I,v,w},w)=\sigma_w(t)^{I',v'}.$$

证明 我们对项结构作归纳证明.
如果$t=c$ 则

$$(t^{I,v,w},w)=(I(c),w)=I'(\mathbf{c})=\sigma_w(c)^{I',v'}.$$

如果$t=x$ 则

$$(t^{I,v,w},w)=(v(x),w)=I'(\mathbf{x})=\sigma_w(x)^{I',v'}.$$

□

定理7.5.8 任给谓词模态逻辑的公式A,模型M, 赋值v和可能世界$w\in W$,

$$M,v,w\models A \text{ 当且仅当 } \sigma(M),\sigma(v)\models\sigma_w(A).$$

证明 我们对公式结构作归纳来证明定理.
如果A是原子公式$p(t_1,...,t_n)$, 则

$$\begin{aligned}M,v,w\models p(t_1,...,t_n)\quad&\text{当且仅当}\quad(t_1^{I,v,w},...,t_n^{I,v,w})\in I(p,w)\\&\text{当且仅当}\quad((t_1^{I,v,w},w),...,(t_n^{I,v,w},w))\in I'(\mathbf{p})\\&\text{当且仅当}\quad(\sigma(t_1)^{I',v'},...,\sigma(t_n)^{I',v'})\in I'(\mathbf{p})\\&\text{当且仅当}\quad\sigma(p(t_1,...,t_n)\in I'(\mathbf{p})\\&\text{当且仅当}\quad\sigma(M),\sigma(v)\models\sigma(p(t_1,...,t_n).\end{aligned}$$

如果$A=\neg A_1$, 则

$$\begin{array}{lll}M,v,w\models A & \text{当且仅当} & M,v,w\not\models A_1\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\not\models\sigma_w(A_1)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\neg\sigma_w(A_1)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(\neg A_1)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A).\end{array}$$

如果$A=A_1\wedge A_2$, 则

$$\begin{array}{lll}M,v,w\models A & \text{当且仅当} & M,v,w\models A_1\& M,v,v\models A_2\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1)\&\sigma(M),v'\models\sigma_w(A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1)\wedge\sigma_w(A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1\wedge A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A).\end{array}$$

如果$A=A_1\vee A_2$, 则

$$\begin{array}{lll}M,v,w\models A & \text{当且仅当} & M,v,w\models A_1\text{ or }M,v,w\models A_2\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1)\text{ or }\sigma(M),v'\models\sigma_w(A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1)\vee\sigma(A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A_1\vee A_2)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(A).\end{array}$$

如果$A=\forall xA_1(x)$, 则

$$\begin{array}{lll}M,v,w\models\forall xA_1(x)A & \text{当且仅当} & \mathbf{A}a\in U_w(M,v_{x/a},w\models A_1(x))\\ & \text{当且仅当} & \mathbf{A}a\in U_w(\sigma(M),v'_{x/a}\models\sigma_w(A_1(x))\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\forall(x,w)\sigma_w(A_1(x))\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(\forall xA_1(x))\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma(A).\end{array}$$

如果$A=\Box A_1$, 则

$$\begin{array}{lll}M,v,w\models A & \text{当且仅当} & \forall w'(R(w,w')\Rightarrow M,v,w'\models A_1)\\ & \text{当且仅当} & \forall w'(R(w,w')\Rightarrow\sigma(M),v'\models\sigma_{w'}(A_1))\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\forall w'(\mathbf{R}(w,w')\to\sigma_{w'}(A_1))\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma_w(\Box A_1)\\ & \text{当且仅当} & \sigma(M),v'\models\sigma(A).\end{array}$$

□

7.6 知识表示中的模态逻辑

用模态逻辑表示知识[8,9]时需要考虑的问题有如下几点.

• 模态词重复使用是否要受限: 如B_a可以递归使用.

例如,

“我相信你会相信地球是圆的”

$[\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j(A)]$, 其中$i$是我, j是你, A表示“地球是圆的”.

但是, 如果$\mathbf{A}_t$表示在时间t, 则$\mathbf{A}_t(A)$表示在时间t, A成立, $\mathbf{A}_t A_{t'}(A)$ 的意义往往不大.

• 模态词能否与量词交换: 即$\Box(\exists x A(x))$是否等价于$\exists x\Box(A(x))$. 如果这样, 我们就只需要讨论模态词作用于无量词的公式上.

通常模态词与量词是不可交换的. 比如, $\mathbf{K}_a(A)$表示“agent a 知道A”, 例如, $\mathbf{K}_i(\exists x L(x))$表示

我知道有人x住在这个荒岛上,

(存在这样的人,但是谁可能不知道), 而$\exists x\mathbf{K}_i(L(x))$表示

存在一个人x我知道x是住在这个荒岛上的

(x是谁我是知道的).

但$\mathbf{A}_t$可以与量词交换, 例如, “在5:00钟, 某个东西在这个桌子上” 等价于“某个东西在5:00钟在这个桌子上”.

如果$\Box$与量词不能交换, 则设A为一个公式含有模态词$\Box$和项t, 那么公理

$$A(t) \to \exists x A(x)$$

可能不成立, 其中A, t满足谓词逻辑对公理的限制, 即t中不含在$A(t)$中受限的变量.

比如, $\mathbf{K}_i(L(t))$, “我知道最年长的人住在这个荒岛上”, 不一定蕴涵$\exists x\mathbf{K}_i(L(x))$, “存在一个人我知道他住在这个荒岛上”, 其中表示荒岛上住居的最年长的人, 这是因为我知道这个岛上只有有限多个人, 而有限多个人中必有一个最年长的, 但这不蕴涵我知道他究竟是谁.

• 模态词是否与Boole运算交换: 即$\Box(A \vee B)$是否等价于$\Box(A) \vee \Box(B)$?

在模态逻辑中, $\Box(\neg A)$不等价于$\neg\Box A$, 后者等价于$\Diamond\neg A$. 比如$\mathbf{K}_a$不能与Boole运算交换: $\mathbf{K}_a(\neg A)$表示

我知道现在没有下雨

不等于$\neg\mathbf{K}_a(A)$, 即

我不知道现在下雨.

前者蕴涵后者, 但后者不蕴涵前者. $\mathbf{K}_a(A)$是错的, 可能是我不知道现在下雨或者我知道现在不下雨.

$\mathbf{A}_t$时间是可以与Boole运算交换的,

$$\mathbf{A}_t(\neg A) \leftrightarrow \neg\mathbf{A}_t(A),$$

且

$$\mathbf{A}_t(A \vee B) \leftrightarrow \mathbf{A}_t(A) \vee \mathbf{A}_t(B).$$

例如, “在1979年1月, Bush不是美国总统” 等价于“这是错误的: 在1979年1月Bush是美国总统”.

任何与Boole运算交换的模态词必须满足矛盾律和排中律: 对任何命题A, 要么$\Box(A)$要么$\Box(\neg A)$为真, 但不能两者都真.

• 等项能否替换: 即

$$t \equiv s \to \Box A(s) \leftrightarrow \Box A(t).$$

如$\Box$能等项替换, $\Box$称为参照透明的(referentially transparent), 否则$\Box$称为参照不透明的(referentially opaque).

在谓词逻辑中我们有等词替换公理:

$$\frac{A(t_1) \quad t_1 = t_2}{A(t_2)},$$

其中$A(x)$是任何一个含一个自由变元的公式.

如$\mathbf{K}_a$就是参照不透明的, 因为$\mathbf{K}_a(A(s))$且$s \equiv t$, 但$\mathbf{K}_a(A(t))$ 可能不成立. 因此, $s \equiv t$不蕴涵$\mathbf{K}_a(s \equiv t)$. 对主体a来说, 主体a可能不知道$s \equiv t$, 只知道$A(s)$.

典型的例子是超人问题:

(1) Lois believes that Superman is strong.

(2) Lois believes that Clark Kent is not strong.

(3) Lois does not believe that Clark Kent is strong.

由于Clark Kent=Superman, 在(1)中用Clark Kent替换Superman得到

(4) Lois believes that Clark Kent is strong.

而(3)和(4)是矛盾的. 在假设Clark Kent=Superman下, 句子

(1') Superman is strong.

为真当且仅当句子

(2') Clark Kent is strong.

为真.

如果$T(A)$表示 “A为真”, 那么T就是参照透明的.

• 模态词是否在推理规则下封闭: 即由

$$\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n \vdash B$$

是否会有

$$\Box(\mathbf{A}_1), ..., \Box(\mathbf{A}_n) \vdash \Box(B).$$

如果可以的话则模态词$\Box$称为结论封闭的. 比如, $\mathbf{A}_t$是结论封闭的:

$$\frac{\text{如果昨天每个学生参加了开学典礼} \quad \text{昨天张三是一个学生}}{\text{则昨天张三参加了开学典礼}}$$

即

$$\mathbf{A}_t(\forall x A(x)) \vdash \mathbf{A}_t(A(s)),$$

其中s为项.

$\mathbf{S}_a(A)$表示“agent a说”, 不是结论封闭的. $\mathbf{S}_l(\forall x A(x))$表示

李四说学生都在听课,

并且$\mathbf{S}_l(s)$表示

李四说张三是一个学生,

但不一定正确的是: $\mathbf{S}_l(A(s))$,

李四说张三在听课.

如果一个模态词$\Box$是参照透明的, 且与量词、Boole运算交换, 则$\Box$一定是结构封闭的.

• 对句子取量词: $\forall A(B(A)), \exists A(B(A))$, 其中句子$A$出现在公式$B$中. 比如所有张三说的都是真的.

参考文献:

[1] Aristotle, Posterior Analytics [M]//R. Mckeon, *The Basic Works.* Modern Library, 2001.

[2] Heidegger M. *Kant and the Problem of Metaphysics*[M], trans. by R. Taft, Bloomington: Indiana University Press, 1990.

[3] Prantl C. *Geschichte der Logik im Abendlande*[M]. Hildesheim: Georg Olms, 1997.

[4] Fitting M., Mendelsohn R.L. *First Order Modal Logic*[M]. Kluwer, 1998.

[5] Hughes G.E., Cresswell M.J. *A New Introduction to Modal Logic*[M]. Routledge, 1996.

[6] Blackburn P., van Benthem J.,Wolter F.(eds.) *Handbook of Modal Logic*[M]. North Holland. 2006.

[7] van Benthem J.F. *The Logic of Time*[M]. Dordrecht: D. Reidel. 1982.

[8] Quine W.V. Reference and Modality[M]//*From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 139-159, 1953.

[9] Davis E. *Representations of Commonsense Knowledge*[M]. Elsevier, 1990.

第八章8

描述逻辑

描述逻辑[1]是1990年以后逐渐开始受到人们的重视. 在此之前, 人们关心的都是以断言为第一对象的逻辑, 如前面介绍的命题逻辑, 谓词逻辑和模态逻辑. 以概念为第一对象的描述逻辑随着人工智能的需要, 尤其是本体工程技术的发展, 人们对概念的推理越发需要了.

描述逻辑是形式化概念的逻辑, 如同谓词逻辑是形式化断言的一样.

不同于以前的逻辑, 描述逻辑是一类逻辑, 从可判定的描述逻辑到不可判定的描述逻辑，其中有十几个描述逻辑. 我们将给出一个基本描述逻辑.

8.1 各种各样的描述逻辑

最基本的描述逻辑是$\mathcal{AL}$, 其逻辑语言包含如下的符号:

- (个体) 常量符号: $c_0, c_1, ...$;
- 概念常量符号: $\top, \bot$;
- 原子概念符号: $A_0, A_1, ...$;
- 角色符号: $R_0, R_1, ...$;
- 概念构造子: $\neg, \sqcap, \exists, \forall$, 以及
- 包含关系:$\sqsubseteq$.

概念定义为:

$$C, D ::= A|\top|\perp|\neg A|C \sqcap D|\forall R.C|\exists R.\top$$

其中A是原子概念符号, R是一个角色符号.

一个模型M是一个序对(U, I), 其中U是一个非空集合(M的论域), 并且I是一个解释使得

∘对任何常量符号$c, I(c) \in U$;

∘对任何原子概念符号$A, I(A) \subseteq U$;

∘对任何角色符号$R, I(R) \subseteq U^2$.

概念C的解释C^I是U的一个子集使得:

$$C^I = \begin{cases} U & \text{if } C = \top \\ \emptyset & \text{if } C = \bot \\ U - I(A) & \text{if } C = \neg A \\ C_1^I \cap C_2^I & \text{if } C = C_1 \sqcap C_2 \\ \{a \in U : \mathbf{A}b((a,b) \in I(R) \Rightarrow b \in C_1^I)\} & \text{if } C = \forall R.C_1 \\ \{a \in U : \mathbf{E}b((a,b) \in I(R))\} & \text{if } C = \exists R.\top \end{cases}$$

描述逻辑还可以包含其它符号:

- 概念的并$\sqcup$ ($\mathcal{U}$):
$$(C_1 \sqcap C_2)^I = C_1^I \cup C_2^I.$$
- 全存在量词($\mathcal{E}$):
$$(\exists R.C)^I = \{a \in U : \mathbf{E}b((a,b) \in R^I \& b \in C^I)\}.$$
- 数量限制($\mathcal{N}$):
$$\begin{array}{l} (\geq nR)^I = \{a \in U : |\{b : (a,b) \in R^I\}| \geq n\}, \\ (\leq nR)^I = \{a \in U : |\{b : (a,b) \in R^I\}| \leq n\}, \end{array}$$
- 概念的补($\mathcal{C}$):
$$(\neg C)^I = U - C^I.$$

这些描述逻辑的命名规则为:

$$\mathcal{AL}[\mathcal{U}][\mathcal{E}][\mathcal{N}][\mathcal{C}].$$

比如.

$$\begin{array}{rcl} \text{妇女} & \equiv & \text{人} \sqcap \text{女性} \\ \text{男人} & \equiv & \text{人} \sqcap \neg\text{女性} \\ \text{母亲} & \equiv & \text{妇女} \sqcap \exists\text{有孩子}.\text{人} \\ \text{父亲} & \equiv & \text{男人} \sqcap \exists\text{有孩子}.\text{人} \\ \text{双亲} & \equiv & \text{父亲} \sqcup \text{母亲} \\ \text{祖母} & \equiv & \text{母亲} \sqcap \exists\text{有孩子}.\text{双亲} \\ \text{多孩子母亲} & \equiv & \text{母亲} \sqcap \geq 3\text{有孩子} \\ \text{没有女儿的母亲} & \equiv & \text{母亲} \sqcap \forall\text{有孩子}.\neg\text{妇女} \\ \text{妻子} & \equiv & \text{妇女} \sqcap \exists\text{有丈夫}.\text{男人} \end{array}$$

8.2 基本描述逻辑

基本描述逻辑由下列的逻辑语言、语法和语义组成.

8.2.1 语法和语义

基本描述逻辑的逻辑语言包括下列符号:

- (个体) 常量符号: $c_0, c_1, ...$;
- 原子概念符号: $A_0, A_1, ...$;
- 角色符号: $R_0, R_1, ...$;
- 概念构造子: $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$, 以及
- 包含关系:$\sqsubseteq$.

概念定义为:

$$C ::= A|\neg C|C_1 \sqcap C_2|C_1 \sqcup C_2|\exists R.C|\forall R.C,$$

其中A是原子概念符号, R是一个角色符号.

原始断言定义为:

$$\theta ::= C(c)|R(c,d),$$

其中c,d是常量符号, $R(c,d)$和$A(c)$被称为原子的断言, 并且$A(c), \neg A(c)$称为文字断言.

断言定义为:

$$\varphi ::= \theta|C \sqsubseteq D.$$

一个模型M是一个序对(U,I), 其中U是一个非空集合(M的论域), 并且I是一个解释使得

∘对任何常量符号$c, I(c) \in U$;

∘对任何原子概念符号$A, I(A) \subseteq U$;

∘对任何角色符号$R, I(R) \subseteq U^2$.

概念C的解释C^I是U的一个子集使得:

$$C^I = \begin{cases} I(A) & \text{如果} C = A \\ U - C_1^I & \text{如果} C = \neg C_1 \\ C_1^I \cap C_2^I & \text{如果} C = C_1 \sqcap C_2 \\ C_1^I \cup C_2^I & \text{如果} C = C_1 \sqcup C_2 \\ \{a \in U : \mathbf{E}b((a,b) \in I(R) \& a \in C^I)\} & \text{如果} C = \exists R.C \\ \{a \in U : \mathbf{A}b((a,b) \in I(R) \Rightarrow a \in C^I)\} & \text{如果} C = \forall R.C. \end{cases}$$

一个断言φ在M中是满足的, 记为$M \models \varphi$或者$I \models \varphi$, 如果

$$\begin{cases} I(c) \in C^I & \text{如果} \varphi = C(c) \\ (I(c), I(d)) \in I(R) & \text{如果} \varphi = R(c,d) \\ C^I \subseteq D^I & \text{如果} \varphi = C \sqsubseteq D. \end{cases}$$

一个矢列式是形为$\Gamma \Rightarrow \Delta$的符号串, 其中$\Gamma, \Delta$是断言的集合.

给定一个解释I, 我们称I满足$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 记为$I \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$I \models \Gamma$蕴含$I \models \Delta$, 其中$I \models \Gamma$, 如果对于每一个断言$\varphi \in \Gamma, I \models \varphi$; 以及$I \models \Delta$, 如果对于某个断言$\psi \in \Delta, I \models \psi$.

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{G_5}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何解释$I$, $I \models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

在下面的子节中, 我们只考虑断言$C(a), R(a,b)$, 而将$C \sqsubseteq D$留到最后一节中讨论.

8.2.2 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_5$

形式地, $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当

$$\mathbf{A}I(\mathbf{A}\varphi \in \Gamma(I \models \varphi) \Rightarrow \mathbf{E}\psi \in \Delta(I \models \psi)),$$

等价地,

$$\mathbf{A}I(\mathbf{E}\varphi \in \Gamma(I \not\models \varphi) \text{ or } \mathbf{E}\psi \in \Delta(I \models \psi)).$$

这样, 有效断言为Δ的永真性(当$\Gamma = \emptyset$)和Γ的永假性(当$\Delta = \emptyset$).

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_5$由下列公理和推理规则组成. 设Δ, Γ是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\text{incon}(\Gamma) \text{ or incon}(\Delta) \text{ or } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

其中Γ, Δ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \Rightarrow C(a), \Delta}{\Gamma, \neg C(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, D(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg D(a), \Delta}$$

$$(\sqcap^L_1)\ \frac{\Gamma, C_1(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (C_1 \sqcap C_2)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\sqcap^R)\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma \Rightarrow D_1(a), \Delta \\ \Gamma \Rightarrow D_2(a), \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (D_1 \sqcap D_2)(a), \Delta}$$

$$(\sqcap^L_2)\ \frac{\Gamma, C_2(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (C_1 \sqcap C_2)(a) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\sqcup^L)\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, C_1(a) \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, C_2(a) \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, (C_1 \sqcup C_2)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\sqcup^R_1)\ \frac{\Gamma \Rightarrow D_1(a), \Delta}{\Gamma, \Rightarrow (D_1 \sqcup D_2)(a), \Delta}$$

$$(\sqcup^R_2)\ \frac{\Gamma \Rightarrow D_2(a), \Delta}{\Gamma, \Rightarrow (D_1 \sqcup D_2)(a), \Delta}$$

$$(\forall^L)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,d) \in \Delta \\ \Gamma, C(d) \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, (\forall R.C)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\forall^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma \Rightarrow D(c), \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\forall R.D)(a), \Delta}$$

$$(\exists^L)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma, C(c) \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, (\exists R.C)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\exists^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,d) \in \Delta \\ \Gamma \Rightarrow D(d), \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\exists R.D)(a), \Delta}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即, c没有出现在Γ和Δ中.

定义8.2.1 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{G}_5} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{G}_5$中的一个推理规则得到的.

定理8.2.2 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash_{\mathbf{G}_5} \Gamma \Rightarrow \Delta$则$\models_{\mathbf{G}_5} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

□

定理8.2.3 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models_{\mathbf{G}_5} \Gamma \Rightarrow \Delta$则$\vdash_{\mathbf{G}_5} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

□

这些定理的证明类似于$\mathbf{G}_3$的可靠性定理7.3.3和完备性定理7.3.4的证明. 我们只要记住下列的对应关系:

描述逻辑	模态逻辑
$\neg C(a)$	$\mathbf{w} : \neg A$
$(C_1 \sqcap C_2)(a)$	$\mathbf{w} : A_1 \wedge A_2$
$(C_1 \sqcup C_2)(a)$	$\mathbf{w} : A_1 \vee A_2$
$(\forall R.C)(a)$	$\mathbf{w} : \Box A$
$(\exists R.C)(a)$	$\mathbf{w} : \Diamond A$

相应地, 我们也可以将描述逻辑翻译到带卫兵的谓词逻辑, 从而得出描述逻辑的推理$\mathbf{G}_5$ 是可判定的.

根据语义,

- 如果$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 并且$\Gamma \subseteq \Gamma'$ 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta$是有效的;
- 如果$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 并且$\Delta \subseteq \Delta'$ 则$\Gamma \Rightarrow \Delta'$是有效的;
- 如果$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 并且$\Gamma' \subseteq \Gamma$ 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta$不一定是有效的;
- 如果$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 并且$\Delta' \subseteq \Delta$ 则$\Gamma \Rightarrow \Delta'$不一定是有效的.

因此, 我们有

定理8.2.4 $\mathbf{G}_5$是单调的.

□

8.2.3 表式证明系统$\mathbf{T}_5$

形式地, $\models \Gamma \Rightarrow$ 当且仅当

$$\mathbf{A}I(\mathbf{E}\varphi \in \Gamma(I \models \varphi)).$$

这样, $\Gamma \Rightarrow$是有效的当且仅当Γ是永真永真的.

表式证明系统$\mathbf{T}_5$由下列公理和推理规则组成. 设Δ, Γ是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\text{incon}(\Gamma)}{\Gamma \Rightarrow}$$

其中Γ, Δ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg\neg^L)\ \frac{\Gamma, C(a) \Rightarrow}{\Gamma, \neg\neg C(a) \Rightarrow}$$

$$(\sqcap_1^L)\ \frac{\Gamma, C_1(a) \Rightarrow}{\Gamma, (C_1 \sqcap C_2)(a) \Rightarrow} \qquad (\neg\sqcap^L)\ \frac{\Gamma, \neg C_1(a) \Rightarrow \quad \Gamma, \neg C_2(a) \Rightarrow}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcap C_2)(a) \Rightarrow}$$

$$(\sqcap_2^L)\ \frac{\Gamma, C_2(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (C_1 \sqcap C_2)(a) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\sqcup^L)\ \frac{\Gamma, C_1(a) \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, C_2(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (C_1 \sqcup C_2)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\sqcup_1^L)\ \frac{\Gamma, \neg C_1(a) \Rightarrow}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcup C_2)(a) \Rightarrow}$$

$$(\neg\sqcup_2^L)\ \frac{\Gamma, \neg C_2(a) \Rightarrow}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcup C_2)(a) \Rightarrow}$$

$$(\forall^L)\ \frac{R(a,d) \in \Delta \quad \Gamma, C(d) \Rightarrow}{\Gamma, (\forall R.C)(a) \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg\forall^L)\ \frac{R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \quad \Gamma, \neg C(c) \Rightarrow}{\Gamma, \neg(\forall R.C)(a) \Rightarrow \Delta}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即, c没有出现在Γ和Δ中.

定义8.2.5 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow$是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{T}_5} \Gamma \Rightarrow$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \Rightarrow, ..., \Gamma_n \Rightarrow$使得$\Gamma_n = \Gamma$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{T}_5$中的一个推理规则得到的.

定理8.2.6 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 如果$\vdash_{\mathbf{T}_5} \Gamma \Rightarrow$则$\models_{\mathbf{T}_5} \Gamma \Rightarrow$.

□

定理8.2.7 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow$, 如果$\models_{\mathbf{T}_5} \Gamma \Rightarrow$则$\vdash_{\mathbf{T}_5} \Gamma \Rightarrow$.

□

8.2.4 表式推理系统$\mathbf{S}_5$

形式地, $\models\Rightarrow \Delta$ 当且仅当

$$\mathbf{A}I\mathbf{E}\psi \in \Delta(I \not\models \psi)).$$

这样, $\Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当$\Rightarrow \Delta$是永假的.

表式证明系统$\mathbf{S}_5$由下列公理和推理规则组成. 设Δ,是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\text{incon}(\Delta)}{\Rightarrow \Delta}$$

其中Δ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg\neg^R)\ \frac{\Rightarrow D(a),\Delta}{\Rightarrow \neg\neg D(a),\Delta}$$

$$(\sqcap^R)\ \frac{\begin{array}{l}\Rightarrow D_1(a),\Delta\\ \Rightarrow D_2(a),\Delta\end{array}}{\Rightarrow (D_1\sqcap D_2)(a),\Delta} \qquad \begin{array}{l}(\neg\sqcap^R_1)\ \dfrac{\Rightarrow \neg D_1(a),\Delta}{\Rightarrow \neg(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta}\\ (\neg\sqcap^R_2)\ \dfrac{\Rightarrow \neg D_2(a),\Delta}{\Rightarrow \neg(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(\sqcup^R_1)\ \dfrac{\Rightarrow D_1(a),\Delta}{\Rightarrow (D_1\sqcup D_2)(a),\Delta}\\ (\sqcup^R_2)\ \dfrac{\Rightarrow D_2(a),\Delta}{\Rightarrow (D_1\sqcup D_2)(a),\Delta}\end{array} \qquad (\neg\sqcup^R)\ \frac{\begin{array}{l}\Rightarrow \neg D_1(a),\Delta\\ \Rightarrow \neg D_2(a),\Delta\end{array}}{\Rightarrow \neg(D_1\sqcup D_2)(a),\Delta}$$

$$(\forall^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,c)\rightsquigarrow\Delta\\ \Rightarrow D(c),\Delta\end{array}}{\Rightarrow (\forall R.D)(a),\Delta} \qquad (\neg\forall^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,d)\in\Delta\\ \Rightarrow \neg D(d),\Delta\end{array}}{\Rightarrow \neg(\forall R.D)(a),\Delta}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即c没有出现在Δ中.

定义8.2.8 一个矢列式$\Rightarrow\Delta$是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{S}_5}\Rightarrow\Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Rightarrow\Delta_1,...,\Rightarrow\Delta_n$使得$\Rightarrow\Delta_n==\Rightarrow\Delta$, 并且对每个$1\le i\le n,\Rightarrow\Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{S}_5$中的一个推理规则得到的.

定理8.2.9 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$, 如果$\vdash_{\mathbf{S}_5}\Rightarrow\Delta$则$\models_{\mathbf{S}_5}\Rightarrow\Delta$.

□

定理8.2.10 (完备性定理) 对任何矢列式$\Rightarrow\Delta$, 如果$\models_{\mathbf{S}_5}\Rightarrow\Delta$则$\vdash_{\mathbf{S}_5}\Rightarrow\Delta$.

□

我们可以看出: 单调Gentzen推理系统是单调表式证明系统$\mathbf{T}_5$和$\mathbf{S}_5$的组合, 表示为

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{G}_5 &=& \mathbf{T}_5\oplus\mathbf{S}_5\\ \Gamma\Rightarrow\Delta &=& \Gamma\Rightarrow\oplus\Rightarrow\Delta.\end{array}$$

8.3 非单调的推理系统

在描述逻辑中, 我们更关心一个概念集合是否是可满足的. 这时我们的矢列式就变成了$\Gamma\mapsto\Delta$, 其中$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的[2] 当且仅当

$$\mathbf{E}I(\mathbf{A}\varphi\in\Gamma(I\models\varphi)\&\mathbf{A}\psi\in\Delta(I\not\models\psi)).$$

相应地, 当$\Delta=\emptyset$时, $\Gamma\mapsto$是有效的当且仅当$\neg\Gamma$是可满足的; 而当$\Gamma=\emptyset$时, $\mapsto\Delta$是有效的当且仅当Δ是可满足的.

引理8.3.1 设Γ,Δ是文字的集合. $\Gamma\mapsto\Delta$是有效的当且仅当Γ,Δ是协调的, 并且$\Gamma\cap\Delta=\emptyset$.

证明 假设$\Gamma \mapsto \Delta$是有效的. 则存在一个解释I使得I不满足Γ中任何断言, 但满足Δ中的每个断言. 因此, Γ, Δ是协调的, 并且$\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

发过来, 假设Γ, Δ是协调的, 并且$\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. 定义解释$I = (U, I)$使得

• U是出现Γ和Δ中的常量符号的集合;

• I定义如下: 对每个常量符号$c, I(c) = c$; 对每个原子概念符号$A, I(A) = \{c : A(c) \in \Delta$或者$\neg A(c) \in \Gamma\}$; 对每个角色$R, I(R) = \{(c,d) : R(c,d) \in \Delta\}$.

则I是良定的, 并且$I \models \Gamma \mapsto \Delta$.

$\square$

在单调的Gentzen推理系统$\mathbf{G}_5$中, 我们有下列推理规则:

$$(\forall^R)\ \frac{\begin{array}{l} R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma \Rightarrow C(c), \Delta \end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\forall R.C)(a), \Delta}$$

其中c是一个不出现在Γ和Δ中的新常量符号. 因为矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的当且仅当对任何解释$I, I \models \Gamma$蕴含$I \models \Delta$. $(\forall^R)$是可靠的, 因为假设对任何解释$I, I \models R(a,c) \rightsquigarrow \Delta$并且$\Gamma \Rightarrow C(c), \Delta$, 那么对论域中的任何元素$a, I(c/a) \models \Gamma$ 蕴含$I(c/a) \models C(c), \Delta$. 这等价于: 对论域中的任何元素$a, I \models \Gamma$ 蕴含$I(c/a) \models C(c), \Delta$. 这等价于: 对论域中的任何元素$a, I \models \Gamma$蕴含$I \models (\forall R.C)(a), \Delta$.

在非单调的系统中, 我们不能这样做, 因为矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$是有效的当且仅当存在解释I使得$I \models \Gamma$并且$I \not\models \Delta$. 这时

$$(\forall^L)\ \frac{\begin{array}{l} R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \\ \Gamma, C(c) \Rightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma, (\forall R.C)(a) \Rightarrow \Delta}$$

其中c是一个不出现在Γ和Δ中的新常量符号, $(\forall^L)$是不可靠的. 这时, 我们将推理规则改为

$$(\forall)^L\ \frac{\begin{array}{l} R(a,d) \in \Delta \\ \Gamma, C(d), [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma, [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta}$$

表示规则$(\forall)^L$对所有出现的d使得$R(a,d) \in \Delta$都需要使用这个规则. 这样, 假设整个推导过程中只有常量符号$c_1, ..., c_n$出现, 这个规则变成

$$(\forall)_1^L\ \frac{\begin{array}{l} R(a,c_1) \in \Delta \\ R(a,c_2) \in \Delta \\ \cdots \\ R(a,c_n) \in \Delta \\ \Gamma, C(c_1), [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta \\ \Gamma, C(c_2), [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta \\ \cdots \\ \Gamma, C(c_n), [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma, [(\forall R.C)(a)] \Rightarrow \Delta}$$

这样, $(\forall^L)$是可靠的.

8.3.1 非单调的Gentzen推理系统$\mathbf{M}_5$

Gentzen推理系统$\mathbf{M}_5$由下列公理和推理规则组成. 设Δ,Γ是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\mathrm{con}(\Gamma)\&\mathrm{con}(\Delta)\&\Gamma\cap\Delta=\emptyset}{\Gamma\mapsto\Delta}$$

其中Γ,Δ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma\mapsto C(a),\Delta}{\Gamma,\neg C(a)\mapsto\Delta}\qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma,D(a)\mapsto\Delta}{\Gamma\mapsto\neg D(a),\Delta}$$

$$(\sqcap^L)\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma,C_1(a)\mapsto\Delta\\ \Gamma,C_2(a)\mapsto\Delta\end{array}}{\Gamma,(C_1\sqcap C_2)(a)\mapsto\Delta}\qquad (\sqcap^R_1)\ \frac{\Gamma\mapsto D_1(a),\Delta}{\Gamma\mapsto(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta}$$

$$(\sqcap^R_2)\ \frac{\Gamma\mapsto D_2(a),\Delta}{\Gamma\mapsto(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta}$$

$$(\sqcup^L_1)\ \frac{\Gamma,C_1(a)\mapsto\Delta}{\Gamma,(C_1\sqcup C_2)(a)\mapsto\Delta}\qquad (\sqcup^R)\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma\mapsto D_1(a),\Delta\\ \Gamma\mapsto D_2(a),\Delta\end{array}}{\Gamma,\mapsto(D_1\sqcup D_2)(a),\Delta}$$

$$(\sqcup^L_2)\ \frac{\Gamma,C_2(a)\mapsto\Delta}{\Gamma,(C_1\sqcup C_2)(a)\mapsto\Delta}$$

$$(\forall^L)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,c)\in\Delta\\ \Gamma,C(c)\mapsto\Delta\end{array}}{\Gamma,(\forall R.C)(a)\mapsto\Delta}\qquad (\forall^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,d)\leadsto\Delta\\ \Gamma\mapsto D(d),\Delta\end{array}}{\Gamma\mapsto(\forall R.D)(a),\Delta}$$

$$(\exists^L)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,d)\leadsto\Delta\\ \Gamma,C(d)\mapsto\Delta\end{array}}{\Gamma,(\exists R.C)(a)\mapsto\Delta}\qquad (\exists^R)\ \frac{\begin{array}{l}R(a,c)\in\Delta\\ \Gamma\mapsto D(c),\Delta\end{array}}{\Gamma\mapsto(\exists R.D)(a),\Delta}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即, c没有出现在Γ和Δ中.

定义8.3.2 一个矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{M}_5}\Gamma\mapsto\Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1\mapsto\Delta_1,...,\Gamma_n\mapsto\Delta_n$使得$\Gamma_n\mapsto\Delta_n=\Gamma\mapsto\Delta$, 并且对每个$1\le i\le n,\Gamma_i\mapsto\Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{M}_5$中的一个推理规则得到的.

定理8.3.3 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$, 如果$\vdash_{\mathbf{M}_5}\Gamma\mapsto\Delta$则$\models_{\mathbf{M}_5}\Gamma\mapsto\Delta$.

证明 我们证明每个公理是有效的并且每个推理规则是保有效性的.

为验证公理的有效性, 由引理8.2.4, 我们得出$\Gamma\mapsto\Delta$的有效性.

为验证$(\sqcap^L)$的保有效性, 假设存在解释I使得$I\models\Gamma,C_1(a)\mapsto\Delta$并且$I\models\Gamma,C_2(a)\mapsto\Delta$. 就这个解释$I$, 我们有: $I\models\Gamma,(C_1\sqcap C_2)(a)\mapsto\Delta$.

为验证$(\sqcup^L_1)$的保有效性, 假设存在解释I使得$I\models\Gamma,C_1(a)\mapsto\Delta$. 则

$$I\models\Gamma,(C_1\sqcup C_2)(a)\mapsto\Delta.$$

为验证($\forall^L$)的保有效性, 假设存在解释I使得对某个常量符号d $R(a,d)\in\Delta$并且$I\models\Gamma, C(d), [(\forall R.C)(a)]\mapsto\Delta$. 就这个解释$I$, $I\models[(\forall R.C)(a)]$, 即对任何常量符号$d'\neq d, I\models R(a,d')\in\Delta$蕴含$I\models C(d')$. 因此, $I\models\Gamma,(\forall R.C)(a)$并且$I\not\models\Delta$. 即$I\models\Gamma,(\forall R.C)(a)\mapsto\Delta$.

为验证($\forall_R$)的保有效性, 假设存在一个解释I使得对某个常量符号c, $R(a,c)\rightsquigarrow\Delta$并且$I\models\Gamma\mapsto C(d),\Delta$, 即$I\models\Gamma$ 且$I\not\models C(d),\Delta$. 就这个解释I, $I\models\Gamma$并且$I\not\models(\forall R.C)(a),\Delta$. 因此$I\models\Gamma\mapsto(\forall R.C)(a),\Delta$.

原始断言的其它推理规则也类似.

□

在证明$\mathbf{G}_5$的完备性定理时, 我们构造一棵树T使得要么T是给定矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$的证明树, 要么存在一树枝ξ使得存在一个解释使得该树枝上的每个矢列式不有效.

不同于$\mathbf{G}_5$的完备性定理的证明, 在证明$\mathbf{M}_5$的完备性定理时, 我们构造一棵树T'使得要么存在T'的一树枝ξ是给定矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$的证明, 要么整个树T'是矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$的证明树.

定理8.3.4 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$, 如果$\models_{\mathbf{M}_5}\Gamma\mapsto\Delta$则$\vdash_{\mathbf{M}_5}\Gamma\mapsto\Delta$.

证明 给定一个矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$, 我们构造一颗树T使得要么

(i) 对每个T的枝ξ, 某个叶节点的矢列式$\Gamma'\mapsto\Delta'$是一个公理, 要么

(ii) 不存在解释I使得$I\models\Gamma\mapsto\Delta$.

T的构造过程如下:

• T的根节点为$\Gamma\mapsto\Delta$;

• 对节点ξ, 如果对ξ的每个矢列式$\Gamma'\mapsto\Delta',\Delta'\cup\Gamma'$是原子断言的集合, 则该节点为一个叶节点;

• 否则, ξ有包含下列矢列式的子节点:

$$
\begin{cases}
\Gamma_1\mapsto C(a),\Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1,\neg C(a)\mapsto\Delta_1\in\xi\\
\Gamma_1,D(a)\mapsto\Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1\mapsto\neg D(a),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1,C_1(a)\mapsto\Delta_1\\ \Gamma_1,C_2(a)\mapsto\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1,(C_1\sqcap C_2)(a)\mapsto\Delta_1\in\xi\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1\mapsto D_1(a),\Delta_1\\ \Gamma_1\mapsto D_2(a),\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1\mapsto(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta_1\in\xi\\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1,C_1(a)\mapsto\Delta_1\\ \Gamma_1,C_2(a)\mapsto\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1,(C_1\sqcup C_2)(a)\mapsto\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1\mapsto D_1(a),\Delta_1\\ \Gamma_1\mapsto D_2(a),\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1\mapsto(D_1\sqcap D_2)(a),\Delta_1\in\xi\\
\left[\begin{array}{l}R(a,c)\rightsquigarrow\Delta_1\\ \Gamma_1\mapsto D_1(c),\Delta_1\\ c\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1\mapsto\forall R.D_1(a),\Delta_1\in\xi\\
\left\{\begin{array}{l}R(a,c)\rightsquigarrow\Delta_1\\ \Gamma_1,\neg C_1(c)\mapsto\Delta_1\\ c\text{不出现在当前的}T\text{中}\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1,(\exists R.C_1)(a)\mapsto\Delta_1\in\xi
\end{cases}
$$

and

• 对$\xi=\Gamma_1\mapsto\Delta_1$的某个子节点上的每个$(\forall R.C)(a)$(或者$(\exists R.D)(a)$, 如果存在一个出现在$\xi$的某个子节点上的常量符号$c$使得$(\forall R.C)(a)$(或者$(\exists R.D)(a)$没有使用过$c$, 且$R(a,c)\in\Delta_1$, 设$\xi$有一个子节点包含矢列式$\Gamma_1,C(c)\mapsto\Delta_1$(或者$\Gamma_1\mapsto D(c),\Delta_1$), 这时我们称$(\forall R.C)(a)$(或者$(\exists R.D)(a)$已使用过$c$.

引理8.3.5 如果对某个树枝$\xi\subseteq T$, 每个文字矢列式$\Gamma'\mapsto\Delta'\in\xi$为$\mathbf{M}_5$的一个公理则$\xi$是矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$的一个证明.

证明 由ξ的定义, 我们知道ξ是矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$的一个证明.

□

引理8.3.6 如果对每个树枝$\xi\subseteq T$, 存在一个文字矢列式$\Gamma'\mapsto\Delta'\in\xi$不是$\mathbf{M}_5$的一个公理则$T$是矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$的证明树.

证明 我们对T的节点作归纳来证明引理. 设$\eta\subseteq T$为一个叶节点. 则, $\Gamma'\mapsto\Delta'$不是一个公理, 即, $\mathrm{incon}(\Gamma'),\mathrm{incon}(\Delta')$ 并且$\Gamma'\cap\Delta'\neq\emptyset$. 因此, $\Gamma'\Rightarrow\Delta'$是$\mathbf{G}_5$的一个公理.

情况 1. $\Gamma'\mapsto\Delta'=\Gamma_2,(C_1\sqcap C_2)(a)\mapsto\Delta_2\in\eta$. 则$\eta$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2,C_1(a),C_2(a)\mapsto\Delta_2$. 由归纳假设, $\Gamma_2,C_1(a),C_2(a)\Rightarrow\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的, 由推理规则$(\sqcap^L)$, 我们有$\Gamma_2,(C_1\sqcap C_2)(a)\Rightarrow\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的.

情况 2. $\Gamma'\mapsto\Delta'=\Gamma_2,(\forall R.C)(a)\mapsto\Delta_2\in\eta$. 则, 对每个常量符号$d\in\xi$使得$R(a,d)\rightsquigarrow\Delta_2$, $\Gamma'\mapsto\Delta'$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2,C(d)\mapsto\Delta_2$. 由归纳假设, 对每个这样的$d$, $\Gamma_2,C(d)\mapsto\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的. 因此, 矢列式$\Gamma_2,(\forall R.C)(a)\Rightarrow\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的.

情况 3. $\Gamma'\mapsto\Delta'=\Gamma_2\mapsto(\forall R.D)(a),\Delta_2\in\eta$. 则, $\Gamma'\mapsto\Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$R(a,c)\rightsquigarrow\Delta_2$并且$\Gamma_2\mapsto D(c),\Delta_2$, 其中$c$是一个新的常量符号. 由归纳假设, $\Gamma_2\Rightarrow D(c),\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的. 因此, $\Gamma_2\Rightarrow(\forall R.D)(a),\Delta_2$在$\mathbf{G}_5$中是可证的.

类似地证明其它情况.

□

□

推论8.3.7 $\mathbf{M}_5$是非单调的.

根据语义,

- 如果$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的, 并且$\Gamma'\subseteq\Gamma$ 则$\Gamma'\mapsto\Delta$是有效的;
- 如果$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的, 并且$\Delta'\subseteq\Delta$ 则$\Gamma\mapsto\Delta'$是有效的;
- 如果$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的, 并且$\Gamma\subseteq\Gamma'$ 则$\Gamma'\mapsto\Delta$不一定是有效的;
- 如果$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的, 并且$\Delta\subseteq\Delta'$ 则$\Gamma\mapsto\Delta'$不一定是有效的.

8.3.2 非单调表式证明系统$\mathbf{T}_5'$

给定一个解释I, 我们称I满足$\Gamma \mapsto$, 记为$I \models \Gamma \mapsto$, 如果$I \models \Gamma$, 其中$I \models \Gamma$, 如果对每个断言$\varphi \in \Gamma, I \models \varphi$

矢列式$\Gamma \Rightarrow$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$, 如果存在解释$I$使得$I \models \Gamma \mapsto$.

Gentzen推理系统$\mathbf{T}_5'$由下列公理和推理规则组成. 设Γ是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\mathrm{con}(\Gamma)}{\Gamma \mapsto}$$

其中, Γ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg\neg)\ \frac{\Gamma, C(a) \mapsto}{\Gamma, \neg\neg C(a) \mapsto}$$

$$(\sqcap)\ \frac{\Gamma, C_1(a) \mapsto \quad \Gamma, C_1(a) \mapsto}{\Gamma, (C_1 \sqcap C_2)(a) \mapsto} \qquad (\neg\sqcap_1)\ \frac{\Gamma, \neg C_1(a) \mapsto}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcap C_2)(a) \mapsto}$$

$$(\neg\sqcap_2)\ \frac{\Gamma, \neg C_2(a) \mapsto}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcap C_2)(a) \mapsto}$$

$$(\sqcup_1)\ \frac{\Gamma, C_1(a) \mapsto}{\Gamma, (C_1 \sqcup C_2)(a) \mapsto} \qquad (\neg\sqcup)\ \frac{\Gamma, \neg C_1(a) \mapsto \quad \Gamma, \neg C_2(a) \mapsto}{\Gamma, \neg(C_1 \sqcup C_2)(a) \mapsto}$$

$$(\sqcup_2)\ \frac{\Gamma, C_2(a) \mapsto}{\Gamma, (C_1 \sqcup C_2)(a) \mapsto}$$

$$(\forall)\ \frac{\begin{matrix} R(a,d) \in \Gamma \\ \Gamma, C(d), [(\forall R, C)(a)] \mapsto \end{matrix}}{\Gamma, [(\forall R.C)(a)] \mapsto} \qquad (\neg\forall)\ \frac{R(a,c) \rightsquigarrow \Gamma \quad \Gamma, \neg C(c) \mapsto}{\Gamma, \neg(\forall R.C)(a) \mapsto}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即, c没有出现在Γ中.

定义8.3.8 一个矢列式$\Gamma \mapsto$是$\mathbf{T}_5'$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$, 如果存在一个矢列式序列$\Gamma_1 \mapsto, ..., \Gamma_n \mapsto$使得$\Gamma_n \mapsto = \Gamma \mapsto$, 并且对每个$1 \le i \le n, \Gamma_i \mapsto$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{T}_5'$中的一个推理规则得到的.

定理8.3.9 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \mapsto$, 如果$\vdash_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$则$\models_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$.

□

定理8.3.10 (完备性定理) 对任何矢列式$\Gamma \mapsto$, 如果$\models_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$则$\vdash_{\mathbf{T}_5'} \Gamma \mapsto$.

□

8.3.3 非单调表式证明系统$\mathbf{S}_5'$

给定一个解释I, 我们称I满足$\mapsto \Delta$, 记为$I \models \mapsto \Delta$, 如果对每个断言$\varphi \in \Delta, I \not\models \varphi$

矢列式$\Rightarrow \Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$, 如果存在一个解释$I$使得$I \models \mapsto \Delta$.

Gentzen推理系统$\mathbf{S}_5'$由下列公理和推理规则组成. 设Δ是原始断言的集合.

- **公理:**

$$\frac{\mathrm{con}(\Delta)}{\mapsto \Delta}$$

其中,Δ是文字断言的集合.

- **对原始断言的推理规则:**

$$(\neg\neg)\ \frac{\mapsto D(a), \Delta}{\mapsto \neg\neg D(a), \Delta}$$

$$(\sqcap_1)\ \frac{\mapsto D_1(a), \Delta}{\mapsto (D_1 \sqcap D_2)(a), \Delta} \qquad (\neg\sqcap)\ \begin{array}{l} \mapsto \neg D_1(a), \Delta \\ \mapsto \neg D_2(a), \Delta \\ \mapsto \neg(D_1 \sqcap D_2)(a), \Delta \end{array}$$

$$(\sqcap_2)\ \frac{\mapsto D_2(a), \Delta}{\mapsto (D_1 \sqcap D_2)(a), \Delta}$$

$$(\sqcup)\ \frac{\mapsto D_1(a), \Delta \quad \mapsto D_2(a), \Delta}{\mapsto (D_1 \sqcup D_2)(a), \Delta} \qquad \begin{array}{l} (\neg\sqcup_1)\ \dfrac{\mapsto \neg D_1(a), \Delta}{\mapsto \neg(D_1 \sqcup D_2)(a), \Delta} \\ (\neg\sqcup_1)\ \dfrac{\mapsto \neg D_1(a), \Delta}{\mapsto \neg(D_1 \sqcup D_2)(a), \Delta} \end{array}$$

$$(\forall)\ \frac{R(a,c) \rightsquigarrow \Delta \quad \mapsto D(c), \Delta}{\mapsto (\forall R.D)(a), \Delta} \qquad (\neg\forall)\ \frac{\begin{array}{l} R(a,d) \in \Delta \\ \mapsto \neg D(d), [\neg(\forall R.D)(a)], \Delta \end{array}}{\mapsto [\neg(\forall R.D)(a)], \Delta}$$

其中d是一个常量符号, 并且c是一个新的常量符号, 即, c没有出现在Δ中.

定义8.3.11 一个矢列式$\mapsto \Delta$是$\mathbf{S}_5'$-可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$, 如果存在一个矢列式序列$\mapsto \Delta_1, ..., \mapsto \Delta_n$使得$\mapsto \Delta_n = \mapsto \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \mapsto \Delta_i$要么是一个公理, 要么是由此前的矢列式通过$\mathbf{S}_5'$中的一个推理规则得到的.

定理8.3.12 (可靠性定理) 对任何矢列式$\mapsto \Delta$, 如果$\vdash_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$则$\models_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$.

□

定理8.3.13 (完备性定理) 对任何矢列式$\mapsto \Delta$, 如果$\models_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$则$\vdash_{\mathbf{S}_5'} \mapsto \Delta$.

□

我们可以看出: 非单调Gentzen推理系统是非单调表式证明系统$\mathbf{T}_5'$和$\mathbf{S}_5'$的组合, 表示为

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{M}_5 & = & \mathbf{T}_5' \oplus \mathbf{S}_5' \\ \Gamma \mapsto \Delta & = & \Gamma \mapsto \oplus \mapsto \Delta. \end{array}$$

8.4 语义继承网络

根据以下规则: 对于任意概念C_1, C_2, D_1, D_2,

$$\begin{array}{rcl} C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D & \Leftarrow & C_1 \sqsubseteq D \vee C_2 \sqsubseteq D \\ C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D & \equiv & C_1 \sqsubseteq D \wedge C_2 \sqsubseteq D \\ C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2 & \equiv & C \sqsubseteq D_1 \wedge C \sqsubseteq D_2 \\ C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 & \Leftarrow & C \sqsubseteq D_1 \vee C \sqsubseteq D_2; \end{array}$$

我们将给出语义继承网络的推理系统[3,4,5].

语义继承网络在以下方面与逻辑程序相似:

- 文字相当于断言$C \sqsubseteq D$;
- 子句$l_1, ..., l_m \leftarrow l'_1, ..., l'_n$相当于断言$C_{11} \sqsubseteq D_{11}, ..., C_{1n} \sqsubseteq D_{1n} \Rightarrow C_{21} \sqsubseteq D_{21}, ..., C_{2m} \sqsubseteq D_{2m}$,

其中$l_1, ..., l_m, l'_1, ..., l'_n$是文字, 而$C_{11}, D_{11}, ..., C_{1n}, D_{1n}, C_{21}, D_{21}, C_{2m}, D_{2m}$是文字概念.

这一节将给出语义继承网络的推理系统$\mathbf{G}_6$.

8.4.1 基本定义

语义继承网络$\mathbf{G}_6$的逻辑语言包括以下符号[6]:

•原子概念符号: $A_0, A_1, ...$;

•概念构造子: $\neg, \sqcup, \sqcap$;

•概念连接符: $\sqsubseteq$;且

•辅助符号: (,).

概念定义如下:

$$C ::= A|\neg A|C_1 \sqcap C_2|C_1 \sqcup C_2.$$

断言定义如下:

$$\delta ::= C \sqsubseteq D$$

其中C, D是概念.

设U是一个论域, 且I是一个解释使得对于每一个概念符号$A, I(A) \subseteq U$.

一个断言$C \sqsubseteq D$在I下是满足的, 记作$I \models C \sqsubseteq D$, 如果$C^I \subseteq D^I$.

给定两个断言集合Γ, Δ, 定义$\Gamma \Rightarrow \Delta$为一个矢列式, 且$I$满足$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 记作$I \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果

(1) 对于每一个$C \sqsubseteq D \in \Gamma$和每个元素$a \in U, a \in C^I \Rightarrow a \in D^I$,

蕴含

(2) 对于某一个$C \sqsubseteq D \in \Delta$和每个元素$a \in U, a \in C^I \Rightarrow a \in D^I$.

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{G}_6} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对于任意解释$I$,$I \models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

一个矢列式$B_1 \sqsubseteq B_2$被称作是一个文字矢列式, 如果$B_1, B_2 ::= A|\neg A$.

命题8.4.1 对于任意概念C_1, C_2, D_1, D_2,

$$\begin{array}{rcl} C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D & \Leftarrow & C_1 \sqsubseteq D \sqcup C_2 \sqsubseteq D \\ C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D & \equiv & C_1 \sqsubseteq D \sqcap C_2 \sqsubseteq D \\ C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2 & \equiv & C \sqsubseteq D_1 \sqcap C \sqsubseteq D_2 \\ C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 & \Leftarrow & C \sqsubseteq D_1 \sqcup C \sqsubseteq D_2; \end{array}$$

□

命题8.4.2 对任何非空的文字断言集合Γ,

$$\not\models \Gamma \Rightarrow .$$

证明. 对任何文字断言$B_1 \sqsubseteq B_2$, 存在一个解释I使得$I \models B_1 \sqsubseteq B_2$而$I \not\models \emptyset$.

□

命题8.4.3 对任何非空的文字断言集合Δ, $\models \Rightarrow \Delta$当且仅当存在一个文字$B$使得$B, \neg B \in \sigma(\Delta)$, 其中

$$\sigma(\Delta) = \{\neg B, B' : B \sqsubseteq B' \in \Delta\}.$$

□

比如, $\models \Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4$ 当且仅当$\models \Rightarrow \neg B_1, B_2, \neg B_3, B_4$, 当且仅当

		$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4$
$\neg B_1$	$B_2 = B_1$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_1, B_3 \sqsubseteq B_4$
	$\neg B_3 = B_1$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, \neg B_1 \sqsubseteq B_4$
	$B_4 = B_1$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_1$
B_2	$\neg B_1 = \neg B_2$	$\Rightarrow B_2 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4$
	$\neg B_3 = \neg B_2$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_2 \sqsubseteq B_4$
	$B_4 = \neg B_2$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq \neg B_2$
$\neg B_3$	$\neg B_1 = B_3$	$\Rightarrow \neg B_3 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4$
	$B_2 = B_3$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_3, B_3 \sqsubseteq B_4$
	$B_4 = B_3$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_3$
B_4	$\neg B_1 = \neg B_4$	$\Rightarrow B_4 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4$
	$B_2 = \neg B_4$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq \neg B_4, \neg B_3 \sqsubseteq B_4$
	$\neg B_3 = \neg B_4$	$\Rightarrow B_1 \sqsubseteq B_2, B_4 \sqsubseteq B_4$

命题8.4.4 $\models B_1 \sqsubseteq B_2 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4$ 当且仅当$\neg B_1 \in \{\neg B_3, B_4\}$或者$B_2 \in \{\neg B_3, B_4\}$.

证明. 对任何文字$B_1, B_2, B_3, B_4, \models B_1 \sqsubseteq B_2 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4$

$$\begin{array}{ll}
\text{当且仅当} & \models \neg B_1 \Rightarrow \neg B_3, B_4 \& \models B_2 \Rightarrow \neg B_3, B_4 \\
\text{当且仅当} & \neg B_1 \in \{\neg B_3, B_4\} \& B_2 \in \{\neg B_3, B_4\} \\
\text{当且仅当} & (\neg B_1 = \neg B_3 \& B_2 = \neg B_3) or (\neg B_1 = \neg B_3 \& B_2 = B_4) \\
 & or (\neg B_1 = B_4 \& B_2 = \neg B_3) or (\neg B_1 = B_4 \& B_2 = B_4) \\
\text{当且仅当} & (B_1 = B_3 \& B_2 = \neg B_3) or (B_1 = B_3 \& B_2 = B_4) \\
 & or (\neg B_1 = B_4 \& B_2 = \neg B_3) or (\neg B_1 = B_4 \& B_2 = B_4) \\
\text{当且仅当} & B_1 \sqsubseteq B_2 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4 = \begin{cases} B_3 \sqsubseteq \neg B_3 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4 \\ B_3 \sqsubseteq B_4 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4 \\ \neg B_4 \sqsubseteq \neg B_3 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4 \\ \neg B_4 \sqsubseteq B_4 \Rightarrow B_3 \sqsubseteq B_4 \end{cases}
\end{array}$$

□

命题8.4.5 $\models B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4$ 当且仅当

$$\begin{array}{l}
\{\neg B_1, \neg B_3\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \& \{\neg B_1, B_4\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \\
\& \{B_2, \neg B_3\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \& \{B_2, B_4\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset.
\end{array}$$

证明. $\models B_1 \sqsubseteq B_2, B_3 \sqsubseteq B_4 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4$当且仅当

$$\begin{array}{l}
\models \neg B_1, \neg B_3 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4 \& \models \neg B_1, B_4 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4 \\
\& \models B_2, \neg B_3 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4 \& \models B_2, B_4 \Rightarrow B'_1 \sqsubseteq B'_2, B'_3 \sqsubseteq B'_4,
\end{array}$$

当且仅当

$$\begin{array}{l}
\{\neg B_1, \neg B_3\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \& \{\neg B_1, B_4\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \\
\& \{B_2, \neg B_3\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset \& \{B_2, B_4\} \cap \{\neg B'_1, B'_2, \neg B'_3, B'_4\} \neq \emptyset.
\end{array}$$

□

命题8.4.6 设Δ, Γ是文字断言的集合使得

$$\begin{array}{l}
\Gamma = \{B_{11} \sqsubseteq B_{12}, ..., B_{n1} \sqsubseteq B_{n2}\} \\
\Delta = \{B'_{11} \sqsubseteq B'_{12}, ..., B'_{m1} \sqsubseteq B'_{m2}\}.
\end{array}$$

则$\models_{\mathbf{G}_6} \Gamma \Rightarrow \Delta$当且仅当对于任意的$f : \{1, ..., n\} \to \{1, 2\}$要么
(i)$\mathbf{E}B, \neg B \in \{\neg^{f(1)} B_{1f(1)}, ..., \neg^{f(n)} B_{nf(n)}\}$, 要么
(ii)$\mathbf{E}B, \neg B \in \{B'_{11}, \neg B'_{12}, ..., B'_{m1}, \neg B'_{m2}\}$, 要么
(iii)$\sigma_f(\Gamma) \cap \sigma_f(\Delta) \neq \emptyset$,
其中

$$\begin{array}{l}
\sigma_f(\Gamma) = \{\neg^{f(1)} B_{1f(1)}, ..., \neg^{f(n)} B_{nf(n)}\} \\
\sigma_f(\Delta) = \{B'_{11}, \neg B'_{12}, ..., B'_{m1}, \neg B'_{m2}\},
\end{array}$$

证明 因为$\Gamma \Rightarrow \Delta$

$$\begin{array}{ll}
\text{当且仅当} & B_{11} \sqsubseteq B_{12}, ..., B_{n1} \sqsubseteq B_{n2} \\
 & \Rightarrow B'_{11} \sqsubseteq B'_{12}, ..., B'_{m1} \sqsubseteq B'_{m2} \\
\text{当且仅当} & \neg B_{11} \sqcup B_{12}, ..., \neg B_{n1} \sqcup B_{n2} \\
 & \Rightarrow \neg B'_{11} \sqcup B'_{12}, ..., \neg B'_{m1} \sqcup B'_{m2} \\
\text{当且仅当} & \neg B_{11} \sqcup B_{12}, ..., \neg B_{n1} \sqcup B_{n2} \\
 & \Rightarrow \neg B'_{11}, B'_{12}, ..., \neg B'_{m1}, B'_{m2}.
\end{array}$$

假设(i),(ii)和(iii)均不成立, 我们定义一个解释I使得

$$I \models_{\mathbf{G}_6} \Gamma \& I \not\models_{\mathbf{G}_6} \Delta.$$

定义一个解释I使得对于每一个$i \leq n, j \leq m$且任意元素$a \in U$,

$$\begin{array}{ll}
I(\neg^{f(i)} B_{if(i)})(a) = 1; & a \in (\neg^{f(i)} B_{if(i)})^I \\
I(B'_{j1})(a) = 0, & a \notin (B'_{j1})^I \\
I(\neg B'_{j2})(a) = 0, & a \notin (\neg B'_{j2})^I
\end{array}$$

根据$(*)$, I是良定的并且$I \models_{\mathbf{G}_6} \Gamma(a)$且$I \not\models_{\mathbf{G}_6} \Delta(a)$.

□

8.4.2 Gentzen推理系统$\mathbf{G}_6$

Gentzen推理系统$\mathbf{G}_6$由以下公理和推理规则组成[7,8,9]:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq}) \quad \frac{\displaystyle\bigwedge_{f:\{1,...,n\}\to\{1,2\}} \begin{array}{l} \mathbf{E}B(B, \neg B \in \sigma_f(\Gamma)) \\ \vee\ \mathbf{E}B(B, \neg B \in \sigma_f(\Delta)) \\ \vee\ \sigma_f(\Gamma) \cap \sigma_f(\Delta) \neq \emptyset \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Δ, Γ是文字断言的集合, 且如果

$$\begin{array}{l}
\Gamma = \{B_{11} \sqsubseteq B_{12}, ..., B_{n1} \sqsubseteq B_{n2}\} \\
\Delta = \{B'_{11} \sqsubseteq B'_{12}, ..., B'_{m1} \sqsubseteq B'_{m2}\}
\end{array}$$

则

$$\begin{array}{l}
\sigma_f(\Gamma) = \{\neg^{f(1)} B_{1f(1)}, ..., \neg^{f(n)} B_{nf(n)}\} \\
\sigma_f(\Delta) = \{B'_{11}, \neg B'_{12}, ..., B'_{m1}, \neg B'_{m2}\},
\end{array}$$

其中$\neg^1 = \lambda$且$\neg^2 = \neg$.

- **推理规则:**

$$(\sqcap^{LL})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta\\ \Gamma, C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta} \qquad (\sqcap_1^{RL})\ \frac{\Gamma \Rightarrow C_1 \sqsubseteq D, \Delta}{\Gamma \Rightarrow C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcap_2^{RL})\ \frac{\Gamma \Rightarrow C_2 \sqsubseteq D, \Delta}{\Gamma \Rightarrow C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcap_1^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta} \qquad (\sqcap^{RR})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_1, \Delta\\ \Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_2, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta}$$

$$(\sqcap_2^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\sqcup_1^{LL})\ \frac{\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta} \qquad (\sqcup^{RL})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow C_1 \sqsubseteq D, \Delta\\ \Gamma \Rightarrow C_2 \sqsubseteq D, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcup_2^{LL})\ \frac{\Gamma, C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta}$$

$$(\sqcup^{LR})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \Rightarrow \Delta\\ \Gamma, C \sqsubseteq D_2 \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\sqcup_1^{RR})\ \frac{\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta}$$

$$(\sqcup_2^{RR})\ \frac{\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta}$$

定义8.4.7 一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是$\mathbf{G}_6$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{G}_6} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果存在一个序列$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对于每一个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{G}_6$中的一条推理规则得到的.

定理8.4.8 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{G}_6} \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{G}_6} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 并且每一条推理规则都可以保有效性.

为了验证公理的有效性, 假设Γ和Δ满足公理($\mathbf{A}^{\sqsubseteq}$)中的条件, 根据命题8.4.6, 对于任意的解释I,$I \models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

为了验证规则($\sqcap^{LL}$)的保真性, 假设对于任意解释I和元素$a \in U$, 都有

$$I(\Gamma, (C_1 \sqsubseteq D)(a)) = 1\text{蕴含}I(\Delta) = 1;$$
$$I(\Gamma, (C_2 \sqsubseteq D)(a)) = 1\text{蕴含}I(\Delta) = 1.$$

对于任意的解释I和元素$a \in U$, 假设$I(\Gamma, (C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D)(a)) = 1$, 则$I(C_1 \sqcap C_2)(a) = 1$蕴含$I(D)(a) = 1$. 如果$I(C_1)(a) = 0$或者$I(C_2)(a) = 0$, 那么$I(C_1 \sqsubseteq D)(a) = 1$或者$I(C_2 \sqsubseteq D)(a) = 1$, 从而根据归纳假设, 有$I(\Delta) = 1$; 如果$I(C_1)(a) = 1$且$I(C_2)(a) = 1$, 那么$I(D)(a) = 1$, 即$I(C_1 \sqsubseteq D)(a) = 1, I(C_2 \sqsubseteq D)(a) = 1$, 则根据归纳假设, 我们可以得到$I(\Delta)(a) = 1$.

为了验证规则$(\sqcap_1^{RL})$的保真性, 假设对于任意解释I和元素$a\in U$, 都有

$$I(\Gamma)=1\text{蕴含}I((C_1\sqsubseteq D)(a),\Delta)=1.$$

对于任意的解释I和元素$a\in U$, 假设$I(\Gamma)=1$. 如果$I(\Delta)(a)=1$, 那么$I(C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D,\Delta)(a)=1$; 否则根据归纳假设,$I(C_1\sqsubseteq D)(a)=1$, 且如果$I(C_1\sqcap C_2)(a)=0$, 那么$I(C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D)(a)=1$, 因而$I(C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D,\Delta)(a)=1$; 如果$I(C_1\sqcap C_2)(a)=1$, 则$I(C_1)(a)=1$, 那么根据归纳假设就可以得到,$I(D)(a)=1$, 即,$I(C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D)(a)=1$, 因而$I(C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D,\Delta)(a)=1$.

为了验证规则$(\sqcap_1^{LR})$的保真性, 假设对于任意的解释I和元素$a\in U$, 都有

$$I(\Gamma,(C\sqsubseteq D_1)(a))=1\text{蕴含}I(\Delta)=1.$$

对于任意的解释I和元素$a\in U$, 假设$I(\Gamma,(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2)(a))=1$. 则$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2)(a)=1$. 如果$I(C)(a)=0$, 那么$I(C\sqsubseteq D_1)(a)=1$, 则根据归纳假设可以得到$I(\Delta)(a)=1$; 如果$I(C)(a)=1$, 那么$I(D_1\sqcap D_2)(a)=1$, 则$I(D_1)(a)=1$, 从而根据归纳假设可以得到$I(\Delta)(a)=1$.

为了验证规则$(\sqcap^{RR})$的保真性, 假设对于任意解释I和元素$a\in U$, 都有

$$I(\Gamma)=1\text{蕴含}I((C\sqsubseteq D_1)(a),\Delta)=1;$$
$$I(\Gamma)=1\text{蕴含}I((C\sqsubseteq D_2)(a),\Delta)=1.$$

对于任意的解释I和元素$a\in U$, 假设$I(\Gamma)(a)=1$. 则$I(C\sqsubseteq D_1,\Delta)(a)=1$且$I(C\sqsubseteq D_2,\Delta)(a)=1$. 如果$I(\Delta)(a)=1$, 那么$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2,\Delta)(a)=1$; 如果$I(\Delta)(a)=0$, 则$I(C\sqsubseteq D_1)(a)=1$且$I(C\sqsubseteq D_2)(a)=1$. 如果$I(C)(a)=0$, 那么$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2)(a)=1$, 则$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2,\Delta)(a)=1$; 否则$I(D_1)(a)=1$且$I(D_2)(a)=1$, 即$I(D_1\sqcap D_2)(a)=1$, 那么$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2)(a)=1$, 从而有$I(C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2,\Delta)(a)=1$.

其他情况类似.

□

定理8.4.9 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$,

$$\models_{\mathbf{G}_6}\Gamma\Rightarrow\Delta\ \text{蕴含}\ \vdash_{\mathbf{G}_6}\Gamma\Rightarrow\Delta.$$

证明 给定一个矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$, 我们按照如下的方式构造一棵树T:

•树T的根节点是矢列式$\Gamma\Rightarrow\Delta$;

•如果一个节点$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$中的$\Gamma',\Delta'$是文字断言的集合, 那么该节点是一个叶子节点;

•如果树T的节点$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$不是一个叶子节点, 那么$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$拥有如下的直接后继节点:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\Gamma_1,C_1\sqsubseteq D\Rightarrow\Delta_1\\ \Gamma_1,C_2\sqsubseteq D\Rightarrow\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1,C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D\Rightarrow\Delta_1\\ \left\{\begin{array}{l}\Gamma_1\Rightarrow C_1\sqsubseteq D,\Delta_1\\ \Gamma_1\Rightarrow,C_2\sqsubseteq D,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1\Rightarrow C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D,\Delta_1\\ \left\{\begin{array}{l}\Gamma_1,C\sqsubseteq D_1\Rightarrow\Delta_1\\ \Gamma_1,C\sqsubseteq D_2\Rightarrow\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1,C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2\Rightarrow\Delta_1\\ \left[\begin{array}{l}\Gamma_1\Rightarrow C\sqsubseteq D_1,\Delta_1\\ \Gamma_1\Rightarrow C\sqsubseteq D_2,\Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1\Rightarrow C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2,\Delta_1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \begin{cases} \Gamma_1, C_1 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta_1 \\ \left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow C_1 \sqsubseteq D, \Delta \\ \Gamma_1 \Rightarrow C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1 \end{array} \right. & \text{如果}\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1 \\ \left[\begin{array}{l} \Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \Rightarrow \Delta \\ \Gamma_1, C \sqsubseteq D_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array} \right. & \text{如果}\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \Rightarrow \Delta_1 \\ \begin{cases} \Gamma_1 \Rightarrow C \sqsubseteq D_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow C \sqsubseteq D_2, \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta_1 \end{cases}$$

定理8.4.10 如果存在一个树枝$\alpha \subseteq T$使得α的叶子节点不是$\mathbf{G}_6$中的一条公理, 则存在一个解释I使得对于每一个$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \alpha, I \not\models \Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

证明 设$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$是$\alpha$的叶子节点. 根据命题8.4.6, 存在一个解释$I$使得$I \models \Gamma'$且$I \not\models \Delta'$.

固定任意$\gamma \in \alpha$, 且假设$I \not\models \gamma$.

情况$(\sqcap^{LL})$. 如果γ是由$\beta \in \alpha$通过$(\sqcap^{LL})$产生, 则存在概念C_1, C_2, D 和β使得$\beta \in \alpha$, 并且

$$\begin{aligned} \gamma &= \Gamma'', C_i \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta', \\ \beta &= \Gamma'', C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \Rightarrow \Delta', \end{aligned}$$

其中$i \in \{1, 2\}$. 根据归纳假设,

$$I \models \Gamma''(a), (C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D^1)(a).$$

则

$$I \models \Gamma''(a), (C_i^1 \sqsubseteq D)(a),$$

并且根据归纳假设, $I \not\models \Delta'(a)$.

情况$(\sqcap^{RL})$. 如果γ是由$\beta \in \alpha$通过$(\sqcap^{R})$产生的, 则存在概念C, D_1, D_2使得

$$\begin{aligned} \gamma &= \Gamma'' \Rightarrow C \sqsubseteq D_1, C \sqsubseteq D_2, \Delta'', \\ \beta &= \Gamma'' \Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta''. \end{aligned}$$

根据归纳假设, $I \models \Gamma''(a)$, 以及

$$I \not\models (C \sqsubseteq D_1)(a), (C \sqsubseteq D_2)(a), \Delta''(a).$$

因此,

$$I \not\models (C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2)(a), \Delta''(a).$$

□

引理8.4.11 如果对于每一个树枝$\alpha \subseteq T$, α的叶子节点都是$\mathbf{G}_6$中的一条公理, 则树是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明.

证明 根据树的构造得到证明.

□

证明完毕.

□

8.4.3 表式证明系统$\mathbf{T}_6$

给定一个断言集合Γ,, 定义$\Gamma\Rightarrow$为一个矢列式, 且I满足$\Gamma\Rightarrow$, 记作$I\models\Gamma\Rightarrow$, 如果对于每个$C\sqsubseteq D\in\Gamma$和每个元素$a\in U, a\in C^I\Rightarrow a\in D^I$.

一个矢列式$\Gamma\Rightarrow$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow$, 如果对任何解释$I$, $I\models\Gamma\Rightarrow\Delta$.

表式证明系统$\mathbf{T}_6$由以下公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})\ \frac{\bigwedge_{f:\{1,...,n\}\to\{1,2\}}\mathbf{E}B(B,\neg B\in\sigma_f(\Gamma))}{\Gamma\Rightarrow},$$

其中Γ是文字断言的集合, 且如果

$$\begin{aligned}\Gamma&=\{B_{11}\sqsubseteq B_{12},...,B_{n1}\sqsubseteq B_{n2}\}\\&=\{B'_{11}\sqsubseteq B'_{12},...,B'_{m1}\sqsubseteq B'_{m2}\}\\\sigma_f(\Gamma)&=\{\neg^{f(1)}B_{1f(1)},...,\neg^{f(n)}B_{nf(n)}\},\end{aligned}$$

其中$\neg^1=\lambda$且$\neg^2=\neg$.

- **推理规则:**

$$(\sqcap^{LL})\ \frac{\Gamma,C_1\sqsubseteq D\Rightarrow\quad \Gamma,C_2\sqsubseteq D\Rightarrow}{\Gamma,C_1\sqcap C_2\sqsubseteq D\Rightarrow}\qquad (\sqcap_1^{LR})\ \frac{\Gamma,C\sqsubseteq D_1\Rightarrow}{\Gamma,C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2\Rightarrow}$$

$$(\sqcap_2^{LR})\ \frac{\Gamma,C\sqsubseteq D_2\Rightarrow}{\Gamma,C\sqsubseteq D_1\sqcap D_2\Rightarrow}$$

$$(\sqcup_1^{LL})\ \frac{\Gamma,C_1\sqsubseteq D\Rightarrow}{\Gamma,C_1\sqcup C_2\sqsubseteq D\Rightarrow}\qquad (\sqcup_2^{LL})\ \frac{\Gamma,C_2\sqsubseteq D\Rightarrow}{\Gamma,C_1\sqcup C_2\sqsubseteq D\Rightarrow}$$

$$(\sqcup^{LR})\ \frac{\Gamma,C\sqsubseteq D_1\Rightarrow\quad \Gamma,C\sqsubseteq D_2\Rightarrow}{\Gamma,C\sqsubseteq D_1\sqcup D_2\Rightarrow}$$

定义8.4.12 一个矢列式$\Gamma\Rightarrow$是$\mathbf{T}_6$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow$, 如果存在一个序列$\Gamma_1\Rightarrow,...,\Gamma_n\Rightarrow$使得$\Gamma_n=\Gamma$, 并且对于每一个$1\le i\le n,\Gamma_i\Rightarrow$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{T}_6$中的一条推理规则得到的.

定理8.4.13 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma\Rightarrow$,

$$\vdash_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow\ \text{蕴含}\ \models_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow.$$

□

定理8.4.14 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma\Rightarrow$,

$$\models_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow\ \text{蕴含}\ \vdash_{\mathbf{T}_6}\Gamma\Rightarrow.$$

□

8.4.4 表式证明系统$\mathbf{S}_6$

给定一个断言集合Δ, 定义$\Rightarrow \Delta$为一个矢列式, 且I满足$\Rightarrow \Delta$, 记作$I \models\Rightarrow \Delta$, 如果存在某个$C \sqsubseteq D \in \Delta$和某个元素$a \in U$使得$a \in C^I \& a \notin D^I$.

一个矢列式$\Rightarrow \Delta$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta$, 如果对每个解释$I$, $I \models \Gamma \mapsto \Delta$.

表式证明系统$\mathbf{S}_6$由以下公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})\ \frac{\bigwedge_{f:\{1,...,n\}\rightarrow\{1,2\}} \mathbf{E}B(B, \neg B \in \sigma_f(\Delta))}{\Rightarrow \Delta},$$

其中Δ是文字断言的集合, 且

$$\begin{array}{l}\Delta = \{B'_{11} \sqsubseteq B'_{12}, ..., B'_{m1} \sqsubseteq B'_{m2}\} \\ \sigma_f(\Delta) = \{B'_{11}, \neg B'_{12}, ..., B'_{m1}, \neg B'_{m2}\},\end{array}$$

其中$\neg^1 = \lambda$且$\neg^2 = \neg$.

- **推理规则:**

$$\begin{array}{ll}(\sqcap_1^{RL})\ \dfrac{\Rightarrow C_1 \sqsubseteq D, \Delta}{\Rightarrow C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta} & \\ & (\sqcap^{RR})\ \dfrac{\begin{array}{l}\Rightarrow C \sqsubseteq D_1, \Delta \\ \Rightarrow C \sqsubseteq D_2, \Delta\end{array}}{\Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta} \\ (\sqcap_2^{RL})\ \dfrac{\Rightarrow C_2 \sqsubseteq D, \Delta}{\Rightarrow C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta} & \\ & (\sqcup_1^{RR})\ \dfrac{\Rightarrow C \sqsubseteq D_1, \Delta}{\Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta} \\ (\sqcup^{RL})\ \dfrac{\begin{array}{l}\Rightarrow C_1 \sqsubseteq D, \Delta \\ \Rightarrow C_2 \sqsubseteq D, \Delta\end{array}}{\Rightarrow C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta} & (\sqcup_2^{RR})\ \dfrac{\Rightarrow C \sqsubseteq D_2, \Delta}{\Rightarrow C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta}\end{array}$$

定义8.4.15 一个矢列式$\Rightarrow \Delta$是$\mathbf{S}_6$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta$, 如果存在一个序列$\Rightarrow \Delta_1, ..., \Rightarrow \Delta_n$使得$\Delta_n = \Delta$, 并且对于每一个$1 \leq i \leq n, \Rightarrow \Delta_i$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{S}_6$中的一条推理规则得到的.

定理8.4.16 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\Rightarrow \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta.$$

□

定理8.4.17 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\Rightarrow \Delta$,

$$\models_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{S}_6}\Rightarrow \Delta.$$

□

8.5 非单调的推理系统

给定两个断言集合Γ,Δ, 定义$\Gamma\mapsto\Delta$为一个矢列式, 且I满足$\Gamma\mapsto\Delta$, 记作$I\models\Gamma\mapsto\Delta$, 如果

(1) 对于每个$C\sqsubseteq D\in\Gamma$和每个元素$a\in U, a\in C^I\Rightarrow a\in D^I$,

并且

(2) 对于某个$C\sqsubseteq D\in\Delta$和某个元素$a\in U, a\in C^I\&a\notin D^I$.

一个矢列式$\Gamma\mapsto\Delta$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{M}_6}\Gamma\mapsto\Delta$, 如果存在一个解释$I$使得$I\models\Gamma\mapsto\Delta$.

8.5.1 非单调的Gentzen推理系统$\mathbf{M}_6$

Gentzen推理系统$\mathbf{M}_6$由以下公理和推理规则组成[2]:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})\ \frac{\bigvee_{f:\{1,...,n\}\to\{1,2\}}\begin{array}{l}\neg\mathbf{E}B(\{B,\neg B\}\subseteq\sigma_f(\Gamma))\\ \&\ \neg\mathbf{E}B(\{B,\neg B\}\subseteq\sigma_f(\Delta))\\ \&\ \sigma_f(\Gamma)\cap\sigma_f(\Delta)=\emptyset\end{array}}{\Gamma\mapsto\Delta},$$

其中Δ,Γ是文字断言的集合, 且如果

$$\begin{array}{l}\Gamma=\{B_{11}\sqsubseteq B_{12},...,B_{n1}\sqsubseteq B_{n2}\}\\ \Delta=\{B'_{11}\sqsubseteq B'_{12},...,B'_{m1}\sqsubseteq B'_{m2}\}\end{array}$$

则

$$\begin{array}{l}\sigma_f(\Gamma)=\{\neg^{f(1)}B_{1f(1)},...,\neg^{f(n)}B_{nf(n)}\}\\ \sigma_f(\Delta)=\{B'_{11},\neg B'_{12},...,B'_{m1},\neg B'_{m2}\},\end{array}$$

其中$\neg^1=\lambda$且$\neg^2=\neg$.

- **推理规则:**

$$(\sqcap_1^{LL})\ \frac{\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \mapsto \Delta}{\Gamma, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta} \qquad (\sqcap^{RL})\ \frac{\Gamma \mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta \quad \Gamma \mapsto C_2 \sqsubseteq D, \Delta}{\Gamma \mapsto C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcap_2^{LL})\ \frac{\Gamma, C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta}{\Gamma, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta}$$

$$(\sqcap^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \mapsto \Delta \quad \Gamma, C \sqsubseteq D_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta} \qquad (\sqcap_1^{RR})\ \frac{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta}{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta}$$

$$(\sqcap_2^{RR})\ \frac{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta}{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta}$$

$$(\sqcup^{LL})\ \frac{\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \mapsto \Delta \quad \Gamma, C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta}{\Gamma, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta} \qquad (\sqcup_1^{RL})\ \frac{\Gamma \mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta}{\Gamma \mapsto C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcup_2^{RL})\ \frac{\Gamma \mapsto C_2 \sqsubseteq D, \Delta}{\Gamma \mapsto C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta}$$

$$(\sqcup_1^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \mapsto \Delta}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \mapsto \Delta} \qquad (\sqcup^{RR})\ \frac{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta \quad \Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta}{\Gamma \mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta}$$

$$(\sqcup_2^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \mapsto \Delta}$$

定义8.5.1 一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$是$\mathbf{M}_6$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{M}_6} \Gamma \mapsto \Delta$, 如果存在一个序列$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1, ..., \Gamma_n \mapsto \Delta_n$使得$\Gamma_n \mapsto \Delta_n = \Gamma \mapsto \Delta$, 并且对于每一个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \mapsto \Delta_i$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{M}_6$中的一条推理规则得到的.

定理8.5.2 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{M}_6} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{M}_6} \Gamma \mapsto \Delta.$$

证明 我们证明每一条公理都是有效的, 并且每一条推理规则都可以保持这种有效性.

为了验证公理的有效性, 假设Γ和Δ满足公理$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})$中的条件, 根据命题8.4.6, 存在解释$I$使得$I \models \Gamma \mapsto \Delta$.

为了验证规则$(\sqcap_1^{LL})$的保真性, 假设存在一个解释I和元素$a \in U$使得

$$I(\Gamma, (C_1 \sqsubseteq D)(a)) = 1\text{但}I(\Delta) = 0.$$

就这个解释I和元素$a \in U$, $I(\Gamma, (C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D)(a)) = 1$, 但$I(\Delta)(a) = 0$.

为了验证规则$(\sqcap^{RL})$的保真性, 假设存在一个解释I和元素$a \in U$使得

$$I(\Gamma) = 1\text{但}I((C_1 \sqsubseteq D)(a), \Delta) = 0; I(\Gamma) = 1\text{但}I((C_2 \sqsubseteq D)(a), \Delta) = 0.$$

就这个解释I和元素$a \in U$, $I(\Gamma) = 1$, 但$I(C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta)(a) = 0$.

为了验证规则$(\sqcap^{LR})$的保真性, 假设存在一个解释I和元素$a \in U$使得

$$I(\Gamma, (C \sqsubseteq D_1)(a)) = 1\text{但}I(\Delta) = 0; I(\Gamma, (C \sqsubseteq D_2)(a)) = 1\text{但}I(\Delta) = 0.$$

就这个解释I和元素$a \in U$, $I(\Gamma, (C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2)(a)) = 1$, 但$I(\Delta)(a) = 0$.

为了验证规则$(\sqcap_1^{RR})$的保真性, 假设存在一个解释I和元素$a \in U$使得

$$I(\Gamma) = 1\text{但}I((C \sqsubseteq D_1)(a), \Delta) = 0.$$

就这个解释I和元素$a \in U$, $I(\Gamma)(a) = 1$, 但$I(C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta)(a) = 0$.

其他情况类似.

□

定理8.5.3 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$,

$$\models_{\mathbf{M}_6} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{M}_6} \Gamma \mapsto \Delta.$$

证明 给定一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$, 我们按照如下的方式构造一棵树T:

• 树T的根节点是矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$;

• 如果一个节点$\Gamma' \mapsto \Delta'$中的Γ', Δ'是文字断言的集合, 那么该节点是一个叶子节点;

• 否则, $\Gamma' \mapsto \Delta'$拥有如下的直接后继节点:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, C_1 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1 \\ \Gamma_1, C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1 \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1 \mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \mapsto, C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1 \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \mapsto \Delta_1 \\ \Gamma_1, C \sqsubseteq D_2 \mapsto \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2 \mapsto \Delta_1 \\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta_1
\end{array}\right.$$

和

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1, C_1 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1 \\ \Gamma_1, C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \mapsto \Delta_1 \\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1 \mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta \\ \Gamma_1 \mapsto C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta_1 \\
\left\{\begin{array}{l}\Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \mapsto \Delta \\ \Gamma_1, C \sqsubseteq D_2 \mapsto \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \mapsto \Delta_1 \\
\left[\begin{array}{l}\Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta_1\end{array}\right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta_1
\end{array}\right.$$

定理8.5.4 如果存在一个树枝$\alpha \subseteq T$使得α的叶子节点上的矢列式均是$\mathbf{M}_6$中的一条公理, 则这个树枝是$\Gamma \mapsto \Delta$在$\mathbf{M}_6$中的一个证明.

证明 根据树α的定义.

□

定理8.5.5 如果对于每一个树枝$\alpha \subseteq T$, α的叶子节点都有一个矢列式不是$\mathbf{M}_6$中的一条公理, 则树T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$在$\mathbf{G}_6$中的一个证明树.

证明 根据树的构造得到证明.

□

证明完毕.

□

8.5.2 非单调的表式证明系统$\mathbf{T}_6'$

一个矢列式$\Gamma \mapsto$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto$, 如果存在一个解释$I$使得$I \models \Gamma$.

Gentzen推理系统$\mathbf{T}_6'$由以下公理和推理规则组成[2]:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})\ \frac{\bigvee_{f:\{1,...,n\}\to\{1,2\}} \neg\mathbf{E}B(\{B,\neg B\} \subseteq \sigma_f(\Gamma))}{\Gamma \mapsto}$$

其中Γ是文字断言的集合, 且

$$\begin{array}{l}\Gamma = \{B_{11} \sqsubseteq B_{12}, ..., B_{n1} \sqsubseteq B_{n2}\}\\ \sigma_f(\Gamma) = \{\neg^{f(1)} B_{1f(1)}, ..., \neg^{f(n)} B_{nf(n)}\},\end{array}$$

其中$\neg^1 = \lambda$且$\neg^2 = \neg$.

- **推理规则:**

$$(\sqcap_1^{LL})\ \frac{\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \mapsto}{\Gamma, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \mapsto} \qquad (\sqcap^{LR})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \mapsto\\ \Gamma, C \sqsubseteq D_2 \mapsto\end{array}}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2,}$$

$$(\sqcap_2^{LL})\ \frac{\Gamma, C_2 \sqsubseteq D \mapsto}{\Gamma, C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D \mapsto}$$

$$(\sqcup^{LL})\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, C_1 \sqsubseteq D \mapsto\\ \Gamma, C_2 \sqsubseteq D \mapsto\end{array}}{\Gamma, C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D \mapsto} \qquad (\sqcup_1^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \mapsto}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \mapsto}$$

$$(\sqcup_2^{LR})\ \frac{\Gamma, C \sqsubseteq D_2 \mapsto}{\Gamma, C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \mapsto}$$

定义8.5.6 一个矢列式$\Gamma \mapsto$是$\mathbf{T}_6'$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto$, 如果存在一个序列$\Gamma_1 \mapsto, ..., \Gamma_n \mapsto$使得$\Gamma_n = \Gamma$, 并且对于每一个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \mapsto$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{T}_6'$中的一条推理规则得到的.

定理8.5.7 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma \mapsto$,

$$\vdash_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto .$$

□

定理8.5.8 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\Gamma \mapsto$,

$$\models_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{T}_6'} \Gamma \mapsto .$$

□

8.5.3 非单调的表式证明系统$\mathbf{S}_6'$

一个矢列式$\mapsto \Delta$是有效的, 记作$\models_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta$, 如果存在一个解释$I$使得$I \not\models \Delta$.

表式证明系统$\mathbf{S}_6'$由以下公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A}^{\sqsubseteq})\ \frac{\bigvee\limits_{f:\{1,...,n\}\rightarrow\{1,2\}} \neg\mathbf{E}B(\{B,\neg B\}\subseteq \sigma_f(\Delta))}{\mapsto \Delta},$$

其中Δ是文字断言的集合, 且

$$\begin{array}{l} \Delta = \{B'_{11} \sqsubseteq B'_{12}, ..., B'_{m1} \sqsubseteq B'_{m2}\} \\ \sigma_f(\Delta) = \{B'_{11}, \neg B'_{12}, ..., B'_{m1}, \neg B'_{m2}\}, \end{array}$$

其中$\neg^1 = \lambda$且$\neg^2 = \neg$.

- **推理规则:**

$$(\sqcap^{RL})\ \frac{\begin{array}{l}\mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta \\ \mapsto C_2 \sqsubseteq D, \Delta\end{array}}{\mapsto C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, \Delta} \qquad \begin{array}{l} (\sqcap_1^{RR})\ \dfrac{\mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta}{\mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta} \\ (\sqcap_2^{RR})\ \dfrac{\mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta}{\mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2, \Delta} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\sqcup_1^{RL})\ \dfrac{\mapsto C_1 \sqsubseteq D, \Delta}{\mapsto C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta} \\ (\sqcup_2^{RL})\ \dfrac{\mapsto C_2 \sqsubseteq D, \Delta}{\mapsto C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D, \Delta} \end{array} \qquad (\sqcup^{RR})\ \frac{\begin{array}{l}\mapsto C \sqsubseteq D_1, \Delta \\ \mapsto C \sqsubseteq D_2, \Delta\end{array}}{\mapsto C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2, \Delta}$$

定义8.5.9 一个矢列式$\mapsto \Delta$是$\mathbf{S}_6'$-可证的, 记作$\vdash_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta$, 如果存在一个序列$\mapsto \Delta_1, ..., \mapsto \Delta_n$使得$\Delta_n = \Delta$, 并且对于每一个$1 \leq i \leq n, \mapsto \Delta_i$是一条公理或是由之前矢列式通过$\mathbf{S}_6'$中的一条推理规则得到的.

定理8.5.10 (可靠性定理) 对于任意的矢列式$\mapsto \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta.$$

□

定理8.5.11 (完备性定理) 对于任意的矢列式$\mapsto \Delta$,

$$\models_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{S}_6'} \mapsto \Delta.$$

□

8.6 非单调的命题逻辑[2]

定义8.6.1 一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$是有效的, 记为$\models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta$, 如果存在一个赋值$v$使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta) = 0$, 其中$v(\Gamma) = 1$, 如果对每个公式$A \in \Gamma, v(A) = 1$; 并且$v(\Delta) = 0$, 如果对每个公式$B \in \Delta, v(B) = 0$.

一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$不是有效的, 如果$\Gamma \mapsto \Delta$是不可满足的, 即, 不存在赋值v使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta) = 0$.

引理8.6.2 给定两个文字集合Γ, Δ, $\models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta$当且仅当$\Gamma$和$\Delta$是协调的, 并且$\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

证明 假设$\mathrm{con}(\Gamma), \mathrm{con}(\Delta)$并且$\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. 则存在一个赋值$v$使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta) = 0$. 定义$v$使得对任何命题变元$p$,

$$v(p) = \begin{cases} 0 & \text{如果}\neg p \in \Gamma \\ 1 & \text{如果}p \in \Gamma \\ 0 & \text{如果}p \in \Delta \\ 1 & \text{如果}\neg p \in \Delta \end{cases}$$

则v是良定的, $v(\Gamma) = 1$, 并且对每个文字$l \in \Delta, v(l) = 0$.

反之, 假设$\models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta$. 则存在一个赋值$v$使得$v(\Gamma) = 1$和$v(\Delta) = 0$, 这蕴含了$\Gamma$和$\Delta$是协调的, 并且$\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

□

直观地, 我们有下列等价断言:

○ $\models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta$当且仅当

○ 存在一个赋值v使得(i)对每个公式$A \in \Gamma, v(A) = 1$并且(2)对每个公式$B \in \Delta, v(B) = 0$; 当且仅当

○ 这不是真的: 对任何赋值v, (1)对每个公式$A \in \Gamma, v(A) = 1$蕴含(2)对某个公式$B \in \Delta, v(B) = 1$; 当且仅当

○ 这不是真的: $\mathrm{incon}(\Gamma)$ 或者 $\mathrm{incon}(\Delta)$ 或者 $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, 当且仅当

○ $\mathrm{con}(\Gamma) \& \mathrm{con}(\Delta) \& \Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

注意$\mathrm{incon}(\Gamma)$ 或者 $\mathrm{incon}(\Delta)$ 或者 $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$是等价于$\mathrm{incon}(\Gamma \cup \neg\Delta)$, 并且

$$\mathrm{con}(\Gamma) \& \mathrm{con}(\Delta) \& \Gamma \cap \Delta = \emptyset$$

等价于$\mathrm{con}(\Gamma \cup \neg\Delta)$, 其中$\neg\Delta = \{\neg B : B \in \Delta\}$.

8.6.1 非单调的命题逻辑$\mathbf{M}_1$

Gentzen推理系统$\mathbf{M}_1$由下列公理和推理规则组成:

- **公理**:

$$(\mathbf{A})\ \frac{\mathrm{con}(\Gamma) \& \mathrm{con}(\Gamma) \& \Gamma \cap \Delta = \emptyset}{\Gamma \mapsto \Delta},$$

其中Δ, Γ是文字集合.

• **推理规则**:

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \mapsto A, \Delta}{\Gamma, \neg A \mapsto \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, B \mapsto \Delta}{\Gamma \mapsto \neg B, \Delta}$$

$$(\wedge^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \mapsto \Delta \quad \Gamma, A_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta} \qquad (\wedge_1^R)\ \frac{\Gamma \mapsto B_1, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^R)\ \frac{\Gamma \mapsto B_2, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\vee_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta} \qquad (\vee^R)\ \frac{\Gamma \mapsto B_1, \Delta \quad \Gamma \mapsto B_2, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta}$$

定义8.6.3 一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$是可证的, 记为$\vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta$, 如果存在一个断言序列$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1, ..., \Gamma_n \mapsto \Delta_n$使得$\Gamma_n \mapsto \Delta_n = \Gamma \mapsto \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \mapsto \Delta_i$要么是一个公理要么由此前的矢列式通过$\mathbf{M}_1$中的一个推理规则得到的.

定理8.6.4 (可靠性定理) 对任何矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$,

$$\vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta.$$

证明 我们证明每个公理是有效的并且每个推理规则是保有效性的.

为验证公理的有效性, 假设con$(\Gamma \cup \neg\Delta)$. 存在一个赋值v使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\neg\Delta) = 1$, 即, 对每个公式$A \in \Gamma, v(A) = 1$; 并且对每个公式$B \in \Delta, v(B) = 0$.

为验证$(\wedge^L)$保有效性, 假设存在一个赋值v使得$v(\Gamma, A_1) = 1, v(\Gamma, A_2) = 1$并且$v(\Delta) = 0$. 对这个赋值$v, v(\Gamma, A_1 \wedge A_2) = 1$并且$v(\Delta) = 0$.

为验证$(\wedge_1^R)$保有效性, 假设存在一个赋值v使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta, B_1) = 0$. 对这个赋值$v, v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta, B_1 \wedge B_2) = 0$.

为验证$(\vee_1^L)$保有效性, 假设存在一个赋值v使得$v(\Gamma, A_1) = 1$并且$v(\Delta) = 0$. 对这个赋值$v, v(\Gamma, A_1 \vee A_2) = 1$并且$v(\Delta) = 0$.

为验证$(\vee^R)$保有效性, 假设存在一个赋值v使得$v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta, B_1) = 0, v(\Delta, B_2) = 0$. 对这个赋值$v, v(\Gamma) = 1$并且$v(\Delta, B_1 \vee B_2) = 0$.

□

定理8.6.5 (完备性定理)对任何矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$,

$$\models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 蕴含 } \vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta.$$

证明 给定一个矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$, 我们构造一个树T如下:

• T的根节点为$\Gamma \mapsto \Delta$;

• 如果一个节点$\Gamma' \mapsto \Delta'$满足Γ', Δ'是文字集合则这个节点是一个叶节点; 并且

- 否则$\Gamma' \mapsto \Delta'$有下列子节点

$$\begin{cases} \begin{cases} \Gamma_1, A_1 \mapsto \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \mapsto \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta_1 \\ \left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \mapsto B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \mapsto B_2, \Delta_1 \end{array} \right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \\ \left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \mapsto \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \mapsto \Delta_1 \end{array} \right. & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta_1 \\ \begin{cases} \Gamma_1 \mapsto B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \mapsto B_2, \Delta_1 \end{cases} & \text{如果}\Gamma' \mapsto \Delta' = \Gamma_1 \mapsto B_1 \vee B_2, \Delta_1. \end{cases}$$

定理8.6.6 如果每个树枝$\xi \subseteq T$的ξ的叶节点包含一个$\mathbf{M}_1$的公理, 则T存在$\Gamma \mapsto \Delta$的一棵证明树.

证明 由证明的定义得到.

□

定理8.6.7 如果存在一个树枝γ使得其叶节点上的矢列式$\Gamma' \mapsto \Delta'$均不是$\mathbf{M}_1$的公理则每个γ上的矢列式均是$\mathbf{G}_1$-有效的.

证明 假设存在一个树枝γ使得其每个叶节点上的矢列式$\Gamma' \mapsto \Delta'$不是$\mathbf{M}_1$的公理. 则每个这样的矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$均是$\mathbf{G}_1$的公理. 即对任何赋值$v, v(\Gamma') = 1$蕴含$v(\Delta') = 1$.

给定任何矢列式$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1 \in \gamma$, 存在下列情况:

情况$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1 = \Gamma_2, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta_2$. 则$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1$有两个直接子节点分别包含$\Gamma_2, A_1 \mapsto \Delta_2$和$\Gamma_2, A_2 \mapsto \Delta_2$. 由归纳假设, $\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2, A_i \Rightarrow \Delta_2$, 因此,$\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_2$.

情况$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1 = \Gamma_2, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta_2$. 则$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, A_1 \mapsto \Delta_2$和$\Gamma_2, A_2 \mapsto \Delta_2$. 由归纳假设,$\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2, A_1 \Rightarrow \Delta_2$, 并且$\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2, A_2 \Rightarrow \Delta_2$, 因此, $\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_2$.

情况$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1 = \Gamma_2 \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta_2$. 则$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \mapsto B_1, \Delta_2$和$\Gamma_2 \mapsto B_2, \Delta_2$. 由归纳假设, $\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2 \Rightarrow B_1, \Delta_2$并且$\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2 \Rightarrow B_2, \Delta_2$, 因此, $\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_2$.

情况$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1 = \Gamma_2 \mapsto B_1 \vee B_2, \Delta_2$. 则$\Gamma_1 \mapsto \Delta_1$有两个直接子节点分别包含矢列式$\Gamma_2 \mapsto B_1, \Delta_2$和$\Gamma_2 \mapsto B_2, \Delta_2$. 由归纳假设, $\models_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2 \Rightarrow B_i, \Delta_2$, 因此, $\vdash_{\mathbf{G}_1} \Gamma_2 \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_2$.

□

□

从证明中我们可以看出: 要么T是矢列式$\Gamma \mapsto \Delta$的一棵证明树, 要么存在一个树枝γ使得γ上的每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$是有效的. 实际上, 这个树枝$\gamma$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的证明.

8.6.2 $\mathbf{M}_1$的非单调性

定义8.6.8 一个推理系统$\mathbf{X}$是非单调于Γ的, 如果对任何公式集合Γ, Γ'以及Δ,

$$\vdash_{\mathbf{X}} \Gamma \mapsto \Delta \& \Gamma' \supseteq \Gamma \text{ 不一定蕴含 } \vdash_{\mathbf{X}} \Gamma' \mapsto \Delta.$$

$\mathbf{X}$是非单调于Δ的, 如果对任何公式集合Γ, Δ以及Δ',

$$\vdash_{\mathbf{X}} \Gamma \mapsto \Delta \& \Delta' \supseteq \Delta \text{ 不一定蕴含 } \vdash_{\mathbf{X}} \Gamma \mapsto \Delta'.$$

定理8.6.9 (非单调性定理) $\mathbf{M}_1$是非单调于Γ以及Δ, 即, 对任何公式集合Γ, Γ', Δ以及Δ',

$$\Gamma \subseteq \Gamma' \& \vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 不一定蕴含 } \vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma' \mapsto \Delta;$$
$$\Delta \subseteq \Delta' \& \vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 不一定蕴含 } \vdash_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta'.$$

证明 我们证明公理是非单调的并且每个推理规则是保单调性的.

假设$\mathrm{con}(\Gamma \cup \neg\Delta)$. 则存在一个超集$\Gamma' \supseteq \Gamma$使得$\Gamma' \cup \neg\Delta$是不协调的; 并且存在一个超集$\Delta' \supseteq \Delta$使得$\Gamma \cup \neg\Delta'$是不协调的. 因此, $\mathbf{M}_1$的公理不是单调于Γ和Δ.

为了证明$(\wedge^L)$保持Γ的单调性, 假设$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$是单调于$\Gamma$. 由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$我们推出$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$. 则对任何超集$\Gamma' \supseteq \Gamma, \Gamma', A_1, A_2 \mapsto \Delta$; 并且由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma', A_1, A_2 \mapsto \Delta$, 我们推出$\Gamma', A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$. 因此, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$ 蕴含$\Gamma', A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$, 即, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$是单调于$\Gamma$.

为了证明$(\wedge^L)$保持Γ的非单调性, 假设$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$是非单调于$\Gamma$. 由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$, 我们推出$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$. 则对某个超集$\Gamma' \supseteq \Gamma, \Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$不蕴含$\Gamma', A_1, A_2 \not\mapsto \Delta$; 再由$(\wedge^L), \Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$不蕴含$\Gamma', A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$, 即, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$是非单调于$\Gamma$.

为了证明$(\wedge^L)$保持Δ的单调性, 假设$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$是单调于$\Delta$. 由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$, 我们推出$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$. 则对任何超集$\Delta' \supseteq \Delta, \Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta'$; 再由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta'$, 我们推出$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta'$. 因此, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$蕴含$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta'$, 即, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$是单调于$\Delta$.

为了证明$(\wedge^L)$保持Δ的非单调性, 假设$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$是非单调于$\Delta$. 由$(\wedge^L)$, 由$\Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$, 我们推出$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$. 则对某个超集$\Delta' \supseteq \Delta, \Gamma, A_1, A_2 \mapsto \Delta$不蕴含$\Gamma, A_1, A_2 \not\mapsto \Delta'$; 再由$(\wedge^L), \Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$不蕴含$\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta'$, 即, $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta$非单调于$\Delta$.

其它情况类似.

□

由可靠性定理和完备性定理, 我们得到对任何公式集合Γ, Γ', Δ以及Δ',

$$\Gamma \subseteq \Gamma' \& \models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 不一定蕴含 } \models_{\mathbf{M}_1} \Gamma' \mapsto \Delta,$$
$$\Delta \subseteq \Delta' \& \models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta \text{ 不一定蕴含 } \models_{\mathbf{M}_1} \Gamma \mapsto \Delta'.$$

推理系统$\mathbf{G}_1$和$\mathbf{M}_1$的比较:

	单调的$\mathbf{G}_1$	非单调的$\mathbf{M}_1$
$(\mathbf{A})$	$\dfrac{\mathrm{incon}(\Gamma) \vee \mathrm{incon}(\Delta) \vee \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\mathrm{con}(\Gamma) \wedge \mathrm{con}(\Delta) \wedge \Gamma \cap \Delta = \emptyset}{\Gamma \mapsto \Delta}$

(注意这里我们滥用$\vee, \wedge$来表示$or, \&$) 并且

	单调的	非单调的
$(\wedge^L)$	$\dfrac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$ $\dfrac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A_1 \mapsto \Delta \quad \Gamma, A_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \mapsto \Delta}$
$(\wedge^R)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto B_1, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \mapsto B_2, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \wedge B_2, \Delta}$
$(\vee^L)$	$\dfrac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A_1 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta}$ $\dfrac{\Gamma, A_2 \mapsto \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \mapsto \Delta}$
$(\vee^R)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto B_1, \Delta \quad \Gamma \mapsto B_2, \Delta}{\Gamma \mapsto B_1 \vee B_2, \Delta}$

8.6.3 讨论

类似地, 我们可以给出命题模态逻辑的非单调推理系统. 但是我们无法给出谓词逻辑的非单调系统. 因为命题模态逻辑和描述逻辑是可判定的, 而谓词逻辑是不可判定的. 在一个逻辑中, 只有其逻辑符号是有限多个, 那么该逻辑的Gentzen推理系统是半可判定的, 即存在一个算法, 使得对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\Gamma \Rightarrow \Delta$是可证明的则该算法停机; 否则该算法可能不停机. 对于谓词逻辑, 如果存在一个非单调推理系统, 那么$\Gamma \not\Rightarrow \Delta$ (即$\Gamma \mapsto \Delta$)是半可判定的, 这样$\Gamma \Rightarrow \Delta$就是可判定的, 矛盾. 类似地, 我们也无法给出谓词模态逻辑的非单调推理系统.

命题8.6.10 假设对于矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$和$\Gamma \not\Rightarrow \Delta$ ($\Gamma \mapsto \Delta$), 均存在的单调/非单调的、递归的、可靠和完备的推理系统$\mathbf{G}$和$\mathbf{M}$. 则可证的矢列式集合$\{\Gamma \Rightarrow \Delta : \vdash_{\mathbf{G}} \Gamma \Rightarrow \Delta\}$和$\{\Gamma \not\Rightarrow \Delta : \vdash_{\mathbf{M}} \Gamma \not\Rightarrow \Delta\}$ 均是可判定的.

□

推论8.6.11 不存在谓词逻辑的非单调的、可靠的和完备的推理系统.

□

参考文献:

[1] Baader F., Calvanese D., McGuinness D.L., Nardi D., Patel-Schneider P.F. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, Applications*[M]. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[2] Cao C., Sui Y., Wang Y. The nonmonotonic propositional logics [J]. *Artificial Intelligence Research*, 2016, 5:111-120.

[3] Fensel D., van Harmelen F., Horrocks I., McGuinness D., Patel-Schneider P.F. OIL: An Ontology Infrastructure for the Semantic Web [J]. IEEE Intelligent Systems, 2001, 16:38-45.

[4] Sowa J.F. Semantic Networks[M]//S. C. Shapiro (ed.), *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, 1987.

[5] Franconi E. Description logics for natural language processing[C]//AAAI Technical Report FS-94-04, 37-44.

[6] van Harmelen F., Lifschitz V., Porter B. *Handbook of Knowledge Representation*[M]. Elsevier 2008.

[7] Hofmann M. Proof-theoretic approach to description logic [C]//*Proc. of LICS 2005*, 229-237.

[8] Horrocks I., Sattler U. Ontology Reasoning in the SHOQ(D) Description Logic [C]//*Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence,* 2001.

[9] Rademaker A. *A Proof Theory for Description Logics*[M]. SpringerBriefs in Computer Science, Springer 2012.

附录2: Aristotle三段论的谓词逻辑形式

Aristotle的有效推理规则是普通逻辑的形式, 我们可以给出其谓词逻辑的形式. 我们可以看出: 这些规则在谓词逻辑中都是保有效的.

- 第一格:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Every } M \text{ is } L & \forall x(M(x)\to L(x)) \\
\mathit{Barbara} & \text{Every } S \text{ is } M & \forall x(S(x)\to M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{Every } S \text{ is } L & \forall x(S(x)\to L(x)) \\
 & \text{No } M \text{ is } L & \neg\exists x(M(x)\wedge L(x)) \\
\mathit{Celarent} & \text{Every } S \text{ is } M & \forall x(S(x)\to M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & \neg\exists x(S(x)\wedge L(x)) \\
 & \text{Every } M\text{is } L & \forall x(M(x)\to L(x)) \\
\mathit{Darii} & \text{Some } S \text{ is } M & \exists x(S(x)\wedge M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is } L & \exists x(S(x)\wedge L(x)) \\
 & \text{No } M \text{ is } L & \neg\exists x(M(x)\wedge L(x)) \\
\mathit{Ferio} & \text{Some } S \text{ is } M & \exists x(S(x)\wedge M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & \exists x(S(x)\wedge \neg L(x))
\end{array}
$$

- 第二格:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{No } L \text{ is } M & \neg\exists x(L(x)\wedge M(x)) \\
\mathit{Cesare} & \text{Every}S \text{ is } M & \forall x(S(x)\to M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & \neg\exists x(S(x)\wedge M(x)) \\
 & \text{Every } L \text{ is } M & \forall x(L(x)\to M(x)) \\
\mathit{Camestres} & \text{No } S \text{ is } M & \neg\exists x(S(x)\wedge M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & \neg\exists x(S(x)\wedge L(x)) \\
 & \text{No } L \text{ is } M & \neg\exists x(L(x)\wedge M(x)) \\
\mathit{Festino} & \text{Some } S \text{ is } M & \exists x(S(x)\wedge M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & \exists x(S(x)\wedge \neg L(x)) \\
 & \text{Every } L \text{ is } M & \forall x(L(x)\to M(x)) \\
\mathit{Baroco} & \text{Some } S \text{ is not } M & \exists x(S(x)\wedge \neg M(x)) \\ \cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & \exists x(S(x)\wedge \neg L(x))
\end{array}
$$

- 第三格:

Darapti	Every M is L Every M is S Some S is L	$\forall x(M(x)\to L(x))$ $\forall x(M(x)\to S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge L(x))$
Felapton	No M is L Every$M$ is S Some S is not L	$\neg\exists x(M(x)\wedge L(x))$ $\forall x(M(x)\to S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge\neg L(x))$
Disamis	Some M is L Every M is S Some S is L	$\exists x(M(x)\wedge L(x))$ $\forall x(M(x)\to S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge L(x))$
Datisi	Every M is L Some M is S Some S is L	$\forall x(M(x)\to L(x))$ $\exists x(M(x)\wedge S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge L(x))$
Bocardo	Some M is not L Every$M$ is S Some S is not L	$\exists x(M(x)\wedge\neg L(x))$ $\forall x(M(x)\to S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge\neg L(x))$
Ferison	No M is L Some M is S Some S is not L	$\neg\exists x(M(x)\wedge L(x))$ $\exists x(M(x)\wedge S(x))$ $\exists x(S(x)\wedge\neg L(x))$

附录3: 公理集合论

由于Russell 悖论, Frege的朴素集合论被公理集合论所替代. 公理集合论的语言L_{set}包含两个关系符号$=$和$\in$, 分别表示集合的相等和属于关系, 但不含任何函数符号. 因此, 原子公式为

$$x=y|x\in y.$$

给定一个公式$A(x)$, 称$C=\{x:A(x)\}$为类(class). 类C为满足性质$A(x)$的元素的集体, 即

$$x\in C \text{ iff } A(x).$$

两个类相等, 如果他们具有相同的成员: 如果$C=\{x:A(x)\},D=\{x:B(x)\}$则$C=D$当且仅当对任何$x$,

$$A(x)\leftrightarrow B(x).$$

所有集合组成的类称为论域类, 或论域, 即

$$V=\{x:x=x\}.$$

类的运算包括$\cup,\cap,\setminus$:

$$\begin{aligned}
C\cap D=\{x:x\in C\wedge x\in D\} &\quad =\{x:A(x)\wedge B(x)\};\\
C\cup D=\{x:x\in C\vee x\in D\} &\quad =\{x:A(x)\vee B(x)\};\\
C\setminus D=\{x:x\in C\wedge x\notin D\} &\quad =\{x:A(x)\wedge\neg B(x)\}.
\end{aligned}$$

这些就是朴素集合论的基本内容. 在公理集合论中他们只是关于类的理论.

公理集合论ZFC包含如下的公理[14], 其中ZF表示Zermelo-Fraenkel; C表示选择公理.

1. 外延性: 如果X和Y具有相同的元素, 则$X=Y$:

$$\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y;$$

2. 配对: 对任何集合a和b 存在一个集合$\{a,b\}$只包含a和b :

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b);$$

3. 分离模式: 设$A(x)$是一个公式. 对任何X, 存在一个集合$Y=\{x \in X : A(x)\}$:

$$\forall X \exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow x \in X \wedge A(x)\};$$

4. 并: 对任何X存在一个集合$Y=\bigcup X$:

$$\forall X \exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow \exists z(z \in X \wedge x \in z));$$

5. 幂集: 对任何X存在一个集合$Y=P(X)$:

$$\forall X \exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow x \subseteq X);$$

6. 无穷集: 存在一个归纳集合:

$$\exists S(\emptyset \in S \wedge \forall x \in S(x \cup \{x\} \in S));$$

7. 替换模式: 如果F是一个函数集合, 则对任何$X, F(X)$是一个集合: 对每个公式$A(x,y)$,

$$\begin{aligned}&\forall x \forall y \forall z(A(x,y) \wedge A(x,z) \rightarrow y = z)\\ &\qquad \rightarrow \forall X \exists Y \forall y(y \in Y \leftrightarrow \exists x \in X A(x,y));\end{aligned}$$

8. 正则公理: 每个非空集合有一个$\in$-极小元素;

9. 选择公理: 每个非空集合组成的集簇有一个选择函数. 其中: 给定一个非空集合组成的集簇X, 函数f是X的一个*选择函数*, 如果对每个集合$Y \in X, f(Y)$ 有定义, 并且$f(Y) \in Y$.

附录4: Frege的二阶谓词演算和概念的理论

二阶谓词演算的语言由下列符号组成[15]:

- 对象名称: $a, b, ...$;
- 对象变量: $x, y, ...$;
- n-元关系名称: $P^n, Q^n, ...(n \geq 1)$;
- n-元关系变量: $F^n, G^n, ...(n \geq 1)$.

对象项定义为要么是对象名称要么是对象变量，即: $v ::= a|x$; n-元关系项定义为: $\Pi ::= P^n|F^n$; 一个变量要么是对象变量要么是关系变量，即: $\alpha ::= x|F^n$; 公式定义为:

$$A ::= \Pi(v_1, ..., v_n)|\neg A|A \rightarrow A|\forall \alpha A$$

推理系统由下列公理和推理规则组成:

• **公理**:

$$
\begin{aligned}
&A \to (B \to A)\\
&(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\\
&(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)\\
&\forall \alpha A \to A(x/\alpha)\\
&\forall \alpha (A \to B) \to (A \to \forall \alpha B)\\
&x = x\\
&x = y \to (A \to A(y/x))
\end{aligned}
$$

其中α不在自由出现在A中.

• **推理规则:**

$$
\begin{aligned}
\textbf{Modus Ponens (MP)}: &\quad 由A\ 和A \to B,\ 推出B\\
\textbf{推广规则}: &\quad 由A,\ 推出\forall \alpha A
\end{aligned}
$$

概念的概括原理是说: 每个公式$A(x)$定义一个概念，即

$$\exists G \forall x (Gx \equiv A(x)),$$

其中A是一个不含概念G的公式. 一般地，n-元关系的概括原理为:

$$\exists G \forall x_1, ..., x_n (Gx_1 ... x_n \equiv A(x_1, ..., x_n)),$$

其中A是不含自由的G并且$x_1, ..., x_n$为自由的一个公式.

现代谓词逻辑来自于Frege的项逻辑和谓词演算：

• 断言: 将真映射为真，其它映射为假的函数.

• 否定: 将真映射为假，其它映射为真的函数.

• 条件：将一对对象映射为假(如果第一对象为真而第二个不真)，其它对象序对映射为真.

• 一般化: 将一层概念映射为真(如果该概念将每个对象映射为真)，其它概念映射为假的二层函数.

Frege的逻辑是二阶的，并且根据概念与公式之间的联系，Russell发现了Russell悖论。在Frege的二阶逻辑中一个性质(公式)P定义一个集合(概念)S:

$$S = \{x | P(x)\},$$

其中$P(x)$是关于x的性质. 设$P(x) : x \notin x$是一个关于x的性质. 定义集合

$$V = \{x | x \notin x\}.$$

问题: 是否$V \in V$? 如果$V \in V$则V满足定义集合的性质, 即$V \notin V$; 如果$V \notin V$则V满足性质, 因此$V \in V$.

因此，我们采用谓词逻辑，其中不蕴含Russell悖论。

附录5: Aristotle关于模态逻辑的原文[1]:

> What is, **necessarily** is, when it is; and what is not, **necessarily** is not, when it is not. But not everything that is, **necessarily** is; and not everything that is not, **necessarily** is not. For to say that everything that is, is **of necessity,** when it is, is not the same as saying unconditionally that it is **of necessity**. Similarly with what is not. And the same account holds for contradictories: everything **necessarily** is or is not, and **will be** or **will not be**; but one cannot divide and say that one or the other is necessary. I mean, for example: it is **necessary** for there to be or not to be a sea-battle tomorrow; but it is **not necessary** for a sea-battle to take place tomorrow, **nor** for one not to take place – though it is **necessary** for one to take place or not to take place.

附录6: Aristotle三段论的描述逻辑形式

Aristotle的有效推理规则是普通逻辑的形式, 我们可以给出其描述逻辑的形式. 我们可以看出: 这些规则在描述逻辑中都是保真的.

- 第一格:

$$\begin{array}{lll}
 & \text{No } M \text{ is } L & M \sqsubseteq \neg L \\
\textit{Celarent} & \text{Every } S \text{ is } M & S \sqsubseteq M \\
\cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & S \sqsubseteq \neg L \\
 & \text{Every } M \text{is } L & M \sqsubseteq L \\
\textit{Darii} & \text{Some } S \text{ is } M & S \sqcap M \neq \bot \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is } L & S \sqcap L \neq \bot \\
 & \text{No } M \text{ is } L & M \sqsubseteq \neg L \\
\textit{Ferio} & \text{Some } S \text{ is } M & S \sqcap M \neq \bot \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \cap \neg L \neq \bot
\end{array}$$

- 第二格:

$$\begin{array}{lll}
 & \text{No } L \text{ is } M & L \sqsubseteq \neg M \\
\textit{Cesare} & \text{Every} S \text{ is } M & S \sqsubseteq M \\
\cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & S \sqsubseteq \neg L \\
 & \text{Every } L \text{ is } M & L \sqsubseteq M \\
\textit{Camestres} & \text{No } S \text{ is } M & S \sqsubseteq \neg M \\
\cline{2-3}
 & \text{No } S \text{ is } L & S \sqsubseteq \neg L \\
 & \text{No } L \text{ is } M & L \sqsubseteq \neg M \\
\textit{Festino} & \text{Some } S \text{ is } M & S \sqcap M \neq \bot \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \sqcap \neg L \neq \bot \\
 & \text{Every } L \text{ is } M & L \sqsubseteq M \\
\textit{Baroco} & \text{Some } S \text{ is not } M & S \sqcap \neg M \neq \bot \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \sqcap \neg L \neq \bot
\end{array}$$

- 第三格:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Every } M \text{ is } L & M \sqsubseteq L \\
\mathit{Darapti} & \text{Every } M \text{ is } S & M \sqsubseteq S \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is } L & S \sqcap L \neq \perp \\
 & \text{No } M \text{ is } L & M \sqsubseteq \neg L \\
\mathit{Felapton} & \text{Every} M \text{ is } S & M \sqsubseteq S \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \sqcap \neg L \neq \perp \\
 & \text{Some } M \text{ is } L & M \sqcap L \neq \perp \\
\mathit{Disamis} & \text{Every } M \text{ is } S & M \sqsubseteq S \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is } L & S \sqcap L \neq \perp
\end{array}
$$

并且

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Every } M \text{ is } L & M \sqsubseteq L \\
\mathit{Datisi} & \text{Some } M \text{ is } S & M \sqcap S \neq \perp \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is } L & S \sqcap L \neq \perp \\
 & \text{Some } M \text{ is not } L & M \sqcap \neg L \neq \perp \\
\mathit{Bocardo} & \text{Every} M \text{ is } S & M \sqsubseteq S \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \sqcap \neg L \neq \perp \\
 & \text{No } M \text{ is } L & M \sqsubseteq \neg L \\
\mathit{Ferison} & \text{Some } M \text{ is } S & M \sqcap S \neq \perp \\
\cline{2-3}
 & \text{Some } S \text{ is not } L & S \sqcap \neg L \neq \perp
\end{array}
$$

附录1: 推理系统历史上的使用情况

从希尔伯特和阿克曼[9]的《数理逻辑基础》于1928年出版以来, 出现许多数理逻辑的书籍, 其采用的推理系统情况如下:

书序号	出版时间	公理系统	自然推理系统	Getzen推理系统	表式证明系统
[9]	1928	√			
[2]	1956	√			
[15]	1964	√			
[11]	1967				
[18]	1967	√			
[16]	1976	√			
[14]	1977	√			
[5]	1977	√			
[10]	1982		√		
[6]	1994			√	
[7]	2001	√			
[19]	2002				√
[8]	2003			√	
[4]	2004				√
[1]	2007			√	
[3]	2007		√		
[13]	2010			√	
[17]	2010		√		

其中

[1] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. *Computability and Logic*[M]. 5th ed., Cambridge, 2007.

[2] Church A. *Introduction to mathematical logic*[M]. Princeton Univ. Press, 1956

[3] Chiswell I., Hodges W. *Mathematical Logic*[M]. Oxford Texts in Logic 3, 2007

[4] Clemens J.D. *Introduction to Mathematical Logic*[M]. Lecture Notes, 2004.

[5] Curry H.B. *Foundations of Mathematical Logic*[M]. Dover Pub. Inc., New York, 1977.

[6] Ebbinghaus H.D., Flum J., Thomas W. *Mathematical logic*[M]. Undergraduate Texts in Mathematics, 1994

[7] Enderton H.B. *A mathematical Introduction to Logic*[M]. Academic Press, 2001,

[8] Gallier J.H. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*[M]. preprint, 2003

[9] 希尔伯特, 阿克曼. 数理逻辑基础[M]. 莫绍揆译, 科学出版社, 1958.

[10] 胡世华, 陆钟万. 数理逻辑基础[M]. 科学出版社, 1982.

[11] Kleene S.C. *Mathematical Logic*[M]. John Wiley, 1967; Dover reprint, 2002

[12] Kreisel G. *Element of Mathematical Logic: Model Theory*(Study in Logic and Mathematics)2nd revised edition[M]. North-Holland Pub. Co, 1971.

[13] Li W. *Mathematical Logic, Foundations for Information Science*[M]. Progress in Computer Science and Applied Logic, vol.25, Birkhäuser, 2010.

[14] Manin Yu. I. *A Course in Mathematical Logic*[M]. Graduate Text in Mathematics 053, 1977.

[15] Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic*[M]. Chapman & Hall, 1964.

[16] Monk J.D. *Mathematical Logic*[M]. Graduate Text in Mathematics 037, 1976.

[17] Rautenberg W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*[M]. 3rd ed., Springer, 2010.

[18] Shoenfield J.R. *Mathematical Logic*[M]. Addison-Wesley Pub. Co., 1967.

[19] Simpson S.G. *mathematical logic*[M]. preprint, 2013.

索 引