Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional

Projeto computacional– 1º Semestre 2017/18

Instruções gerais

O relatório da Parte 1-grupo I não deve ultrapassar as 8 páginas. Descrições dos programas podem ir em anexo. O relatório pode ser em Word ou no próprio notebook do Mathematica onde apresentam os programas. Na primeira página do relatório devem incluir a identificação de todos os membros do grupo (nomes, números e algum email).

Deve constar a resposta clara a cada pergunta (tipo: questão (i)-resolução,) devidamente justificada, preenchendo as tabelas requeridas, incluindo os resultados obtidos com os programas, e invocando resultados teóricos quando for adequado. Não se pedem demonstrações dos resultados teóricos que constam nas sebentas (ex. teorema do ponto fixo), mas devem apenas fazer-lhes referencia e mostrar como os aplicam ao problema em questão. Podem complementar as vossas respostas com gráficos. Os códigos deve ser devidamente comentados e formatados para que a sua leitura seja clara. As linguagens de programação recomendadas são: Mathematica, Matlab, Octave, Python.

Parte 1

I

1. Chama-se *método quasi-Newton generalizado* para a equação $f(x) = 0$ a uma variante do método de Newton
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\delta}{f(x_k + \delta) - f(x_k)} f(x_k).$$
onde δ é um valor dado, próximo de 0. A ideia é substituir $f'(x_k)$ por um valor próximo, evitando assim calcular a derivada de f.

   (a) Construa um programa como implementação do *método quasi-Newton generalizado*. Os dados de entrada devem ser uma função f, um valor para δ, uma aproximação inicial,x_0, para a solução, o número máximo de iterações a efetuar e uma tolerância de erro (a associar ao valor absoluto da diferença entre duas iteradas consecutivas). Ou seja, o método deve produzir uma lista de iteradas, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, até que $|x_{N-1} - x_N| < \epsilon$. Os dados de saída devem ser a sucessão de iteradas e as sucessivas diferenças entre iteradas consecutivas, ou seja, $|x_m - x_{m-1}|$.

   (b) Através de um estudo teórico, supondo f uma função continuamente diferenciável, determine uma condição (que pode envolver f ou suas derivadas, e δ) que garanta convergência local do método considerado; nesse caso, determine a ordem e o coeficiente assimptótico de convergência do método.

2. Aplicação: Determinar o ângulo de lançamento de uma bola.

   Considere a trajetória de uma bola, definida por coordenadas (x, y) que satisfazem a relação

$$y = \tan(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2 + y_0.$$

   Nesta expressão, v_0, θ e y_0 referem-se aos dados iniciais, nomeadamente, a velocidade, o ângulo e a altura no instante do lançamento da bola.

   Suponha que a bola é lançada com velocidade $v_0 = 20m/s$, à altura $y_0 = 2$m. Sabendo que é recebida a uma distância $x_f = 35m$ e altura $y_f = 1m$, pretende-se determinar os possíveis valores do ângulo de lançamento θ. Utilize $g = 9.81m/s^2$.

   Comece por obter uma equação da forma $f(\theta) = 0$ para modelar matematicamente o problema e mostre que a equação tem duas raízes $\alpha < \beta$.

   (a) Pretende-se utilizar o método quasi-Newton generalizado, com $\delta = 0.1$, para aproximar a maior das raízes, β, escolhendo um valor adequado para a aproximação inicial θ_0.

      i. Mostre teoricamente que o método converge, qualquer que seja a aproximação inicial pertencente a um certo intervalo, e determine a ordem de convergência.

      ii. Utilize o programa elaborado, com $\theta_0 = 1.0$, e efectue iterações do método com $\epsilon = 10^{-10}$. Preencha as Tabelas 1 e 2, onde θ_n designa uma aproximação para a raiz β pretendida. Seja θ_N a iterada que verifica a precisão requerida, ou seja, $|\beta - \theta_N| < \epsilon$. Para calcular os erros $|e_n| = |\beta - \theta_n|$ nas tabelas utilize como valor exato $\beta = \theta_N$.

      iii. A partir da análise dos quocientes da Tabela 2, determine qual a ordem de convergência do método que é sugerida tendo em conta os resultados, e indique uma estimativa para o coeficiente assintótico de convergência. Justifique as conclusões.

Tabela 1

n	θ_n
0	
1	
2	
...	
N	

Tabela 2

n	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^{1/2}}$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert}$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^2}$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^3}$
0				
1				
2				
...				
N-2				

iv. Confirme se os valores estimados para a ordem e coeficiente assintótico de convergência estão de acordo com os valores teóricos (ou seja, obtidos recorrendo à teoria).

(b) Considere agora a aproximação da menor raiz, α, da equação $f(\theta) = 0$.

i. Aplique o método quasi-Newton, começando com $\theta_0 = 0.6$, com diferentes valores de δ ($\delta = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$). Em cada caso, registe o número de iterações necessárias para atingir a precisão $\epsilon = 10^{-10}$, e obtenha uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência. Apresente os resultados na forma duma tabela.

ii. Diga se os resultados que obteve estão de acordo com a resposta à pergunta 1b).