



---

## Relatório laboratório 3

---

Processamento Digital de Sinais

Diogo Alves nº 86980  
Xavier Dias nº 87136

Prof. Margarida Silveira

# Índice

<b>1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Ensaio e respostas às questões</b>	<b>1</b>
3.1	Observação do sinal corrompido . . . . .	1
3.1.1	Carregamento do sinal . . . . .	1
3.1.2	Visualização do sinal . . . . .	1
3.1.3	Visualização do espectro do sinal . . . . .	1
3.2	Filtragem com um filtro LIT . . . . .	2
3.2.1	Criação do filtro a partir de uma janela gaussiana . . . . .	2
3.2.2	Resposta impulsional e espectro do filtro . . . . .	3
3.2.3	Filtragem do sinal através da convolução . . . . .	3
3.2.4	Visualização do sinal filtrado . . . . .	3
3.2.5	Visualização do espectro do sinal filtrado . . . . .	4
3.2.6	Escuta do sinal filtrado . . . . .	4
3.2.7	Filtragem usando a DFT . . . . .	5
3.2.8	Comparação dos dois modos de filtragem . . . . .	5
3.3	Filtragem com um filtro de mediana . . . . .	6
3.3.1	Caracterização de filtros de mediana em termos de causalidade, estabilidade, linearidade e invariância no tempo . . . . .	6
3.3.2	Filtragem do sinal original com o filtro de 3ª ordem . . . . .	6
3.3.3	Visualização dos espectros sobrepostos dos sinais original e filtrado . . . . .	8
3.3.4	Audição do áudio filtrado e comentários . . . . .	8
3.3.5	Experiências com filtros de outras ordens em ordem a tentar melhorar o áudio . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>9</b>

# 1 Objetivos

O objetivo deste trabalho consiste em analisar a influência de dois tipos de filtros - um linear e invariante no tempo (LIT) e um filtro de mediana - num sinal de áudio corrompido por ruído.

## 2 Introdução

O tipo de filtro LIT que será utilizado será o filtro FIR, cuja função transferência para um filtro de ordem  $N$  é dada por:

$$H(z) = \sum_{i=0}^N h_i z^{-i} \quad (1)$$

Os coeficientes  $h_i$  correspondem à resposta impulsional do filtro ( $h_i = h(i)$ )

Já o filtro de mediana tem a seguinte relação entre a entrada ( $x(n)$ ) e a saída ( $y(n)$ ):

$$y(n) = \text{mediana}[x(n-M), x(n-M+1), \dots, x(n), \dots, x(n+M)] \quad (2)$$

A ordem do filtro é  $2M+1$ , que corresponde ao número de amostras de entrada utilizadas para calcular cada amostra do sinal de saída.

## 3 Ensaio e respostas às questões

### 3.1 Observação do sinal corrompido

#### 3.1.1 Carregamento do sinal

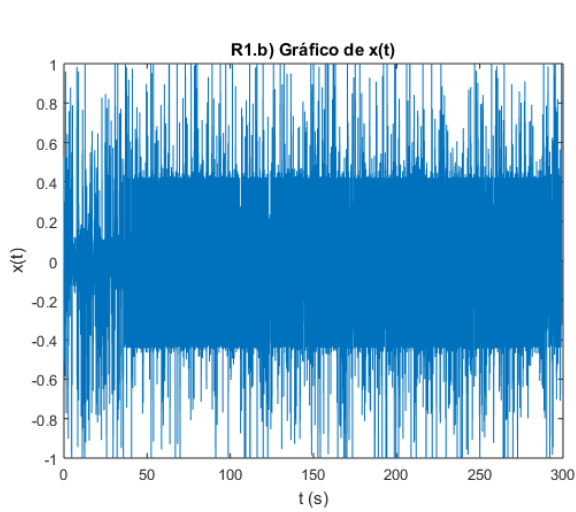
Abrindo o ficheiro de áudio `fugee.wav`, é possível ouvir a música *Killing Me Softly With His Song*, dos *Fugees*, bem como um ruído de fundo desconfortável. Este tipo de ruído é denominado ruído sal e pimenta (em inglês *salt and pepper noise*) e consiste em picos esporádicos de amplitude que são somados ao sinal original.

#### 3.1.2 Visualização do sinal

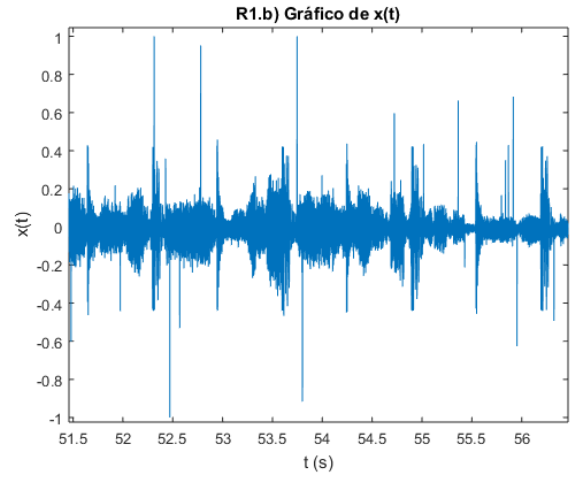
Visualizando graficamente o sinal, podemos observar que existe uma parte mais "densa" com amplitude máxima de cerca de 0.4 e uma parte mais "esparsa" com amplitude máxima de 1. O sinal de música corresponde à parte mais densa do sinal e o ruído corresponde aos picos de relativamente alta amplitude.

#### 3.1.3 Visualização do espectro do sinal

Observando o gráfico da magnitude do espectro do sinal, verifica-se que este tem amplitudes mais elevadas para frequências mais baixas e estas vão diminuindo à medida que a frequência aumenta. Olhando para o espectro, não é possível distinguir o ruído do sinal de música, uma vez que como o ruído é constituído por impulsos unitários, este estende-se a todas as frequências, incluindo as que são utilizadas para o sinal de música. É de referir também que, sendo a frequência de amostragem de 8000 amostras/s, pelo teorema da amostragem, é possível visualizar no gráfico um alcance de frequências de -4kHz até 4kHz.



(a) Sinal fugee na íntegra



(b) Sinal fugee com zoom, onde é possível observar os picos de ruído

Figure 1: Sinal fugee representado graficamente

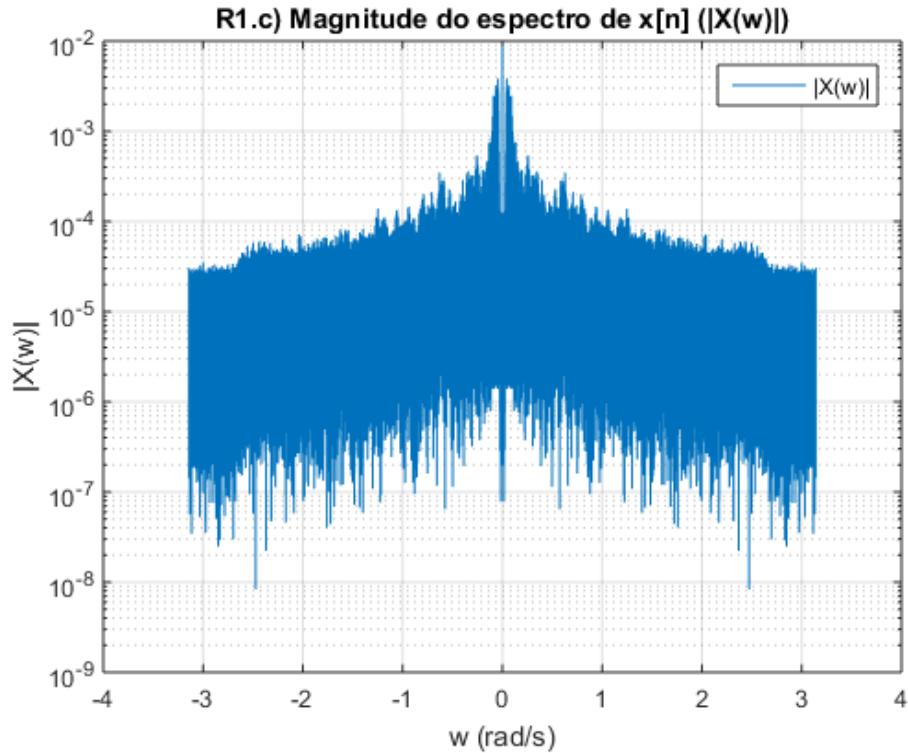


Figure 2: Espectro do sinal fugee

## 3.2 Filtragem com um filtro LIT

### 3.2.1 Criação do filtro a partir de uma janela gaussiana

Pretende-se criar um filtro FIR passa-baixo de ordem  $N=10$  a partir de uma janela gaussiana. A função transferência de um filtro deste tipo é dada por  $H(z) = \sum_{i=0}^N h_i z^{-i}$ . Isto significa que necessitamos de  $N + 1$  coeficientes, ou seja, o tamanho da janela gaussiana tem que ser  $L = 11$ . O *width factor* da janela gaussiana será o valor por defeito (2.5). Deste modo, a resposta impulsional do filtro tem os seguintes coeficientes:

$h_0$	0.0439	$h_6$	0.8825
$h_1$	0.1353	$h_7$	0.6065
$h_2$	0.3247	$h_8$	0.3247
$h_3$	0.6065	$h_9$	0.1353
$h_4$	0.8825	$h_{10}$	0.0439
$h_5$	1		

Table 1: Coeficientes do filtro FIR

### 3.2.2 Resposta impulsional e espectro do filtro

Através do comando `wvtool` é possível visualizar a resposta impulsional do filtro, bem como a sua função transferência (resposta impulsional no domínio da frequência).

Verifica-se que a resposta impulsional consiste num sinal simétrico em relação ao seu ponto médio, como aliás já se poderia ter concluído olhando para os valores dos coeficientes.

Quanto à função transferência, verifica-se que é de facto do tipo passa-baixo, com ganho de  $13.95dB (= 24.83)$  à frequência 0 e frequência de corte a  $-3dB$  de  $0.132815\pi \text{ rad/s}$ . Para além disso é também possível observar os lóbulos do filtro FIR causados pelo fenómeno de Gibbs.

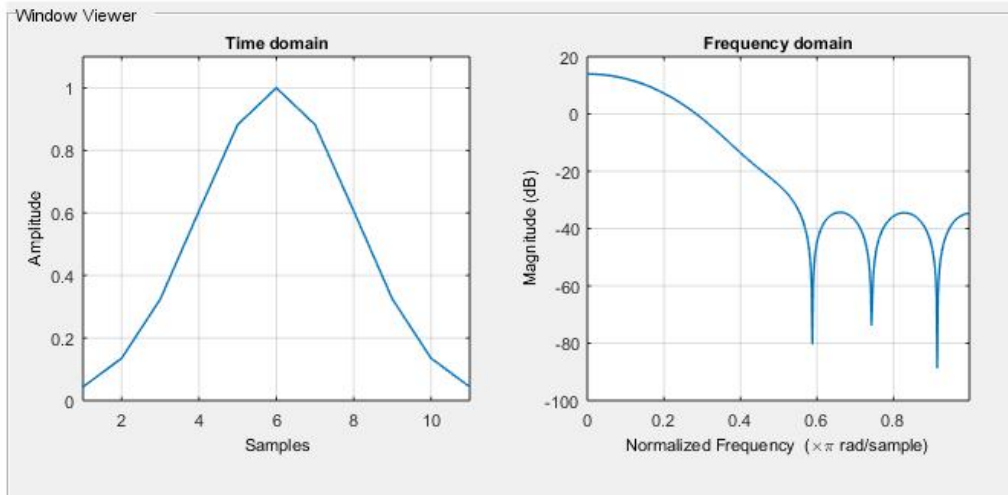


Figure 3: Gráficos da resposta impulsional do filtro (esquerda) e da sua função transferência (direita)

### 3.2.3 Filtragem do sinal através da convolução

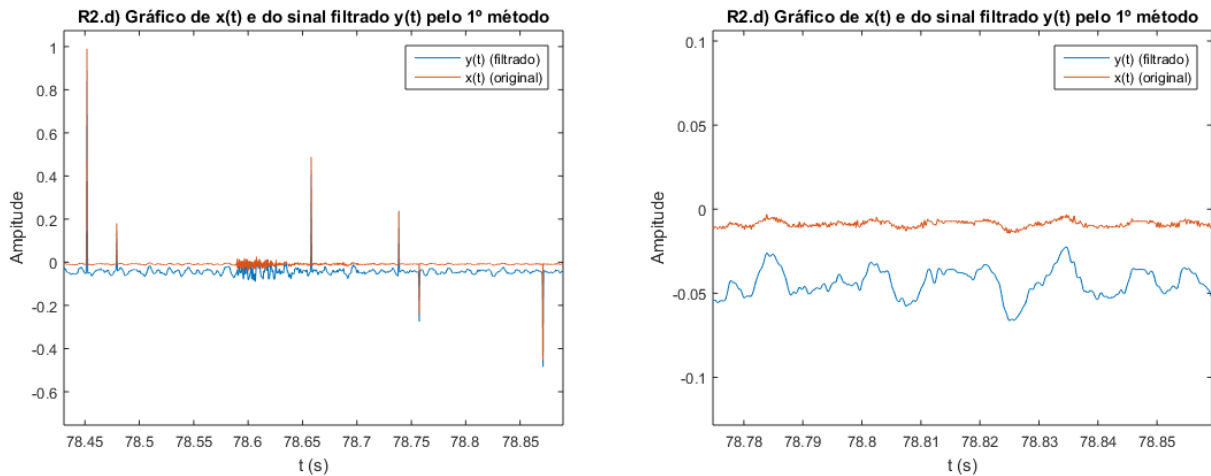
O sinal original pode agora ser filtrado pelo filtro passa-baixo recorrendo à convolução (comando `conv`):

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (3)$$

### 3.2.4 Visualização do sinal filtrado

Ao fazermos o plot dos dois sinais sobrepostos e fazendo zoom a zonas do sinal em que a amplitude é baixa, verificamos que o sinal de música é amplificado, uma vez que o ganho do filtro é superior a 1 para frequências relativamente baixas, e que o ruído continua presente, embora com amplitude relativamente ao sinal de música inferior à do sinal original, uma vez que as componentes do ruído de frequências mais altas são atenuadas pelo filtro, que tem ganho inferior a 1 para altas frequências. Por causa disto, e fazendo ainda mais zoom ao sinal,

verificamos que há detalhes do sinal original que são perdidos quando se aplica o filtro - estes detalhes correspondem às altas frequências do sinal de música.



(a) Sinal original (vermelho) e filtrado (azul) onde é possível ver alguns picos de ruído (b) Sinal original (vermelho) e filtrado (azul) onde é possível ver perda de detalhes do sinal original

Figure 4: Sinais original e filtrado sobrepostos no mesmo gráfico

### 3.2.5 Visualização do espectro do sinal filtrado

No gráfico relativo às magnitudes dos espectros do sinal original e filtrado, verificamos que de facto o sinal filtrado apresenta amplitudes inferiores para altas frequências e amplitudes superiores que o sinal original para as baixas frequências, o que é coerente com o filtro passa-baixo utilizado.

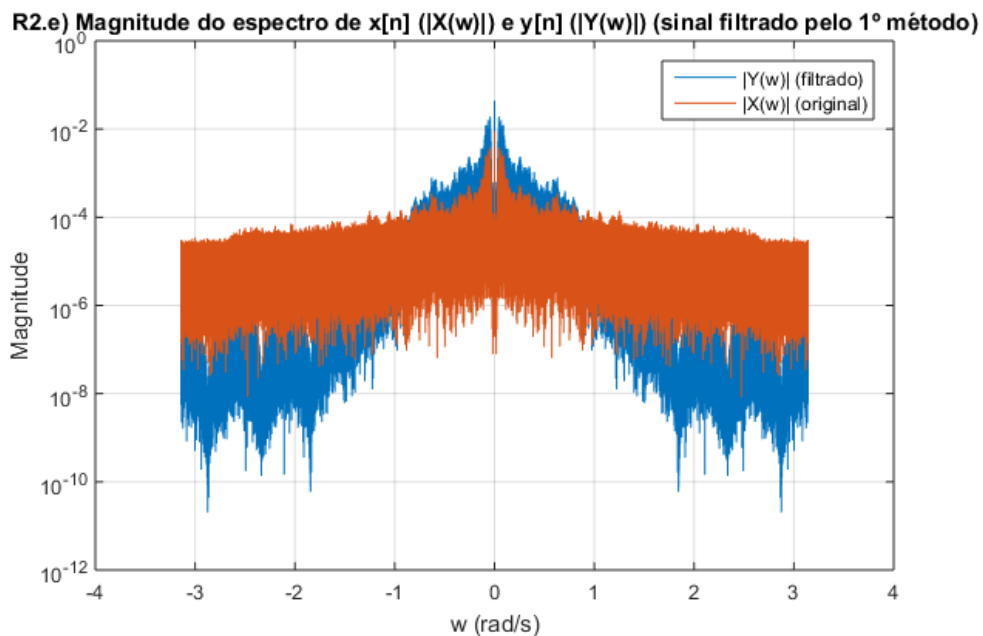


Figure 5: Gráficos da resposta impulsional do sinal original (vermelho) e filtrado (azul)

### 3.2.6 Escuta do sinal filtrado

Ouvindo o sinal filtrado, é perceptível que a qualidade do sinal não melhora, antes pelo contrário. Embora o filtro consiga atenuar um pouco os picos de ruído, estes continuam per-

ceptíveis e, como efeito secundário, o filtro acaba por atenuar também algumas frequências do sinal de música, o que resulta num sinal "abafado".

### 3.2.7 Filtragem usando a DFT

Desta vez, iremos realizar a filtragem do sinal através da multiplicação do espectro do sinal original pelo espectro do filtro:

$$X(k) = DFT\{x(n)\} \quad (4)$$

$$H(k) = DFT\{h(n)\} \quad (5)$$

$$Y(k) = X(k).H(k) \quad (6)$$

$$y(n) = DFT^{-1}\{Y(k)\} \quad (7)$$

Para obter os resultados corretos, é necessário que a DFT do filtro tenha o mesmo tamanho que a DFT do sinal.

### 3.2.8 Comparação dos dois modos de filtragem

Os resultados obtidos com os dois métodos de filtragem são muito semelhantes: se compararmos o espectro dos sinais filtrados pelos dois métodos, vemos que são praticamente o mesmo, no entanto se olharmos com mais atenção vemos que os valores das magnitudes não são exatamente iguais. Isto acontece porque no primeiro método estamos a fazer uma convolução do sinal *fugee* com a resposta impulsional do filtro e no segundo estamos a multiplicar a DFT do sinal *fugee* pela DFT do filtro e no fim fazer a DFT inversa, o que equivale a fazer uma convolução circular dos dois sinais ( $y(n) = x(n) \otimes_N h(n)$ ), em que N é o tamanho do sinal  $x(n)$ .

Assim, o primeiro método tem a vantagem de ser mais simples, uma vez que não existe a necessidade de se calcularem DFT e DFT inversas de sinais.

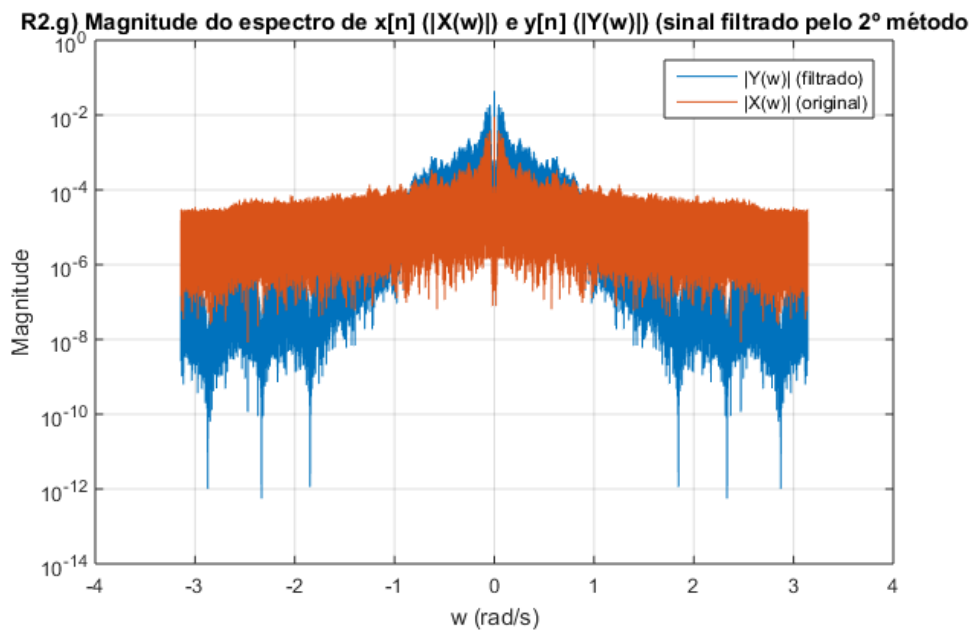


Figure 6: Gráficos da resposta impulsional do sinal original (vermelho) e filtrado (azul) obtido pelo segundo método

### 3.3 Filtragem com um filtro de mediana

Nesta subsecção, ir-se-á filtrar o sinal original `fugee` com um filtro de mediana.

#### 3.3.1 Caracterização de filtros de mediana em termos de causalidade, estabilidade, linearidade e invariância no tempo

- Causalidade: um sistema diz-se causal sse para um dado  $n_0$  e para qualquer sinal à entrada, o sinal de saída no instante  $n_0$  depender apenas do sinal para  $n < n_0$ . Ora o sinal à saída do filtro (o de ordem 3,  $M = 1$ ) é dado pela seguinte expressão

$$y(n) = \text{med}[x(n-1), x(n), x(n+1)].$$

Ora esta operação recorre. Ora para um instante  $n_0$ ,

$$y(n_0) = \text{med}[x(n_0-1), x(n_0), x(n_0+1)],$$

que depende de amostras  $n > n_0$ . Logo o filtro não é causal.

- Estabilidade: um sistema diz-se estável se para qualquer sinal limitado à saída do sistema se tem um sinal limitado. Ora pela expressão do sinal de saída do filtro, como depende apenas da mediana do sinal de entrada, pode-se concluir que é estável.
- Linearidade: um sistema  $T$  é linear se

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n).$$

Ora o filtro de mediana, não é linear pois não satisfaz a esta igualdade.

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = \text{med}[x_1(n) + x_2(n)] \neq \text{med}[x_1(n)] + \text{med}[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n).$$

- Invariância no tempo: um sistema diz-se invariante no tempo se para um deslocamento no tempo no sinal de entrada causar também à saída o mesmo deslocamento. Ora o filtro de mediana é invariante no tempo pois:

$$\text{med}[x(n-1-n_0), x(n-n_0), x(n+1-n_0)] = y(n-n_0).$$

#### 3.3.2 Filtragem do sinal original com o filtro de 3<sup>a</sup> ordem

A filtragem do sinal original `fugee` é feita com um filtro de mediana de 3<sup>a</sup> ordem. O sinal resultante é apresentado na figura 7 sobreposto com o original.



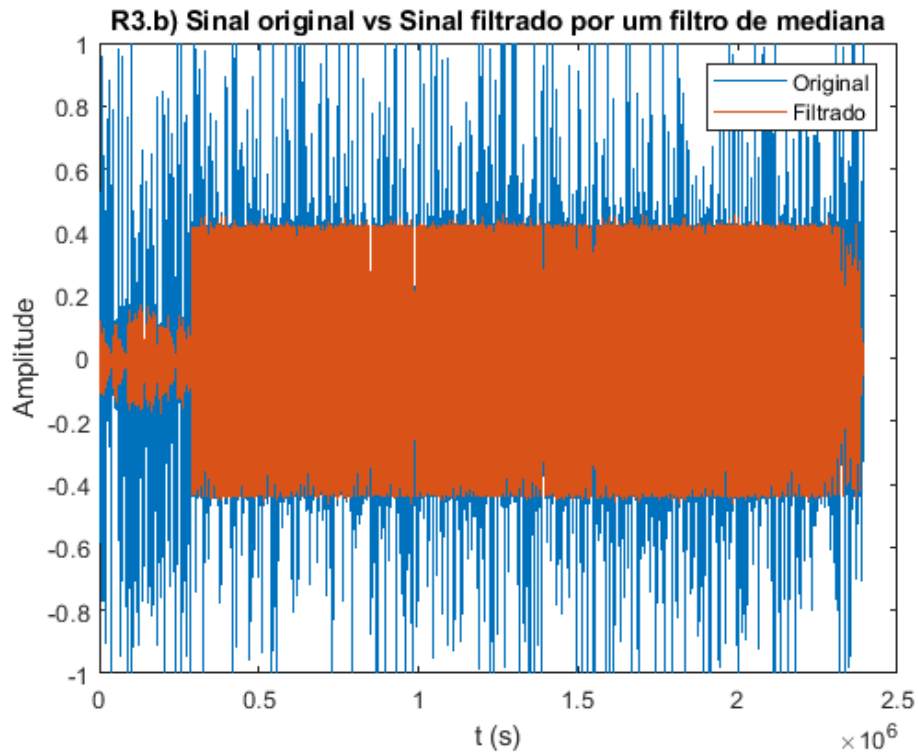


Figure 7: Gráficos das amplitudes do sinal original do áudio fugee (a azul) e do sinal resultante do filtro de mediana (a vermelho)

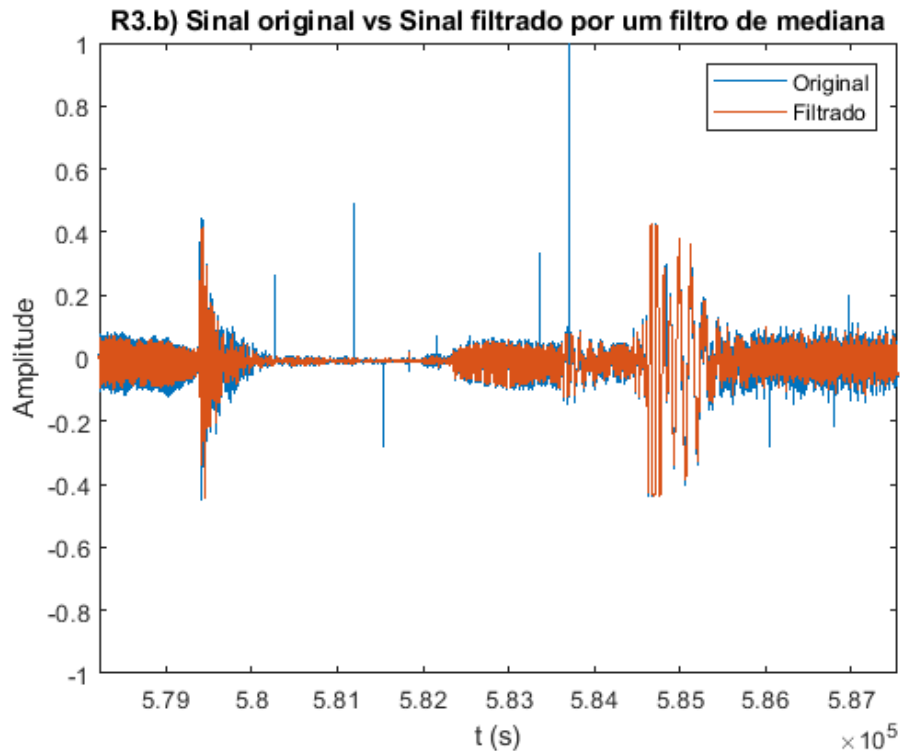


Figure 8: Detalhes de uma fração de tempo dos dois sinais original e filtrado

Ao ampliar a figura para se poder ver os detalhes dos dois sinais (figura 8, repara-se que o sinal resultante da filtragem não apresenta picos tão grandes como o original, estes que são interpretados como sendo o ruído a ser filtrado, que é pontual (*salt and pepper noise*).

Isto deve-se ao facto de o filtro usar uma janela deslizante sequencialmente sobre as amostras do sinal e em cada 3 amostras (daí ser de 3<sup>a</sup> ordem) calcular a sua mediana. Por isso os picos mais altos do sinal original (em módulo) são removidos pelo filtro. Por exemplo, se por acaso a janela recolhesse amostras com amplitudes 2, 8000 e 90, então a amostra com amplitude mais alta e a mais baixa seriam desprezadas, pois a mediana destes três valores seria  $\text{med}(2,8000,90) = \text{med}(2,90,8000) = 90$ .

### 3.3.3 Visualização dos espectros sobrepostos dos sinais original e filtrado

As magnitudes dos espectros dos sinais original e filtrado estão representados na figura 9. Confirma-se que o sinal original (a azul) adquire valores de amplitude mais altos que o sinal filtrado (a vermelho). Contudo, quando muito baixas frequências, o sinal assemelha-se a um sinal invariante. Pelo facto de o filtro preservar sinais constantes, por recorrer apenas à mediana de  $n$  amostras, o sinal filtrado não se distingue muito do original nas redondezas da frequência zero.

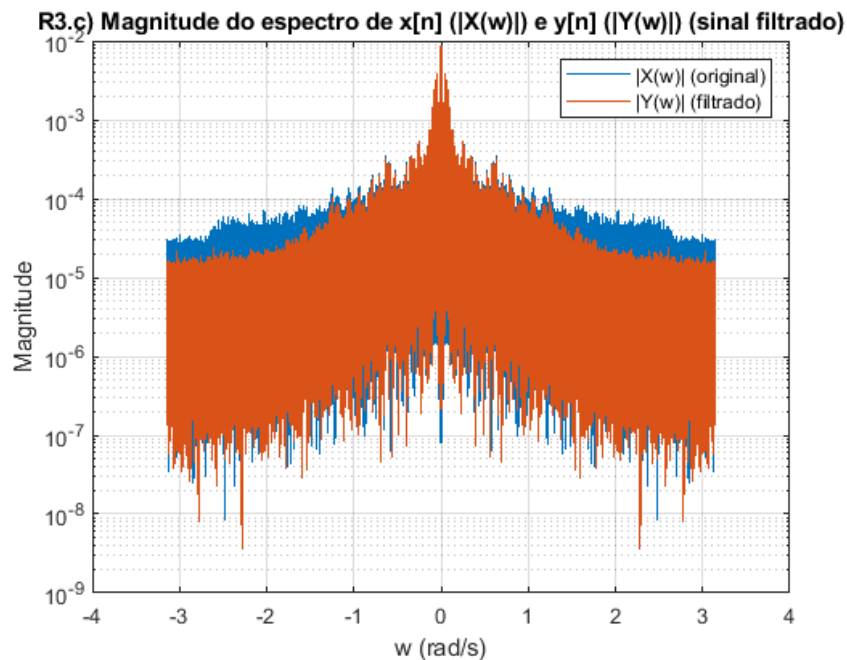


Figure 9: Gráficos das magnitudes dos espectros do sinal original do áudio fugee (a azul) e do sinal resultante do filtro de mediana (a vermelho)

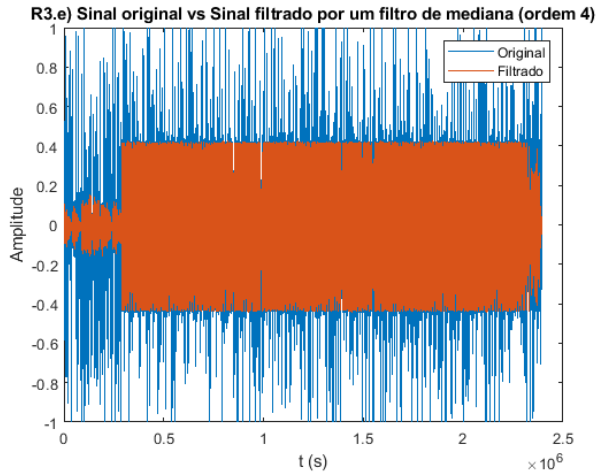
### 3.3.4 Audição do áudio filtrado e comentários

Fazendo comparação com o áudio original, repara-se que não existe praticamente ruído na música, pelo facto explicado em 3.1.1. A diminuição da amplitude do áudio é outro fenómeno que se repara como visto em 3.1.2.

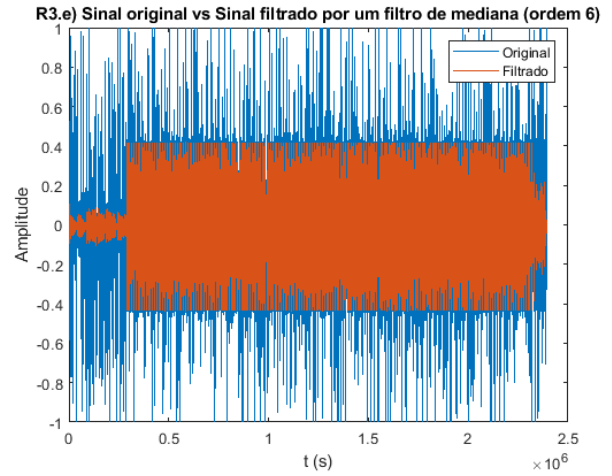
### 3.3.5 Experiências com filtros de outras ordens em ordem a tentar melhorar o áudio

Como experiências, resolveu-se filtrar o sinal original por filtros de ordens 4, 6 e 150.

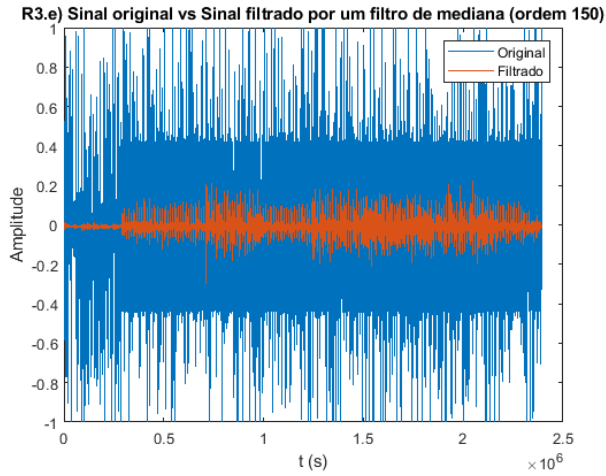
Ao aumentar a ordem do filtro, é de esperar que, por se colecionar mais amostras, exista sobreposição entre notas na melodia e interferências e assim a mediana das amostras seja mais baixa dado que as amostras podem adquirir amplitudes negativas e positivas. Contudo o filtro de ordem 4 consegue ainda melhorar a qualidade do áudio removendo mais ruído. A escolha da



(a) Gráficos das amplitudes do sinal original do áudio *fugee* (a azul) e do sinal resultante do filtro de mediana de ordem 4 (a vermelho)



(b) Gráficos das amplitudes do sinal original do áudio *fugee* (a azul) e do sinal resultante do filtro de mediana de ordem 6 (a vermelho)



(c) Gráficos das amplitudes do sinal original do áudio *fugee* (a azul) e do sinal resultante do filtro de mediana de ordem 150 (a vermelho)

Figure 10: Gráficos das amplitudes dos sinais de saída para os filtros de ordem 4 (a), 6 (b) e 150 (c) em contraste com o sinal original à entrada

ordem 150 foi para realçar este fenómeno. E conclui-se que não se consegue melhorar o sinal de áudio *fugee* para filtros de ordem superior a 4.

## 4 Conclusões

O melhor filtro que remove este tipo de ruído (ruído sal e pimenta) que o sinal original contém é o filtro de mediana (*median filter*), pois o ruído não se estende a todas as frequências. O filtro gaussiano apenas combina cada amostra com as dos vizinhos o que faz com que as amostras se pareçam com as dos vizinhos o que dá a sensação de um áudio sob água ou analogamente como uma imagem desfocada. Contudo o filtro de mediana de 4ª ordem é melhor porque apenas de 4 em 4 amostras obtém a mediana o que não é tão problemático para as notas da melodia. Mas sim benéfico porque filtra as componentes de alta amplitude que são interpretadas como sendo ruído pontual.