

Instituto Superior Técnico

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

## **Controlo**

2018/2019 – Primeiro Semestre

### **Laboratório n.º 2**

#### **Grupo n.º 4**

- |               |                                    |          |
|---------------|------------------------------------|----------|
| 1. N.º: 86976 | Nome: Diogo Guilherme Moura        | Rúbrica: |
| 2. N.º: 86980 | Nome: Diogo Martins Alves          | Rúbrica: |
| 3. N.º: 86989 | Nome: Francisco da Graça Gonçalves | Rúbrica: |

**Bancada:**

Dia da semana: Terça-Feira

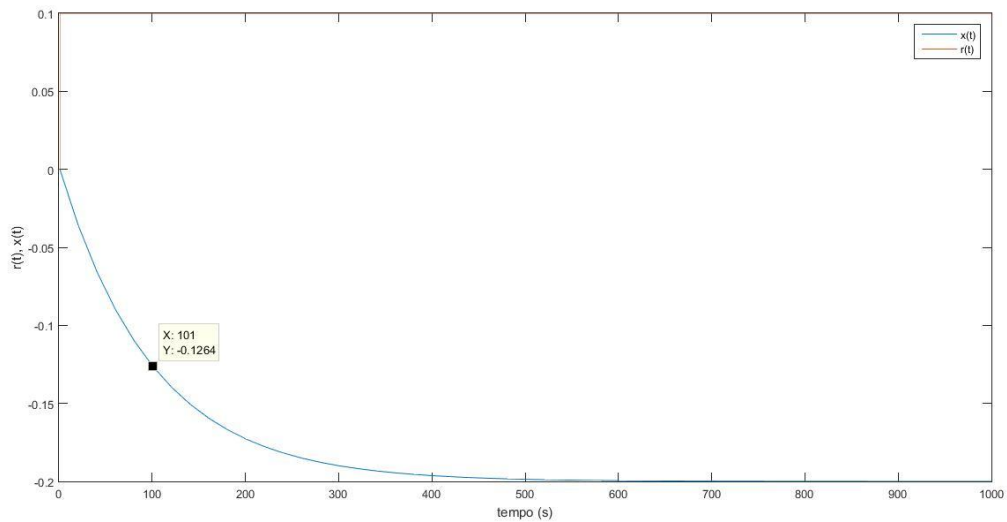
Turno: Cont7L07

Docente do laboratório: Bruno Guerreiro

### 3.3.

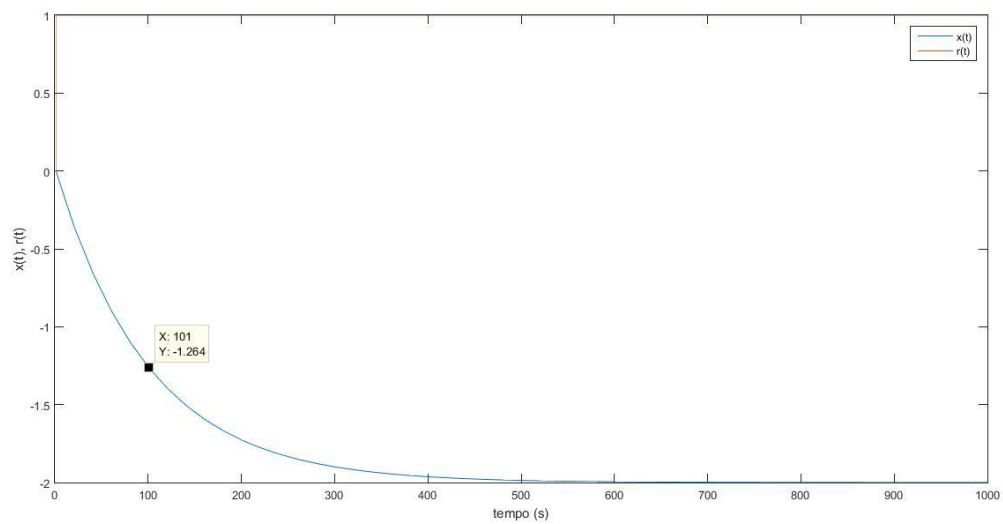
i)

Resposta  $x(t)$  do sistema  $G1(s)$ , quando  $r(t) = 0.1u(t)$ :



ii)

Resposta  $x(t)$  do sistema  $G1(s)$ , quando  $r(t) = u(t)$ :



Para ambas as situações verifica-se que a resposta  $x(t)$  quando  $r(t)$  é um escalão unitário é do tipo:

$$x(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t) \quad ,$$

em que  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  e  $\tau = x^{-1}(A(1 - \frac{1}{e}))$ .

$$(i) \quad A = -0.2 \quad e \quad \tau = x^{-1}(-0.124) = 101$$

$$(ii) \quad A = -2 \quad e \quad \tau = x^{-1}(-1.2642) = 101$$

Desta forma, o sistema de 1ª ordem  $G1(s)$  é caracterizado por:

$$G1(s) = K_1 \times \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}},$$

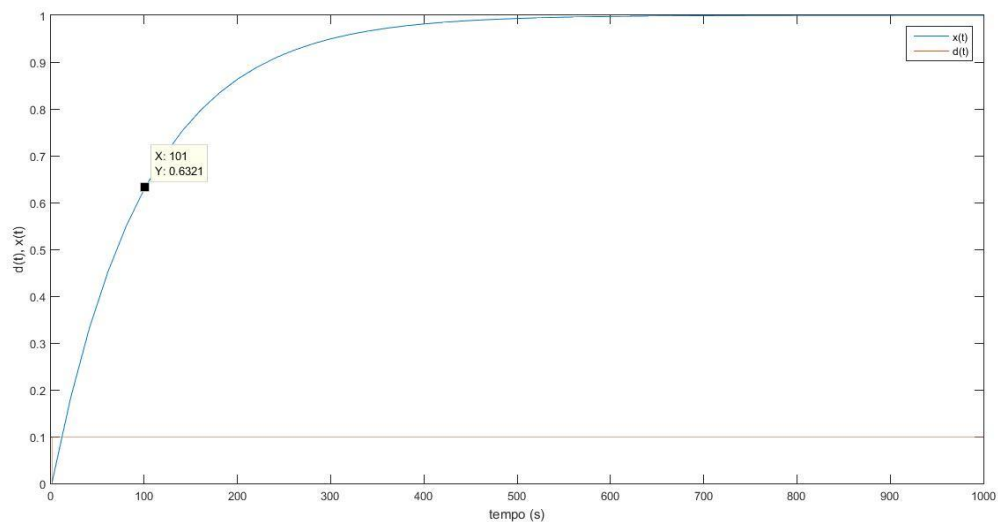
em que  $K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{r(t)}$ , que é -2 nas duas situações e  $\tau = 101$ .

O valor de  $K_1$  obtido, analisando a resposta é exatamente igual ao valor real e o valor de  $\tau$  é bastante próximo do real (100).

### 3.4.

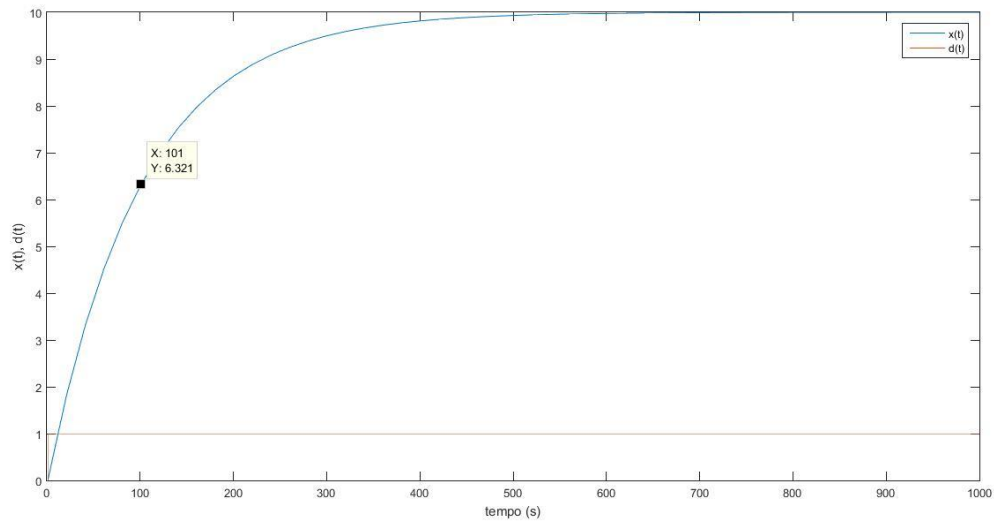
i)

Resposta  $x(t)$  do sistema  $G2(s)$ , quando  $d(t) = 0.1u(t)$ :



ii)

Resposta  $x(t)$  do sistema  $G2(s)$ , quando  $d(t) = u(t)$ :



Para ambas as situações verifica-se que a resposta  $x(t)$  quando  $d(t)$  é um escalão unitário é do tipo:

$$x(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t) \quad ,$$

em que  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  e  $\tau = x^{-1}(A(1 - \frac{1}{e}))$  .

$$(i) \quad A = 1 \quad e \quad \tau = x^{-1}(0.6321) = 101$$

$$(ii) \quad A = 1 \quad e \quad \tau = x^{-1}(6.321) = 101$$

Desta forma, o sistema de 1ª ordem  $G2(s)$  é caracterizado por:

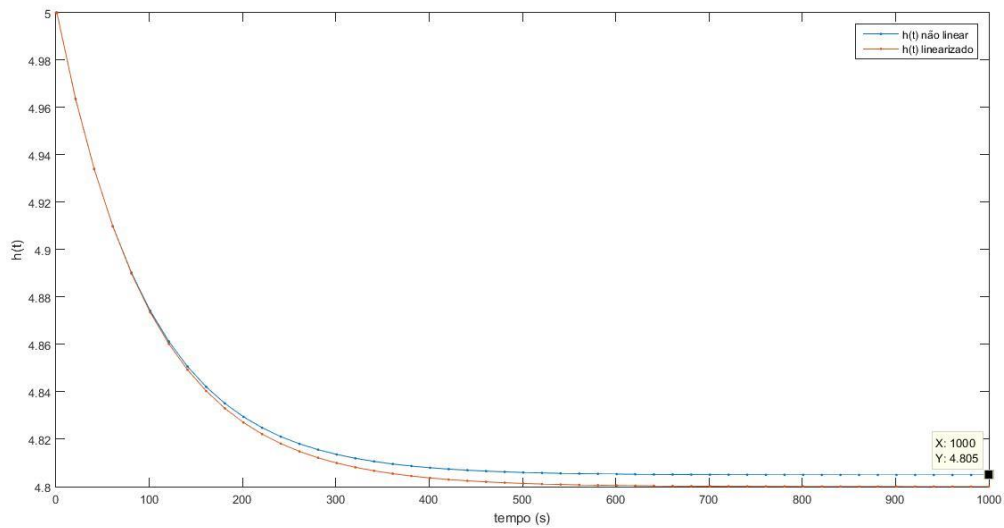
$$G2(s) = K_2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} \quad ,$$

em que  $K_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{r(t)}$  , que é -2 nas duas situações e  $\tau = 101$  .

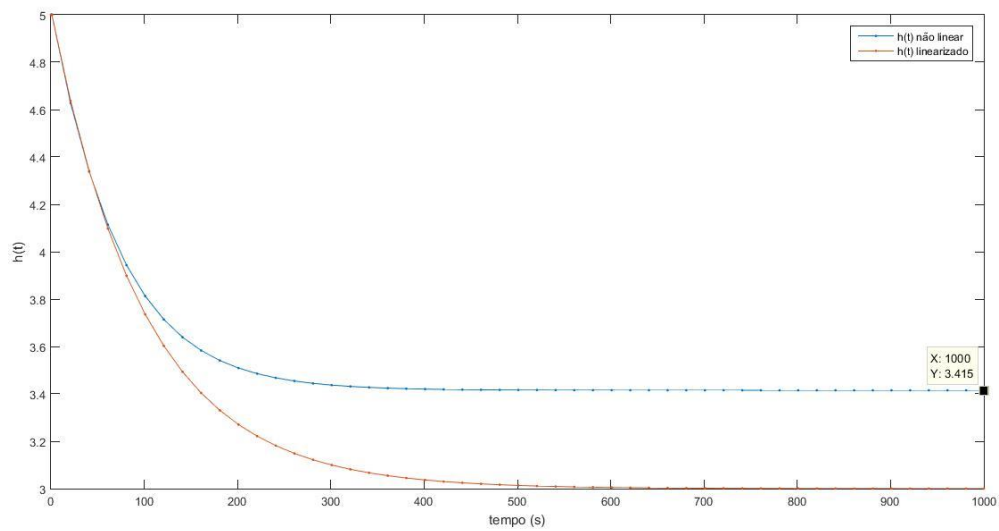
O valor de  $K_2$  obtido, analisando a resposta, é exatamente igual ao valor real e o valor de  $\tau$  é bastante próximo do real (100).

### 3.5.

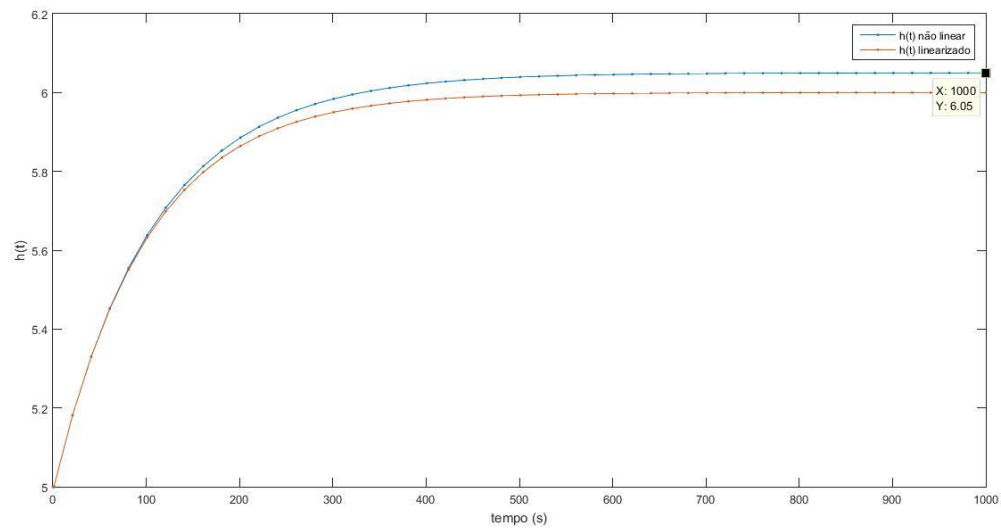
Respostas  $h(t)$  dos sistemas não linear e linearizado quando  $p(t) = Peq + 0.1u(t)$  e  $m(t) = Meq$ :



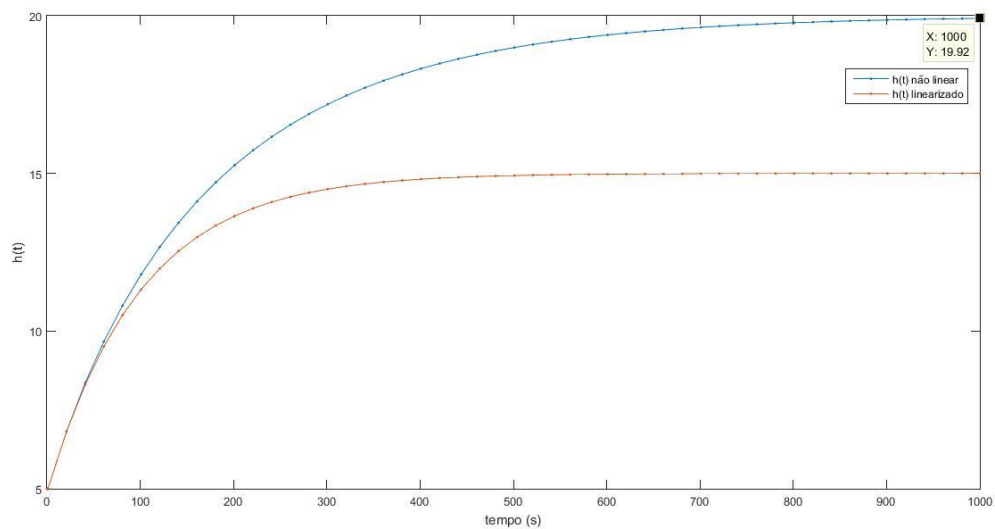
Respostas  $h(t)$  dos sistemas não linear e linearizado quando  $p(t) = Peq + u(t)$  e  $m(t) = Meq$ :



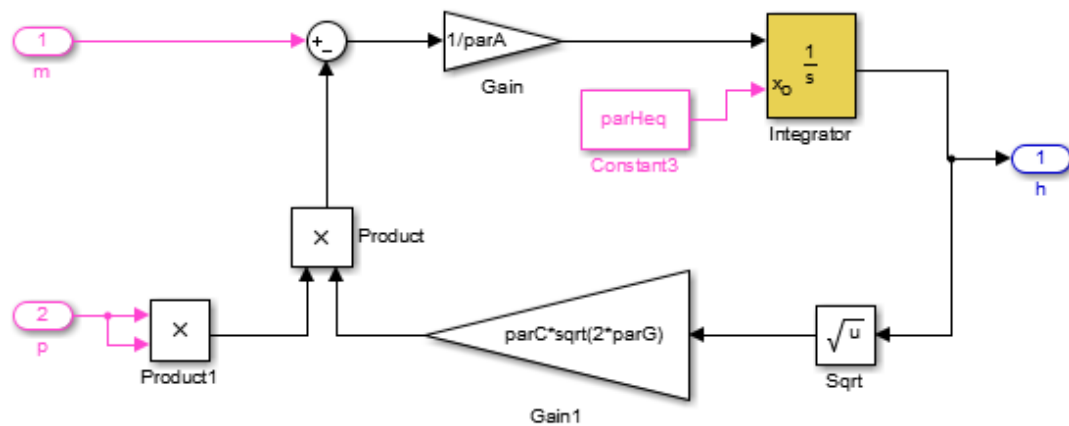
Respostas  $h(t)$  dos sistemas não linear e linearizado quando  $p(t) = P_{eq}$  e  $m(t) = M_{eq} + 0.1u(t)$ :



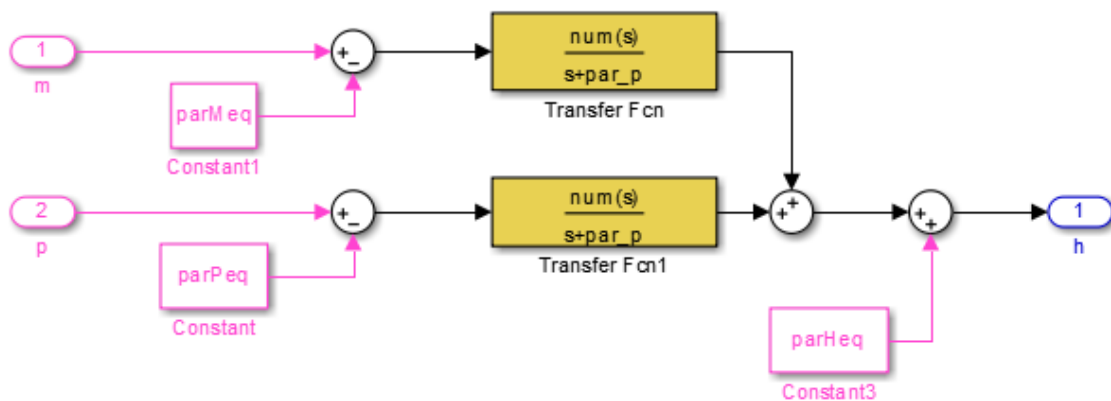
Respostas  $h(t)$  dos sistemas não linear e linearizado quando  $p(t) = P_{eq}$  e  $m(t) = M_{eq} + u(t)$ :



Sistema não linear:



Sistema linearizado:



Com  $d(t) = 0$  e  $r(t) = a \times u(t)$ , verificamos que a resposta  $x(t)$  do sistema linearizado tem exatamente ganho igual a -2, como seria de esperar, e a resposta  $x(t)$  do sistema não linear é semelhante à anterior, mas com ganho diferente:

- (i) para  $r(t) = 0.1u(t)$ , o ganho é de -1.95
- (ii) para  $r(t) = u(t)$ , o ganho de  $x(t)$  é de -1.585

, de onde se conclui que à medida que a variação de  $p(t)$  (que corresponde a  $r(t)$ ) aumenta, o valor absoluto do ganho do sistema não linear aumenta, o que significa que o sistema não linear é aproximável pelo sistema linearizado apenas para  $r(t)$  pequeno.

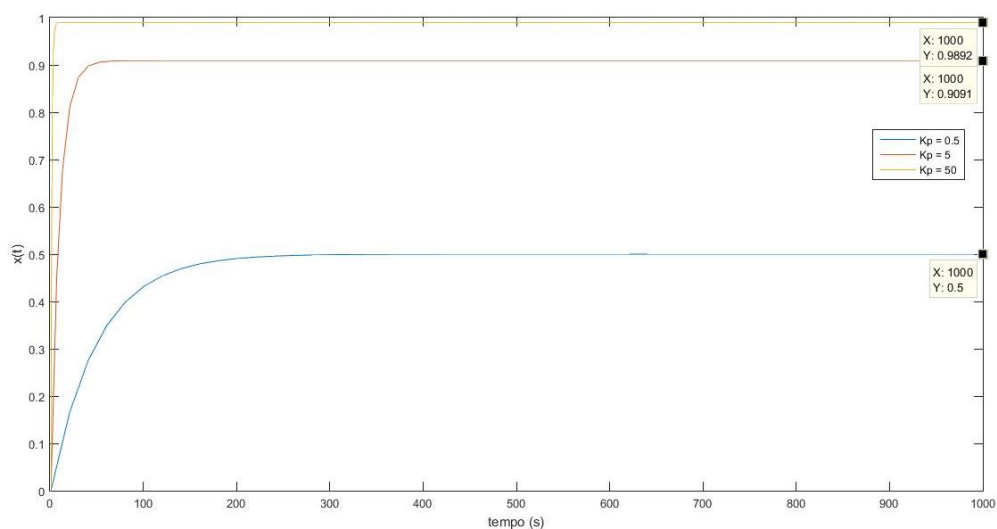
Com  $r(t) = 0$  e  $d(t) = a \times u(t)$ , verificamos que a resposta  $x(t)$  do sistema linearizado tem exatamente ganho igual a 10, como seria de esperar, e a resposta  $x(t)$  do sistema não linear é semelhante à anterior mas com ganho diferente:

- (i) para  $d(t) = 0.1u(t)$ , o ganho é de 10.5
- (ii) para  $d(t) = u(t)$ , o ganho de é de 14.92

, de onde se conclui que à medida que a variação de  $m(t)$  (que corresponde a  $d(t)$ ) aumenta, o valor absoluto do ganho do sistema não linear aumenta, o que significa que o sistema não linear é aproximável pelo sistema linearizado apenas para  $d(t)$  pequeno.

#### 4.6.

Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $K_p = 0.5, K_p = 5$  e  $K_p = 50$ :



Da questão 4.3, o ganho estático é dado por:

$$G_{clr}(0) = -\frac{K_p K_1}{1 - K_p K_1}$$

Na simulação, o ganho estático é dado por  $G_{clr}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , uma vez que  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ .

Assim:

$$G_{clr}(0) = 0.5 \text{ para } k_p = 0.5$$

$$G_{clr}(0) = 0.9091 \text{ para } k_p = 5$$



$$G_{clr}(0) = 0.9882 \text{ para } k_p = 50$$

Calculando agora os valores teóricos:

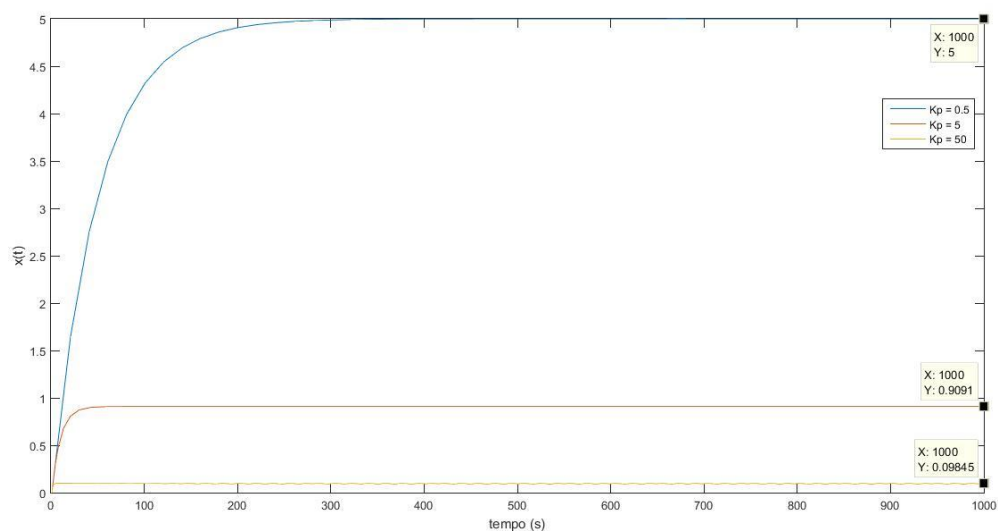
$$G_{clr}(0) = 0.5 \text{ para } k_p = 0.5$$

$$G_{clr}(0) = \frac{10}{11} \approx 0.9091 \text{ para } k_p = 5$$

$$G_{clr}(0) = \frac{100}{101} = 0.9901 \text{ para } k_p = 50$$

#### 4.7.

Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = 0$  e  $d(t) = u(t)$ , para  $K_p = 0.5, K_p = 5$  e  $K_p = 50$ :



Da questão 4.5, o ganho estático é dado por:

$$G_{cld}(0) = \frac{K_2}{1 - K_p K_1}$$

Nas simulações o ganho estático é dado por:

$$G_{cld}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \text{ , uma vez que } d(t) = u(t) \text{ e } r(t) = 0$$

Assim:

$$G_{cld}(0) = 5 \text{ para } k_p = 0.5$$

$$G_{cld}(0) = 0.9091 \text{ para } k_p = 5$$

$$G_{cld}(0) = 0.09845 \text{ para } k_p = 50$$

Calculando agora os valores teóricos:

$$G_{cld}(0) = 5 \text{ para } k_p = 0.5$$

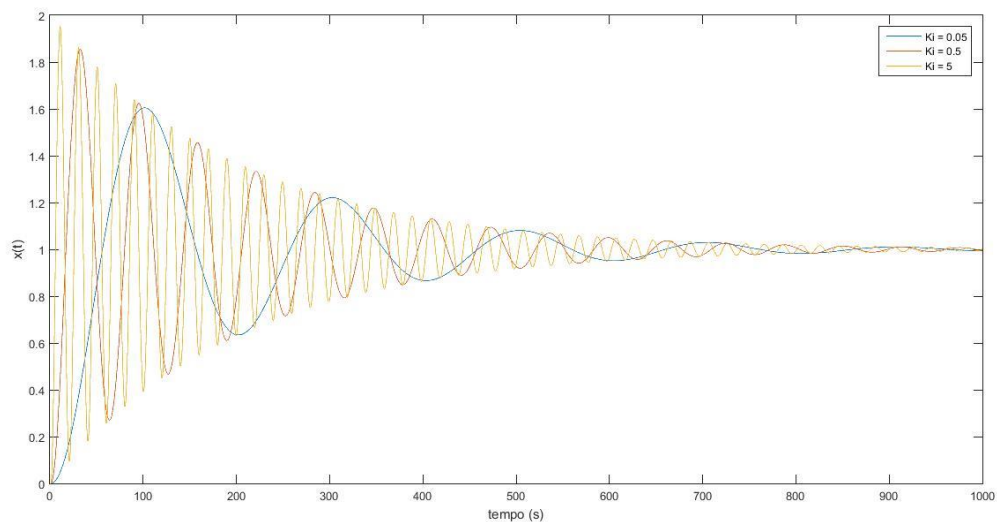
$$G_{cld}(0) = \frac{10}{11} \approx 0.9091 \text{ para } k_p = 5$$

$$G_{cld}(0) = \frac{10}{101} = 0.0990 \text{ para } k_p = 50$$

Neste sistema podemos verificar que, quanto maior for o ganho, a resposta do sistema ( $x(t)$ ) à perturbação ( $d(t)$ ) é atenuada, no entanto, o erro estático de posição só é nulo se o ganho for infinito, o que é impossível num sistema físico.

## 5.5.

Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $K_I = 0.05, K_I = 0.5$  e  $K_I = 5$ :



Sendo o sistema

$$G_{ctr}(s) = \frac{-K_I K_1 p}{s^2 + p \times s - K_I K_1 p}$$

verifica-se, tal como calculado em 5.2 , que o ganho estático é  $G_{clr}(0) = 1$ , o que é confirmado pelos gráficos, um vez que sendo  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$ , qualquer que seja o valor de  $K_I$ .

Como é um sistema de segunda ordem, a frequência natural das oscilações é dada por

$$w_n = \sqrt{-K_I * K_1 * p} \approx 0,1414\sqrt{K_I}$$

,ou seja, quanto maior o valor de  $k_I$ , maior é a frequência das oscilações, o que também é comprovado nos gráficos.

## 5.6.

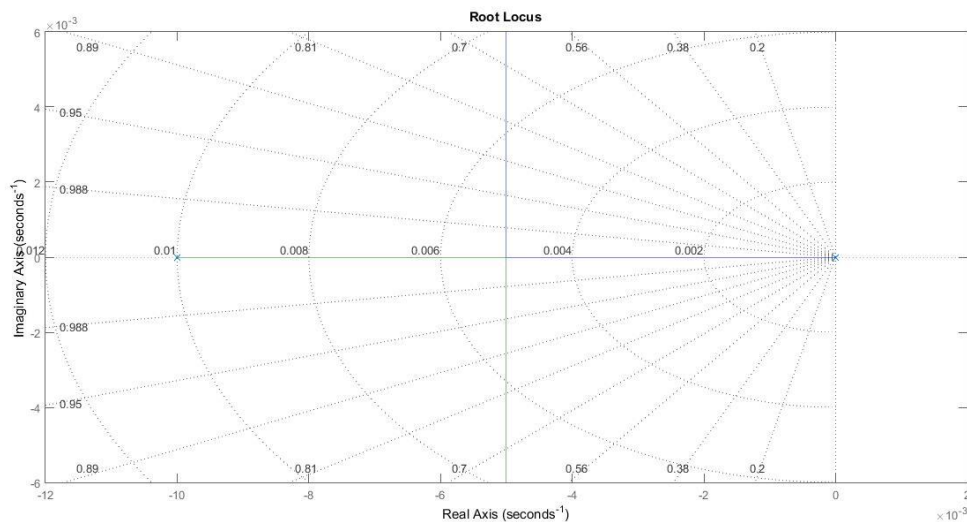
Sistema  $G_{clr}(s)$  em malha aberta:

$$G_{clrMA}(s) = G_1(s) \times K(s) = K_1 \frac{p}{s+p} \frac{-K_I}{s} = k_I \frac{-K_1 p}{s^2 + sp}$$

O sistema ao qual se irá aplicar o *root locus* é

$$H(s) = \frac{-K_1 p}{s^2 + sp}$$

O *root locus* obtido é o seguinte:

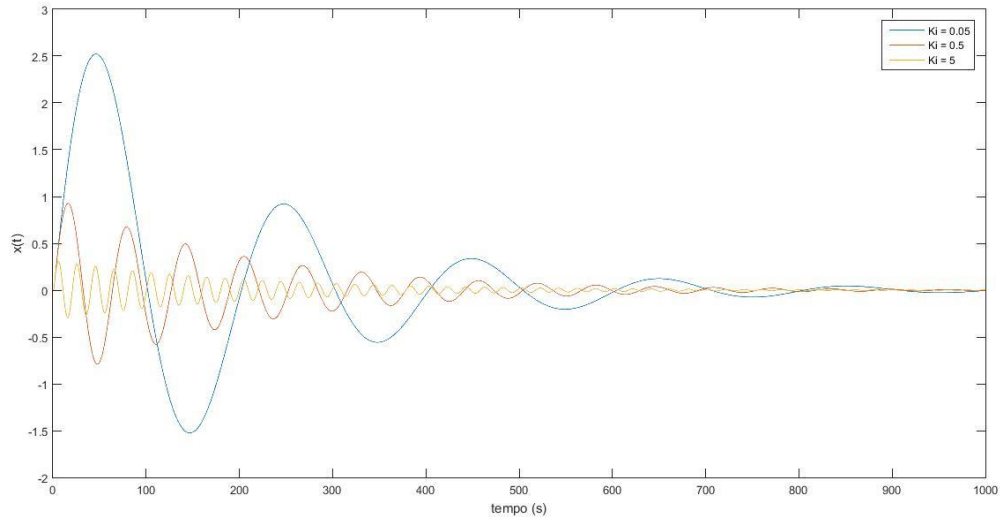


Na questão anterior, como as respostas obtidas para os três valores de  $K_I$  foram subamortecidas, conclui-se que para cada uma das três situações,  $G_{clr}(s)$  tem dois pólos complexos conjugados situados no troço vertical do *root locus*.

Quanto maior o valor de  $K_I$ , maior o módulo da parte imaginária dos pólos.

### 5.7.

Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = 0$  e  $d(t) = u(t)$ , para  $K_I = 0.05, K_I = 0.5$  e  $K_I = 5$ :



Sendo o sistema

$$G_{cla}(s) = \frac{s \times K_2 p}{s^2 + s \times p - K_I K_1 p}$$

,verifica-se que o ganho estático é  $G_{cla}(0) = 0$ , o que é confirmado pelos gráficos uma vez que  $r(t) = 0$  e  $d(t) = u(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  para todos os valores de  $K_I$ .

Tal como na questão 5.5, a frequência natural é dada por  $w_n \approx 0,1414\sqrt{K_I}$ , o que também é confirmado pelos gráficos.

A diferença mais notável entre o sistema com integrador para o sem integrador é que no sistema com integrador a resposta do sistema ( $x(t)$ ), a uma perturbação ( $d(t)$ ), tende para zero qualquer que seja o ganho (erro estático de posição é nulo). Ao aumentarmos o ganho, estamos apenas a fazer com que os valores iniciais desta resposta sejam mais atenuados.

## 6.1.

Sistema  $G_{clr}(s)$  em malha aberta:

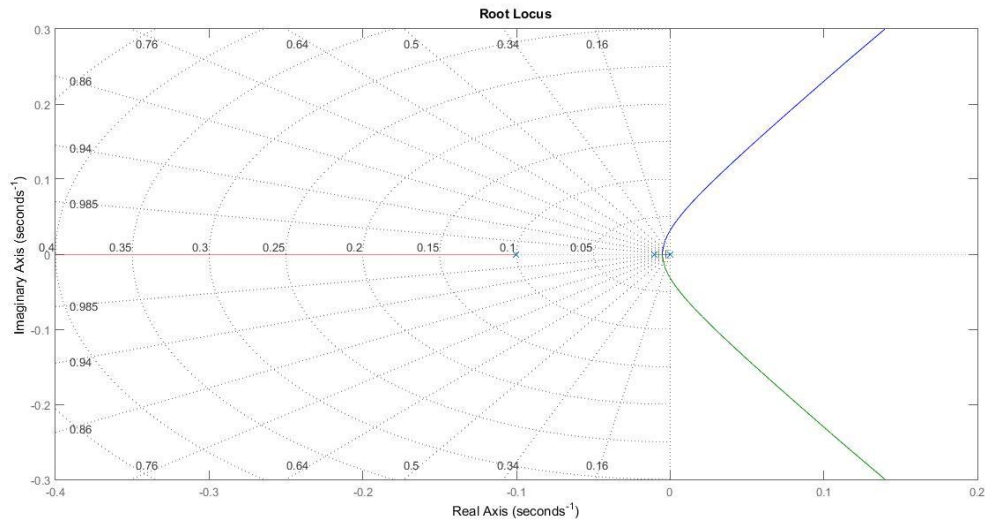
$$G_{clrMA}(s) = G_1(s) \times K(s) \times V(s) = K_I \frac{p}{s+p} \frac{-K_I}{s} \frac{0.1}{s+0.1}$$

$$= K_I \frac{-0.1K_I p}{s^3 + s^2(p+0.1) + s(0.1p)}$$

O sistema ao qual se irá aplicar o *root locus* é

$$H(s) = \frac{-0.1K_I p}{s^3 + s^2(p+0.1) + s(0.1p)}$$

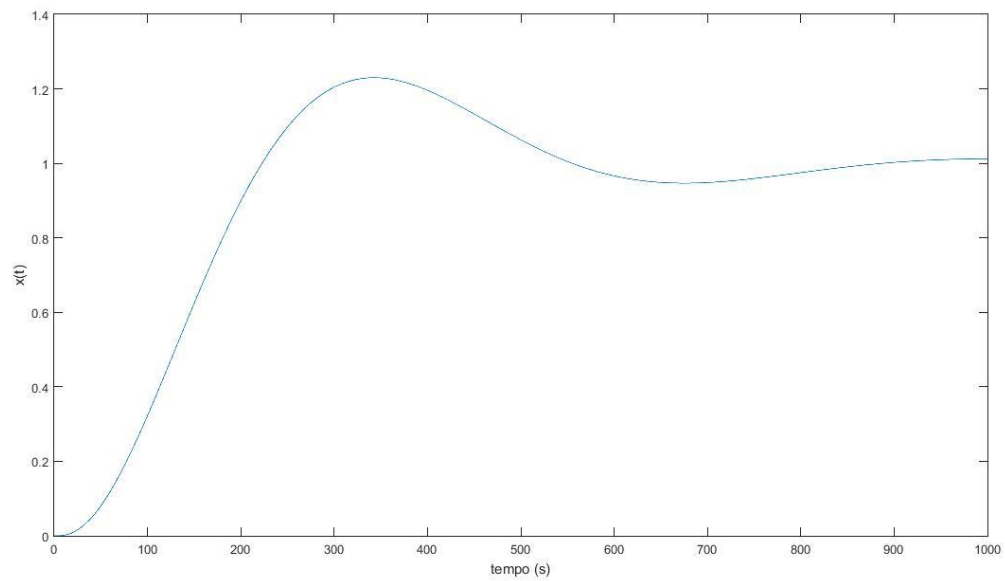
O *root locus* obtido é o seguinte:



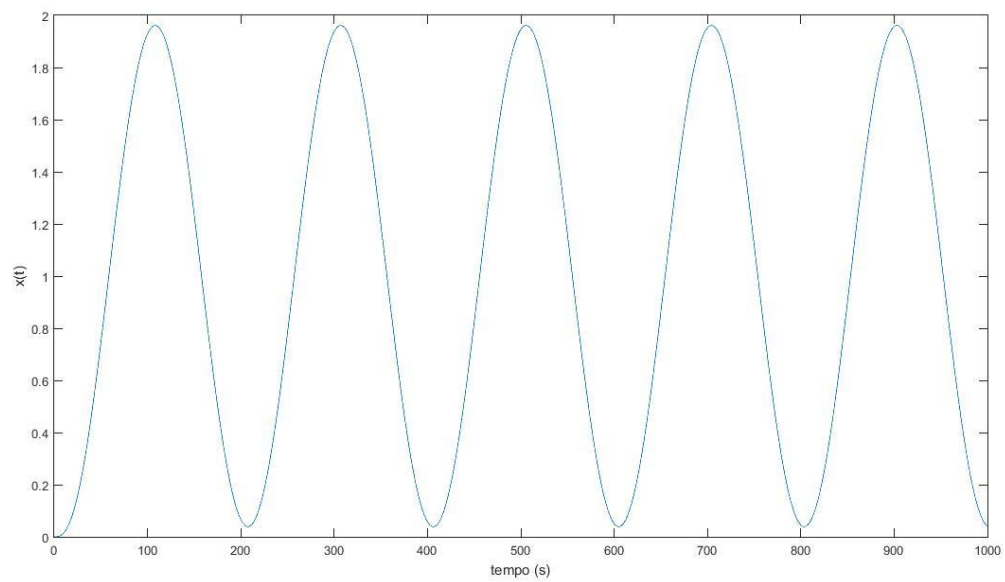
Verifica-se que, à medida que se aumenta o ganho, existe um valor crítico do ganho a partir do qual o sistema fica instável, uma vez que os polos complexos conjugados passam para o semi plano complexo direito. Este valor corresponde aproximadamente a  $K_I = 0.055$ .

### 6.3.

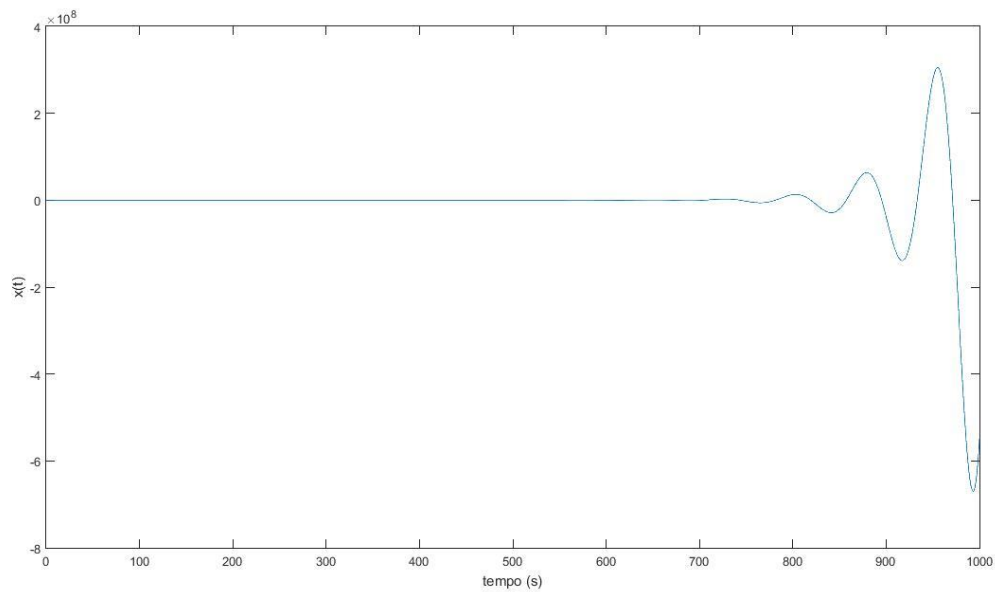
Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $K_I = 0.0055$  (estável):



Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $K_I = 0.055$  (marginalmente estável):



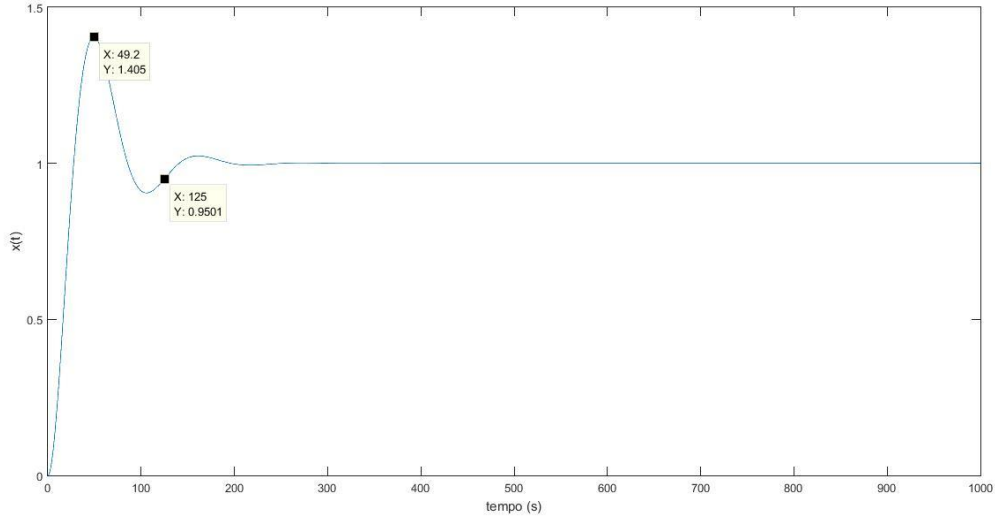
Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $K_I = 5.5$  (estável):



No primeiro gráfico verificamos que a resposta  $x(t)$  se vai aproximando de um valor constante, pelo que é estável. No segundo gráfico, a resposta  $x(t)$  do sistema não tende para nenhum valor constante mas mantém-se entre dois valores constantes, pelo que é marginalmente estável. Já no ultimo gráfico verificamos que a resposta  $x(t)$  explode para valores muito grandes, pelo que é instável.

## 7.2.

Resposta  $x(t)$  do sistema, quando  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$ , para  $z = 0.03945$  e  $K_{PI} = 2.91156$ :



Pelo gráfico, observamos que a sobreelevação é cerca de 40.5% e o tempo de estabelecimento a 5% é cerca de 125 s, em contraste com os valores para os quais os parâmetros foram dimensionados: sobreelevação de 25% e tempo de estabelecimento de 120 s. O facto de os valores do tempo de estabelecimento e sobreelevação não corresponderem ao esperado deve-se ao facto de que os parâmetros foram dimensionados para um sistema de 2ª ordem, sem zeros, no entanto estamos na presença de um sistema de 3ª ordem (com 3 pólos), e com um zero. O aumento da sobreelevação e do tempo de estabelecimento devem-se portanto aos efeitos deste pólo e zero adicional.

## 7.3.

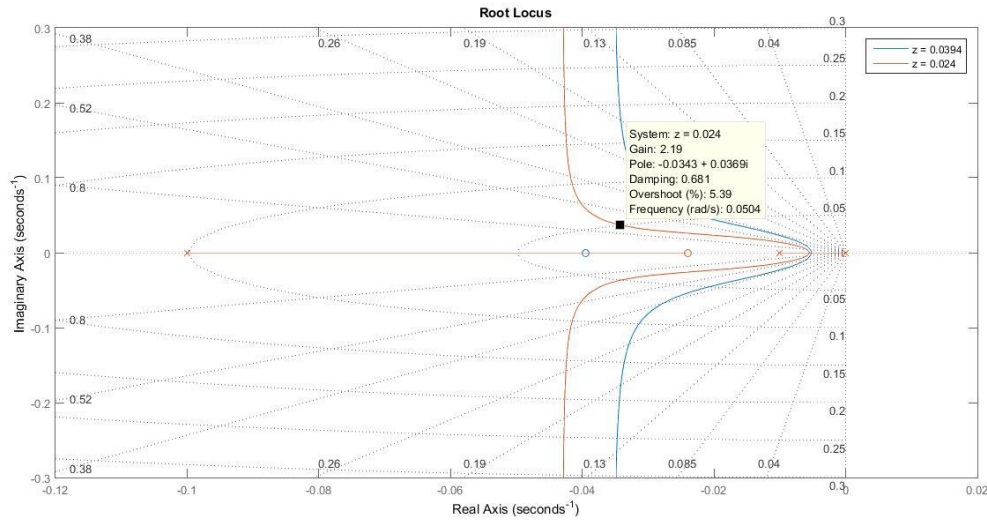
Sistema  $G_{clr}(s)$  em malha aberta:

$$\begin{aligned}
 G_{clrMA}(s) &= G_1(s) \times K(s) \times V(s) = K_1 \frac{p}{s+p} \frac{-K_{PI}(s+z)}{s} \frac{0.1}{s+0.1} \\
 &= K_{PI} \frac{-0.1K_1ps - 0.1K_1pz}{s^3 + s^2(p+0.1) + s(0.1p)}
 \end{aligned}$$

O sistema ao qual se irá aplicar o *root locus* é



$$H(s) = \frac{-0.1K_1ps - 0.1K_1pz}{s^3 + s^2(p + 0.1) + s(0.1p)}$$

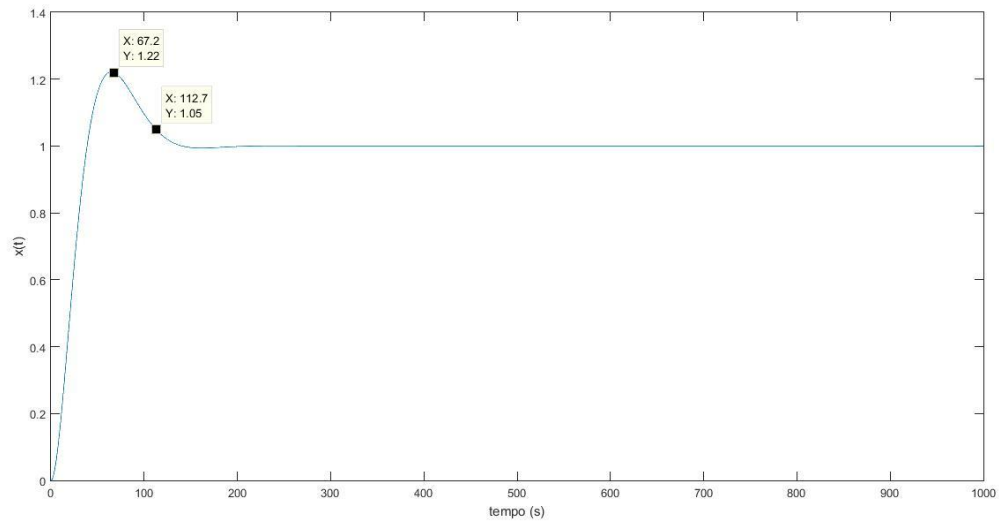


Na figura acima podemos ver a azul o root locus para o sistema original e a laranja para o sistema com o zero alterado. A forma como chegámos a este novo valor para o zero foi a seguinte:

A sobrelevação do sistema depende apenas do ângulo entre os pólos complexos conjugados e o eixo real ( $\theta$ ), cujo seno é  $\xi$ . Uma diminuição da sobrelevação corresponde a um aumento de  $\xi$ , e consequentemente a um aumento de  $\theta$ , então precisamos de aumentar o valor de  $\theta$  para diminuir a sobrelevação. Para tal, precisamos de aproximar o zero dos polos complexos conjugados para que a atração entre eles e o zero seja mais forte e assim a curva do *root locus* se aproximar mais da posição horizontal. Assim, o novo valor de  $z$  terá um valor inferior ao original: 0.024.

O tempo de estabelecimento depende de  $\xi\omega_n$  em sentido inverso.  $\xi\omega_n$  corresponde ao módulo da parte real dos polos complexos conjugados. Se queremos um tempo de estabelecimento menor, temos que aumentar o valor de  $\xi\omega_n$ , que equivale a escolher um ponto mais à esquerda, mas mantendo praticamente constante o valor do ângulo  $\xi$  conseguido no passo anterior. Assim, ficamos com  $\xi\omega_n = 0.0343$ , que corresponde a um ganho  $K_{PI} = 2.19$ .

Com estes valores de  $K_{PI}$  e  $z$  alterados, a resposta do sistema a  $r(t) = u(t)$  e  $d(t) = 0$  é a seguinte:



Como podemos observar, o valor da sobrelevação é cerca de 22% e o tempo de estabelecimento de cerca de 113 s, valores que estão na gama de valores pretendidos.