

Instituto Superior Técnico

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Controlo

2018/2019 – Primeiro Semestre

Laboratório n.º 3

Grupo n.º 4

- | | | |
|---------------|------------------------------------|----------|
| 1. N.º: 86976 | Nome: Diogo Guilherme Moura | Rúbrica: |
| 2. N.º: 86980 | Nome: Diogo Martins Alves | Rúbrica: |
| 3. N.º: 86989 | Nome: Francisco da Graça Gonçalves | Rúbrica: |

Bancada:

Dia da semana: Terça-Feira

Turno: Cont7L07

Docente do laboratório: Bruno Guerreiro

Introdução

Este trabalho de laboratório consiste na identificação dos parâmetros que descrevem o motor DC, atuado por um amplificador de potência, com velocidade de rotação do veio medida por um taquímetro, sendo este composto por duas partes, componente elétrica e a componente mecânica.

Os objetivos deste trabalho são:

- Modelização e identificação de um sistema real;
- Resposta no tempo. Resposta em frequência de amplitude;
- Projecto de um controlador analógico. Projecto de um controlador digital e análise no plano-z;
- Equivalente discreto de um sistema controlado por computador. Efeitos da variação do ganho e do intervalo de amostragem.

Identificação do Sistema AMT - G(s)

5.2. Resposta no tempo

As expressões obtidas na questão 5.1, que nos permitem calcular o valor de k_0 e τ são:

$$y(+\infty) = k_0(1 - e^{-\infty}) = k_0$$

$$y(\tau) = k_0(1 - e^{-1}) \approx 0.6321k_0$$

Assim:

$$K_0 = y(+\infty) \text{ e } \tau = y^{-1}(0.6321k_0)$$

Colocando um escalão de amplitude 1 V na entrada do sistema, efetuámos 3 medições para $y(+\infty)$ e $y(\tau)$:

1) Medição 1

$$k_{01} = y(+\infty) = 1.31 \quad \tau_1 = y^{-1}(0.6321k_{01}) = 27.5$$

2) Medição 2

$$k_{02} = y(+\infty) = 1.275 \quad \tau_2 = y^{-1}(0.6321k_{02}) = 25.4$$

3) Medição 3

$$k_{03} = y(+\infty) = 1.26 \quad \tau_3 = y^{-1}(0.6321k_{03}) = 24.4$$

Fazendo a média dos valores encontrados para cada uma das medições:

$$k_0 \approx 1.282 \quad e \quad \tau \approx 25.7ms$$

5.3. Resposta em frequência da amplitude

Colocando à entrada do sistema uma senoide de amplitude 1V e frequência f_c , obtemos a seguinte tabela para a resposta em frequência do sistema:

ω	$ G(j\omega) $	$ G(j\omega) _{dB}$
$\omega_c/10 = 3,891$	1,32	2,411
$2*\omega_c/10 = 7,782$	1,25	1,938
$4*\omega_c/10 = 15,564$	1,215	1,691
$8*\omega_c/10 = 31,128$	1,03	0,257
$16*\omega_c/10 = 62,257$	0,77	-2,27
$32*\omega_c/10 = 124,514$	0,52	-5,68
$64*\omega_c/10 = 249,072$	0,26	-11,701
$100*\omega_c/10 = 389,105$	0,17	-15,391

Figura 1 – tabela do ganho em função da frequência angular

5.4. Diagrama de Bode

A partir da tabela da questão anterior, obtemos o seguinte diagrama de Bode do sistema:

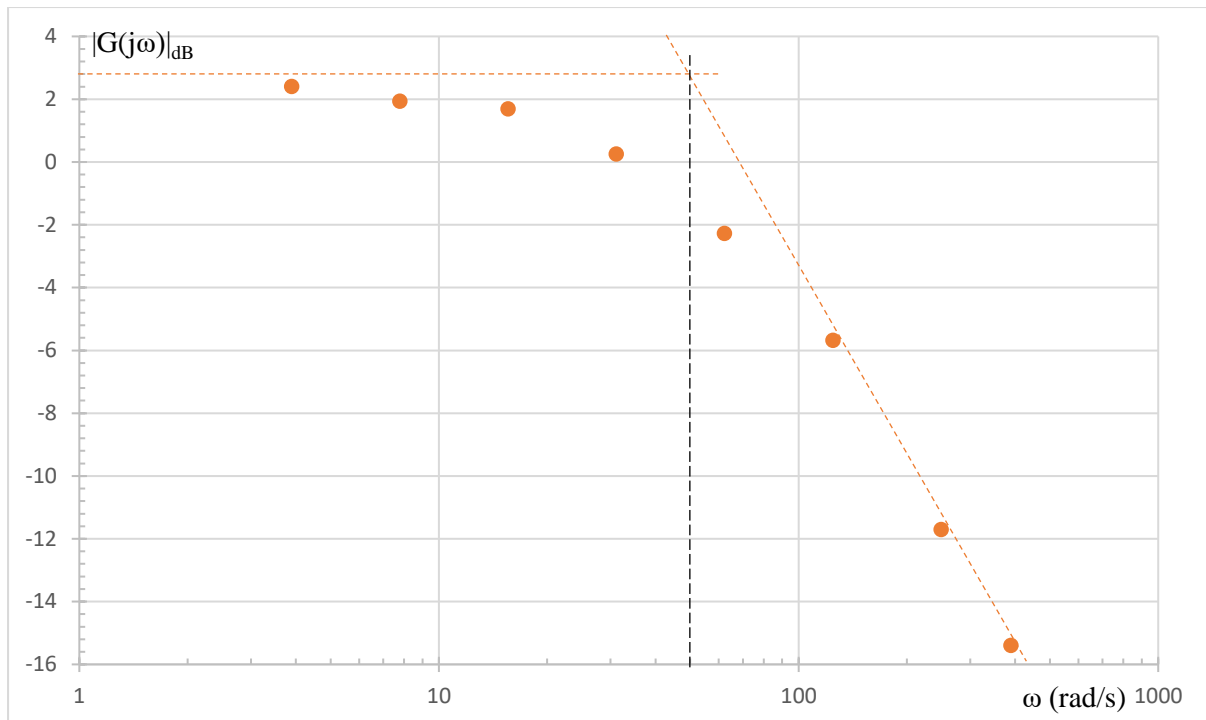


Figura 2 – Diagrama de Bode do sistema, com indicação das assintotas, considerando que se trata de um sistema de 1º ordem

Considerando que o sistema é de 1ª ordem, existe uma assintota a -20dB/dec para valores muito grandes de ω e uma assintota horizontal para valores muito pequenos de ω .

Sendo o sistema da forma $G(s) = \frac{K_0}{1+s\tau}$, o valor de τ é dado pelo inverso do ponto de cruzamento entre as duas assintotas: $\tau \approx \frac{1}{50} = 20 \text{ ms}$; e K_0 pela interseção da assintota horizontal com o eixo y: $K_0 = 2.8 \text{ dB} = 1.38$

Os desvios relativos entre os valores calculados a partir do diagrama de Bode e calculados na questão 5.2 são os seguintes:

$$\Delta K_0 = 8\% \text{ e } \Delta \tau = 22\%$$

Controlador Digital Proporcional

6.1. Efeito da variação do ganho K

A expressão obtida na questão 4.2 que nos permite calcular o valor de K_1 é:

$$K_1 = \frac{e^{-\frac{T}{\tau}}}{K_0 * \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

Como $T = 2\text{ms}$, $K_0 = 1,282$ e $\tau = 25,7\text{ms}$, substituindo da equação acima, podemos observar que,

$$K_1 = 9,638$$

De seguida observou-se a resposta do sistema em malha fechada com o controlador proporcional a um escalão com amplitude de 0.5V para os seguintes valores $C(z) = K$ do controlador:

$$K \in \left\{ \frac{K_1}{2} ; K_1 ; 1,2 * K_1 ; 3 * K_1 \right\}$$

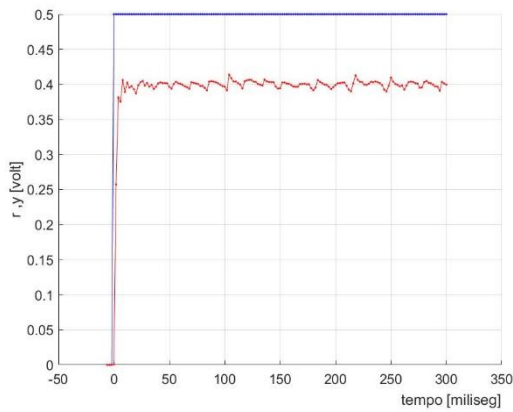


Figura 3 – Resposta do sistema em malha fechada a $K = \frac{K_1}{2}$

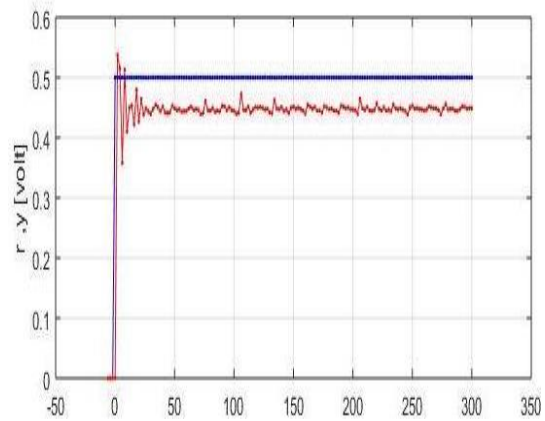


Figura 4 – Resposta do sistema em malha fechada a $K = K_1$

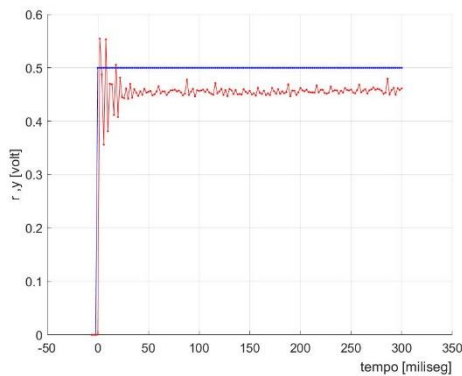


Figura 5 – Resposta do sistema em malha fechada a $K = 1,2 * K_1$

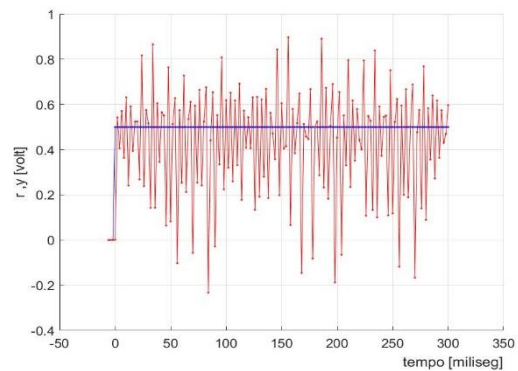
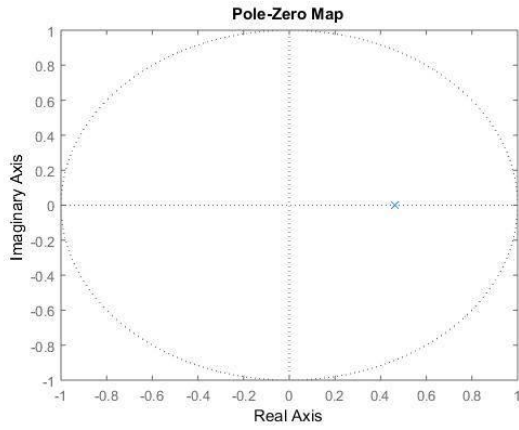
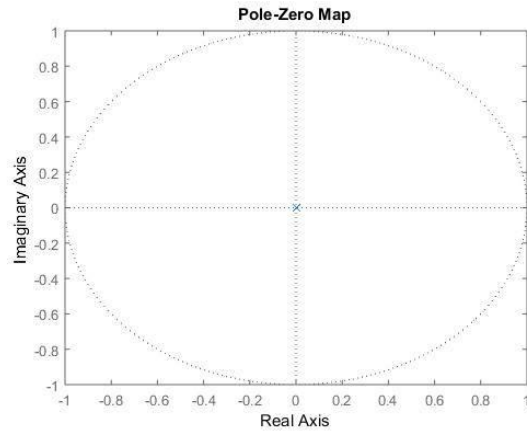


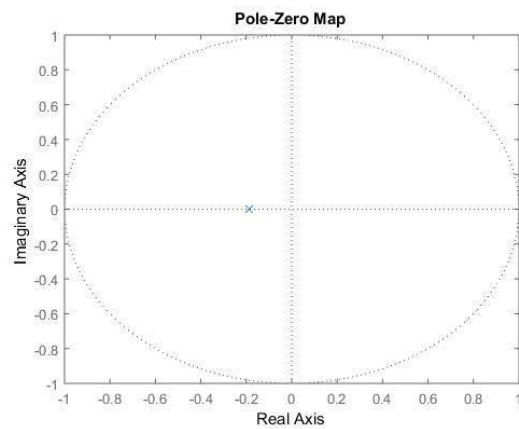
Figura 6 – Resposta do sistema em malha fechada a $K = 3 * K_1$



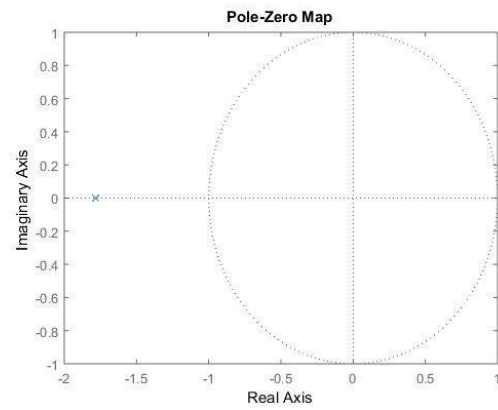
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7 - Mapas de polos-zeros do sistema em malha fechada no plano-z: (a) $K = \frac{K_1}{2}$;

(b) $K = K_1$; (c) $K = 1,2 * K_1$; (d) $K = 3 * K_1$

Através da análise do mapa de polos-zeros podemos observar que existe 1 polo e 0 zeros.

- $K = \frac{K_1}{2}$ o polo nesta malha é positivo;
- $K = K_1$ o polo está sobre a origem;
- $K = 1,2 * K_1$ e $K = 3 * K_1$ em que ambos os polos são negativos.

Para os 3 primeiros valores de K, o sistema em malha fechada é estável pois todos os polos estão dentro do círculo unitário mas para o último valor de K, ou seja, $K = 3 * K_1$, o polo

está fora do círculo unitário e temos então um sistema instável tal como se pode verificar pela resposta no tempo apresentado na figura 6.

Então, podemos concluir que à medida que aumentamos o K, os polos estão a deslocar-se para a esquerda tornando assim o sistema de malha fechada instável, ou seja, quando os polos saem fora do círculo unitário ($|Z| > 1$) o sistema torna-se instável.

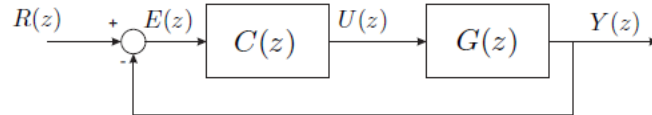


Figura 8 – Equivalente discreto em malha fechada do sistema AMT realimentado

Através do esquema anterior podemos retirar a seguinte função de transferência:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)}$$

, sendo

$$C(z) = K \qquad G(z) = K_0 * \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

e como a transformada de um escalão com amplitude 0,5 á entrada do sistema é:

$$R(z) = \frac{0,5}{1 - z^{-1}}$$

Então,

$$E(z) = \frac{E(z)}{R(z)} * R(z) \leftrightarrow E(z) = \frac{1}{1 + KK_0 * \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}} * \frac{0,5}{1 - z^{-1}}$$

Aplicando agora o teorema do valor final em tempo discreto,

$$\begin{aligned}
e(+\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + KK_0 * \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}} * \frac{0,5}{1 - z^{-1}} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,5}{1 + KK_0 * \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}} = \frac{0,5}{1 + KK_0 * \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}} = \frac{0,5}{1 + KK_0} \\
&= \frac{0,5}{1 + K * 1,282}
\end{aligned}$$

Para $K = \frac{K_1}{2} = 4,819$, o erro através do gráfico é 0,1 e através da fórmula é $e(+\infty) = 0,07 \sim 0,1$.

Para $K = K_1 = 9,638$, o erro através do gráfico é 0,05 e através da fórmula é $e(+\infty) = 0,037 \sim 0,04$.

Para $K = 1,2 * K_1 = 11,566$, o erro através do gráfico é 0,05 e através da fórmula é $e(+\infty) = 0,031 \sim 0,03$.

Para $K = 3 * K_1 = 28,914$, o erro através da fórmula é $e(+\infty) = 0,013 \sim 0,01$.

6.2. Efeito da variação do período de amostragem T

Considerando agora que $K = K_1 = 9,638$ e que o intervalo de amostragem T é:

$$T \in \{1; 2; 2.5; 6\} \text{ ms}$$

, iremos observar a resposta do sistema em malha fechada com o controlador proporcional a um escalão com amplitude 0,5V fazendo desta vez variar o T .

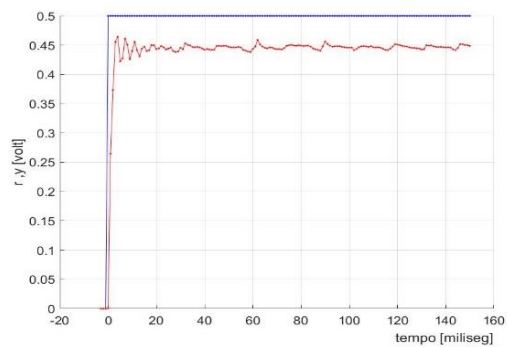


Figura 9 – Resposta do sistema em malha fechada a $T = 1$

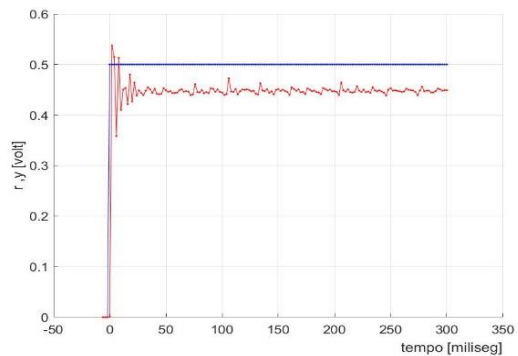


Figura 10 – Resposta do sistema em malha fechada a $T = 2$

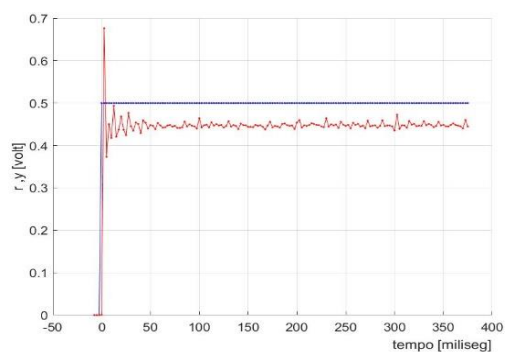


Figura 11 – Resposta do sistema em malha fechada a $T = 2.5$

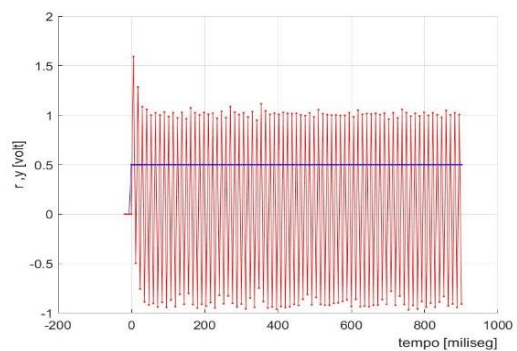
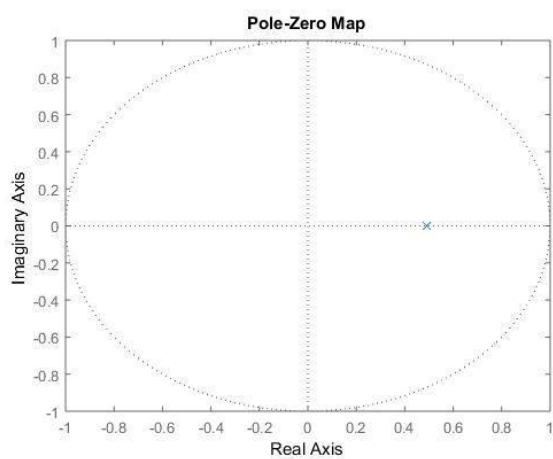
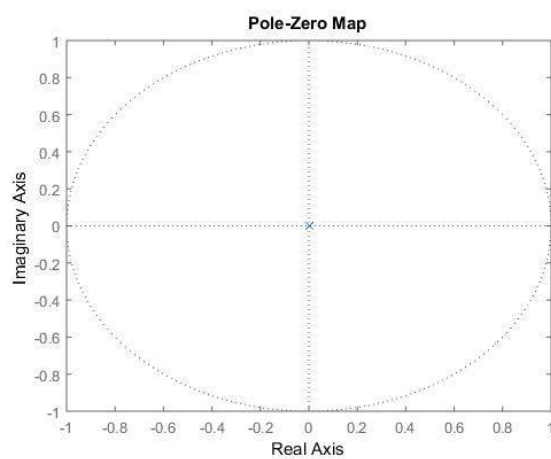


Figura 12 – Resposta do sistema em malha fechada a $T = 6$



(a)



(b)

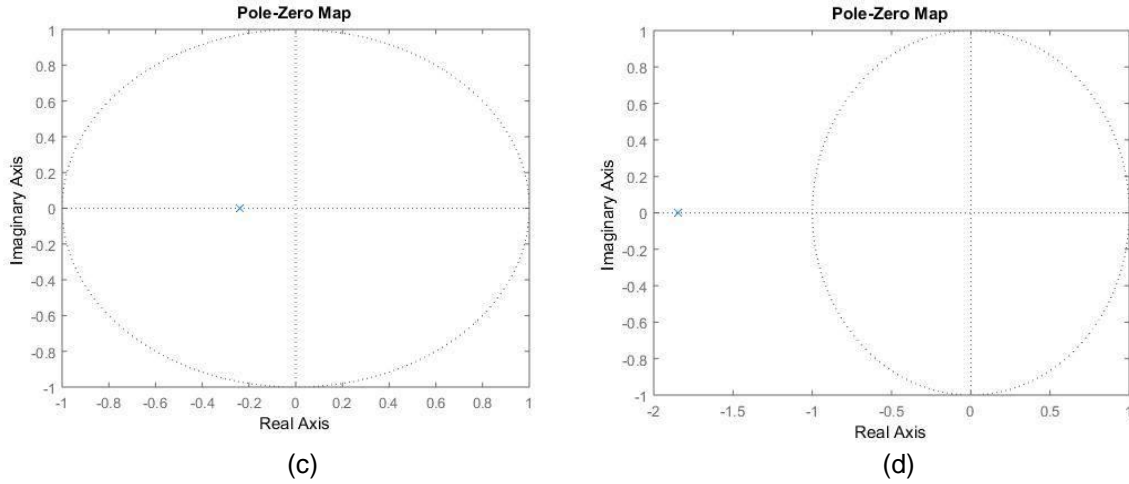


Figura 13 - Mapa de polos-zeros do sistema em malha fechada no plano-z: (a) $T = 1$; (b) $T = 2$; (c) $T = 2,5$; (d) $T = 6$

Através da análise do mapa de polos-zeros podemos observar que este é semelhante ao apresentado na alínea 6.1. por isso toda a análise relativa à relação entre a resposta no tempo e a posição dos polos é igual ao que foi escrito na alínea 6.1 sendo que a única diferença é que se varia o T em vez de o K .

6.3. Projeto por emulação

O período de amostragem (T) deve verificar a seguinte condição:

$$\frac{2\pi}{T} \geq 20 * B$$

Em que B é a largura de banda do sistema ($B = 546 \text{ rad/s}$). Assim, verificamos que $T_{min} = 0,57538 \text{ ms}$. O valor a utilizar para T é $T = T_{min}$

Sendo a transformada de Fourier do controlador $C(s) = K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$. Aplicando a transformação bilinear ($s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$), obtemos a transformada Z do controlador:

$$\begin{aligned}
C(z) &= K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i \frac{2z-1}{z+1}} \right) = K_p * \left(1 + \frac{T * (z+1)}{T_i * 2 * (z-1)} \right) = \\
&= K_p * \left(\frac{T_i * 2 * (z-1) + T * (z+1)}{T_i * 2 * (z-1)} \right) = \\
&= \left(\frac{(K_p * T_i * 2 + K_p * T) * z + (-T_i * 2 * K_p + K_p * T)}{T_i * 2 * z - T_i * 2} \right) = \\
&= \left(\frac{T_i * 2 * K_p * \left(1 - \frac{1}{z}\right) + K_p * T * \left(1 + \frac{1}{z}\right)}{T_i * 2 * \left(1 - \frac{1}{z}\right)} \right) = \\
&= \left(\frac{\frac{K_p * T - 2 * K_p * T_i}{2 * T_i} z^{-1} + \frac{2 * K_p * T_i + K_p * T}{2 * T_i}}{1 - z^{-1}} \right) \\
&= \frac{-1,29107 * z^{-1} + 1,45075}{1 - z^{-1}}
\end{aligned}$$

A partir da equação a negrito verificamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(K_p * T_i * 2 + K_p * T) * z + (-T_i * 2 * K_p + K_p * T)}{T_i * 2 * z - T_i * 2} &= \frac{U(z)}{E(z)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (K_p * T_i * 2 + K_p * T) * z * E(z) + (-T_i * 2 * K_p + K_p * T) * E(z) \\
&= T_i * 2 * z * U(z) - T_i * 2 * U(z)
\end{aligned}$$

Obtemos assim a correspondente equação às diferenças:

$$\begin{aligned}
&(K_p * T_i * 2 + K_p * T) * e[k+1] + (-T_i * 2 * K_p + K_p * T) * e[k] \\
&= T_i * 2 * u[k+1] - T_i * 2 * u[k]
\end{aligned}$$

Substituindo pelos valores numéricos:

$$0,014333 * e[k+1] - 0,012756 * e[k] = 0,00988 * u[k+1] - 0,00988 * u[k]$$

Com o controlador $C(z)$ implementado, obtemos a seguinte resposta do sistema ao escalão de amplitude 0.5V:

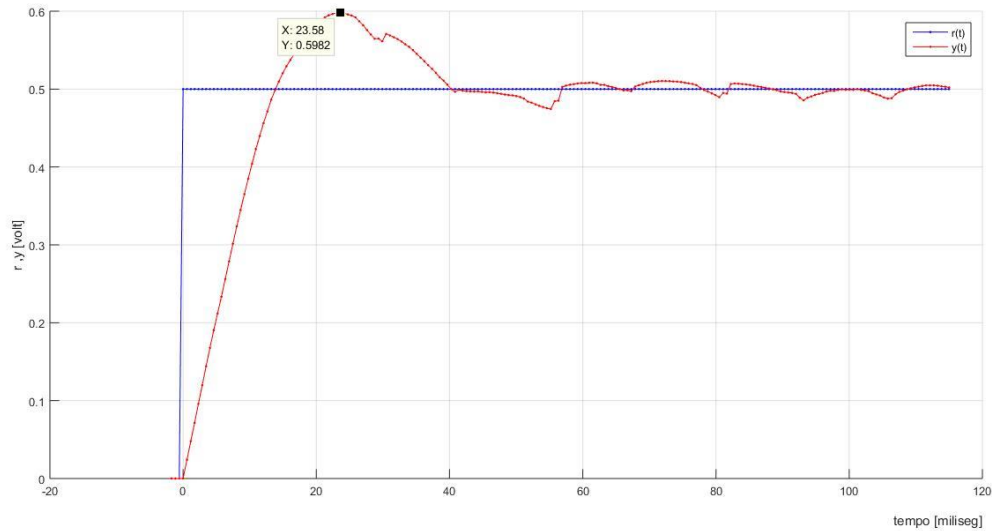


Figura 14 – Escalão de amplitude 0.5V (azul) e resposta do sistema em malha fechada a esse escalão (vermelho)

Como podemos verificar, a sobrelevação do sistema é cerca 19,64%, ou seja bastante próxima da sobrelevação pretendida de 20% e o tempo de pico é cerca de 23,58ms, um pouco abaixo do tempo de pico pretendido de 30ms. Estas eventuais diferenças devem-se ao facto de termos dimensionado o sistema a partir destes parâmetros como se ele fosse um sistema de 2ª ordem sem zeros, quando na verdade o sistema tem um zero.

A partir do gráfico podemos também verificar que a resposta do sistema tende para 0,5 ou seja o erro em regime permanente é nulo.

Como foi visto na questão 4.1, o motor é descrito pela transformada Z:

$$G(z) = \frac{K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

O sistema em malha fechada é descrito pela seguinte transformada Z:

$$\begin{aligned}
G_{tot}(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \\
&= \frac{K_p * \left(\frac{T_i * 2 * (z-1) + T * (z+1)}{T_i * 2 * (z-1)} \right) * \frac{K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}}{1 + K_p * \left(\frac{T_i * 2 * (z-1) + T * (z+1)}{T_i * 2 * (z-1)} \right) * \frac{K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}} \\
&= \frac{K_p * (T_i * 2 * (z-1) + T * (z+1)) * K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{T_i * 2 * (z-1) \left(z - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) + K_p * (T_i * 2 * (z-1) + T * (z+1)) * K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}
\end{aligned}$$

Utilizando o teorema do valor final:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) * 0.5 * U(z) * G_{tot}(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) * 0.5 * \frac{z}{z-1} * G_{tot}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 0.5 * z * G_{tot}(z) = \\
&= 0.5 * \frac{K_p * (T * 2) * K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{K_p * (T * 2) * K_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} = 0.5
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que o erro em regime permanente é de facto igual a zero, como observado no gráfico.

6.4. Ajuste dos parâmetros do controlador

Como a resposta do sistema ao escalão do sistema implementado estava satisfatória relativamente aos parâmetros dimensionados, nesta alínea pretende-se melhorar a resposta do sistema ao escalão. Para tal pretende-se diminuir, ou até suprimir a sobre-elevação do sistema.

O controlador original tem a seguinte transformada Z:

$$C(z) = \frac{1.451 - 1.291 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Com este controlador, o root- obtido é o seguinte:

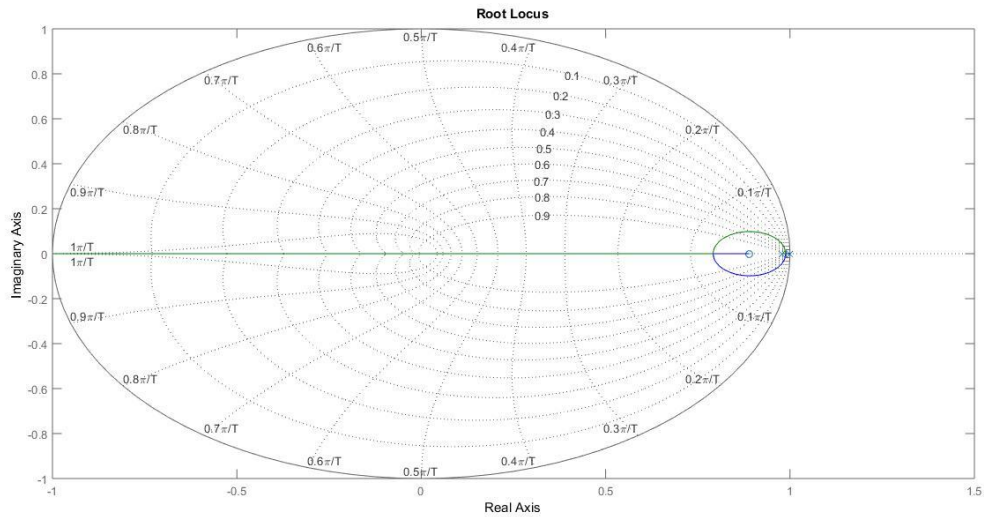


Figura 15 – Diagrama Root-Locus do sistema dimensionado com o controlador original

Por tentativa e erro, alterando apenas um parametro do controlador, chegámos ao seguinte controlador:

$$C(z) = \frac{1.451 - 1.4 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

A resposta do sistema com este controlador ao escalão de 0.5V é a seguinte:

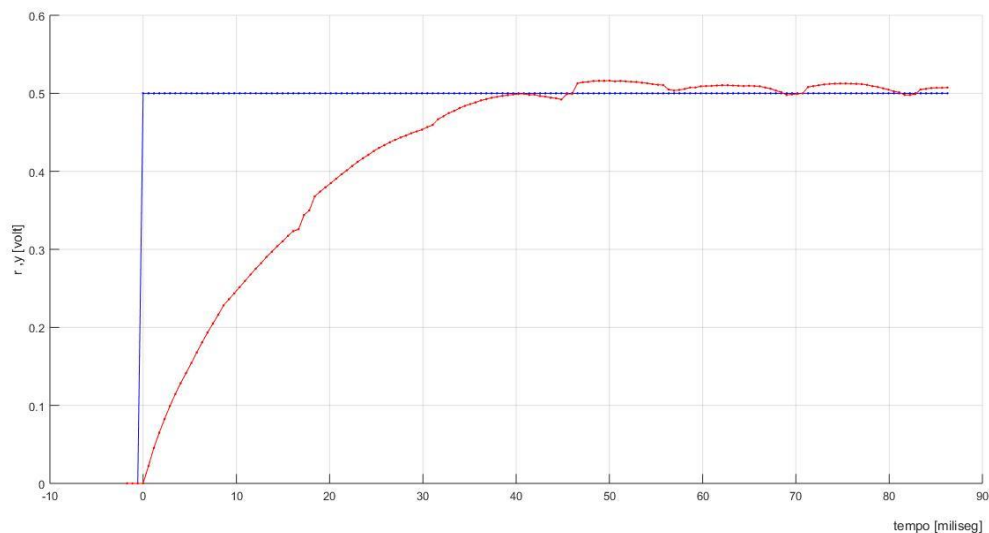


Figura 16 – Escalão de amplitude 0.5V (azul) e resposta do sistema em malha fechada a esse escalão (vermelho), com o novo controlador implementado

E por fim o root-locus obtido:

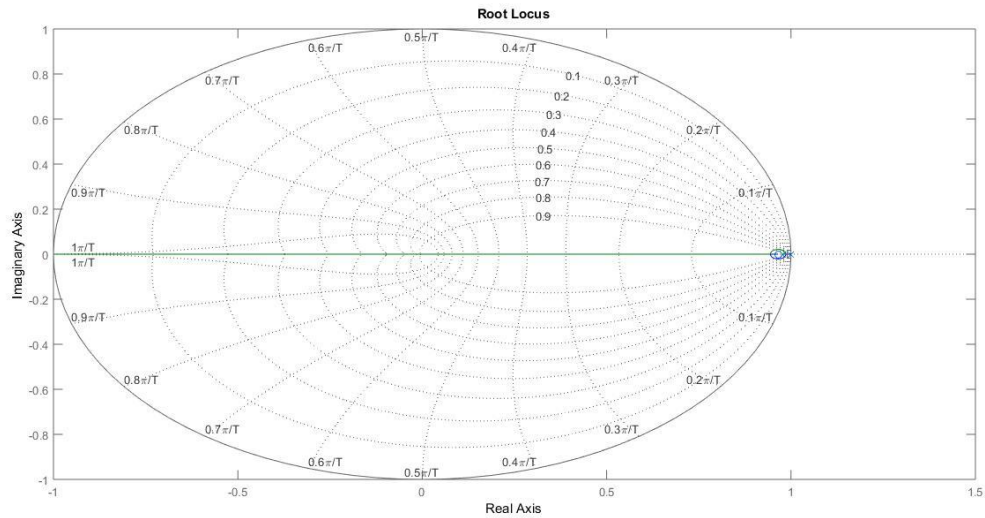


Figura 17 – Diagrama Root-Locus do sistema dimensionado com o novo controlador

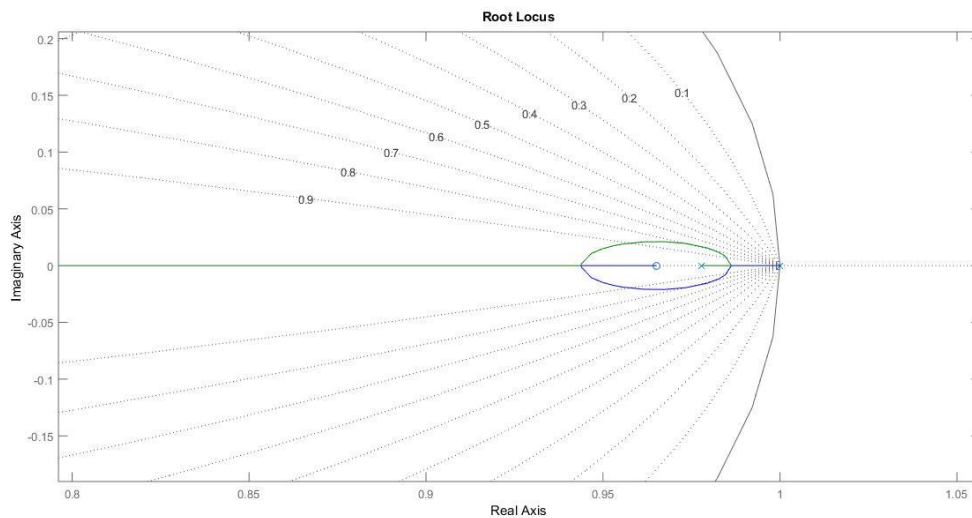


Figura 18 – Diagrama Root-Locus do sistema dimensionado com o novo controlador, com ampliação nos ramos complexos conjugados

Comparando o root-locus obtido originalmente com este novo, e tendo em conta as linhas auxiliares de ξ constante, verificamos que no novo root-locus, os ramos correspondentes aos pólos complexos conjugados têm valores de ξ superiores aos do root-locus anterior, o que significa que têm menor sobreelvação.

Concluimos assim que a resposta obtida com o novo controlador tem menor sobreelvação, o que pode ser observado diretamente no gráfico da resposta a um escalão, mas pode também ser deduzido a partir do root-locus.

Conclusão

No controlador digital proporcional, chegámos à conclusão de que o aumento do ganho k do controlador e o aumento do período de amostragem diminuem o erro associado ao processo de controlo do motor, pelo que é desejável aumentá-los para obter um melhor resultado no que toca ao desempenho do sistema.

A transformada- z é uma importante ferramenta de análise de sistemas, e foi-nos nomeadamente útil no dimensionamento do controlador proporcional integral. No controlador digital proporcional integral, conseguimos obter um melhor desempenho relativamente ao digital proporcional, inclusive obter erro estático 0. Ainda assim, outros fatores importantes no dimensionamento do Por tentativa e erro, conseguimos ajustar parâmetros do controlador, através da transformada- z e diminuir a sobreelvação.

Este trabalho foi importante, na medida que conseguimos perceber que no dimensionamento de um controlador digital os objetivos passam por perceber como o sistema se comporta no domínio do tempo e da frequência e em função do tempo de amostragem, utilizando ferramentas como o diagrama de bode, transformada de LaPlace e transformada- z . Conseguimos modificar este comportamento para diminuir nomeadamente o erro estático, sobreelvação e tempo de pico.