

Trabalho de laboratório 5

Processamento Digital de Sinais

Diogo Alves nº 86980 Xavier Dias nº 87136

Prof. Margarida Silveira

### R1.a)

Consideram-se N observações independentes e identicamente distribuídas  $(x_1,...,x_N)$  da variável aleatória x e define-se  $\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  e  $S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ .

a)

Distribuição exponencial:

$$p(x_i; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x_i/\beta} u(x_i)$$

Likelihood:

$$L(\beta) = p(x_1, ..., x_N; \beta) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i; \beta) = \frac{1}{\beta^N} e^{-\frac{N\overline{x}}{\beta}}$$

Log-Likelihood:

$$l(\beta) = \log(L(\beta)) = -N\log(\beta) - \frac{\overline{x}N}{\beta}$$

Maximização:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0 \iff \frac{-N}{\beta} + \frac{\overline{x}N}{\beta^2} = 0 \iff \hat{\beta} = \overline{x}$$

b)

Distribuição de Rayleigh:

$$p(x_i; f) = \frac{x_i}{f} e^{\frac{-x_i^2}{2f}} u(x_i)$$

Likelihood:

$$L(f) = p(x_1, ..., x_N; f) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i; f) = \prod_{i=1}^{N} \frac{x_i}{f} e^{\frac{-x_i^2}{2f}} u(x_i)$$

Log-Likelihood:

$$l(f) = \log(L(f)) = \sum_{i=1}^{N} (\log(x_i) - \log(f) - \frac{x_i^2}{2f}) = -N\log(f) - \frac{N}{2f}S_x^2 + \sum_{i=1}^{N} \log(x_i)$$

Maximização:

$$\frac{\partial l}{\partial f} = 0 \iff \frac{-N}{f} + \frac{S_x^2 N}{2f^2} = 0 \iff \hat{f} = \frac{S_x^2}{2}$$

**c**)

Distribuição Normal:

$$p(x_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2}$$

Likelihood:

$$L(\mu, \sigma^2) = p(x_1, ..., x_N; \mu) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2}$$

Log-Likelihood:

$$l(\mu, \sigma^2) = \log(L(\mu, \sigma^2)) = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) =$$

$$= -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{N}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2$$

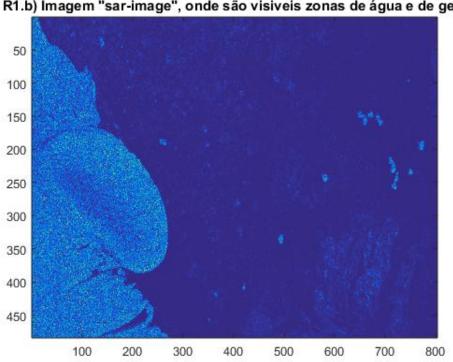
Maximização:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0 \iff -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (-2)(x_i - \mu) = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu) = 0 \iff N\overline{x} - N\mu = 0 \iff \hat{\mu} = \overline{x}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0 \iff -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 = 0 \iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

### R1.b)

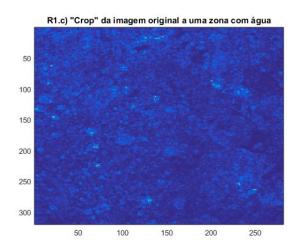
A imagem que foi carregada do ficheiro  $sar\_image$  é a seguinte:

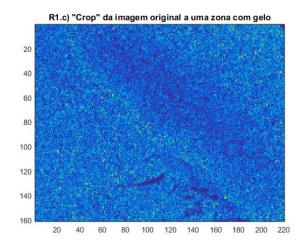


R1.b) Imagem "sar-image", onde são visiveis zonas de água e de gelo

#### R1.c)

A imagem foi cortada de modo a obter uma imagem em que só existisse praticamente água e outra em que só existisse praticamente gelo:





De seguida, foram obtidos os parâmetros das distribuições para os dois casos, de acordo com as fórmulas deduzidas em R1.a) e os valores obtidos foram os seguintes:

```
Parâmetros para água: (Exponencial) \hat{\beta} = 5.653274 * 10^3
```

(Rayleigh)  $\hat{f} = 2.467367 * 10^7$ 

(Normal)  $\hat{\mu} = 5.653274 * 10^3, \hat{\sigma}^2 = 1.738783 * 10^7$ 

Parâmetros para gelo:

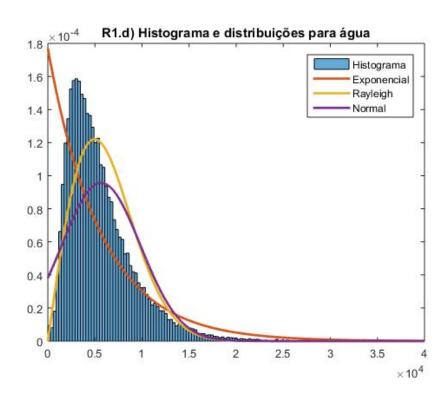
(Exponencial)  $\hat{\beta} = 7.437809 * 10^4$ 

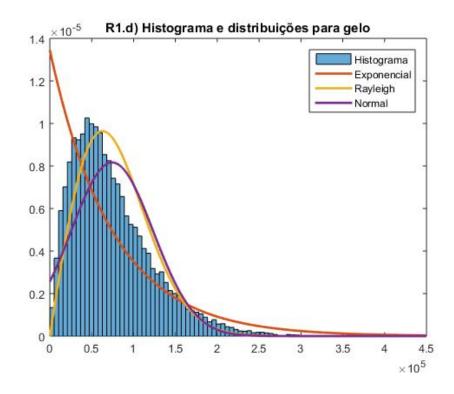
(Rayleigh)  $\hat{f} = 3.959362 * 10^9$ 

(Normal)  $\hat{\mu} = 7.437809 * 10^4, \hat{\sigma}^2 = 2.386623 * 10^9$ 

## R1.d)

Por fim, foram construídos histogramas normalizados dos valores reais, que foram sobrepostos às funções densidade de probabilidade das distribuições com os parâmetros calculados em R1.c).

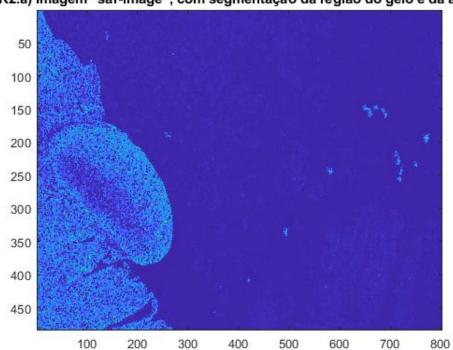




Verificamos que as distribuições se ajustam relativamente bem aos dados do histograma, e ligeiramente melhor nos dados de gelo do que nos de água. Das três, a distribuição que se ajusta melhor aos dados é a de Rayleigh, uma vez que o histograma tem probabilidade nula para valores de x negativos e a probabilidade cresce a partir de 0 para x=0 até atingir um máximo e depois voltar a descer. Este comportamento é precisamente o mesmo que o da distribuição de Rayleigh. Podemos observar que o ajuste da distribuição de Rayleigh para os dados de gelo é quase perfeito.

# R2.a)

Usando os parâmetros da melhor distribuição, a distribuição Rayleigh, conseguiu-se segmentar a imagem classificando os pixeis pertencentes ao gelo e à água, como demonstra a imagem da figura seguinte:

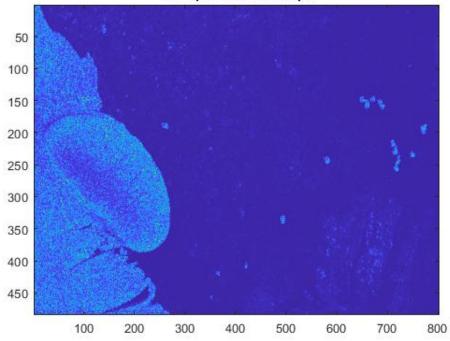


R2.a) Imagem "sar-image", com segmentação da região do gelo e da água

# R2.b)

Com um pacote (patch) de 9x9 píxeis à volta de cada pixel da imagem, é calculada a probabilidade conjunta com o parâmetro de Rayleigh (f) estimado para a água e para o gelo. Esse pacote será classificado como água ou gelo consoante a mais alta probabilidade. A imagem segmentada para os pacotes classificados como gelo e como água está apresentada na seguinte figura:

R2.b) Imagem "sar-image", com segmentação da região do gelo e da água, com patches de 9x9 px



### R2.c)

Para se determinar o limiar de classificação, é necessário determinar o ponto de intersecção entre as distribuições de Rayleigh para a água e para o gelo. O limiar é localizado para um nível de intensidade aproximadamente de 15880, como a figura seguinte o demonstra:



De seguida, para cada pixel é possível fazer a comparação entre níveis de intensidade e fazer

a classificação. A imagem com a segmentação para o gelo e para a água está apresentada na seguinte figura:

R2.c) Imagem "sar-image", com segmentação da região do gelo e da água, com classificação através de um limar de intensidade de 15880

### R2.d)

Visualmente, consegue-se reparar que existe uma certa diferença entre as abordagens 1 e 3 (correspondentes a R2.a) e R2.c) respetivamente) e a 2 (correspondente a R2.b)). A primeira e a última abordagem aparentam terem resultados iguais uma vez que ambas têm como base as distribuições de Rayleigh da água e do gelo. A primeira, calcula as probabilidades conjuntas para fazer as classificações e a última toma a intersecção entre as duas, como limiar de decisão. Contudo, a segunda abordagem, uma vez que toma 81 píxeis (pacotes de 9x9) em simultâneo para fazer as classificações, pode induzir em erro em classificações nalguns píxeis, por estarem em minoria. Com base na frequência de decisões corretas, os valores correspondentes às abordagens 1, 2 e 3 são respectivamente 0.99998, 0.98307 e 0.99998, o que pode confirmar a semelhança só entre a primeira e a última abordagem.