Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico – Lisboa

Matemática Computacional
Projeto computacional– 1º Semestre 2017/18

Nota: Prazo de entrega do relatório da questão II e' dia 15 de Dezembro 2017

Parte 1(cont.)

II

Pretende-se aproximar o integral $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ utilizando o **método de Romberg**. Sendo $T_m(f)$ e $T_{2m}(f)$ obtidas pela regra dos trapézios com m e $2m$ subintervalos, respetivamente, segundo a fórmula do erro da regra dos trapézios, admitindo que $f \in C^2([a,b])$, tem-se

$$E_m(f) := I(f) - T_m(f) = -\frac{(b-a)}{2}h^2 f''(\xi_1),$$

$$E_{2m}(f) := I(f) - T_{2m}(f) = -\frac{(b-a)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi_2),$$

onde $h = (b-a)/m$. Em geral $f''(\xi_1) \neq f''(\xi_2)$; no entanto, se h for suficientemente pequeno, tem-se $f''(\xi_1) \approx f''(\xi_2)$, pelo que podemos resolver as equações as equações acima como um sistema e concluir que

$$I(f) \approx \frac{4T_{2m}(f) - T_m(f)}{3}.$$

Este processo permite aumentar a precisão oferecida pela regra dos trapézios e é chamado extrapolação. Aplicado de forma sistemática, dá origem a um algoritmo conhecido como **integração de Romberg**: sendo $m = m(j) = 2^j$, calcula-se recursivamente

$$R_{j,0} = T_{m(j)}(f),\ j = 0, ..., n;$$

para $k = 1, ..., n$

$$R_{j,k} = \frac{4^k R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^k - 1},\ j = k, ..., n.$$

1. Mostre que $R_{j,1}$ corresponde à regra de Simpson $S_{2^j}(f)$, $j = 1, ..., n$.

2. Escreva um programa que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e o natural n retorne uma aproximação do integral $I(f)$ através da regra dos trapézios $T_n(f)$.

3. Escreva um outro programa que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e um natural n retorne uma aproximação do integral $I(f)$ através do método de Romberg. Inclua o critério de paragem $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < \varepsilon$, onde ε é uma tolerância de erro fornecida como input. Quando não se verifica a condição acima, o programa acrescenta uma linha à matriz que está a ser construída.

4. Seja $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$.

   (a) Teste os programas anteriores calculando $\mathcal{I}$ com $2, 4, ..., 32, 64, ...$ nós de integração e apresente os resultados numa tabela, indicando o número de algarismos significativos das aproximações obtidas. Apresente ainda uma tabela com os erros absolutos correspondentes aos resultados da tabela anterior.

   (b) Recorrendo a regressão linear **ou** preenchendo duas tabelas como é explicado no final*, verifique que os valores obtidos para as aproximações $R_{j,0}$, $j = 0, 1, 2, ..., 5, 6, ...$, e $R_{j,1}$, $j = 1, 2, ..., 5, 6, ...$, confirmam as ordens dos erros das regras dos trapézios e de Simpson compostas (ou seja, os expoentes a que o espaçamento h está elevado, nas respetivas fórmulas de erro)*.

5. *Aplicação: Difração da luz nos telescópios - discos de Airy.*

   A luz das estrelas pode ser tratada eficazmente como vindo de uma fonte pontual no infinito. Quando essa luz, com comprimento de onda λ, passa através da abertura circular de um telescópio (que assumiremos ter raio unitário) e é focada pelo telescópio no plano focal, não produz um único ponto, mas um padrão de difração circular consistindo numa mancha central cercada por uma série de anéis concêntricos. A intensidade da luz neste padrão de difração é dada por

$$\ell(r) := (J_1(Kr)/(Kr))^2,$$

   onde r é a distância ao centro do padrão de difração no plano focal, $K = 2\pi/\lambda$ e J_1 é uma função de Bessel. As funções de Bessel são dadas por:

$$J_m(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t) - mt) dt, \quad m \in \mathbb{N}_0,\ x \geq 0.$$

   (a) Escreva uma função $J(m, x)$ para calcular os valores da função de Bessel usando o método de Romberg. Use essa função para traçar num gráfico as funções de Bessel J_0, J_1 e J_2 no intervalo $[0, 20]$.

   (b) Construa um programa que faça um "density plot" da intensidade da luz na difração circular de uma fonte de luz pontual com $\lambda = 500nm$, numa região quadrada do plano focal utilizando a fórmula dada acima. Essa imagem deve cobrir valores de r de zero até cerca de $1\mu m$.

   Para visualizar os resultados, pode usar: o comando `imshow` disponível no MATLAB e no PYTHON ou o comando `DensityPlot` do MATHEMATICA. Para obter uma boa resolução para a imagem produzida, pode ser conveniente recorrer a uma função de escala $\ell \mapsto \ln(\ell/i_m)/\ln(i_M/i_m)$, com $i_m = 0.00015$ e $i_M = 0.01$, por exemplo.

* Para a questão 4.b), tenha em conta as fórmulas de erro seguintes, (válidas para uma função f com derivadas contínuas até ordem 2 e 4, respetivamente):

$$E_h^T(f) = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(\xi) \qquad\qquad \xi \in (a, b)$$

$$E_h^S(f) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad\qquad \xi \in (a,b)$$

Pode-se dizer que a regra dos trapézios tem ordem (chamada de consistência) 2 e a de Simpson ordem (de consistência) 4. Isso tem como consequência prática o seguinte: ao diminuir-se o valor do passo h para $h/2$, espera-se que os erros das aproximações obtidas com estas regras venham aproximadamente divididos por 2^p, onde $p = 2$ para regra dos Trapézios e $p = 4$ para regra de Simpson. Isto pode ser explicado da forma seguinte. Para um método de ordem p, tem-se, para h suficientemento pequeno, $\dfrac{|E_h(f)|}{|E_{h/2}(f)|} \sim 2^p$.

Aplicando logaritmos, obtém-se a seguinte estimativa: $p = \ln\left(\dfrac{|E_h(f)|}{|E_{h/2}(f)|}\right)/\ln 2$

Utilize os resultados obtidos pelas regras dos Trapézios e Simpson compostas para preencher duas tabelas como as indicadas em baixo, onde S_N e T_N designam as aproximações obtidas, respectivamente, pelas regras de Simpson e dos trapézios compostas, com N subintervalos. Em vez do número de subintervlos, podem considerar os resultados em termos de $h = (b-a)/N$.

Regra de Simpson

N	S_N	$\|I - S_N\|$	$\frac{\|I-S_{N/2}\|}{\|I-S_N\|}$	p
2				
4				
8				
16				
32				
64				
128				
256				

Regra dos Trapézios

N	T_N	$\|I - T_N\|$	$\frac{\|I-T_{N/2}\|}{\|I-T_N\|}$	p
1				
2				
4				
8				
16				
32				
64				
128				
256				