

Instituto Superior Técnico
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo por Computador

2020/2021 - 1^o Semestre

Projeto

Grupo n.º 51
António Pereira - 90019
Miguel Amaral - 90150
Diogo Alves - 86980

Professor: João Pedro Gomes
Turno: Thursday, 9h30

1 Pergunta 1

O objetivo deste trabalho é controlar uma barra de metal flexível que, devido às suas oscilações, é difícil de fixar numa dada posição.

1.1 Hipótese 1: Desenvolvimento de tabela de tensões elétricas a aplicar no motor DC

A aplicação de uma tensão ao motor da barra só afetaria a sua velocidade angular e não a sua posição, o que tornaria o processo de colocar a barra no local desejado mais rápido através da aplicação de tensões diferentes, mas não seria útil para estabilizar as oscilações da barra.

1.2 Hipótese 2: Aplicação de tensão elétrica constante no motor

A aplicação de uma tensão elétrica constante ao motor iria fixar a sua velocidade angular após a resposta do sistema ao impulso estabilizar.

1.3 Hipótese 3: Loop de controlo com ganho a amplificar o erro de seguimento

De modo a avaliar se esta solução é aplicável, é preciso saber os tipos de oscilações a que a barra está sujeita. Conseguimos identificar 2 situações principais que causam oscilações:

- Quando a barra tem que parar o seu movimento de repente
- Quando a barra tem que alterar a sua direção

Na primeira situação, consoante a rapidez com que o movimento da barra se altera, poderão ser geradas oscilações de alta amplitude e baixa frequência, com as quais a barra procede lentamente para o equilíbrio (imobilização completa) ou oscilações mais rápidas, de menor amplitude, que estabilizam rapidamente, consoante a travagem seja mais ou menos brusca, respetivamente. Como em ambos os casos a barra tende a ficar imobilizada no final, podemos concluir que esse sistema é estável, logo a aplicação de um loop de controlo ajudaria a estabilizar o sistema.

Na segunda situação, a alteração do sentido do movimento da barra faz com que qualquer erro detetado nesse instante que seja amplificado irá destabilizar o sistema e fazer com que este fique com erros no seu movimento, pelo que para movimentos com alteração de sentido a aplicação do loop de controlo não é viável.

1.4 Hipótese 4: Distribuição de pólos em sistema de malha aberta

Sabendo que o motor DC acrescenta um pólo em zero e tendo em conta o que foi referido na hipótese anterior, podemos concluir que o pólo instável criado pelo sistema quando ocorre uma alteração de sentido faz com que este fique instável e muito difícil de estabilizar recorrendo a um sistema de feedback.

2 Pergunta 2

2.1 Operação do Motor

O motor é controlado em termos de velocidade angular, mas é medido o ângulo. Quando aplicada uma constante, esta fará o motor girar continuamente e o ângulo θ aumentará ao longo do tempo, sem qualquer limitação.

Isto deve-se ao facto de o sistema da barra metálica ser criticamente instável. Este problema pode ser resolvido substituindo o nosso output de θ para uma estimativa da velocidade angular $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ que iria convergir para um valor constante, facilitando o processo de identificação do sistema.

Como não é possível calcular a derivada de θ a implementação da velocidade angular seria em torno de uma equação às diferenças em torno de dois instantes seguidos. É importante ter noção que para frequências elevadas o sistema terá um valor de ruído a tender para infinito que produzirá resultados indesejáveis. Para resolver este problema será realizada uma função de transferência ligeiramente modificada que forçará a derivada a diminuir para frequências elevadas comportando-se como um filtro passa-baixo.

Lambda permite regular a banda a filtrar. Isto será realizado com a função *filter* do Matlab.

2.2 Resposta a um Degrau

Substituindo as entradas do modelo por uma função constante é possível ver a sua resposta perante um degrau, que no exemplo apresentado em seguida apresenta 1.5 V de amplitude. Na resposta do sistema, a sua tendência para a divergência é evidente, pelos motivos observados anteriormente.

Também são observáveis algumas oscilações que se devem ao facto da barra ser flexível.

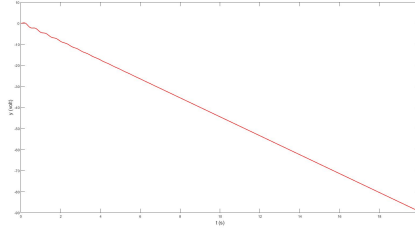


Figure 1: Resposta do sistema a uma função constante em função do tempo

3 Pergunta 3

3.1 Testes realizados para obtenção dos dados usados para Identificação.

Para obter os dados usados para a Identificação do sistema, construímos dois sinais de input: uma onda quadrada, de frequência 0.4Hz, que será usada para treino (obter um modelo para o sistema) e uma onda PRBS (Pseudorandom binary sequence), com fator B igual a 0.01, que será usada para teste (avaliar o modelo obtido). Cada um destes sinais é injetado no sistema e são guardados os sinais de saída. Estes são tratados: é-lhes removido o offset e são diferenciados através de um filtro. Depois é utilizada a função *armax* para identificar o modelo. A resposta deste modelo ao sinal de treino (PRBS) é então simulada e comparada com a resposta do sistema real ao sinal de treino. Para cada um dos parâmetros do modelo ARMAX (nA, nB, nC, nK), pólo do filtro diferenciador e frequência de amostragem são testados diferentes valores e construído um sistema ARMAX para cada combinação desses valores. Os sistemas são classificados por ordem decrescente do valor que resulta da comparação da saída do modelo ARMAX com a saída do sistema real ao sinal de treino. Olhámos então para o diagrama de pólos e zeros e resposta temporal ao sinal de treino dos sistemas com pontuações mais elevadas e eliminámos aqueles que não continham as características de que estávamos à procura. Dos sistemas que restaram, escolhemos o mais simples.

3.2 Frequência de amostragem

A frequência de amostragem não deve ser muito alta, uma vez que nesse caso haverá redundância entre amostras consecutivas e o processamento da informação será muito demorado. Também não deverá ser muito baixa, uma vez que neste caso a informação adquirida poderá não ser suficiente. Nos nossos testes, foram utilizados valores para a frequência de amostragem de 50, 100 e 200Hz.

3.3 Filtragem dos dados e lidar com o pólo na origem

O sinal de saída do sistema corresponde ao ângulo do motor. Assim, quando é aplicado um sinal constante ao sistema, o sinal de saída cresce linearmente. Isto é indicativo de que existe um integrador no sistema e, portanto, um pólo na origem ($s = 0$ ou equivalentemente $z = 1$). Ora, como sabemos, sistemas com esta propriedade são criticamente estáveis e não é prático trabalhar com eles, pelo que teremos que modificar o sinal de saída de modo a remover este pólo. Isto é feito à custa da diferenciação deste sinal. Um diferenciador ideal tem como função transferência $H(s) = s$ (em tempo discreto $H(z) = 1 - z^{-1}$). O problema deste diferenciador é que amplifica as componentes de alta frequência (o ruído), pelo que teremos que utilizar uma versão modificada do diferenciador, que atenua as componentes de alta frequência: $H(z) = (1 - z^{-1}) \frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}$, que consiste na cadeia de um diferenciador ideal com um filtro passa-baixo. Na figura 2 é possível observar a resposta em frequência do diferenciador ideal, diferenciador modificado e filtro passa-baixo para $f_s = 100\text{Hz}$ e $\lambda = 0.95$.

No nosso caso, testámos para valores de λ iguais a 0.85, 0.9 e 0.95.

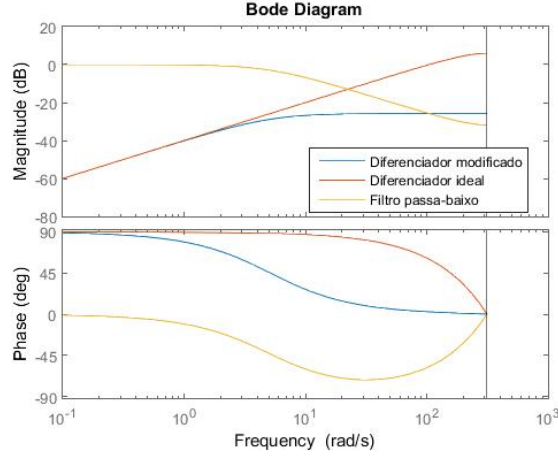


Figure 2: Diagramas de bode do diferenciador ideal, diferenciador modificado e filtro passa-baixo para $f_s = 100\text{Hz}$ e $\lambda = 0.95$

3.4 Modelo ARMAX

Para obter o sistema equivalente ao sistema real, é utilizada a função *armax*. Esta função permite obter os polinômios $A(z)$, $B'(z)$ e $C(z)$ de um modelo tal que

$$A(z)Y(z) = B'(z)z^{-n_k}U(z) + C(z)E(z) \quad (1)$$

recebendo como input os sinais de entrada e saída do sistema real e os parâmetros nA , nB , nC e nK . $Y(z)$ corresponde à transformada do sinal de saída, $U(z)$ à do sinal de entrada e $E(z)$ é a transformada de um sinal de ruído branco gaussiano. Os polinômios $A(z)$, $B'(z)$ e $C(z)$ são da forma:

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{nA}z^{-nA} \quad (2)$$

$$B'(z) = b_1 + b_2z^{-1} + \dots + b_{nB}z^{-nB+1} \quad (3)$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{nC}z^{-nC} \quad (4)$$

Assim, a função transferência do sistema ARMAX obtido será

$$G(z) = \frac{B'(z)z^{-n_k}}{A(z)} \quad (5)$$

Nesta função transferência, o numerador tem ordem igual a $nB - 1 + nK$ e o denominador tem ordem igual a nA . Para que o modelo de espaços de estados final tenha o parâmetro D igual a 0, temos que nos assegurar que o grau do denominador é maior ou igual ao grau do numerador, isto é, que

$$nA \geq nK + nB - 1 \quad (6)$$

Nos nossos testes, fizemos nA tomar os valores 1, 2, 3 e 4 (e $nC = nA$); nB os valores 1, 2 e 3 e nK os valores 1, 2 e 3, assegurando a restrição de 6.

Utilizando a onda quadrada para treinar o modelo e a onda PRBS para o testar, e fazendo variar todos os parâmetros já referidos, foram então registados os resultados para os dez modelos com maior precisão:

f_s (Hz)	λ	nA	nB	nC	nK	Precisão Teste (%)	Precisão Treino (%)
100	0.95	3	2	3	2	83.22	76.52
100	0.95	3	3	3	1	82.60	79.69
100	0.90	3	2	3	2	82.38	71.47
100	0.85	3	2	3	2	80.75	69.85
100	0.95	4	2	4	2	79.97	64.53
100	0.90	3	3	3	1	79.47	76.06
50	0.90	4	3	4	1	78.74	85.73
50	0.95	4	3	4	1	78.68	88.35
50	0.85	4	3	4	1	78.52	83.98
100	0.85	3	2	3	1	78.08	60.07

Os diagramas de pólos e zeros para estes modelos estão representados na figura 3

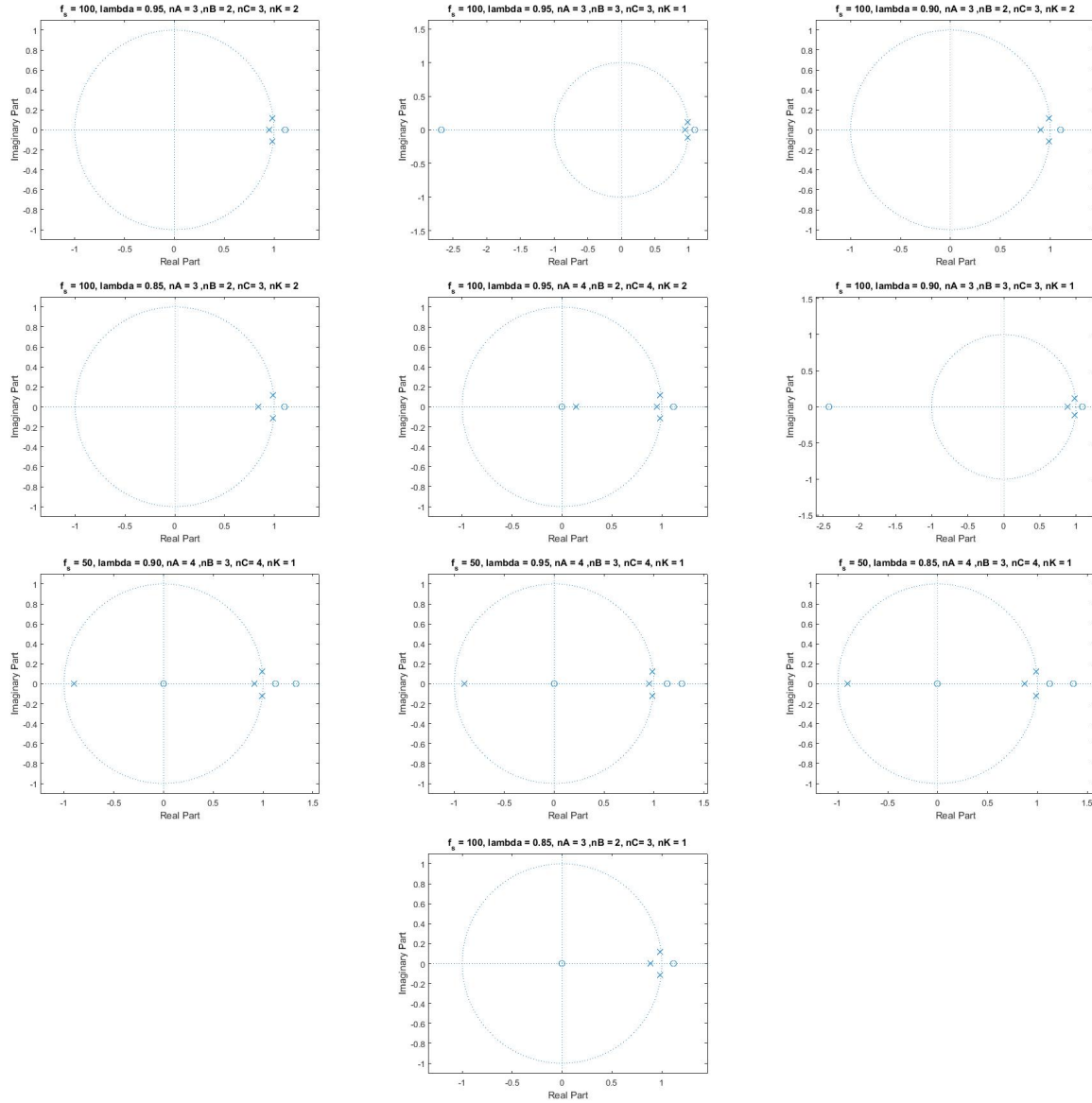


Figure 3: Diagramas de pólos e zeros

O modelo escolhido será o modelo mais simples que tiver todas as características que estamos à procura. Neste caso, essas características são: (1) dois pólos complexos conjugados dentro do círculo unitário, que modelam o comportamento oscilatório; (2) um zero no eixo real (zero de fase não mínima), à direita do círculo unitário, que modela o efeito de "chicote". Todos os dez modelos têm estas duas características, pelo que o escolhido será o primeiro ($nA, nB, nC, nK = 3, 2, 3, 2; f_s = 100Hz; \lambda = 0.95$).

A função transferência deste sistema é

$$G(z) = 10^{-3} \frac{0.1803z^{-2} - 0.2001z^{-3}}{1 - 2.9229z^{-1} + 2.8612z^{-2} - 0.9377z^{-3}} \quad (7)$$

Podemos agora simular este modelo com os mesmos sinais com que foi excitado o sistema real:

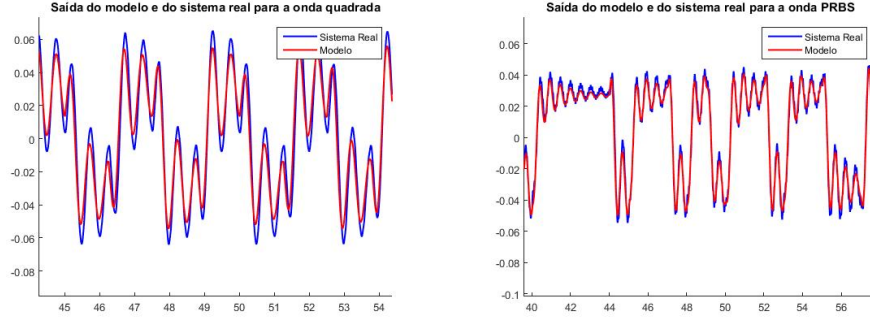


Figure 4: Sinais de saída do sistema real e do modelo

Como podemos observar, a saída do modelo e a saída do sistema real são sinais bastante parecidos. Observamos também que de facto o efeito de chicote está presente no modelo, quando se dá uma transição do sinal de entrada.

Estamos agora em condições de adicionar ao sistema o integrador que removemos no ponto 3.3. A função transferência do integrador é $H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{z}{z-1}$. Assim, a função transferência do sistema final é

$$G_{final}(z) = \frac{G(z)}{1-z^{-1}} = 10^{-3} \frac{0.1803z^{-2} - 0.2001z^{-3}}{1 - 3.9229z^{-1} + 5.7841z^{-2} - 3.7989z^{-3} + 0.9377z^{-4}} \quad (8)$$

3.5 Modelo de Espaço de Estados final

O sistema obtido em 8 pode ser convertido num modelo equivalente em espaços de estados. O modelo em espaços de estados é caracterizado pelas equações

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (9)$$

$$y(k+1) = Cx(k) + Du(k) \quad (10)$$

Os parâmetros A , B , C e D obtidos foram

$$A = \begin{bmatrix} 3.9229 & -5.7841 & 3.79889 & -0.9377 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$C = [0 \quad 1.8025 * 10^{-4} \quad -2.0007 * 10^{-4} \quad 0] D = [0] \quad (12)$$

3.6 Validação do modelo e resposta temporal, resposta em frequência e diagrama de pólos e zeros do modelo final

Na figura 5 podemos verificar as respostas temporais do sistema original e do modelo a diferentes tipos de sinais.

Como podemos observar, para a maioria dos sinais as respostas do sistema original e do modelo são bastante parecidas. Os sinais para os quais estas mais diferem são para sinais com componentes de mais alta frequência (por exemplo o impulso unitário e o sinal sinusoidal de 10Hz). Isto é plausível uma vez que o modelo foi treinado e testado com sinais de frequência relativamente baixa, e por isso é natural que a resposta a sinais com maior frequência não seja ideal.

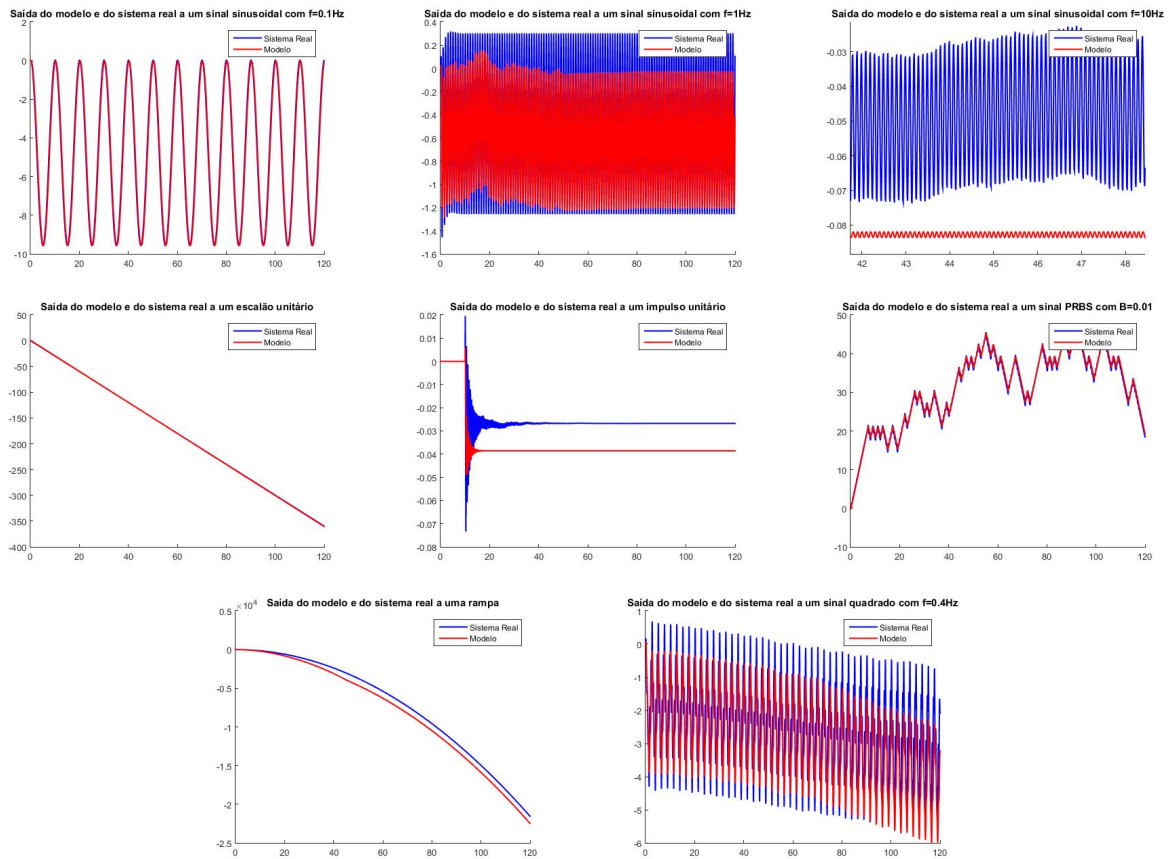


Figure 5: Sinais de saída do sistema real e do modelo

A resposta em frequência do modelo pode ser observado na figura 6. Uma vez que o nosso sistema "real" é de facto também ele um modelo simulado, é-nos possível também observar o seu diagrama de bode.

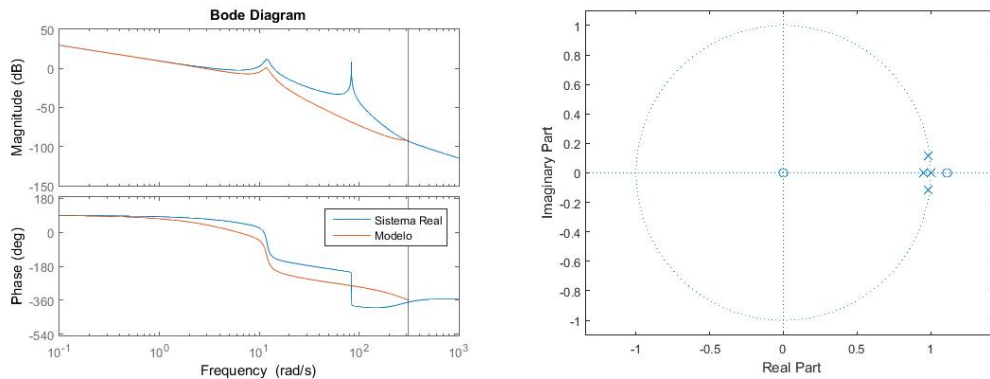


Figure 6: Diagrama de Bode do Modelo final e diagrama de polos e zeros

Observando os dois diagramas de bode em simultâneo, verificamos que para frequências baixas eles são bastante parecidos. No entanto, para frequências em volta de 84 rad/s (13.3 Hz) existe um pico no diagrama de bode real que não existe no nosso modelo. Possivelmente isto deve-se ao facto de que no sistema real existem pólos e/ou zeros perto dessa frequência que não estão contemplados no nosso modelo, por duas razões: (1) nós escolhemos o modelo de menor ordem que satisfazia as características de que estávamos à procura; (2) os sinais de treino e teste utilizados tinham uma frequência inferior a 13.3 Hz .

O diagrama de pólos e zeros do modelo encontra-se também na figura 6. Como esperado, este modelo tem mais um zero em $z = 0$ e um pólo em $z = 1$ relativamente ao modelo sem o integrador. Como já foi explicado, os pólos complexos conjugados (em $z = 0.9859 \pm j0.1173$) são os responsáveis pelas oscilações do sistema e o zero de fase mínima (em $z = 1.11$) é responsável pelo efeito "chicote".