

Matemática Computacional
Projeto computacional– 1º Semestre 2017/18

Nota: Prazo de entrega do relatório da questão III e' dia 27 de Dezembro 2017

Parte 2

III

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

e o **método de Heun**

$$\begin{cases} y_0 = y_a, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))] , & i = 0 : n-1, \quad h = \frac{b-a}{n}, \end{cases}$$

o qual fornece aproximações da função y nos pontos $t_i = a + ih$: $y(t_i) \approx y_i$, $i = 0 : n$.

1. Escreva um programa (em Matlab, Octave, Mathematica ou Python) que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $y_a \in \mathbb{R}^d$ e $n \in \mathbb{N}$, retorne os valores/vetores y_0, y_1, \dots, y_n , produzidos pelo método de Heun.
2. Numa comunidade isolada de 800 crianças suscetíveis de contrair varicela, uma é diagnosticada com esta doença. Sabe-se que a transmissão da doença pode ser modelada pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} S'(t) &= -0.001 S(t) I(t) \\ I'(t) &= 0.001 S(t) I(t) - 0.3 I(t) \end{cases}$$

onde $S(t)$ é o número de crianças suscetíveis de contrair a doença no momento t , e $I(t)$ é o número de infetados na mesma altura e que podem propagar a doença.

- (a) Utilize o método de Heun para traçar um gráfico ilustrando a evolução das variáveis (S, I) . O valor final t_f para t deve ser tal que $I(t_f) = 0$.

- (b) Com base nos gráficos obtidos, indique:
- Qual é o valor máximo que o número de novos casos de infecção atinge no período de tempo estudado;
 - Quantas crianças irão evitar contrair varicela (note que a epidemia termina devido à inexistência de crianças infectadas).
- (c) Para estudar a influência do processo de vacinação no controlo da propagação da doença, é considerado um fator adicional nas equações que modelam o sistema, o qual representa uma proporção de crianças que passam diretamente de suscetíveis para recuperadas, ou seja, imunes. Considera-se um novo modelo

$$\begin{cases} S'(t) &= -0.001 S(t) I(t) - vS(t) \\ I'(t) &= 0.001 S(t) I(t) - 0.3 I(t) \\ R'(t) &= 0.3 I(t) + vS(t) \end{cases}$$

onde v é a taxa de vacinação e $R(t)$ é o número de recuperados, ou seja, que já contraíram a doença e adquiriram imunidade.

Simule o novo modelo com vários valores de v , $v = 0.3, 0.5, 0.9$, por exemplo, de modo a concluir sobre o efeito da vacinação na propagação da varicela. Tal como no caso anterior, considera-se um grupo de 800 crianças e a propagação da doença inicia-se quando uma delas surge infectada.

Os resultados devem ser apresentados através de gráficos devidamente legendados. Comente os resultados obtidos.