Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Фізико-технічний інститут

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ
Комп’ютерний практикум №1
Розв’язання нелінійних рівнянь
Варіант 3 (13)

Виконала:
студентка 3 курсу
гр. ФБ-92
Шатковська Діана

Київ - 2022

1. Допрограмний етап

Здійснити аналіз та відокремлення коренів за допомогою теорем.

Дане рівняння(Варіант 3): $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 4 = 0$

Знайдемо проміжки, у яких лежать корені даного рівняння.

Теорема про кільце (про границі усіх (комплексних) коренів рівняння)

Маємо: $A = max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|) = max(4, 2, 1, 3) = 4$

$B = max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|) = max(2, 1, 3, 1) = 3$

Тоді всі (комплексні) корені даного рівняння лежать у кільці:

$$\frac{|a_0|}{B+|a_0|} \leq x \leq \frac{|a_4|+A}{|a_4|} \Rightarrow \frac{4}{3+4} \leq x \leq \frac{1+4}{1} \Rightarrow 0,57 \leq x \leq 5$$

Теорема про верхню межу додатних коренів

Маємо: $B = max(|a_i|)$, де $a_i < 0 = max(3, 2, 4) = 4$

$m = max(i)$, де $a_i < 0 = max(0, 1, 3) = 3$

Тоді **верхня межа** додатних коренів:

$$R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{4}{1}} = 5$$

$$x^+ \leq 5$$

Щоб знайти нижню межу додатних коренів зробимо заміну: $P(\frac{1}{x})$

Маємо:

$$x^4 \cdot (\frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 4) \cdot (-1) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

$B = max(|a_i|)$, де $a_i < 0 = max(1, 1) = 1$

$m = max(i)$, де $a_i < 0 = max(0, 2) = 2$

Тоді **нижня межа** додатних коренів:

$$R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{1}{4}} = 1,5$$

$$x^+ \geq \frac{1}{1,5} = 0,66$$

Щоб знайти верхню межу від'ємних коренів зробимо заміну: $P(-\frac{1}{x})$

Маємо: $(-\frac{1}{x})^4 - 3(-\frac{1}{x})^3 + (-\frac{1}{x})^2 - 2(-\frac{1}{x}) - 4 = 0$

$\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 4 = 0 \ \ | \cdot - x^4$

$4x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

$B = max(|a_i|)$, де $a_i < 0 \ = max(2, 1, 3, 1) = 3$

$m = max(i)$, де $a_i < 0 \ = max(0, 1, 2, 3) = 3$

Тоді **верхня межа** від'ємних коренів:

$$R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{3}{4}} = 1,75$$

$$x^- \leq \ -\frac{1}{1{,}75} =- 0,57$$

Щоб знайти нижню межу від'ємних коренів зробимо заміну: $P(- x)$

Маємо: $(- x)^4 - 3(- x)^3 + (- x)^2 - 2(- x) - 4 = 0$

$x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$

$B = max(|a_i|)$, де $a_i < 0 \ = max(4) = 4$

$m = max(i)$, де $a_i < 0 \ = max(0) = 0$

Тоді **нижня межа** від'ємних коренів:

$$R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[4-0]{\frac{4}{1}} = 2,41$$

$$x^- \geq \ - 2,41$$

Отже отримали такі проміжки:

$0,66 \leq x^+ \leq 5$ та $- 2,41 \leq x^- \leq- 0,57$

Визначимо кількість дійсних коренів даного рівняння за допомогою:

- **Теорема Гюа**

Теорема: Якщо $\exists k$: $0 < k < n$, $a_k^2 < a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, то рівняння має хоча б одну пару комплексно спряжених коренів.

Маємо: $n = 4$

для $k = 1$: $a_1^2 < a_0 \cdot a_2 \ \Rightarrow (- 2)^2 < (- 4) \cdot 1$

для $k = 2:\ a_2^2 < a_1 \cdot a_3 \Rightarrow 1^2 < (-2) \cdot (-3)$ – підходить.

Отже рівняння має хоча б одну пару комплексно спряжених коренів.

- **Теорема Штурма**

$$f_0 = P_0(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 4$$

$$f_1 = P_0'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 2$$

$$f_2 = -f_0 \, mod \, f_1 = -(-\frac{19}{16}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{35}{8})$$

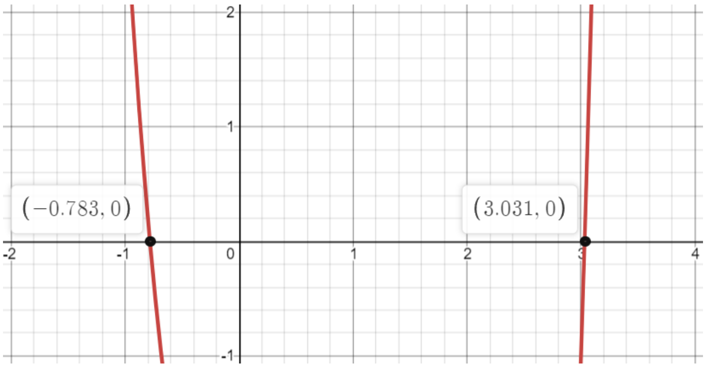
$$f_3 = -f_1 \, mod \, f_2 = -(-\frac{225}{361}x + \frac{16288}{361})$$

$$f_4 = -f_2 \, mod \, f_3 = -(\frac{159887011}{29768})$$

Складемо таблицю знаків поліномів Штурма:

	$-2,41$	$-0,57$	$0,66$	5
$f_0(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f_1(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f_2(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_3(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f_4(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
Змін знаку	3	2	2	1
Коренів	1		1	

Отже, маємо по одному кореню на проміжках $[-2,41; -0,57]$ та $[0,66; 5]$



2. Програмний етап

Уточнити корені рівняння методом бісекції, методом хорд та методом дотичних.

Програма на Python:

```
# Calc Methods Lab 1 by Diana Shatkovska FB-92, Variant 3
accuracy = 0.00001
p_coef = (1, -3, 1, -2, -4)
intervals = [(-2.41, -0.57), (0.66, 5)]

def f(x, coef=p_coef):
    res = 0
    for i, k in enumerate(coef[::-1]):
        res += k * x**i

    return res


def f_derivative(x, coef=p_coef):
    res = 0
    for i, k in enumerate(coef[::-1]):
        res += (k*i) * x**(i-1)

    return res


def bisection(interval, e=accuracy):
    print('---Bisection method---')
    left, right = interval
    print(f"0:\t{left},{right}")
    i = 0
    while abs(right-left) > e:
        bisector = (right + left)/2

        if f(left)*f(bisector) <= 0:
            right = bisector
        else:
            left = bisector
        i += 1
        print(f"{i}:\tx = {(right + left)/2}, e =
{abs(right-left):.6f}")
    print(f"Result:\tx = {(right + left)/2}")
    return (right + left)/2
```

```python
# bisection(intervals[0])
# bisection(intervals[1])


def secant(interval, e=accuracy):
    print('---Secant method---')
    span = interval    # c, c_prev
    print(f"0:\t{span}")
    i = 0

    while abs(span[1]-span[0]) > e or abs(f(span[0])) > e:
        span = (span[0] * f(span[1]) - span[1] * f(span[0])) /
(f(span[1])-f(span[0])), span[0]
        i += 1
        print(f"{i}:\tx = {span[0]}, e = {abs(span[1]-span[0]):.6f}")
    print(f"Result:\tx = {span[0]}")
    return span[0]


# secant(intervals[0])
# secant(intervals[1])
# secant((2.125,5))


def newtons(interval, e=accuracy):
    print('---Newton method---')
    span = interval     # x, x0
    print(f"0:\t{span}")
    i = 0

    while abs(span[1]-span[0]) > e and abs(f(max(span))) > e:
        span = span[1] - f(span[1])/f_derivative(span[1]), span[0]

        i += 1
        print(f"{i}:\tx = {span[0]}, |b-a| =
{abs(span[1]-span[0]):.6f}, |f(a)| = {abs(f(max(span))):.6f}")
    print(f"Result:\tx = {span[0]}")
    return span[0]


# newtons(intervals[0])
# newtons(intervals[1])
# newtons((2.125,5))
```

Результати:

- Метод бісекцій

```
---Bisection method---
0:  -2.41,-0.57
1:  x = -1.03, e = 0.920000
2:  x = -0.8, e = 0.460000
3:  x = -0.685, e = 0.230000
4:  x = -0.7425, e = 0.115000
5:  x = -0.77125, e = 0.057500
6:  x = -0.785625, e = 0.028750
7:  x = -0.7784375, e = 0.014375
8:  x = -0.78203125, e = 0.007188
9:  x = -0.783828125, e = 0.003594
10: x = -0.7829296875, e = 0.001797
11: x = -0.7833789062500001, e = 0.000898
12: x = -0.7836035156250001, e = 0.000449
13: x = -0.7834912109375001, e = 0.000225
14: x = -0.7834350585937501, e = 0.000112
15: x = -0.7834631347656251, e = 0.000056
16: x = -0.7834490966796877, e = 0.000028
17: x = -0.7834420776367188, e = 0.000014
18: x = -0.7834455871582032, e = 0.000007
Result: x = -0.7834455871582032
```

```
---Bisection method---
0:  0.66,5
1:  x = 3.915, e = 2.170000
2:  x = 3.3725, e = 1.085000
3:  x = 3.1012500000000003, e = 0.542500
4:  x = 2.965625, e = 0.271250
5:  x = 3.0334375000000002, e = 0.135625
6:  x = 2.9995312500000004, e = 0.067813
7:  x = 3.016484375, e = 0.033906
8:  x = 3.0249609375000004, e = 0.016953
9:  x = 3.0291992187500005, e = 0.008477
10: x = 3.0313183593750006, e = 0.004238
11: x = 3.0323779296875006, e = 0.002119
12: x = 3.0318481445312506, e = 0.001060
13: x = 3.0315832519531254, e = 0.000530
14: x = 3.031450805664063, e = 0.000265
15: x = 3.031384582519532, e = 0.000132
16: x = 3.031351470947266, e = 0.000066
17: x = 3.031368026733399, e = 0.000033
18: x = 3.0313597488403325, e = 0.000017
19: x = 3.031363887786866, e = 0.000008
Result: x = 3.031363887786866
```

- Метод хорд

```
---Secant method---
0:  (-2.41, -0.57)
1:  x = -0.6109372373648977, e = 1.799063
2:  x = -0.6448342779866405, e = 0.033897
3:  x = -0.8138040934152132, e = 0.168970
4:  x = -0.7787028283016152, e = 0.035101
5:  x = -0.7832926759077263, e = 0.004590
6:  x = -0.783444650514037, e = 0.000152
7:  x = -0.783443884655336, e = 0.000001
Result: x = -0.783443884655336
```

```
---Secant method---
0:  (0.66, 5)
1:  x = 0.7504796259432145, e = 0.090480
2:  x = -0.8570535956364322, e = 1.607533
3:  x = -0.648711274022107, e = 0.208342
4:  x = -0.7725775197739361, e = 0.123866
5:  x = -0.7851310143642019, e = 0.012553
6:  x = -0.7834242573174085, e = 0.001707
7:  x = -0.7834438495340259, e = 0.000020
8:  x = -0.7834438847794305, e = 0.000000
Result: x = -0.7834438847794305
```

На проміжку $[0,66;\ 5]$ функція не є монотонною, тому даний метод для цього випадку виводить некоректне значення.

Спробуємо уточнити проміжок, щоб на ньому функція була монотонною:

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 2 = 0$

$x \approx 2,125$ – критична точка

$f'(0,66) < 0$ $\qquad$ $f'(5) > 0$

отже $x \approx 2,125$ – точка екстремуму, мінімум

Визначимо проміжок, що містить корінь:

$f(0,66) < 0$ $\qquad$ $f(2,125) < 0$ $\qquad$ $f(5) > 0$

Отже необхідний проміжок: $[2,125;\ 5]$

Спробуємо застосувати метод хорд на уточненому проміжку:

```
---Secant method---
0:  (2.125, 5)
1:  x = 2.2526880615118934, e = 0.127688
2:  x = 11.994149195778839, e = 9.741461
3:  x = 2.260142584897418, e = 9.734007
4:  x = 2.267579153742804, e = 0.007437
5:  x = 6.511260868346399, e = 4.243682
6:  x = 2.317886816767355, e = 4.193374
7:  x = 2.3668756634616703, e = 0.048989
8:  x = 4.81097316334716, e = 2.444097
9:  x = 2.4933743515077578, e = 2.317599
10: x = 2.6043742687575104, e = 0.111000
11: x = 3.4691537115218267, e = 0.864779
12: x = 2.874866707963356, e = 0.594287
13: x = 2.98024094112751, e = 0.105374
14: x = 3.03932700222721, e = 0.059086
15: x = 3.0309934933282694, e = 0.008334
16: x = 3.0313581948144335, e = 0.000365
17: x = 3.0313607596160907, e = 0.000003
Result: x = 3.0313607596160907
```

- Метод Ньютона

```
---Newton method---
0:  (-2.41, -0.57)
1:  x = -0.8453851931380929, |b-a| = 1.564615, |f(a)| = 0.728738
2:  x = -1.6943886581008363, |b-a| = 0.849003, |f(a)| = 0.728738
3:  x = -0.7872700597883092, |b-a| = 0.907119, |f(a)| = 0.042315
4:  x = -1.199263155264211, |b-a| = 0.411993, |f(a)| = 0.042315
5:  x = -0.783459415882524, |b-a| = 0.415804, |f(a)| = 0.000171
6:  x = -0.9072180112622126, |b-a| = 0.123759, |f(a)| = 0.000171
7:  x = -0.7834438850356568, |b-a| = 0.123774, |f(a)| = 0.000000
Result: x = -0.7834438850356568
```

```
---Newton method---
0:  (0.66, 5)
1:  x = 4.07773851590106, |b-a| = 3.417739, |f(a)| = 77.547929
2:  x = -0.9505712006900034, |b-a| = 5.028310, |f(a)| = 77.547929
3:  x = 3.4705750556715587, |b-a| = 4.421146, |f(a)| = 20.775049
4:  x = -0.8084839464684728, |b-a| = 4.279059, |f(a)| = 20.775049
5:  x = 3.1446813350797753, |b-a| = 3.953165, |f(a)| = 4.098932
6:  x = -0.7840940574902795, |b-a| = 3.928775, |f(a)| = 4.098932
7:  x = 3.0413802105903036, |b-a| = 3.825474, |f(a)| = 0.331372
8:  x = -0.7834443347915785, |b-a| = 3.824825, |f(a)| = 0.331372
9:  x = 3.0314481255416164, |b-a| = 3.814892, |f(a)| = 0.002864
10: x = -0.7834438847789091, |b-a| = 3.814892, |f(a)| = 0.002864
11: x = 3.03136076550435, |b-a| = 3.814805, |f(a)| = 0.000000
Result: x = 3.03136076550435
```

```
---Newton method---
0:  (2.125, 5)
1:  x = 4.07773851590106, |b-a| = 1.952739, |f(a)| = 77.547929
2:  x = -1550.59375, |b-a| = 1554.671489, |f(a)| = 77.547929
3:  x = 3.4705750556715587, |b-a| = 1554.064325, |f(a)| = 20.775049
4:  x = -1162.7580035649485, |b-a| = 1166.228579, |f(a)| = 20.775049
5:  x = 3.1446813350797753, |b-a| = 1165.902685, |f(a)| = 4.098932
6:  x = -871.8812572932648, |b-a| = 875.025939, |f(a)| = 4.098932
7:  x = 3.0413802105903036, |b-a| = 874.922638, |f(a)| = 0.331372
8:  x = -653.7237822252529, |b-a| = 656.765162, |f(a)| = 0.331372
9:  x = 3.0314481255416164, |b-a| = 656.755230, |f(a)| = 0.002864
10: x = -490.1057885878938, |b-a| = 493.137237, |f(a)| = 0.002864
11: x = 3.03136076550435, |b-a| = 493.137149, |f(a)| = 0.000000
Result: x = 3.03136076550435
```

3. Висновки

При виконанні цього комп'ютерного практикуму було розглянуто методи аналізу та знаходження коренів нелінійних рівнянь, зокрема було запрограмовано три методи знаходження коренів нелінійних рівнянь: Метод бісекцій, Метод хорд(січних) та Метод Ньютона.

За результатами, отриманими при програмному знаходженні коренів даного рівняння, можна підвести такі підсумки: за кількістю ітерацій найменш ефективним виявився Метод бісекцій, щоб віднайти корені знадобилось 18-19 ітерацій на обчислених проміжках, у той час Методу Ньютона знадобилось 7,11 ітерацій на цих же проміжках.

Особливістю використання Методу хорд та Методу Ньютона є те, що вони потребують більш детального попереднього аналізу функції. Адже для уникнення помилок необхідно вказувати проміжки, на яких функція є монотонною. Саме через це, для Методу січних у моєму випадку довелось уточнювати проміжок.