Universidad Andrés Bello®

Unab Online

Análisis gráfico

González, J. (2021). *Análisis gráfico* [Apunte]. Universidad Andrés Bello, Santiago, Chile.

ANÁLISIS GRÁFICO

Adaptado del documento de laboratorio creado por Curín, C. y Llanquihuen, A.

1. REPRESENTACIÓN DE DATOS

Parte del quehacer científico es la formulación de leyes que describen fenómenos naturales. Por ello, es usual que un experimentador realice un conjunto de mediciones para estudiar un hecho en particular. En general, dicha investigación comprende el análisis de la variación de alguna magnitud física Y con respecto a otra magnitud física X. De esta manera, como resultado de su trabajo, el experimentador obtiene un conjunto de pares de valores experimentales: (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_k, y_k).

Los datos así obtenidos deben presentarse de manera que los demás extraigan información tanto cualitativa como cuantitativa del trabajo, para lo cual recurrimos a tablas y representaciones gráficas. Las tablas nos permiten ver el conjunto de todos los datos obtenidos y en las gráficas apreciamos la relación entre las variables involucradas en el experimento.

La determinación de la función algebraica o relación funcional asociada al gráfico constituye uno de los objetivos importantes de la tarea experimental.

2. INSTRUCCIONES PARA CONFECCIONAR UN GRÁFICO

En general, todo gráfico debe confeccionarse en papel milimetrado o con ayuda de un computador, cumpliendo con las siguientes indicaciones:

1. Título del fenómeno que representa.
2. Elegir un sistema de coordenadas (ortogonal).
3. Cada eje debe indicar la magnitud física que representa, el intervalo de medida y las unidades en que se expresan los datos.
4. La elección de los intervalos no es arbitraria. El intervalo representado en el eje debe concordar con el intervalo de la medida, de manera que todos los datos figuren dentro de la gráfica y ocupen la mayor parte del área.
5. Los ejes deben llevar indicaciones del valor de magnitud a intervalos regulares, que no tiene por qué coincidir con los valores de los puntos experimentales. Los intervalos deben estar equiespaciados. Una misma longitud de eje no puede

corresponder a dos intervalos distintos de valores de la magnitud. No es necesario marcar el valor de todos y cada uno de los intervalos.
6. Evitar las escalas complicadas, utilizando notación científica si es necesario.
7. Por convención, la variable independiente (VI) se gráfica en el eje horizontal y la variable dependiente (VD) en el eje vertical.

8. No unir los puntos experimentales mediante segmentos rectos. Trazar una curva suave y continua que pase lo más cerca posible de los puntos experimentales (curva de aproximación). Como criterio general, consideremos que las variables no sufren casi nunca cambios bruscos (en nuestros experimentos nunca lo harán), por lo que las líneas jamás están compuestas por segmentos rectos. Las inflexiones son siempre suaves, por lo que deben trazarse líneas curvas (o una única recta) que representen el comportamiento de las magnitudes involucradas en el experimento.
9. Si es posible, graficar con errores.

3. ANÁLISIS DE UN GRÁFICO

Para determinar la relación funcional entre las variables experimentales, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Obtener la tabla de datos Y (variable dependiente) v/s X (variable independiente).
2. Graficar los datos.
3. La gráfica obtenida puede ser:
   a) Una relación lineal (recta).
   b) Una relación no lineal (curva).
4. En el caso 3 b) se modifica una o ambas variables, de tal manera que la gráfica obtenida resulte una recta (proceso de rectificación).
5. Se escribe la ecuación de la recta, determinando previamente el valor de las constantes correspondientes (pendiente: m, ordenada en el origen: n).
6. Interpretar físicamente la relación funcional, basada sobre todo en el análisis dimensional de las constantes. Lograda la relación lineal (recta) entre variables, determinar el valor de las constantes m y n.

La relación funcional o ley física puede expresarse de la forma:

$$y = f(x, m, n)$$

Donde:

y: Variable dependiente.
x: Variable independiente.
f: Función lineal.
m: Pendiente.
n: Ordenada en el origen.

En general, se obtienen *k* mediciones de las variables:

$$y_1 = f(x_1, m, n); y_2 = f(x_2, m, n); \cdots; y_k = f(x_k, m, n)$$

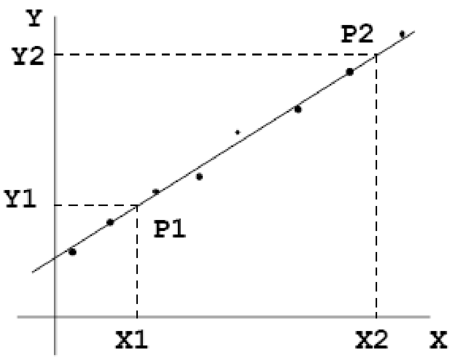
Con esto se busca obtener los valores más probables de m y n, para lo que utilizamos tres métodos:

a) Método gráfico.
b) Método de los promedios.
c) Método de los mínimos cuadrados.

4. MÉTODO GRÁFICO

Se utiliza para un número límite de puntos de moderada precisión.
Si el gráfico revela una relación lineal entre x e y de la forma $y = mx + n$ (como se muestra en la figura), para determinar el valor de m se eligen dos puntos de fácil lectura (P_1, P_2), en lo posible experimentales, y con ellos calcular el valor de m de la forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



El valor de n puede leerse directamente del gráfico (el punto en que la recta intercepta al eje de las ordenadas) o escribir la ecuación de la recta (de pendiente m conocida) con cualquiera de los dos puntos P_1 o P_2. Por ejemplo:

$$y_1 = mx_1 + n$$
$$y_2 = mx_2 + n$$

Y determinar el valor de *n*.

Obtenidos los valores de *m* y *n* se escribe la ecuación de la recta o relación funcional.

5. MÉTODO DE LOS PROMEDIOS

Este método se fundamenta en que la sumatoria de las desviaciones del punto experimental a la recta ideal es cero. Es decir:

$$\sum_i r_i = 0$$

Donde r_i se define por:

$$r_i = y_i - (mx_i + n)$$

Como se busca estimar el valor de la pendiente *m* y del punto de corte *n*, se necesitan dos ecuaciones para determinar dichos parámetros de la recta. Para ello, escribimos las ecuaciones de la recta para cada par de puntos. Es decir:

$$\begin{aligned}
y_1 &= m \cdot x_1 + n \\
y_2 &= m \cdot x_2 + n \\
&\vdots \\
y_p &= m \cdot x_p + n
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y_{p+1} &= m \cdot x_{p+1} + n \\
y_{p+2} &= m \cdot x_{p+2} + n \\
&\vdots \\
y_k &= m \cdot x_k + n
\end{aligned}$$

Luego, este conjunto de ecuaciones se divide en dos y se suma. Es decir;

$$\sum_i y_i = \sum_i x_i m + pn$$
$$\sum_i y_i = \sum_i x_i m + (k-p)n$$

Donde *p* es un número entero entre 1 y *k*-1. Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de *m* y *n*.

Este método se recomienda cuando la cantidad de datos es menor que 10 y la precisión es moderada. Los resultados obtenidos son mejores que los arrojados por el método gráfico.

6. MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Este método se basa en que la sumatoria del cuadrado de las desviaciones ri, definidas en el punto anterior, sea un mínimo. Es decir:

$$E = \sum r_i^2 = \text{minima}$$

Mediante cálculo se encuentra que la mejor estimación de m y n se obtiene de las siguientes expresiones:

$$m = \frac{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \right)}{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2}$$

$$n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i \right)}{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2}$$

Para verificar si este ajuste por mínimos cuadrados es bueno, utilizamos el coeficiente de correlación, *r*, dado por la siguiente expresión:

$$r = \frac{k \cdot \sum_{i=}^{k} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i}{\sqrt{\left(k \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2 \right) \cdot \left(k \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \right)^2 \right)}}$$

El coeficiente de correlación puede ser positivo o negativo y su valor absoluto es menor o igual a 1. Cuando |*r*| = 1, se está en presencia de una recta perfecta. El signo de r indica el signo de la pendiente de la recta. Si es positivo, la pendiente es ascendente; si es negativo, la pendiente es descendente.

Así, mientras más cercano a uno es el coeficiente de correlación, mejor será el ajuste de los datos experimentales.

Rectificación.

Cuando la gráfica de los datos no es lineal, se hace una transformación de variable o rectificación, de modo tal que al graficar los puntos experimentales se obtenga una línea recta.

No existe una única forma de encontrar la transformación adecuada. En general, se recurre a ecuaciones teóricas, si es que existen, o a la pericia del experimentador. La siguiente tabla indica algunas de las transformaciones utilizadas con mayor frecuencia en física.

Si la función es de la forma	Se rectifica graficando
$y = a \cdot x^b$	$\log(y) \quad v/s \quad \log(x)$
$y = a \cdot e^{b \cdot x}$	$\ln(y) \quad v/s \quad x$
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$\dfrac{(y - y_1)}{(x - x_1)} \quad v/s \quad x$

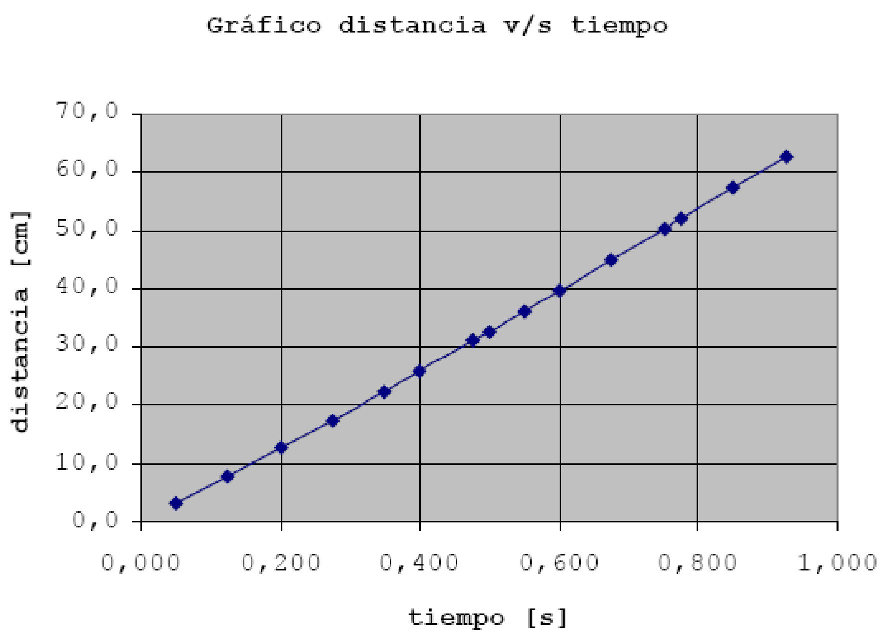
Ante la imposibilidad de decidir cuál es la mejor entre varias rectas, debe recurrirse al coeficiente de correlación. Aquella recta cuyo valor de $|r|$ sea el mayor es la más adecuada.

Ejemplos de aplicación:

1) Durante su sesión de laboratorio, un grupo de alumnos obtuvo la siguiente tabla de datos que representa la posición de un móvil en función del tiempo.

Determina la relación funcional entre la posición d y el tiempo t.

d [cm]	3.1	7.9	12.6	17.5	22.4	25.8	31.0	32.6	36.1	39.6	44.8	50.1	51.9	57.3	62.7
t [s]	0.050	0.125	0.200	0.275	0.350	0.400	0.475	0.500	0.550	0.600	0.675	0.750	0.775	0.850	0.925



En el gráfico se aprecia claramente una relación lineal entre d y t. Por lo tanto, para encontrar la ecuación de la recta utilizaremos los tres métodos mencionados anteriormente.

7. MÉTODO GRÁFICO

Si se escoge P_1 = (0.275, 17.5) y P_2 = (0.750, 50.1) se obtienen los siguientes resultados:

Pendiente: $m = \dfrac{50,1 - 17,5}{0,750 - 0,275} = 68,5 \left[\dfrac{cm}{s}\right]$

Del gráfico se obtiene que el punto de corte es -1,0 [cm]. De esta manera, la ecuación de itinerario será de la forma: $d(t) = 68,6t - 1$

Donde *d* se mide en centímetros y *t* en segundos.

8. MÉTODO DE LOS PROMEDIOS

En este método se dividen los 15 datos en dos grupos. Considera para el primero los primeros 8 datos y los 7 restantes para el segundo. Realizando las sumatorias se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$152,9 = 2,375m + 8n$$
$$342,5 = 5,125m + 7n$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores para la pendiente m y el punto de corte n: m = 68,5 [cm/s] y n = -1,2 [cm].

9. MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Para desarrollar este método en forma manual se recomienda llenar la siguiente tabla:

d [cm]	t [s]	d·t [cm·s]	t^2 [s^2]	d^2 [cm^2]
3.1	0.050	0.1550	0.002500	9.61
7.9	0.125	0.9875	0.015625	62.41
12.6	0.200	2.5200	0.040000	158.76
17.5	0.275	4.8125	0.075625	306.25
22.4	0.350	7.8400	0.122500	501.76
25.8	0.400	10.3200	0.160000	665.64
31.0	0.475	14.7250	0.225625	961.00
32.6	0.500	16.3000	0.250000	1062.76
36.1	0.550	19.8550	0.302500	1303.21
39.6	0.600	23.7600	0.360000	1568.16
44.8	0.675	30.2400	0.455625	2007.04
50.1	0.750	37.5750	0.562500	2510.01
51.9	0.775	40.2225	0.600625	2693.61
57.3	0.850	48.7050	0.722500	3283.29
62.7	0.925	57.9975	0.855625	3931.29

De la tabla se obtiene:

$$\sum d = 495,4; \sum t = 7,5; \sum d \cdot t = 316,015; \sum t^2 = 4,75125; \sum d^2 = 21024,8$$

Puesto que el número de datos es 15, para la pendiente y el punto de corte se obtienen los siguientes valores:

$$m = 68,3\left[\frac{cm}{s}\right]; n = -1,1[cm]$$

Y la ecuación de la recta es de la forma:

$$d = 68,3t - 1,1$$

Donde d está en centímetros y t en segundos. El coeficiente de correlación es 0.9997, lo que indica que el grado de linealidad de los datos experimentales es muy cercano a una recta perfecta.

En los tres casos se encuentra que la ecuación de itinerario es una recta, lo cual sugiere que el cuerpo en estudio posee un movimiento rectilíneo con una rapidez constante de 68.3 [cm/s].

2) En un experimento se determinó, en función del tiempo, la posición de un cuerpo que cae por un plano inclinado.

La siguiente tabla de datos muestra los resultados obtenidos.

d [cm]	t [s]	t^2 [s^2]	$\frac{(d-1.4)}{(t-0.025)}\left[\frac{cm}{s}\right]$
1.4	0.025	0.000625	_
4.5	0.075	0.005625	62.0
9.5	0.150	0.022500	64.8
14.8	0.225	0.050625	67.0
18.8	0.275	0.075625	69.6
22.9	0.325	0.105625	71.7
27.4	0.375	0.140625	74.3
34.3	0.450	0.202500	77.4
39.2	0.500	0.250000	79.6
44.2	0.550	0.302500	81.5
49.5	0.600	0.360000	83.7
57.5	0.675	0.455625	86.8
63.4	0.725	0.525625	88.6
72.7	0.800	0.640000	92.0
92.0	0.950	0.902500	97.9

Determina la ecuación de itinerario para dicho cuerpo.

La gráfica muestra con claridad que la relación entre distancia y tiempo es no lineal. Por esta razón, antes de realizar cualquier cálculo se debe rectificar esta curva.

Se considera que la relación entre distancia y tiempo es de la forma:

a) $d = m_1 t - n_1$

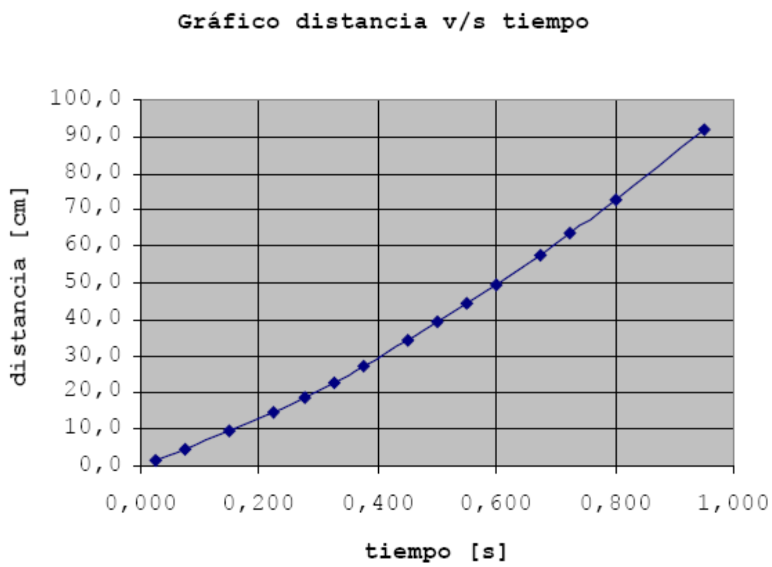


Gráfico distancia v/s tiempo
distancia [cm]
100,0
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
10,0
0,0
0,000
0,200
0,400
0,600
0,800
1,000
tiempo [s]

b) $d = m_2 t^2 - n_2$

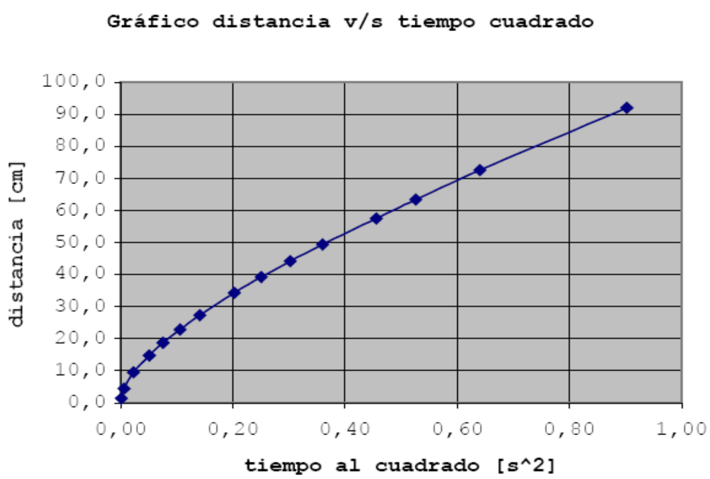
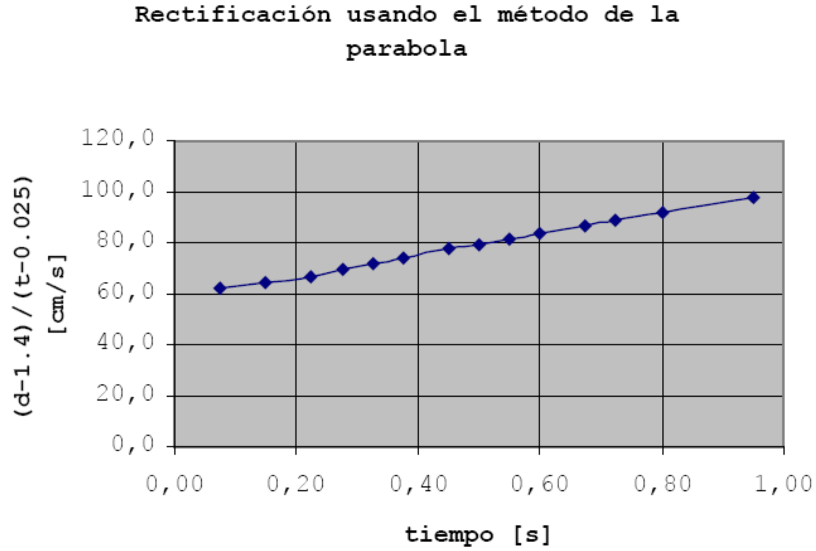


Gráfico distancia v/s tiempo cuadrado
distancia [cm]
100,0
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
10,0
0,0
0,00
0,20
0,40
0,60
0,80
1,00
tiempo al cuadrado [s^2]

c) $d = at^2 + bt + c$



Realizando los cálculos correspondientes, mediante calculadora o planilla de cálculo, se obtienen los siguientes resultados para cada uno de los casos anteriores.

a)
Pendiente: 96.24 [cm/s].
Punto de corte: - 6.18 [cm].
Coeficiente de correlación: 0.993.
Ecuación de la recta: $d = 96,24t - 6,18$

b)
Pendiente: 98.55 [cm/s^2].
Punto de corte: 10.26 [cm].
Coeficiente de correlación: 0.986.
Ecuación de la recta: $d = 98,55t^2 + 10,26$

c)
Pendiente: 41.77 [cm/s^2].
Punto de corte: 58.39 [cm/s].
Coeficiente de correlación: 0.999.

Ecuación de la recta: $\dfrac{d-1,4}{t-0,025}=41,77t+58,39$

Despejando la posición d en función del tiempo t, se obtiene:

$$d=41,77t^2+57,35t-0,059$$

Donde d está en centímetros y t en segundos.

De los tres casos analizados, el tercero es el que posee el coeficiente de correlación más cercano a uno, por lo cual la expresión matemática que mejor representa el movimiento del cuerpo sobre el plano inclinado es:

$$d=41,77t^2+57,35t$$

De esta expresión se puede decir que el cuerpo describe un movimiento uniformemente acelerado, donde el módulo de aceleración es 83.54 [cm/s^2] y la rapidez inicial 57.35 [cm/s]. El término constante -0.059 [cm] se puede despreciar, puesto que la precisión con que se mide la distancia es solo la décima de centímetro.