REPRESENTACIÓN DE DATOS

Dentro del quehacer científico, está la formulación de Leyes que describen los fenómenos naturales. Por ello, es usual que un experimentador realice un conjunto de mediciones para estudiar un fenómeno particular. Dicho estudio, por lo general, involucra analizar la variación de alguna magnitud física Y con respecto a otra magnitud física X. De esta manera, el experimentador, como resultado de su trabajo, obtiene un conjunto de pares de valores experimentales: (x_1,y_1), (x_2,y_2), ...(x_k,y_k).

Los datos así obtenidos deben presentarse de manera que los demás obtengan una información tanto cualitativa como cuantitativa del trabajo realizado. Para lograr esto recurrimos a tablas y representaciones gráficas. Las tablas nos permiten ver el conjunto de todos los datos obtenidos y con las gráficas podemos apreciar la relación que existe entre las variables involucradas en el experimento.

La determinación de la función algebraica o relación funcional asociada al gráfico, constituye uno de los objetivos importantes en la tarea experimental.

INSTRUCCIONES PARA CONFECCIONAR UN GRÁFICO.

En general, todo gráfico debe confeccionarse en papel milimetrado o con ayuda de un computador, cumpliendo con las siguientes indicaciones:

1. Título del fenómeno que representa.
2. Se elige un sistema de coordenadas (ortogonal).
3. Cada eje debe indicar la magnitud física que representa, el intervalo de medida y las unidades en que se expresan los datos.
4. La elección de los intervalos no es arbitraria, el intervalo representado en el eje debe concordar con el intervalo de la medida, de manera que todos los datos figuren dentro de la gráfica y ocupen la mayor parte del área de ésta.
5. Los ejes deben llevar indicaciones del valor de magnitud a intervalos regulares, que no tiene por qué coincidir con los valores de los puntos experimentales. Los intervalos deben estar equiespaciados, una misma longitud de eje no puede corresponder a dos intervalos distintos de valores de la magnitud. No es necesario marcar el valor de todos y cada uno de los intervalos.
6. Evitar las escalas complicadas, utilizando notación científica si es necesario.
7. Por convención, la variable independiente (VI) sé gráfica en el eje horizontal y la variable dependiente (VD) en el eje vertical.
8. No deben unirse los puntos experimentales mediante segmentos rectos, se debe trazar una curva suave y continua, que pase lo más cerca posible de los puntos experimentales (curva de aproximación).

Como criterio general debemos tener en cuenta que las variables no sufren casi nunca cambios bruscos (en nuestros experimentos nunca lo harán), por lo que las líneas no están compuestas nunca por segmentos rectos, las inflexiones son siempre suaves, por lo que deben trazarse líneas curvas (o una única recta) que represente el comportamiento de las magnitudes involucradas en el experimento.

9. Si es posible, gráficar con errores.

ANALISIS DE UN GRÁFICO.

Para determinar la relación funcional entre las variables experimentales, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Obtener la tabla de datos Y (VD) v/s X (VI).
2. Gráficar los datos.
3. La gráfica obtenida puede ser:
   a) Una relación lineal (recta).
   b) Una relación no lineal (curva).
4. En caso 3 b.-, se modifica alguna de las variables o ambas, de tal manera que la gráfica obtenida resulte una recta (proceso de rectificación).
5. Se escribe la ecuación de la recta, determinando previamente el valor de las constantes correspondientes (pendiente: *m*, ordenada en el origen: *n*).
6. Se realiza una interpretación física de la relación funcional, basado fundamentalmente en el análisis dimensional de las constantes.

   Lograda la relación lineal (recta) entre las variables, se debe determinar el valor de las constantes *m* y *n*. La relación funcional o Ley Física puede expresarse de la forma:

$$y = f(x,m,n)$$

   Donde:

   y : Variable dependiente

   x : Variable independiente

   f : Función lineal

   m : Pendiente

   n : Ordenada en el origen

Generalmente se obtienen k mediciones de las variables:

$$y_1 = f(x_1, m, n);\; y_2 = f(x_2, m, n); \ldots;\; y_k = f(x_k, m, n)$$

Con esto se desea obtener los valores más probables de *m* y *n*, para ello se utilizan tres métodos:

a) Método gráfico.

b) Método de los promedios.

c) Método de los mínimos cuadrados.

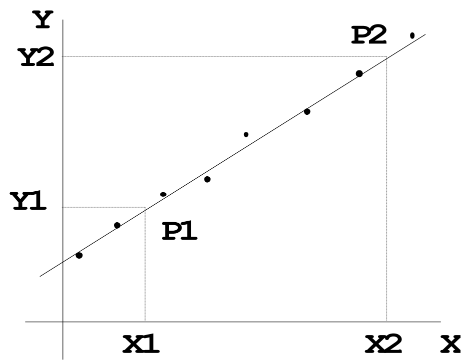
MÉTODO GRÁFICO.

Se utiliza para un número límite de puntos de moderada precisión.

Si el gráfico revela una relación lineal entre x e y de la forma:

"$y = m \cdot x + n$" (como se muestra en la figura), para determinar el valor de m, se eligen dos puntos de fácil lectura (P_1, P_2), en lo posible experimentales y con ellos se calcula el valor de m de la forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



El valor de n se puede leer directamente del gráfico (el punto en el que la recta intercepta al eje de las ordenadas) ó escribir la ecuación de la recta (de pendiente m conocida) con cualquiera de los dos puntos P_1 ó P_2, por ejemplo:

$$y_1 = m \cdot x_1 + n$$

$$y_2 = m \cdot x_2 + n$$

y determinar el valor de n.

Obtenidos los valores de m y n se escribe la ecuación de la recta ó relación funcional.

METODO DE LOS PROMEDIOS

Este método se fundamenta en que la sumatoria de las desviaciones del punto experimental a la recta ideal es cero, es decir:

$$\sum r_i = 0$$

Donde r_i se define por:

$$r_i = y_i - (m \cdot x_i + n)$$

Como se desea hacer una estimación del valor de la pendiente *m* y del punto de corte *n*, se necesitan dos ecuaciones para determinar dichos parámetros de la recta. Para ello, se escriben las ecuaciones de la recta para cada par de puntos, es decir;

$$\begin{array}{ll} y_1 = m \cdot x_1 + n & y_{p+1} = m \cdot x_{p+1} + n \\ y_2 = m \cdot x_2 + n & y_{p+2} = m \cdot x_{p+2} + n \\ \vdots & \vdots \\ y_p = m \cdot x_p + n & y_k = m \cdot x_k + n \end{array}$$

Luego, este conjunto de ecuaciones se divide en dos y se suma, es decir;

$$\sum y_i = \left(\sum x_i\right) \cdot m + p \cdot n$$

$$\sum y_i = \left(\sum x_i\right) \cdot m + (k - p) \cdot n$$

Donde *p* es un número entero entre 1 y *k*-1. Una vez echo esto, se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de *m* y *n*.

Este método se recomienda cuando la cantidad de datos es menor que 10 y la precisión de los datos es moderada.

Los resultados obtenidos con este método son mejores que con el método gráfico.

METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.

Este método se basa en que la sumatoria del cuadrado de las desviaciones r_i, definidas en el punto anterior, sea un mínimo, es decir;

$$E = \sum r_i^2 = minima$$

Con ayuda del Cálculo, se encuentra que la mejor estimación de *m* y *n*, se obtiene de las siguientes expresiones:

$$m = \frac{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right)}{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}$$

$$n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i\right)}{k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}$$

Para verificar si este ajuste por mínimos cuadrados es bueno, se utiliza el coeficiente de correlación, *r*, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$r = \frac{k \cdot \sum_{i=}^{k} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i}{\sqrt{\left(k \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2 \right) \cdot \left(k \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \right)^2 \right)}}$$

El coeficiente de correlación puede ser positivo o negativo y su valor absoluto es menor o igual a 1. Cuando | *r* | = 1, sé esta en presencia de una recta perfecta. El signo de *r* indica el signo de la pendiente de la recta, si es positivo, la pendiente es ascendente, si es negativo, la pendiente es descendente.

Así, mientras más cercano a uno es el coeficiente de correlación, mejor será el ajuste de los datos experimentales.

Cuando la gráfica de los datos no es lineal, se hace una transformación de variable (rectificación), de tal modo que al gráficar los puntos experimentales se obtenga una línea recta.

No existe una única forma de encontrar la transformación adecuada, por lo general, se debe recurrir a ecuaciones teóricas, si es que existen, o a la experiencia del experimentador.

La tabla siguiente indica algunas transformaciones que con mayor frecuencia se utilizan en Física.

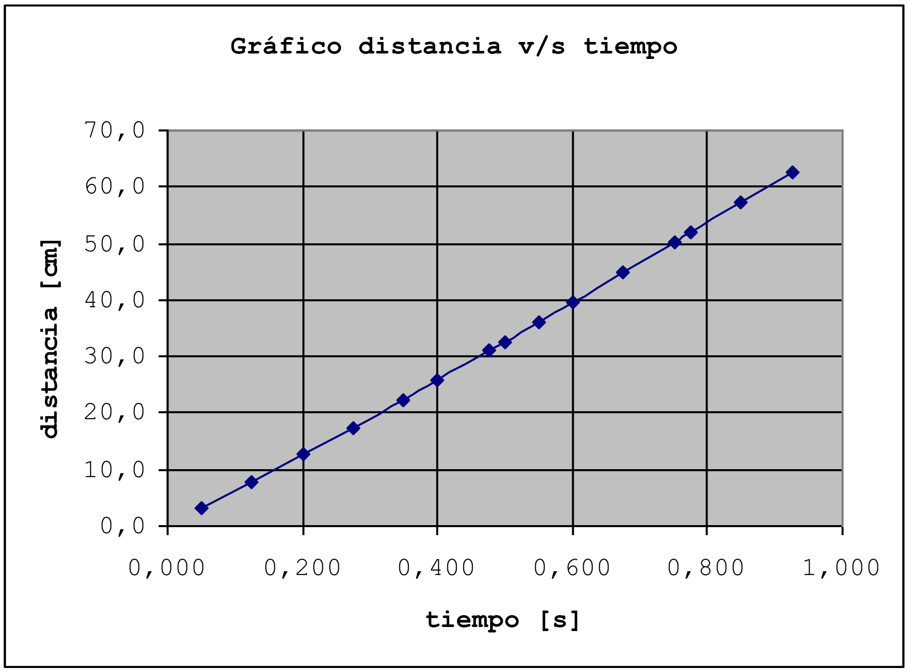
Si la función es de la forma	*Se rectifica graficando*
$y = a \cdot x^b$	$log(y) \quad v/s \quad log(x)$
$y = a \cdot e^{b \cdot x}$	$ln(y) \quad v/s \quad x$
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} \quad v/s \quad x$

Ante la posibilidad de no poder decidir, de entre varias rectas, cual es la mejor, debe recurrirse al coeficiente de correlación; aquella recta cuyo valor de | *r* | sea el mayor, es la más adecuada.

Ejemplos de Aplicación

1. Un grupo de alumnos, durante su sesión de laboratorio, obtuvo la siguiente tabla de datos que representa la posición de un móvil en función del tiempo.
   Determine la relación funcional entre la posición *d* y el tiempo *t*.

d [cm]	3.1	7.9	12.6	17.5	22.4	25.8	31.0	32.6	36.1	39.6	44.8	50.1	51.9	57.3	62.7
t [s]	0.050	0.125	0.200	0.275	0.350	0.400	0.475	0.500	0.550	0.600	0.675	0.750	0.775	0.850	0.925



Del gráfico, se puede ver claramente que existe una relación lineal entre *d* y *t*, por lo tanto, para encontrar la ecuación de la recta, se utilizaran los tres métodos mencionados anteriormente.

MÉTODO GRÁFICO.

Si se escoge $P_1 = (0.275 , 17.5)$ y $P_2 = (0.750 , 50.1)$ se obtienen los siguientes resultados:

Pendiente: $m = \frac{50.1 - 17.5}{0.750 - 0.275} = 68.6 \quad \left[\frac{cm}{s}\right]$, Del gráfico se puede obtener que el punto de corte es -1.0 [cm]. De esta manera, la ecuación de itinerario será de la forma: $d(t) = 68.6 \cdot t - 1.0$

Donde *d* se mide en centímetros y *t* en segundos.

MÉTODO DE LOS PROMEDIOS.

En este método se debe dividir los 15 datos en dos grupos, considere para el primer grupo los primeros 8 datos y los 7 restantes para el segundo. Realizando las sumatorias se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$152.9 = 2.375 \cdot m + 8 \cdot n$$
$$342.5 = 5.125 \cdot m + 7 \cdot n$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores para la pendiente *m* y el punto de corte *n*: m = 68.5 [cm/s] y n = -1.2 [cm]

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.

Para desarrollar este método en forma manual, se recomienda llenar la siguiente tabla:

d [cm]	t [s]	d·t [cm·s]	t^2 [s^2]	d^2 [cm^2]
3.1	0.050	0.1550	0.002500	9.61
7.9	0.125	0.9875	0.015625	62.41
12.6	0.200	2.5200	0.040000	158.76
17.5	0.275	4.8125	0.075625	306.25
22.4	0.350	7.8400	0.122500	501.76
25.8	0.400	10.3200	0.160000	665.64
31.0	0.475	14.7250	0.225625	961.00
32.6	0.500	16.3000	0.250000	1062.76
36.1	0.550	19.8550	0.302500	1303.21
39.6	0.600	23.7600	0.360000	1568.16
44.8	0.675	30.2400	0.455625	2007.04
50.1	0.750	37.5750	0.562500	2510.01
51.9	0.775	40.2225	0.600625	2693.61
57.3	0.850	48.7050	0.722500	3283.29
62.7	0.925	57.9975	0.855625	3931.29

De la tabla se puede obtener:

$\Sigma d = 495.4$; $\Sigma t = 7.5$; $\Sigma d \cdot t = 316.015$; $\Sigma t^2 = 4.75125$; $\Sigma d^2 = 21024.8$

Puesto que el número de datos es 15, se obtiene para la pendiente y el punto de corte los siguientes valores:

$$m = 68.3 \quad \left[\frac{cm}{s}\right]$$
$$n = -1.1 \quad [cm]$$

y la ecuación de la recta es de la forma:

$$d = 68.3 \cdot t - 1.1$$

Donde *d* esta en centímetros y *t* en segundos. El coeficiente de correlación es 0.9997, el cual indica que el grado de linealidad de los datos experimentales es muy cercano a una recta perfecta.

En los tres casos, se encuentra que la ecuación de itinerario es una recta, lo cual indica que el cuerpo en estudio posee un movimiento rectilíneo con rapidez constante, dicha rapidez es de 68.3 [cm/s].

2. En un experimento, se determinó la posición, en función del tiempo, de un cuerpo que cae por un plano inclinado.

   La siguiente tabla de datos muestra los resultados obtenidos.

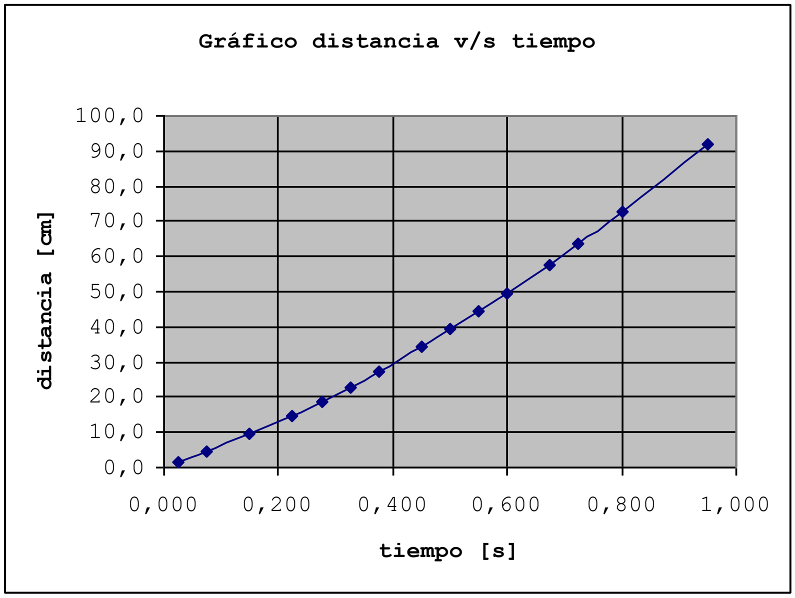
   Determine la ecuación de itinerario para dicho cuerpo.

d [cm]	t [s]	t^2 [s^2]	$\frac{(d-1.4)}{(t-0.025)}\left[\frac{cm}{s}\right]$
1.4	0.025	0.000625	_
4.5	0.075	0.005625	62.0
9.5	0.150	0.022500	64.8
14.8	0.225	0.050625	67.0
18.8	0.275	0.075625	69.6
22.9	0.325	0.105625	71.7
27.4	0.375	0.140625	74.3
34.3	0.450	0.202500	77.4
39.2	0.500	0.250000	79.6
44.2	0.550	0.302500	81.5
49.5	0.600	0.360000	83.7
57.5	0.675	0.455625	86.8
63.4	0.725	0.525625	88.6
72.7	0.800	0.640000	92.0
92.0	0.950	0.902500	97.9

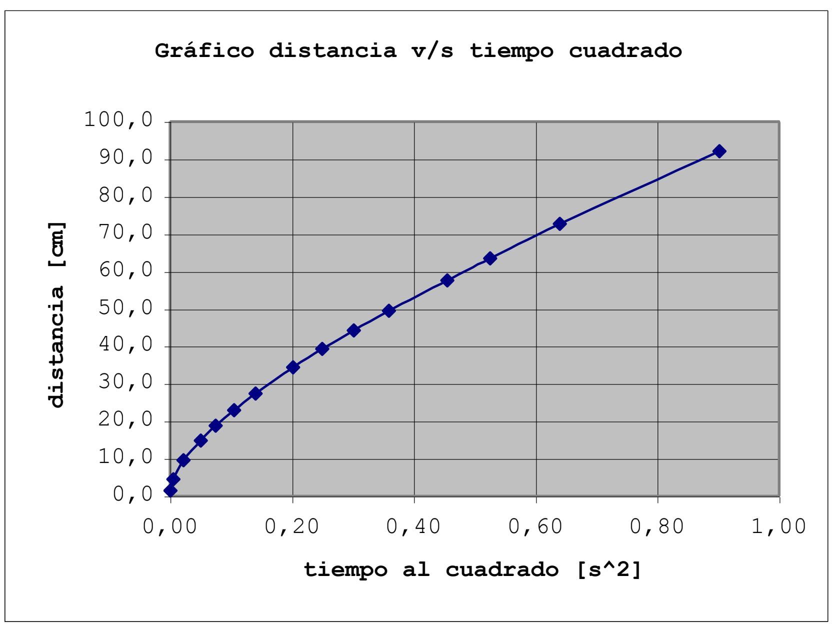
La gráfica muestra claramente que la relación entre la distancia y el tiempo es una relación no lineal. Por esta razón, antes de realizar cualquier cálculo se debe rectificar esta curva.

Se considera que la relación entre la distancia y el tiempo es de la forma:

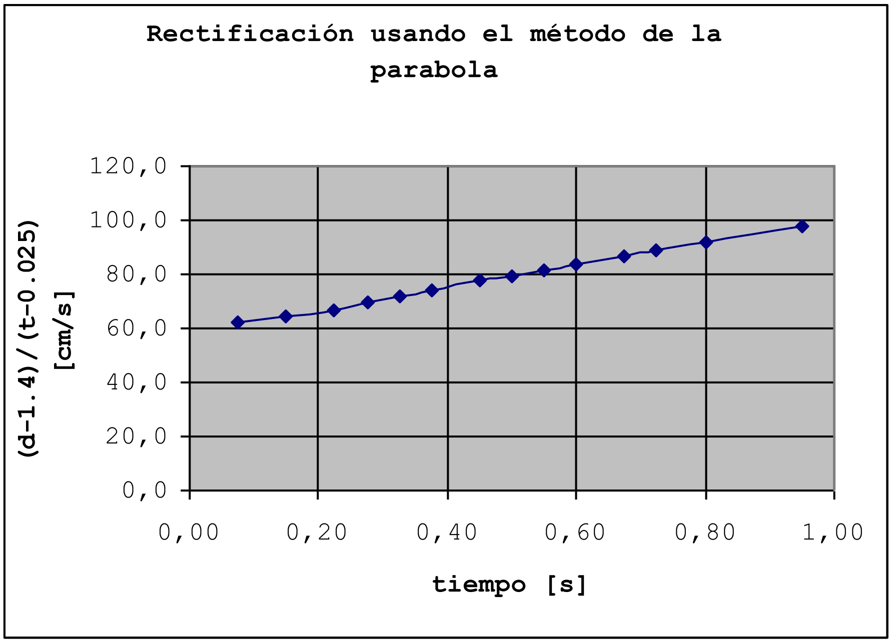
a) $d = m_1 \cdot t + n_1$



b) $d = m_2 \cdot t^2 + n_2$



c) $d = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$



Realizando los cálculos correspondientes, utilizando una calculadora o una planilla de cálculo, se obtienen los siguientes resultados para cada uno de los casos anteriores.

a) Pendiente : 96.24 [cm/s]
Punto de corte : - 6.18 [cm]
Coeficiente de correlación : 0.993
Ecuación de la recta : $d = 96.24 \cdot t - 6018$

b) Pendiente : 98.55 [cm/s2]
Punto de corte : 10.26 [cm]
Coeficiente de correlación : 0.986
Ecuación de la recta : $d = 98.55 \cdot t^2 + 10.26$

c) Pendiente : 41.77 [cm/s2]
Punto de corte : 58.39 [cm/s]
Coeficiente de correlación : 0.999

Ecuación de la recta : $\frac{d - 1.4}{t - 0.025} = 41.77 \cdot t + 58.39$

Despejando la posición *d* en función del tiempo *t*, se obtiene:

$$d = 41.77 \cdot t^2 + 57.35 - 0.059$$

Donde *d* esta en centímetros y *t* en segundos.

De los tres casos analizados, el tercero de ellos es el que posee el coeficiente de correlación más cercano a uno, por lo cual, la expresión matemática que mejor representa el movimiento del cuerpo sobre el plano inclinado es:

$$d = 41.77 \cdot t^2 + 57.35$$

De esta expresión, se puede decir que el cuerpo describe un movimiento uniformemente acelerado, donde el módulo de la aceleración es 83.54 [cm/s^2] y la rapidez inicial es de 57.35 [cm/s]. El término constante -0.059 [cm] se puede despreciar puesto que la precisión con que es medida la distancia es sólo la décima de centímetro.