

## ***Muchos datos, distribución Gaussiana y análisis estadístico.***

González, J. (2021). *Muchos datos,  
distribución Gaussiana y análisis estadístico*  
[Apunte]. Universidad Andrés Bello,  
Santiago, Chile.

## MUCHOS DATOS, DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Adaptado del documento de laboratorio creado por Curín, C. y Llanquihuen, A.

### 1 Medir

Es comparar una magnitud física con otra de su misma clase que se ha elegido como unidad. Al repetir mediciones de una misma magnitud en las mismas condiciones externas e internas, las medidas resultantes no tienen el mismo valor por lo que se produce una dispersión en las medidas registradas, que no se puede eliminar totalmente, pero si reducirse al mínimo. Esta dispersión se puede cuantificar y se le llama error en las medidas.

Una medición puede ser:

- Directa
- Indirecta

Así, se entenderá como medición directa aquella en la cual la magnitud a medir se compara directamente con la unidad patrón. Medición indirecta será aquella en la cual su valor se calcula como función de una o más magnitudes físicas medidas directa o indirectamente. El resultado de esta medición cuantitativa es una cantidad física, es decir, un número con su respectiva unidad de medida.

Cualquiera sea el método empleado, siempre está presente el error, por causas que producen imprecisión en la medida. El problema de la determinación del valor de una magnitud ha sido muy estudiado con el nombre de Teoría de Errores. La importancia de estimar los errores está en la entrega de una indicación de cuán cerca se encuentra un resultado experimental de su valor verdadero.

La cantidad de cifras significativas hacen la diferencia entre una medida y otra. Así por ejemplo,  $L = 3.00[cm]$  y  $L = 3[cm]$  como cantidades físicas no son iguales, pues la cantidad de cifras significativas no es la misma. En el primer caso, se tiene una medición que fue realizada con un instrumento que discriminaba hasta la centésima de centímetro. En cambio, en la segunda se utilizó un aparato que discriminaba sólo hasta la unidad de centímetro. De lo anterior se deduce que la cantidad de cifras significativas está íntimamente relacionada con el instrumento de medición. NO se debe expresar una cantidad física con más cifras significativas que las que el instrumento utilizado puede discriminar.

Generalmente, se deben redondear la última cifra significativa. Para ello se utiliza el siguiente criterio: "Si el dígito a la derecha del dígito a redondear es mayor o igual a 5, se suma 1 (uno) al dígito que se desea redondear, en caso contrario se mantiene su valor".

## 2 Distribuciones Teóricas y Experimentales de los Datos

Para analizar conjuntos de datos existen modelos que hablan de distribuciones teóricas bien definidas y que tienen propiedades constantes y ampliamente comprendidas. Muchas distribuciones teóricas de conjuntos de datos se han desarrollado para propósitos especiales, pero aquí nos ocuparemos de una sola: la distribución Gaussiana o "normal".

La distribución de Gauss se utiliza para interpretar muchos tipos de mediciones físicas, en parte debido a que las circunstancias mecánicas de muchas de éstas guardan estrecha correspondencia con los fundamentos teóricos de la distribución Gaussiana, y en parte porque la experiencia demuestra que la estadística Gaussiana sí proporciona una descripción razonablemente exacta de muchos fenómenos reales. Sólo para otro tipo común de mediciones físicas es más apropiada otra distribución: al observar fenómenos como la desintegración radioactiva debemos emplear la distribución conocida como distribución de Poisson.

Una forma de mostrar los resultados de un conjunto de mediciones de una sola cantidad, es mediante un "HISTOGRAMA", que es un gráfico que se construye dividiendo el intervalo de variación de valores medidos en un conjunto de subintervalos iguales v/s la frecuencia correspondiente, que es el número de mediciones que cada subintervalo contiene, ver figura (1).

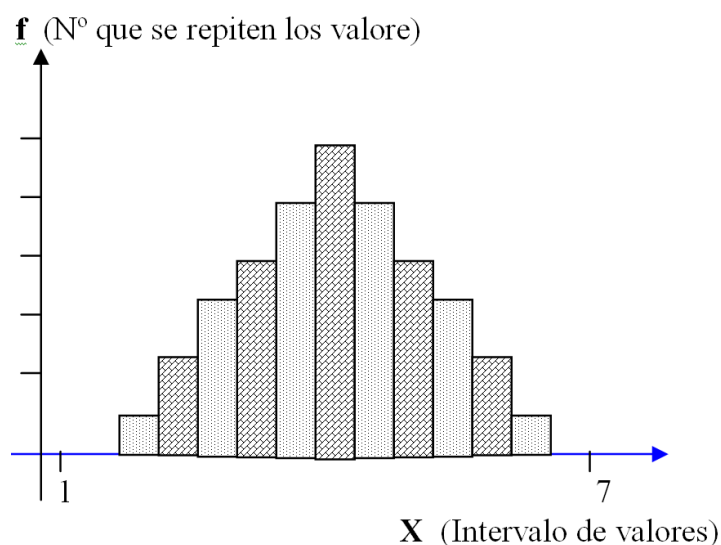


Figure 1:

Si el procedimiento experimental ha sido el apropiado, el histograma debe acercarse a la curva de Gauss o curva de distribución normal. Esta curva está definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} e^{\left( -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_d^2} \right)}$$

Donde  $\bar{x}$  es el valor medio o promedio y  $\sigma_d$  es la desviación estándar (vea sección 4.4 para su definición). La representación gráfica de esta curva está en la figura 2, donde se considera que  $N \rightarrow \infty$

### Curva de Distribución de Gauss

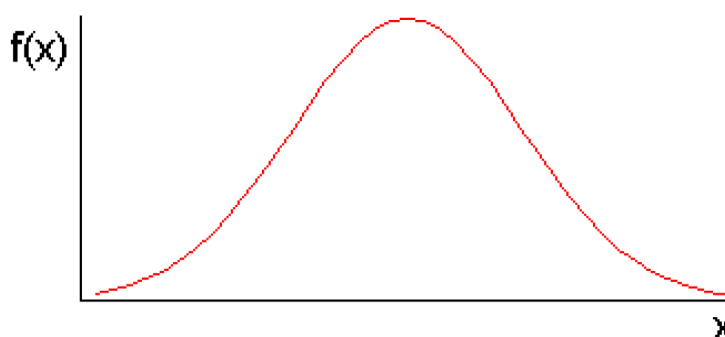


Figure 2:

La desviación estándar es una muestra de la desviación de las medidas con respecto al promedio. El área bajo la curva de Gauss indica el número de medidas realizadas, así de tablas estadísticas, se puede establecer que el número de medidas comprendidas en el intervalo  $[\bar{x} - \sigma_d; \bar{x} + \sigma_d]$  es un 68,2% del total, el intervalo  $[\bar{x} - 2\sigma_d; \bar{x} + 2\sigma_d]$  es de un 95,4% y en el intervalo  $[\bar{x} - 3\sigma_d; \bar{x} + 3\sigma_d]$  es un 99,7% del total de mediciones realizadas.

Sin embargo, en algunos conjuntos de datos el número de valores distintos resulta demasiado grande para emplear este método. En tales casos es útil dividir los valores en grupos o intervalos de clase, y después graficar el número de los valores de los datos que cae en cada intervalo de clase. El número de intervalos de clase que se escoja deberá ser de manera que 1) no se tengan tan pocas clases a costa de perder mucha información de los valores reales de los datos en cada clase y 2) no se tengan demasiadas clases, lo cual da como resultado frecuencias de clase demasiado pequeñas como para mostrar un patrón discernible. Aunque es frecuente emplear de 5 a 10 intervalos de clase, el número apropiado resulta una elección subjetiva, y por supuesto, usted puede probar distintos números de intervalos de clase para determinar cuál de los diagramas resultantes parece ser

más revelador acerca de los datos. Es común, aunque no esencial, emplear intervalos de una misma longitud.

A los extremos de un intervalo de clase se les llama límites de clase. Adoptaremos la convención de inclusión del extremo izquierdo que estipula que un intervalo de clase contiene el punto de su extremo izquierdo pero no el de su extremo derecho, Así, por ejemplo, el intervalo de clase 20–30 contiene todos los valores que son mayores o iguales a 20 y menores que 30.

La tabla 2 presenta los tiempos de vida de 200 lámparas incandescentes. Una tabla de frecuencias de clase con los datos de la tabla 2 se ilustra en la tabla 2. Los intervalos de clase son de longitud 100, empezando el primero en 500.

Tabla 2:  
Vida en horas de 200 lámparas incandescentes

1 067	919	1 196	785	1 126	936	918	1 156	920	948
855	1 092	1 162	1 170	929	950	905	972	1 035	1 045
1 157	1 195	1 195	1 340	1 122	938	970	1 237	956	1 102
1 022	978	832	1 009	1 157	1 151	1 009	765	958	902
923	1 333	811	1 217	1 085	896	958	1 311	1 037	702
521	933	928	1 153	946	858	1 071	1 069	830	1 063
930	807	954	1 063	1 002	909	1 077	1 021	1 062	1 157
999	932	1 035	944	1 049	940	1 122	1 115	833	1 320
901	1 324	818	1 250	1 203	1 078	890	1 303	1 011	1 102
996	780	900	1 106	704	621	854	1 178	1 138	951
1 187	1 067	1 118	1 037	958	760	1 101	949	992	966
824	653	980	935	878	934	910	1 058	730	980
844	814	1 103	1 000	788	1 143	935	1 069	1 170	1 067
1 037	1 151	863	990	1 035	1 112	931	970	932	904
1 026	1 147	883	867	990	1 258	1 192	922	1 150	1 091
1 039	1 083	1 040	1 289	699	1 083	880	1 029	658	912
1 023	984	856	924	801	1 122	1 292	1 116	880	1 173
1 134	932	938	1 078	1 180	1 106	1 184	954	824	529
998	996	1 133	765	775	1 105	1 081	1 171	705	1 425
610	916	1 001	895	709	860	1 110	1 149	972	1 002

A una gráfica de barras que ilustra las clases mediante barras adyacentes una a la otra se le llama histograma. El eje vertical de un histograma puede representar ya sea las frecuencias de clase o las frecuencias relativas de clase; en el primer caso, a esta gráfica se le da el nombre de histograma de frecuencias, y en el segundo, histograma de frecuencias relativas. La figura 3 presenta un histograma de frecuencias de los datos en la tabla 2.

Tabla 2:  
Una tabla de frecuencias de clases

Intervalo de clase	Frecuencia (Número de valores de los datos en el intervalo)
500–600	2
600–700	5
700–800	12
800–900	25
900–1000	58
1 000–1 100	41
1 100–1 200	43
1 200–1 300	7
1 300–1 400	6
1 400–1 500	1

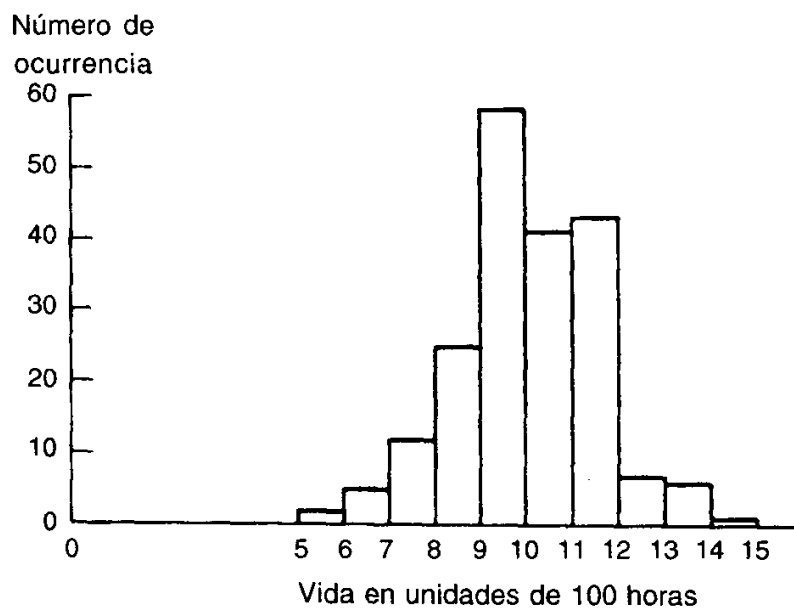


Figure 3: Un Histograma de frecuencia

## 3 Errores

### 3.1 Los Errores Sistemáticos

Los Errores Sistemáticos se deben a causas posibles de identificar y, en principio, se pueden corregir. Siempre afectan el resultado de una medición en el mismo sentido, o sea, desplazan todas las medidas en la misma dirección. Ejemplos de ellos son:

- a) Mala calibración de los instrumentos o instrumentos dañados.
- b) Uso de fórmulas incorrectas.
- c) Un método de medición inadecuado.
- d) Variaciones de las condiciones experimentales.

Cuando el resultado de una medición está libre de errores sistemáticos, se dice que la medida es EXACTA: se podría decir que el valor medido se encuentra muy cerca del valor de verdadero. De lo contrario, será INEXACTA y significa que sistemáticamente las medidas ( $X_{medido}$ ) están lejos del valor verdadero ( $X_{verdadero}$ ), por lo que hablaremos de errores sistemáticos. La mayoría de las veces es posible detectar la fuente generadora, y así evitarlos.

### 3.2 Los Errores Aleatorios

Los Errores Aleatorios son producto de variaciones incontrolables de un gran número de factores experimentales y no pueden ser eliminados. Sólo pueden ser minimizados. Estos errores afectan a una medida de una forma indeterminada.

Cuando el error aleatorio de una medida es pequeño, se dice que la medida es PRECISA. Es lo mismo que si tenemos una dispersión pequeña y todas las medidas caen muy cerca del valor medido ( $X_{medido}$ ): nuestras medidas son precisas. De lo contrario, son imprecisas y hablaremos de errores aleatorios.

### 3.3 Comparación entre Errores Sistemáticos y Aleatorios

	Errores Aleatorios	Errores Sistemáticos
1	Una medición tiene igual probabilidad de ser mayor o menor que el valor "verdadero".	Una medición tiene mayor probabilidad de caer a un lado del valor "verdadero" que al otro.
2	(Equivalente al 1). La distribución de muchas mediciones es simétrica con respecto al valor verdadero	La distribución de muchas mediciones está centrada en un valor diferente del valor "verdadero".
3	Si se dispone de suficientes datos, es posible calcular la magnitud del error a partir de ellos.	No se puede saber la magnitud del error de ninguna manera, ni su signo, ni siquiera si existe o no.
4	Se puede reducir el error repitiendo las mediciones	En general la repetición de las mediciones no reduce el error.
5	En muchos casos no hay manera de eliminar estos errores	Al descubrir la existencia del error casi siempre es fácil eliminarlo (esta eliminación puede incluso ser automática)
6	Existe una teoría matemática bien desarrollada que permite analizar y computar los errores.	No puede haber teoría.
7	Los errores aleatorios normalmente resultan de las limitaciones del equipo; o sea, no tienen interés físico en sí, aunque en ciertos casos reflejan limitaciones fundamentales (como el ruido y el principio de incertidumbre) que tienen interés físico, pero estos ya se conocen.	El descubrimiento de errores sistemáticos nos puede llevar a descubrir fenómenos físicos y casi siempre el tratarlos resulta un problema de interés físico.

### 3.4 Precisión, Exactitud y Sensibilidad

- Decimos que una medida es tanto más **exacta** cuando el valor medio de las **n medidas** está más cerca del valor que se considera verdadero.
- La medida será más precisa cuanto menor sea la dispersión de estas medidas.
- Definimos sensibilidad de un instrumento como el intervalo más pequeño de la magnitud medible con él

Los instrumentos de medida se diseñan para que sean precisos y se reajustan periódicamente para que además sean exactos.



## 4 Cuantificación de Errores

Cuando se tiene un conjunto de mediciones  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de una misma cantidad física, independientes entre sí y libres de errores sistemáticos, se acostumbra expresar el resultado de la forma:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

donde  $\bar{X}$  es el valor más representativo de la cantidad medida y  $\Delta X$  es el error absoluto de  $X$ .

El valor representativo es el valor medio, media o promedio, definido por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

Donde  $N$  es el número total de medidas realizadas.

### 4.1 Desviación

La desviación de una medida es la diferencia entre la medida y el promedio del conjunto de medidas.

### 4.2 Desviación Media

La desviación media de un conjunto de mediciones es el promedio de las desviaciones de cada medida, tomando todas las desviaciones como positivas (valor absoluto).

Si se tienen  $N$  medidas cuyos valores son  $X_i$ , la desviación de la medida  $i$  es

$$d_i = X_i - \bar{X}$$

La desviación media se define como:

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |d_i|$$

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - \bar{X}|$$

Si los  $|d_i|$  son todos pequeños, quiere decir que todas las medidas caen muy cerca del promedio (lo que no significa que necesariamente caigan cerca del valor verdadero) y son muy "reproducibles".

También podemos decir que el efecto de los errores aleatorios en nuestras medidas es pequeño.

La desviación Media se aplica como estimación del error para  $N \leq 4$ .

El resultado de una serie de mediciones se podría presentar como:

$$\bar{X} \pm \Delta X = \bar{X} \pm \rho.$$

### 4.3 Desviación Típica

A este nuevo concepto lo vamos a llamar  $\sigma_m$  (sigma). Algunos también la llaman desviación cuadrática media. La definimos así:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$$

La desviación típica es una buena medida de la precisión de un conjunto de medidas y es la más usada cuando se tiene 5 o más medidas ( $N \geq 5$ ).

Sera el método usado en clases.

### 4.4 Desviación Estándar

Otro concepto necesario es la desviación estándar del promedio de medidas, simbolizado como  $\sigma_d$ . Se lo define como :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_m = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X} - X_i)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N (\bar{X} - X_i)^2 \right)}$$

al desarrollo el cuadrado de binomio, tenemos

$$\begin{aligned} \sum (\bar{X} - X_i)^2 &= \sum (\bar{X}^2 - 2\bar{X}X_i + X_i^2) = \sum \bar{X}^2 - 2\bar{X} \sum X_i + \sum X_i^2 = \\ &= N\bar{X}^2 - 2N\bar{X}^2 + \sum X_i^2 = -N\bar{X}^2 + \sum X_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N} \end{aligned}$$

y recuerde que  $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N}$  o que  $\sum X_i = N \bar{X}$

al sustituir, tenemos que:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}}{N-1}}$$

## 4.5 Error típico o error normal del Promedio

Se define como:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{\sigma_d}{\sqrt{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sqrt{\frac{N}{N-1}} \right) \sigma_m \\ &= \left( \sqrt{\frac{1}{N-1}} \right) \sigma_m\end{aligned}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}}{N(N-1)}}$$

El resultado de una serie de mediciones se podría presentar como:

$$\bar{X} \pm \Delta X = \bar{X} \pm \sigma_p$$

Será el método usado en clases.

## 4.6 Error instrumental:

La metodología de la cuantificación de la incertidumbre (error) dependerá de las mediciones directas:

- Si la magnitud se mide directamente una única vez (sensibilidad instrumental)
- Si la magnitud se mide directamente n-veces (dispersión de las mediciones)

### 4.6.1 Una medición

En los laboratorios se asumirá que cuando un experimento no permite o no tiene sentido medir más de una (1) vez, como incertidumbre se considerará el **error instrumental**, el cual se definirá como:

#### Instrumento análogo

Se asumirá como incertidumbre (error) de la magnitud obtenida directamente en la medición la mita **unidad mínima de comparación** del instrumento utilizado

#### Instrumento digital

Se asumirá como incertidumbre de la magnitud obtenida directamente en la medición, la **unidad mínima de comparación** del instrumento utilizado

#### 4.6.2 N mediciones

Las incertidumbres de origen aleatorios se pueden minimizar realizando varias mediciones. Por lo general este conjunto de mediciones se pueden agrupar en una distribución, los tres parámetros más importantes de esta distribución son:

1. El valor medio
2. La desviación estándar
3. Error del Valor medio (error estándar, error típico)

**Recuerden:** Todo resultado experimental de una medición no tiene validez científica o técnica si no tiene definido su incertidumbre(error) y su unidad respectiva. De la forma:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

ejemplo:

$$V_o = 55,345 \pm 0,003 \text{ [V]}$$

### 4.7 Error Absoluto.

Una vez que se ha determinado  $\sigma_m$ ,  $\sigma_d$ ,  $\sigma_p$  y además, todas las medidas se encuentran dentro del intervalo de interés, se define el error absoluto del promedio como:

$$\Delta X = \sigma_p$$

Cuando el numero de medidas es menor que 10, un análisis estadístico no es muy confiable, por lo cual, en este caso se determinará el error absoluto mediante la siguiente expresión:

$$\Delta X = \rho$$

Donde  $\rho$  corresponde al error medio definido por la desviación media.

### 4.8 Error relativo:

Es una medida de la precisión con que fue realizada la medición.

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{\bar{X}}$$

en muchas ocasiones se suele utilizar para relacionar el error absoluto y el valor verdadero absoluto.

Por ejemplo, si la aceleración de la gravedad medida por el estudiante es de  $8,7[m/s^2]$ , pero el valor verdadero es  $9,81[m/s^2]$ , entonces el error relativo es

$$\frac{|8,7 - 9,81|}{9,81} = 0,1131 = 11,31\%$$

## 4.9 Error porcentual:

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \times 100$$

## 4.10 Criterio para Desechar Medidas.

Se considera que una medida es debida a una equivocación o a descuido del experimentador, si su valor se encuentra fuera del intervalo, de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Si el numero total de mediciones  $N$  está comprendido entre 10 y 25 ; el intervalo considerado es:

$$[\bar{X} - 2\sigma_d; \bar{X} + 2\sigma_d]$$

2. Si  $N$  es mayor de 25; el intervalo considerado es:

$$[\bar{X} - 3\sigma_d; \bar{X} + 3\sigma_d]$$

## 5 Propagación de Errores

En el caso de una medición indirecta, es común determinarla a partir de una o más mediciones directas o indirectas.

Para determinar el error absoluto de una medición indirecta es necesario determinar el error absoluto de una magnitud física  $Z$  que es función de otras magnitudes físicas  $A, B, C$ , etc que se miden en forma directa o indirectas, y son independientes entre, sí.

$$A + \Delta A$$

$$B + \Delta B$$

$$C + \Delta C$$

$$\text{y } Z = Z(A, B, C)$$

Donde la función  $Z$  de varias variables en que el error típico  $\Delta Z$  está relacionado con los errores de las magnitudes medidas así es:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial A} \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B} \cdot \Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial C} \cdot \Delta C\right)^2 + \dots}$$

y así sucesivamente, por lo se pueden obtener expresiones para determinar el valor de  $\Delta Z$ , donde la derivada parcial de  $Z(A, B, C)$  con respecto a las variables  $A, B, C$ , debe ser evaluada en el punto donde todas las magnitudes son más probables.

Ejemplo:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2}$$

$$\Delta V = \sqrt{(2\pi r h \cdot \Delta r)^2 + (\pi r^2 \cdot \Delta h)^2}$$

$$\Delta V = \pi r^2 h \sqrt{(2 \frac{\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2}$$

$$V \pm \Delta V = \pi r^2 h \pm \pi r^2 h \sqrt{(2 \frac{\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2}$$

## 5.1 Operaciones Matemáticas

Para formulas simple se suele usar las operaciones matemática.

### 5.1.1 Suma:

$$\text{Sea } Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)$$

$$Z = A + B$$

el error que llamamos  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = 1 \text{ y } \frac{\partial Z}{\partial B} = 1, \text{ lo que reemplazando en ecuación}$$

general, da :

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 = ((\frac{\partial Z}{\partial A}) \cdot \Delta A)^2 + ((\frac{\partial Z}{\partial B}) \cdot \Delta B)^2$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$$

$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

$$(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = (A + B) \pm (\sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2})$$

### 5.1.2 Diferencia

$$\text{Sea } Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$

$$Z = A - B$$

el error  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = 1 \text{ y } \frac{\partial Z}{\partial B} = -1, \text{ reemplazando da :}$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 = ((\frac{\partial Z}{\partial A}) \cdot \Delta A)^2 + ((\frac{\partial Z}{\partial B}) \cdot \Delta B)^2$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (-\Delta B)^2$$

$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

$$(A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B) = (A - B) \pm (\sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2})$$

### 5.1.3 Producto

Sea  $Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) \cdot (B \pm \Delta B)$

$$Z = A \cdot B$$

el error  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = B \text{ y } \frac{\partial Z}{\partial B} = A, \text{ reemplazando da :}$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 = \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial A}\right) \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right) \cdot \Delta B\right)^2$$

$$(\Delta Z)^2 = (B \cdot \Delta A)^2 + (A \cdot \Delta B)^2 = B^2 \cdot (\Delta A)^2 + A^2 \cdot (\Delta B)^2 = A^2 B^2 \left(\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2\right)$$

$$\Delta Z = AB \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

$$(A \pm \Delta A) \cdot (B \pm \Delta B) = AB \pm AB \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

### 5.1.4 Cociente

$$\text{Sea } Z \pm \Delta Z = \frac{(A \pm \Delta A)}{(B \pm \Delta B)}$$

$$Z = \frac{A}{B}$$

el error  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = \frac{1}{B} \text{ y } \frac{\partial Z}{\partial B} = \frac{-A}{B^2}, \text{ reemplazando da :}$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 = \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial A}\right) \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right) \cdot \Delta B\right)^2$$

$$(\Delta Z)^2 = \left(\frac{1}{B} \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\frac{-A}{B^2} \cdot \Delta B\right)^2 = \frac{A^2}{B^2} \left(\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2\right)$$

$$\Delta Z = \frac{A}{B} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

$$\frac{(A \pm \Delta A)}{(B \pm \Delta B)} = \frac{A}{B} \pm \frac{A}{B} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

### 5.1.5 Variables elevadas a potencias

$$\text{Sea } Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)^n$$

$$Z = A^n$$

el error  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = nA^{n-1}, \text{ reemplazando da :}$$

$$\Delta Z = nA^{n-1}\Delta A$$

$$(A \pm \Delta A)^n = A^n \pm nA^{n-1}\Delta A$$

La fórmula anterior también es válida para n negativo o fraccionario (n a los reales)

Ninguna teoría de errores es válida si el error porcentual es del orden del 30 %

### 5.1.6 Multiplicación de una variable por una constante ( K )

$$\text{Sea } Z \pm \Delta Z = K(A \pm \Delta A)$$

$$Z = KA$$

el error  $\Delta Z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = K, \text{ reemplazando da :}$$

$$\Delta Z = K\Delta A$$

$$K(A \pm \Delta A) = KA \pm K\Delta A$$

Ejemplo

$$V = \pi r^2 h$$

$$V \pm \Delta V = \pi(r \pm \Delta r)^2(h \pm \Delta h)$$

$$V \pm \Delta V = \pi(r^2 \pm 2r\Delta r)(h \pm \Delta h)$$

$$V \pm \Delta V = \pi(r^2 h \pm r^2 h \sqrt{(\frac{2r\Delta r}{r^2})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2})$$

$$V \pm \Delta V = \pi r^2 h \pm \pi r^2 h \sqrt{(\frac{2r\Delta r}{r^2})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2}$$

$$V \pm \Delta V = \pi r^2 h \pm \pi r^2 h \sqrt{(2\frac{\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2}$$



El resultado obtenido es idéntico al ejemplo anterior, pero si la expresión de  $V$  es más compleja, los errores no son iguales y las operaciones matemática producen un mayor error que al usar la expresión con derivadas parciales.

## Ejemplo de Aplicación

1. Se midió el período  $T$  de un péndulo simple; la Tabla 1 muestra el resultado de dichas mediciones. Aquí,  $T$  es el período y  $f$  es la frecuencia de aparición de dicho valor.

Determine el valor medio de  $T$  y su error asociado.

Tabla 1: Frecuencia v/s Periodo

$T(s)$	1,410	1,439	1,440	1,441	1,442	1,443	1,444	1,445	1,446	1,447	1,451	1,470
$f$	1	2	7	13	17	6	5	3	3	3	1	1

Para desarrollar los cálculos es conveniente tabular la información como indica la Tabla 2. Donde la línea indicada por  $\Sigma$ , expresa la sumatoria de los valores de dicha columna.

Tabla 2

	$f$	$T(s)$	$f \cdot T(s)$	$ T - \bar{T} $	$f \cdot (T - \bar{T})^2$
	1	1,410	1,41	0,03240	0,00104976
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,22	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
	1	1,451	1,451	0,00860	7,396E-05
	1	1,470	1,47	0,02760	0,00076176
$\Sigma$	62		89,428		0,00211472

Haciendo uso de la Tabla 2, se encuentra el siguiente valor para el promedio de  $\bar{T}$ , la desviación típica de la muestra  $\sigma_m$  y de la desviación estándar  $\sigma_d$ .

$$\bar{T} = 1,4424 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,00584024 \text{ [s]}$$

$$\sigma_d = 0,00588791 \text{ [s]}$$

Según los criterios para las cifras significativas, estos valores se deben expresar como:

$$\bar{T} = 1,4424 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,0058 \text{ [s]}$$

$$\sigma_d = 0,0059 \text{ [s]}$$

Antes de aceptar estos valores, se debe verificar que todas las medidas del período estén comprendidas en el intervalo:

$$[\bar{x} - 3\sigma_d; \bar{x} + 3\sigma_d]$$

o en forma equivalente, que se cumpla para cada medición la desigualdad

$$[T_i - \bar{T}] < 3\sigma_d$$

En este caso se utiliza en valor de  $3\sigma$ , pues el número de datos es mayor que 50, luego, todas aquellas medidas que no cumplan con la condición:

$$|T_i - \bar{T}| < 0,0069 \text{ Segundos, deben ser eliminadas.}$$

De la tabla 2, se ve claramente que los valores 1,410 [s] y 1,470 [s] deben ser desechadas pues se encuentran fuera del intervalo correspondiente y los cálculos deben volver a realizarse.

Tabla 3

	$f$	$T(s)$	$f \cdot T(s)$	$ T - \bar{T} $	$f \cdot (T - \bar{T})^2$
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,220	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
	1	1,451	1,451	0,00860	7,396E-05
$\Sigma$	60		88,548		0,00003032

Al eliminar estos datos, los nuevos resultados son los siguientes:

$$\bar{T} = 1,4425 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,00224796 \text{ [s]}$$

$$\sigma_d = 0,00226693 \text{ [s]}$$

y los valores aproximados son:

$$\bar{T} = 1,4425 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,0022 \text{ [s]}$$

$$\sigma_d = 0,0023 \text{ [s]}$$

y el criterio para desechar medidas queda como:  $|T_i - \bar{T}| < 0,0069$  segundos de la Tabla 3 se ve claramente que la medida 1,451 [s] está fuera del rango y por lo tanto se desecha.

La tabla siguiente muestra los resultados que se obtienen eliminando dicho dato:

Tabla 4

	$f$	$T(s)$	$f \cdot T(s)$	$ T - \bar{T} $	$f \cdot (T - \bar{T})^2$
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,220	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
$\Sigma$	59		85,097		0,00022924

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$\bar{T} = 1,4423 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,00197115 \text{ [s].}$$

$$\sigma_d = 0,00198807 \text{ [s]}$$

$$3 \sigma_d = 0,006 \text{ [s]}$$

En este caso, el criterio para desechar medidas nos indica que no existe ninguna medida fuera del rango y por lo tanto no se eliminan datos, de esta manera el valor del error típico del promedio es:

$$\sigma_p = 0,00025882 \text{ [s]}$$

y sus valores aproximados son:

$$\bar{T} = 1,4423 \text{ [s]}$$

$$\sigma_m = 0,0020 \text{ [s]}$$

$$\sigma_d = 0,0020 \text{ [s]}$$

$$\sigma_p = 0,0003 \text{ [s]}$$

De esta manera el error absoluto del período se obtiene de:

$$\Delta T = 2 \sigma_p + EI$$

Donde el error instrumental EI, se obtiene de dividir por dos la menor división de la escala, en este caso, su valor es 0,0005 [s] y por lo tanto el error absoluto será:

$$\Delta T = 2 * 0,0003 + 0,0005 [S] = 0,0011 [S]$$

por lo cual, el resultado solicitado es:

$$T = (1,4423 \pm 0,0011) [s]$$

