ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

MEDIDAS

El concepto de medición es importante en Física, pues magnitudes tales como masa, tiempo, longitud, se definen en función de su medida.

Se entiende por medir una magnitud física a la acción de comparar cuantitativamente dicha magnitud con otra de su misma especie que se utiliza como unidad. En este proceso de medición, la comparación puede ser:

a) Directa

b) Indirecta

Así, se entenderá como medición directa aquella en la cual la magnitud a medir se compara directamente con la unidad patrón. Medición indirecta será aquella en la cual su valor se calcula como función de una o más magnitudes físicas medidas directa o indirectamente.

El resultado de esta comparación cuantitativa es una cantidad física, es decir, un número con su respectiva unidad de medida.

Se define el número de cifras significativas como los dígitos necesarios para expresar una cantidad física, así todo dígito distinto de cero es una cifra significativa, los ceros a la izquierda no son cifras significativas y los ceros a la derecha si son cifras significativas.

La cantidad de cifras significativas hacen la diferencia entre una medida y otra, así por ejemplo, L = 3.00 [cm] y L=3 [cm] como cantidades físicas no son iguales, pues la cantidad de cifras significativas no es la misma. En el primer caso, se tiene una medición qué fue realizada con un instrumento que discriminaba hasta la centésima de centímetro, en cambio, en la segunda se utilizó un aparato que discriminaba sólo hasta la unidad de centímetro.

De lo anterior, se deduce que la cantidad de cifras significativas está íntimamente relacionada con el instrumento de medición. <u>NO</u> se debe expresar una cantidad física con más cifras significativas de lo que el instrumento puede discriminar.

Generalmente, se deben redondear las cifras significativas, para ello se utiliza el siguiente criterio:

"Si el dígito a la derecha del dígito a redondear es mayor o igual a 5, se suma una al dígito que se desea redondear, en caso contrario se mantiene su valor".

En el caso de las operaciones aritméticas los criterios a seguir son:

1. En adiciones y sustracciones, el resultado final tiene la misma cantidad de dígitos decimales que el factor con menor cantidad de dígitos decimales. Por ejemplo:

$$4.35 + 0.868 + 0.6 = 5.818 \rightarrow 5.8$$

2. En multiplicaciones, divisiones y potencias, el resultado final tendrá el mismo número de cifras significativas que el factor que menos cifras significativas tenga.

   Por ejemplo:

$$8.425 \times 22.3 = 187.8775 \rightarrow 188$$

ERRORES EXPERIMENTALES

El trabajo en el laboratorio consiste esencialmente en medir magnitudes físicas, proceso que lleva a cierta incertidumbre en el valor de las magnitudes a medir, como por ejemplo, si se mide la longitud de un fósforo, con una regla graduada en milímetros, puede darse la situación mostrada en *la Figura 1.*

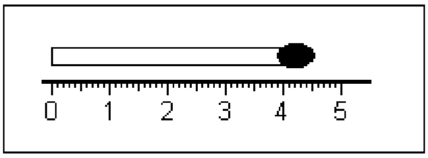


Figura 1: Medición de la longitud de un fósforo

¿Cuál es la medida de la longitud del fósforo?.

Se puede decir que es un valor entre 4.5 [cm] y 4.6 [cm], pero se necesita saber un número que indique dicha medida. Una posibilidad, aunque no la más adecuada de solucionar este hecho, es tomar el promedio de dichos valores, es decir, 4.55 [cm] e indicar que existe una incerteza de 0.05 [cm], o sea,

$$L = 4.55 \pm 0.05 \text{ [cm] } (1)$$

Esto significa que existe una alta probabilidad de que el valor verdadero de la longitud, se encuentre entre 4.50 y 4.60 [cm]. Así la expresión (1) es una aseveración probabilística.

El conocimiento de esta incerteza o error asociado a la medición, permite dilucidar la diferencia entre dos mediciones de una misma magnitud física, como por ejemplo, se midió la resistencia de una alambre y se obtuvo los siguientes valores:

$$R = 200.025\ [\Omega] \text{ a } 10^{\circ}C$$

$$R = 200.034\ [\Omega] \text{ a } 20^{\circ}C$$

¿Es significativa la diferencia entre estos dos valores?

Sin conocer los errores asociados a cada medida nada puede decirse.

En cambio, si el error es 0.001 [Ω] la diferencia es significativa y si es de 0.01 [Ω] no es significativa dicha diferencia.

Por lo anterior, no es posible saber el valor verdadero de una magnitud física, siempre existe un grado de imprecisión o incerteza en el resultado de una medición. La causa de esta incerteza puede deberse a fallas propias de las técnicas de medición o a fluctuaciones estadísticas de las mediciones realizadas; dichas causas se denominan *ERRORES EXPERIMENTALES.*

Los errores experimentales pueden clasificarse en *Errores Sistemáticos* ó *Errores Aleatorios o Accidentales.*

Los ***Errores Sistemáticos*** se deben a causas posibles de identificar y en principio, se pueden corregir. Siempre afectan el resultado de una medición en el mismo sentido, o sea, desplazan todas las medidas en la misma dirección. Ejemplos de ellos son: Mala calibración de los instrumentos – Uso de fórmulas incorrectas - Variaciones de las condiciones experimentales.

Cuando el resultado de una medición esta libre de errores sistemáticos, se dice que la medida es *EXACTA.*

Los ***Errores Aleatorios***, son producto de variaciones incontrolables de un gran número de factores experimentales y no pueden ser eliminados, sólo pueden ser minimizados. Estos errores afectan a una medida de una forma indeterminada.

Cuando el error aleatorio de una medida es pequeño, se dice que la medida es *PRECISA.*

HISTOGRAMAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Cuando los errores sistemáticos han sido eliminados, es posible cuantificar los errores aleatorios usando técnicas estadísticas.

En ausencia de errores sistemáticos, al realizar un conjunto de mediciones de una misma magnitud física, estas se distribuyen en torno del valor verdadero, así, mientras mayor sea el número de medidas, más se aproxima el valor medio al valor verdadero.

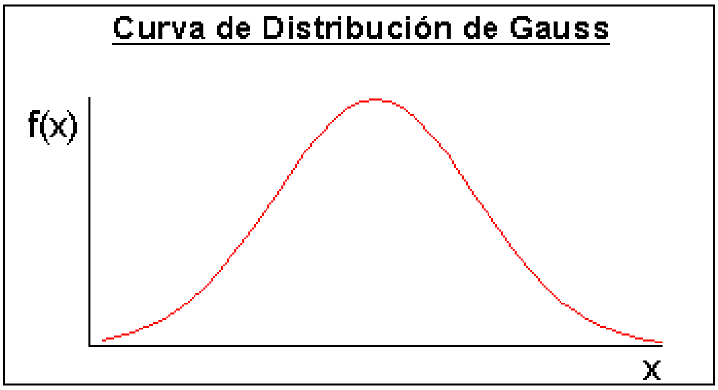
Una forma de mostrar los resultados de un conjunto de mediciones de una sola cantidad, es mediante un "HISTOGRAMA", que es un gráfico que se construye, dividiendo la variación de valores medidos en un conjunto de intervalos iguales v/s la frecuencia correspondiente, que es el número de veces que se repite una medición en cada intervalo.

Si el procedimiento experimental ha sido el apropiado, el histograma debe acercarse a la curva de Gauss o curva de distribución normal. Esta curva esta definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}]$$

Donde $\bar{x}$ es el valor medio o promedio y σ es la desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}}$$



La desviación estándar es una muestra de la desviación de las medidas con respecto al promedio. El área bajo la curva de Gauss indica el número de medidas realizadas, así de tablas estadísticas, se puede establecer que el número de medidas comprendidas en el intervalo [$\bar{x}$ - σ; $\bar{x}$ + σ] es un 68.2% del total, el intervalo [$\bar{x}$ - 2σ ; $\bar{x}$ + 2σ] es de un 95.4% y en el intervalo [$\bar{x}$ - 3σ; $\bar{x}$ + 3σ] es un 99.7% del total de mediciones realizadas.

Ejemplo de Aplicación

Se dejan caer sucesivas bolitas iguales (n=100) desde una altura de h= 50 [cm] y medimos con una regla la altura hasta la que rebotan. El resultado de las medidas es muy disperso por apreciación "al ojo" de h de rebote e imprecisión del punto de impacto en el suelo. Las medidas de la altura de rebote fueron las siguientes (todas en cm):

27.4	27.0	26.5	24.6	27.5	26.7	26.3	27.1	26.1	26.6
28.1	27.3	26.2	24.8	28.0	26.5	27.5	27.6	25.8	27.4
26.1	27.6	26.6	25.7	26.4	26.9	28.3	25.3	27.5	25.9
26.0	27.4	25.9	25.6	26.6	27.3	25.8	26.8	26.6	27.3
25.9	25.1	26.0	25.5	26.8	26.6	26.5	27.5	26.4	26.6
26.1	27.1	26.7	26.6	26.4	26.3	25.2	26.2	26.7	26.4
26.7	26.2	25.0	27.0	27.8	26.5	27.1	28.1	26.6	28.7
27.3	26.8	26.4	25.4	26.5	27.7	26.0	26.7	24.8	26.3
25.8	28.6	26.5	24.4	27.4	25.2	26.6	27.1	26.3	27.3
28.3	26.9	27.2	26.5	26.7	27.2	27.7	26.4	26.1	25.7

Rango = R = X_{Max} - X_{Min}

h_{max} = 28.7 [cm]; h_{min} = 24.4 [cm], entonces R = 4.3 [cm]

Orden de magnitud N (número de intervalos); $N = \sqrt{100} \rightarrow n = 10$, longitud de los intervalos Δh;

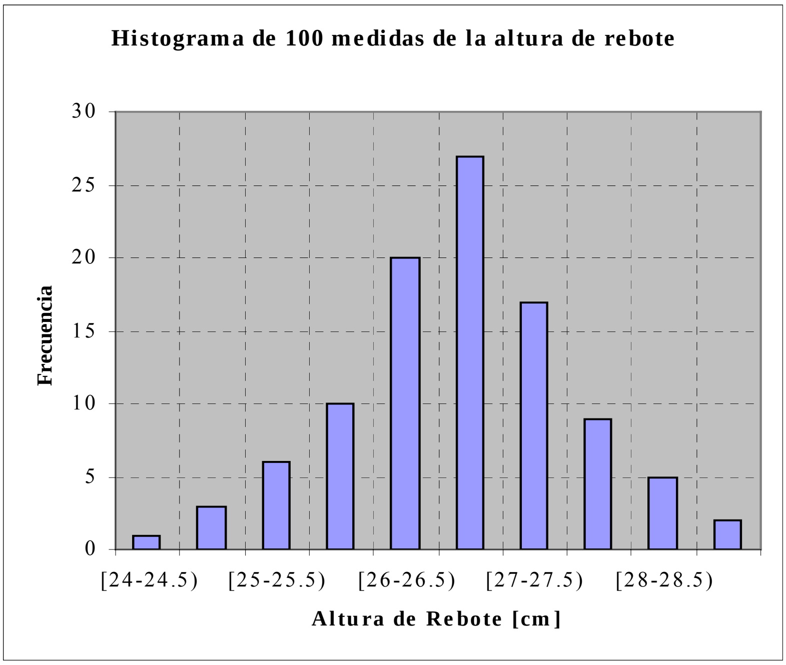
$\Delta h = \frac{R}{N} \rightarrow \Delta h = 0.43[cm]$, redondeamos a $\Delta h = 0.5$.

Tendremos 10 intervalos de 0.5 [cm] de ancho, entre 24 y 29 [cm]. La frecuencia será el número de medidas que caen dentro de cada intervalo. De esta forma llegamos a la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	[24-24.5)	[24.5-25)	[25-25.5)	[25.5-26)	[26-26.5)	[26.5-27)	[27-27.5)	[27.5-28)	[28-28.5)	[28.5-29)
frecuencia	1	3	6	10	20	27	17	9	5	2

$\overline{h} = 26.61[cm] \qquad \sigma = 0.87[cm]$

El histograma obtenido fue el siguiente:



Observar que en el intervalo $(\overline{h} - \sigma; \overline{h} + \sigma) = (25.74; 27.48)[cm]$ entran la mayoría de las medidas, es decir, 70.

Como en nuestro ejemplo la distribución es discreta, la probabilidad que se obtenga un resultado particular es el cuociente entre el número de ocurrencias de ese resultado (k_i) y el total de ocurrencias (n). Es decir: $P(x_i) = \frac{k_i}{n}$.

Dado que el resultado de cada rebote es independiente de los resultados anteriores, la probabilidad de obtener dos resultados particulares es el producto de las probabilidades para cada resultado. Es decir:

$P(x_i \wedge x_j) = P(x_i) \cdot P(x_j)$. En tanto que, la probabilidad de obtener un resultado o el otro es la suma de las probabilidades individuales, es decir: $P(x_i \vee x_j) = P(x_i) + P(x_j)$.

En nuestro ejemplo, cual seria la probabilidad que la altura del rebote llegue a:

a) 24 [cm]

b) 26 [cm]

c) 25 ó 27 [cm]

Los resultados serian:

a) $P(24) = \frac{1}{100} = 0.01 \rightarrow 1\%$

b) $P(26) = \frac{20}{100} = 0.2 \rightarrow 20\%$

c) $P(25 \vee 27) = P(25) + P(27) = \frac{6}{100} + \frac{17}{100} = 0.06 + 0.17 = 0.23 \rightarrow 23\%$

CUANTIFICACIÓN DE ERRORES

Cuando se tiene un conjunto de mediciones $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de una misma cantidad física, independientes entre sí y libres de errores sistemáticos, se acostumbra expresar el resultado de la forma:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

donde $\overline{x}$ es el valor más representativo de la cantidad medida y Δx es el error absoluto de *x*.

De lo anterior, surge la siguiente interrogante:

¿Cuál es el valor más representativo del conjunto de mediciones?

Haciendo uso de la estadística, podemos decir que los estadígrafos más representativos son:

a) *Moda* o medida que más se repite.

b) *Mediana* o medida que ocupa la posición central del conjunto de medidas, ordenadas de menor a mayor o viceversa.

c) *Valor medio, media o promedio, definido por:*

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Donde *N* es el número total de medidas realizadas.

Este estadígrafo es el que se utilizará para expresar el valor más representativo de un conjunto de mediciones.

Si es necesario el promedio se expresará siempre con una cifra decimal más que el de cada medida x_i.

Para determinar el error absoluto, Δx, asociado al conjunto de medidas, se definen las siguientes cantidades:

a) Desviación típica de la muestra: $S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$

Siempre se escribirá con dos cifras significativas.

b) Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\frac{N}{N-1}}S$

Siempre se escribirá con dos cifras significativas.

c) Error típico o error normal del promedio: $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Siempre se escribirá con una cifra significativa.

d) Error relativo: $\varepsilon_r = \frac{\sigma_m}{\overline{x}}$

Es una muestra de la precisión con que fue realizada la medición. Se escribirá siempre con dos cifras significativas.

e) Error porcentual: $\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \times 100$

f) Error instrumental:

Se define como la mitad de la menor división de la escala del instrumento y se designa por "EI".

CRITERIO PARA DESECHAR MEDIDAS.

Se considera que una medida es debida a una equivocación o a descuido del experimentador, si su valor se encuentra fuera del intervalo, de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Si el número total de mediciones *N*, esta comprendido entre 10 y 25; el intervalo considerado es:
   $[\overline{x} - 2\sigma \,;\, \overline{x} + 2\sigma]$
2. Si *N* es mayor de 25; el intervalo considerado es:
   $[\overline{x} - 3\sigma \,;\, \overline{x} + 3\sigma]$

Error Absoluto.

Una vez que se ha determinado S, σ, σ_m y además, todas las medidas se encuentran dentro del intervalo de interés, se define el error absoluto del promedio como:

$$\Delta x = 2\sigma_m + EI$$

Donde " *EI* " corresponde al error instrumental.

Cuando el número de medidas es menor que 10, un análisis estadístico no es muy confiable, por lo cual, en este caso se determinará el error absoluto mediante la siguiente expresión: $\Delta x = \rho + EI$

Donde " *EI* " es el error instrumental y ρ corresponde al error medio definido por: $\rho = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \overline{x}\right|$

En este caso el error relativo esta definido por: $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\overline{x}}$

PROPAGACION DE ERROR

En el caso de una medición indirecta, es común determinarla a partir de una o más mediciones directas o indirectas, por ejemplo, la densidad de un cuerpo se determina dividiendo la masa de éste por su volumen, la primera es una medición directa y la segunda una medición indirecta.

Para determinar el error absoluto de una medición indirecta es necesario determinar el error absoluto de una magnitud física *F* que es función de otras magnitudes físicas y_1 , y_2 , ... , y_M que se miden en forma directa y son independientes entre sí.

Sea $F = F(y_1 , y_2 ,... , y_M)$ una magnitud física cualquiera e y_1 , y_2, ... ,y_M otras magnitudes físicas medidas directamente, es decir:

$$y_1 = \overline{y_1} \pm \Delta y_1$$
$$y_2 = \overline{y_2} \pm \Delta y_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = \overline{y_M} \pm \Delta y_M$$

Donde los Δy_i corresponden a los errores absolutos asociados a cada variable y_i. Si cada una de estas magnitudes fue medida más de 10 veces, se define el error absoluto de *F* como:

$$\Delta F = 2\sigma_{mF}$$

Donde σ_{mF} esta definido por: $\sigma_{mF} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\sigma_{y_i}\right)^2\left(\dfrac{\vartheta F}{\vartheta y_i}\right)^2}$

Donde la derivada parcial de *F* con respecto a la variable y_i, debe ser evaluada en el punto donde todas las magnitudes son más probables.

En el caso en que cada una de las magnitudes es medida menos de 10 veces, se define el error absoluto de *F* como: $\Delta F = \sum_{i=1}^{M}\left|\dfrac{\vartheta F}{\vartheta y_i}\right|\Delta y_i$

De este modo, el resultado de la medición será: $F = \overline{F} \pm \Delta F$

Donde: $F = F(y_1, y_2, ..., y_M)$

Ejemplos de Aplicación

1. Se midió el período T de un péndulo simple; la Tabla 1 muestra el resultado de dichas mediciones. Aquí, T es el período y f es la frecuencia de aparición de dicho valor. Determine el valor medio de T y su error asociado.

Tabla 1: *Frecuencia v/s Periodo*

T(s)	1,410	1,439	1,440	1,441	1,442	1,443	1,444	1,445	1,446	1,447	1,451	1,470
f	1	2	7	13	17	6	5	3	3	3	1	1

Para desarrollar los cálculos es conveniente tabular la información como indica la Tabla 2. Donde la línea indicada por Σ, expresa la sumatoria de los valores de dicha columna.

	f	$T(s)$	$f\cdot T(s)$	$\lvert T-\overline{T}\rvert$	$f\cdot(T-\overline{T})^2$
	1	1,410	1,41	0,03240	0,00104976
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,22	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
	1	1,451	1,451	0,00860	7,396E-05
	1	1,470	1,47	0,02760	0,00076176
Σ	62		89,428		0,00211472

Tabla 2

Haciendo uso de la Tabla 2, se encuentra el siguiente valor para el promedio de T, la desviación típica de la muestra S y de la desviación estándar $\tilde{\sigma}$

$\overline{T} = 1,4424$ [s] $\quad S = 0,00584024$ [s] $\quad \sigma = 0,00588791$ [s]

Según los criterios para las cifras significativas, estos valores se deben expresar como:

$\overline{T}$ = 1,4424 [s]

S = 0,0058 [s]

σ = 0,0059 [s]

Antes de aceptar estos valores, se debe verificar que todas las medidas del período estén comprendidas en el intervalo:

[$\overline{T}$ - 3σ , $\overline{T}$ - 3σ]

o en forma equivalente, que se cumpla para cada medición la desigualdad

$| T_i - \overline{T} | < 3\sigma$

En este caso se utiliza en valor de 3σ, pues el número de datos es mayor que 50, luego, todas aquellas medidas que no cumplan con la condición:

$| T_i - \overline{T} | < 0.0177$ [s], deben ser eliminadas.

De la tabla 2, se ve claramente que los valores 1,410 [s] y 1,470 [s] deben ser desechadas pues se encuentran fuera del intervalo correspondiente y los cálculos deben volver a realizarse.

	f	$T(s)$	$f{\cdot}T(s)$	$\lvert T-\overline{T} \rvert$	$f{\cdot}(T-\overline{T})^2$
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,220	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
	1	1,451	1,451	0,00860	7,396E-05
Σ	60		88,548		0,00003032

Tabla 3

Al eliminar estos datos, los nuevos resultados son los siguientes:

$\overline{T}$ = 1,4425 [s] S = 0,00224796 [s] σ = 0,00226693 [s]

y los valores aproximados son:

$\overline{T}$ = 1,4425 [s] S = 0,0022 [s] σ = 0,0023 [s] y el criterio para desechar medidas queda como: $| T_i - \overline{T} | < 0{,}0069$ [s]

de la Tabla 3 se ve claramente que la medida 1,451 [s] esta fuera del rango y por lo tanto se desecha.

La tabla siguiente muestra los resultados que se obtienen eliminando dicho dato:

	f	$T(s)$	$f{\cdot}T(s)$	$\|T-\overline{T}\|$	$f{\cdot}(T-\overline{T})^2$
	2	1,439	2,878	0,00340	2,312E-05
	7	1,440	10,08	0,00240	4,032E-05
	13	1,441	18,733	0,00140	2,548E-05
	17	1,442	24,514	0,00060	2,72E-06
	6	1,443	8,658	0,00160	2,16E-06
	5	1,444	7,220	0,00260	2,028E-05
	3	1,445	4,335	0,00260	3,888E-05
	3	1,446	4,338	0,00360	6,348E-05
	3	1,447	4,341	0,00460	6,348E-05
Σ	59		85,097		0,00022924

Tabla 4

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

$\overline{T} = 1{,}4423$ [s] $S = 0{,}00197115$ [s] $\sigma = 0{,}00198807$ [s] $3\sigma = 0{,}006$ [s]

En este caso, el criterio para desechar medidas nos indica que no existe ninguna medida fuera del rango y por lo tanto no se eliminan datos, de esta manera el valor del error típico del promedio es:

$\sigma_m = 0{,}00025882$ [s]

y sus valores aproximados son:

$\overline{T} = 1{,}4423$ [s] $S = 0{,}0020$ [s] $\sigma = 0{,}0020$ [s] $\sigma_m = 0{,}0003$ [s]

De esta manera el error absoluto del período se obtiene de:

$\Delta T = 2\sigma_m + EI$

Donde el error instrumental EI, se obtiene de dividir por dos la menor división de la escala, en este caso, su valor es 0.0005 [s] y por lo tanto el error absoluto será:

$\Delta T = 2 * 0.0003 + 0.0005$ [S] $= 0.0011$ [S]

por lo cual, el resultado solicitado es:

$T = 1.4423 + 0.0011$ [s]

2. Un grupo de alumnos en una sesión experimental, para determinar la densidad de una esfera, midió la masa de ella y su diámetro.

Las medidas obtenidas se presentan en la siguiente tabla:

d[cm]	f	d·f
1,600	2	3,200
1,595	2	3,200
1,590	5	7,950
	10	15,935

m[g]	f	m·f
13,8	1	13,8
13,7	3	41,1
13,6	4	54,4
13,5	2	27,0
	10	136,3

$\overline{d} = 1{,}5935$ [cm] $\qquad \overline{m} = 13{,}63$ [g]

$\Delta d = 0{,}0040$ [cm] $\qquad \Delta m = 0{,}126$ [g]

$\rho = \dfrac{m}{V}$. Donde; m: masa y V: volumen $\left(\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right)$

Como se midió el diámetro y no el radio de la esfera, entonces la densidad de la esfera se determina de acuerdo a la expresión:

$$\rho = \frac{6 \cdot m}{\pi \cdot d^3} \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho} = \frac{6 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{6}{\pi \cdot d^3} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{18 \cdot m}{\pi \cdot d^4}$$

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial \rho}{\partial d}\right| \cdot \Delta d$$

$$\Delta\rho = \frac{6}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \Delta m + \frac{18 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^4} \cdot \Delta d$$

$$\Delta\rho = \frac{6 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \frac{\Delta m}{\overline{m}} + \frac{3 \cdot 6 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \frac{\Delta d}{\overline{d}}$$

$$\Delta\rho = \frac{6 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \left[\frac{\Delta m}{\overline{m}} + 3 \cdot \frac{\Delta d}{\overline{d}}\right]$$

Como: $\rho = \overline{\rho} \pm \Delta\rho$

entonces: $$\rho = \frac{6 \cdot \overline{m}}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \left[1 \pm \left[\varepsilon_{rm} + 3 \cdot \varepsilon_{rd}\right]\right]$$

reemplazando: $$\rho = \frac{6 \cdot 13{,}63}{\pi \cdot 1{,}5935^3} \cdot \left[1 \pm \left[\frac{0{,}126}{13{,}63} + 3 \cdot \frac{0{,}0040}{1{,}5935}\right]\right]$$

entonces: $\rho = 6.433407045 \pm 0.1079198052$ [gr/cm^3]

aplicando los criterios correspondientes, se obtiene para la densidad del cuerpo en estudio:

$\rho = 6.43 + 0.11$ [gr/cm^3]