Aspects algorithmiques de la génération de pavages

Sébastien Desreux

Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications

17 juillet 2003

Plan de l'exposé

- Quelques exemples
- Motivation de l'étude
- Revue des outils
- Exposé en quatre actes
- Conclusion

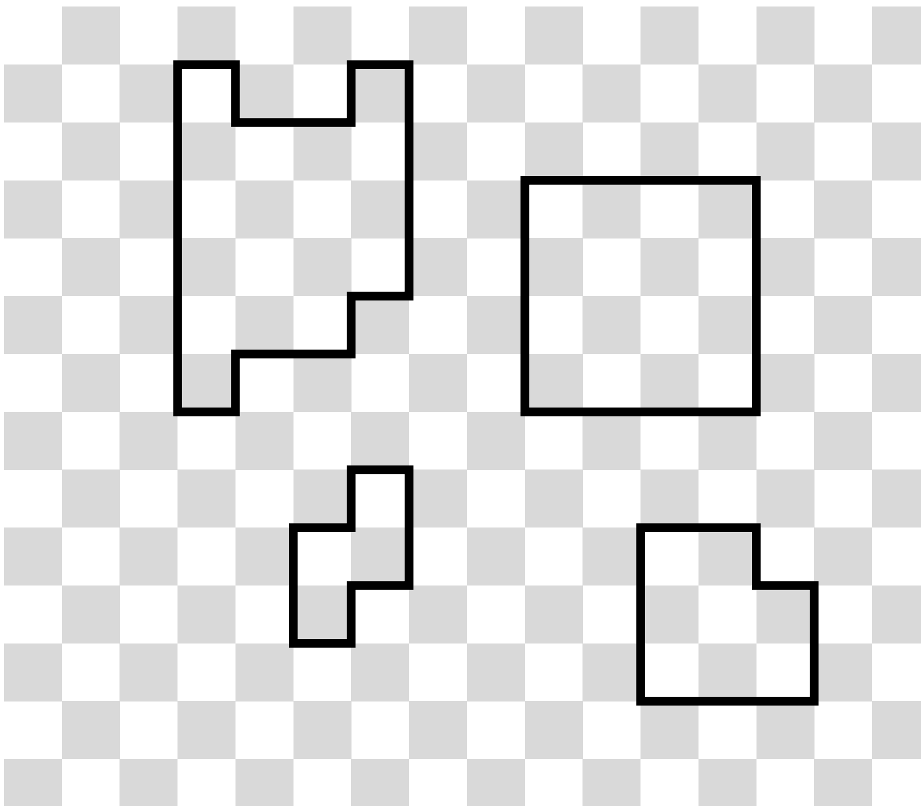
Qu'est-ce qu'un pavage ?

Pavage par des dominos

- La grille carrée

Qu’est-ce qu’un pavage ?

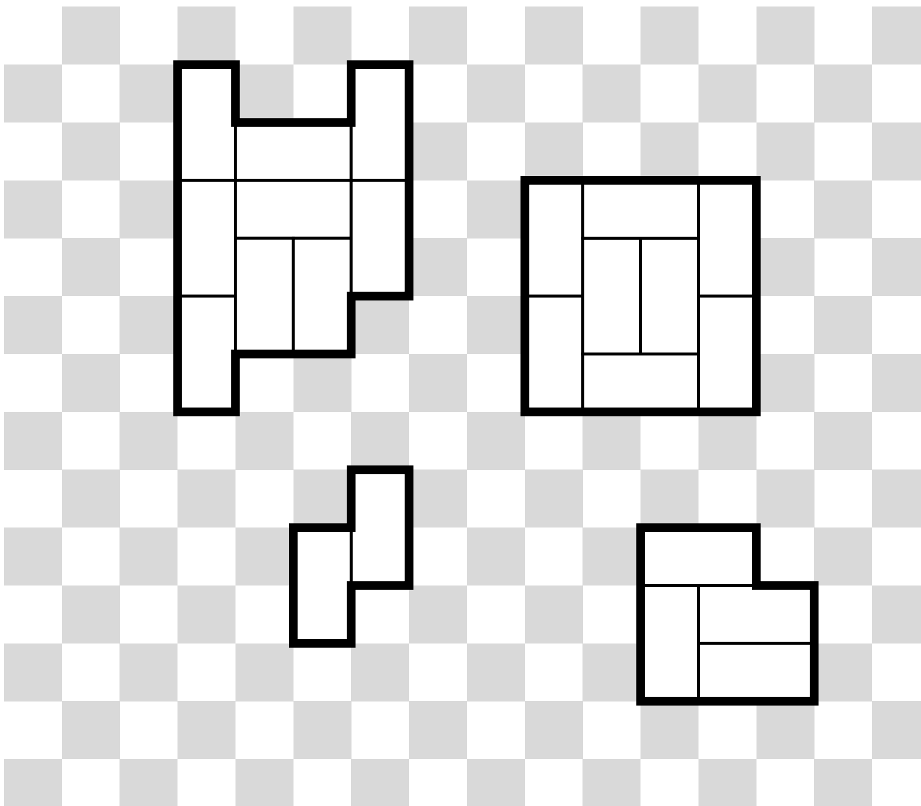
Pavage par des dominos



- La grille carrée
- Un domaine à paver

Qu’est-ce qu’un pavage ?

Pavage par des dominos



- La grille carrée
- Un domaine à paver
- Un pavage

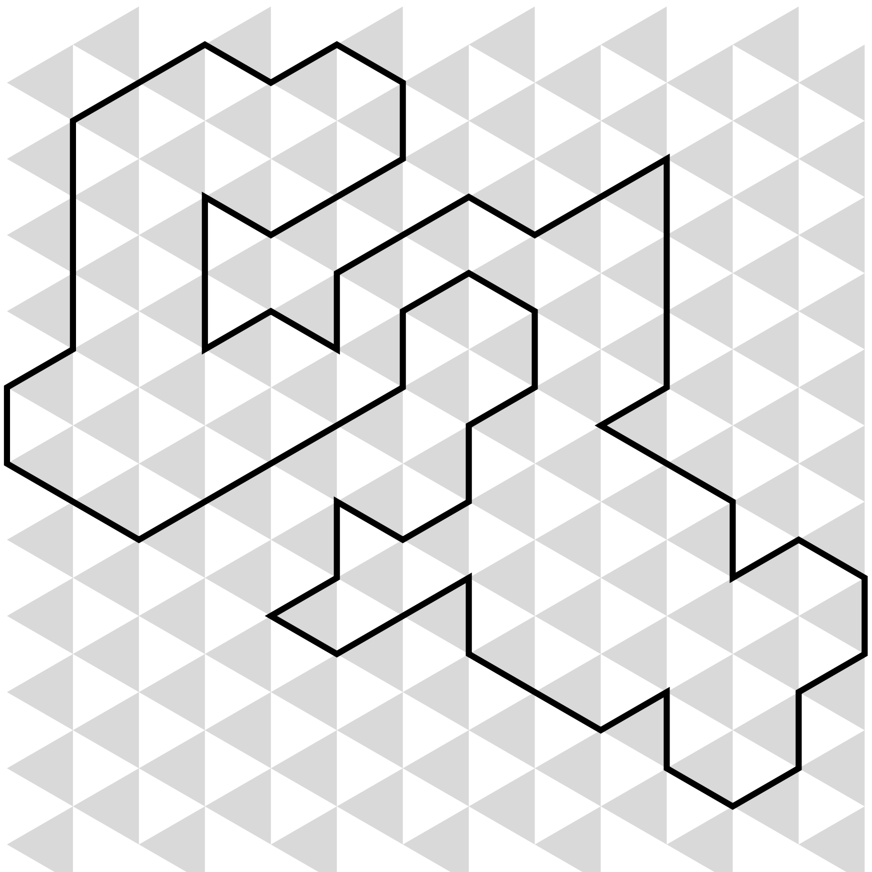
Qu'est-ce qu'un pavage ?

Pavage par des losanges

- La grille triangulaire

Qu’est-ce qu’un pavage ?

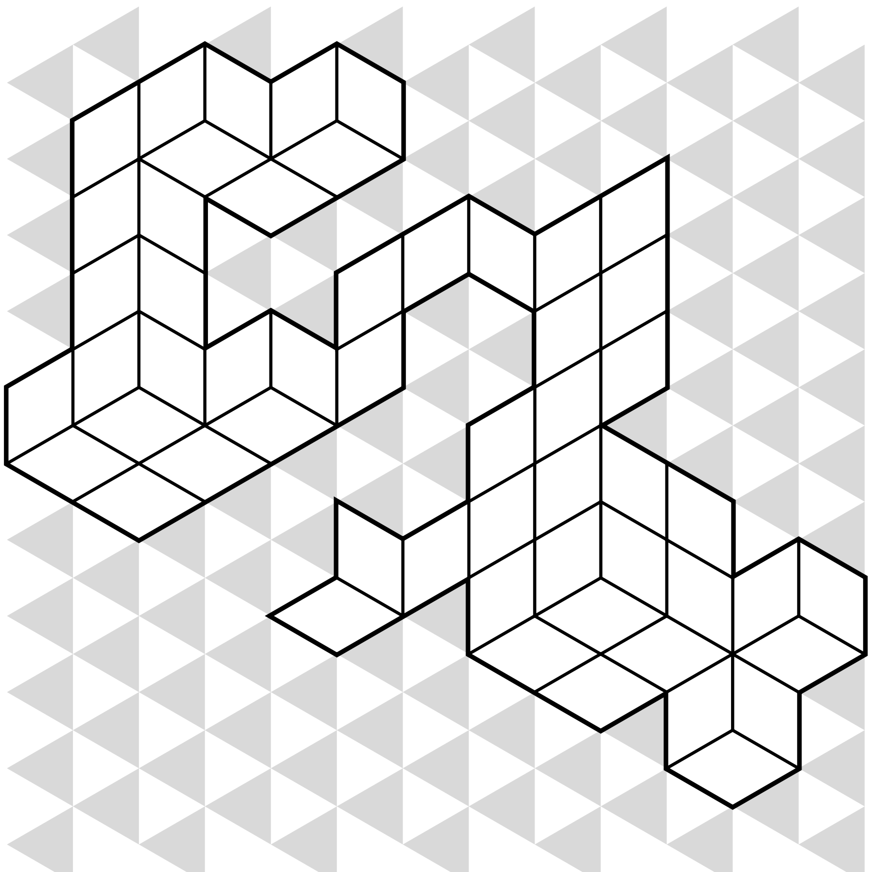
Pavage par des losanges



- La grille triangulaire
- Un domaine à paver

Qu’est-ce qu’un pavage ?

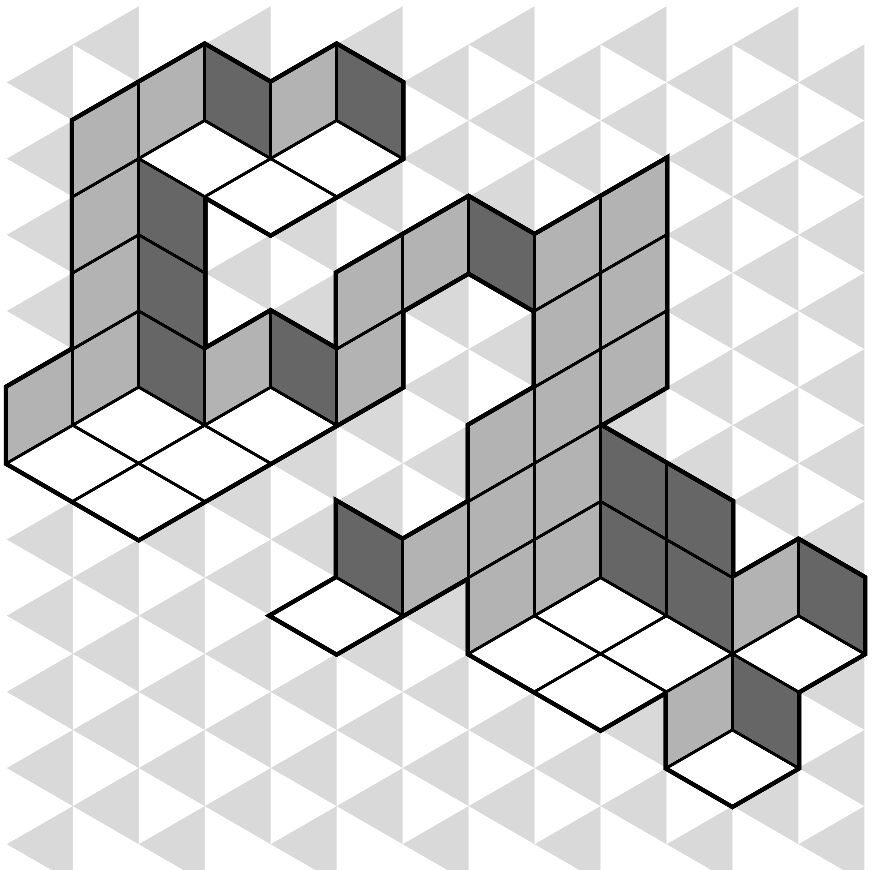
Pavage par des losanges



- La grille triangulaire
- Un domaine à paver
- Un pavage...

Qu'est-ce qu'un pavage ?

Pavage par des losanges



- La grille triangulaire
- Un domaine à paver
- Un pavage...
- ...et des couleurs

Pourquoi étudier les pavages ?

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d’Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d’une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d'une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet
- Modélise le sac à dos

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d'une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet
- Modélise le sac à dos

  les partitions

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d'une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet
- Modélise le sac à dos
  les partitions
  les partitions planes

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d'une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet
- Modélise le sac à dos

  les partitions

  les partitions planes

  les partitions solides

Pourquoi étudier les pavages ?

- Système dynamique discret
- Modèle d'Ising
- Pavage du plan par des tuiles arbitraires : indécidable
- Pavage d'une région du plan par des tuiles arbitraires : NP-complet
- Modélise le sac à dos

  les partitions

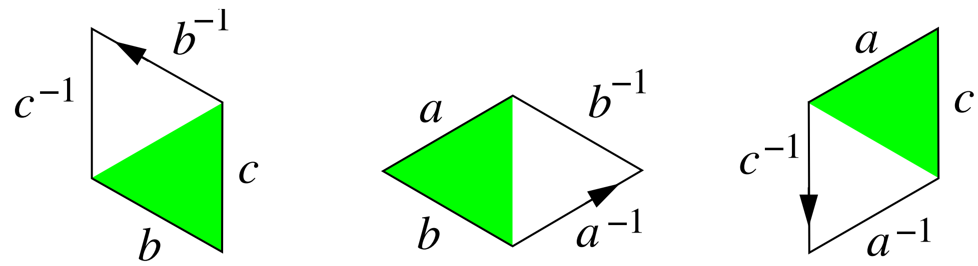
  les partitions planes

  les partitions solides

Les apparences sont trompeuses

La situation en 2000

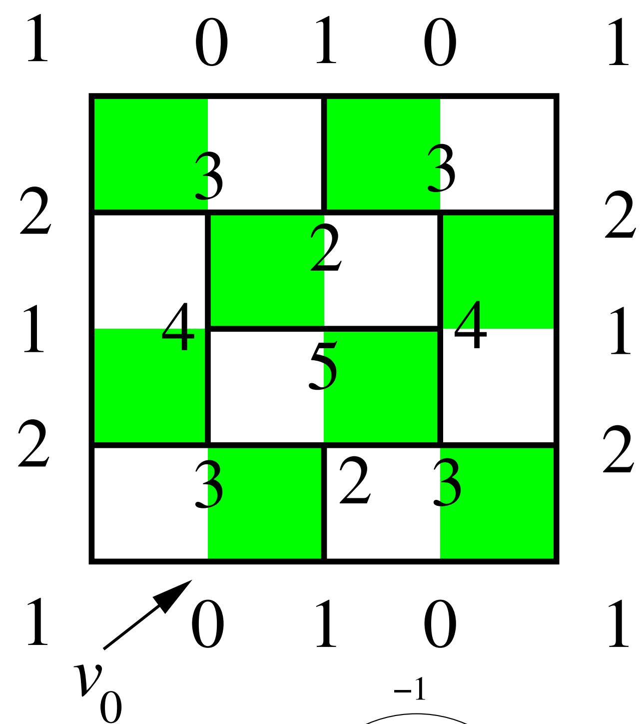
- Groupes de pavage (Conway et Lagarias) 1990

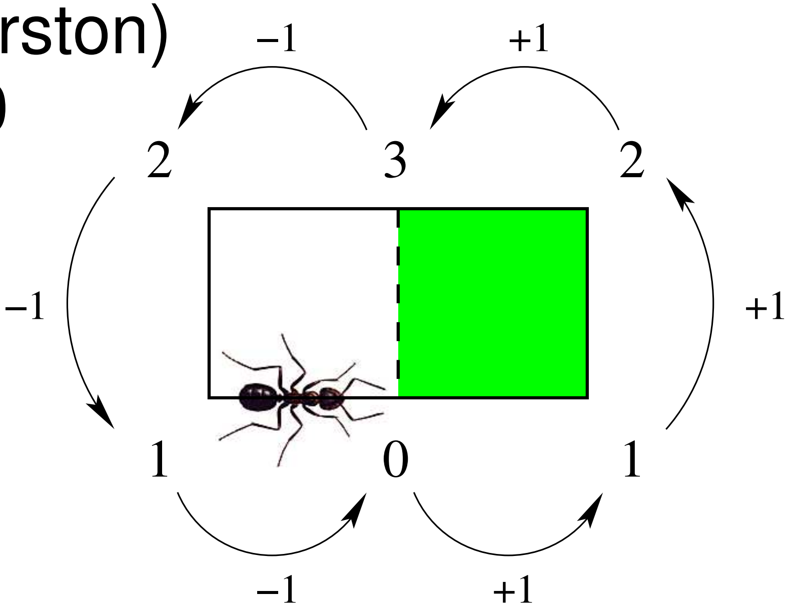


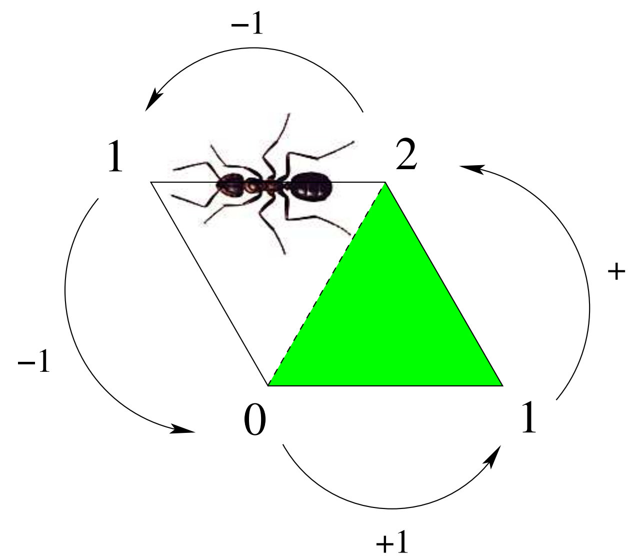
$$\mathscr{L} = \langle a, b, c \mid bcb^{-1}c^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = cac^{-1}a^{-1} = 1 \rangle$$

La situation en 2000

- Groupes de pavage (Conway et Lagarias) 1990
- Fonctions de hauteur (Thurston) 1990







La situation en 2000

- Groupes de pavage
  (Conway et Lagarias)
  1990

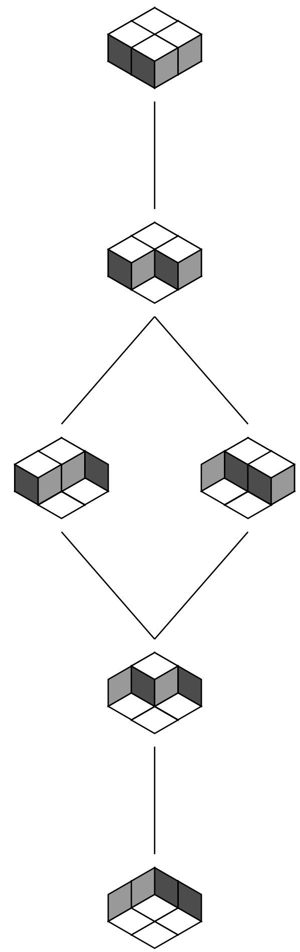
- Fonctions de hauteur
  (Thurston)
  1990

- Structure de treillis
  distributif
  (Rémila)
  1999

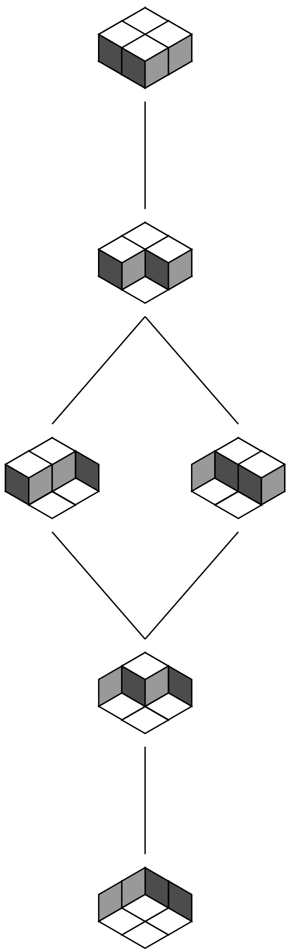
L'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions de hauteur des pavages d'un domaine est muni de l'ordre point par point.

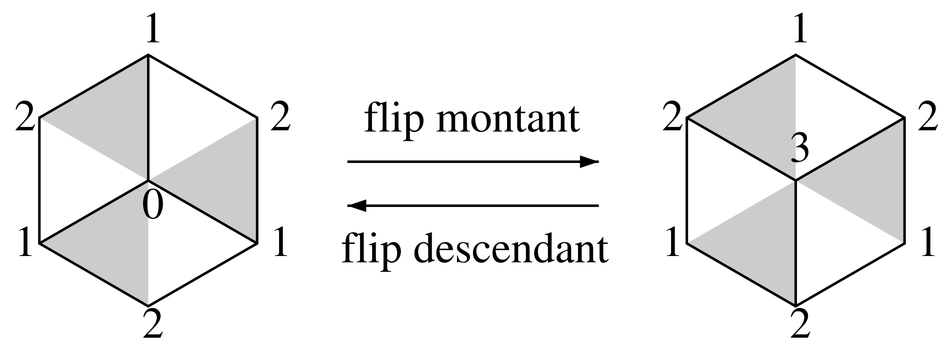
Cet ordre induit sur $\mathscr{F}$ une structure de treillis distributif.

Exemple de treillis de pavages

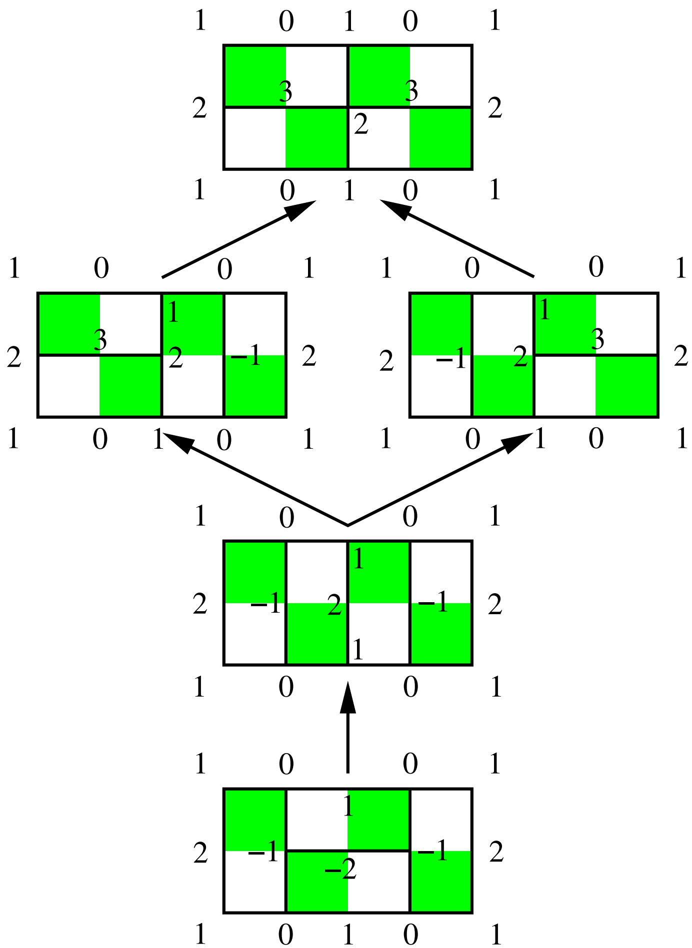


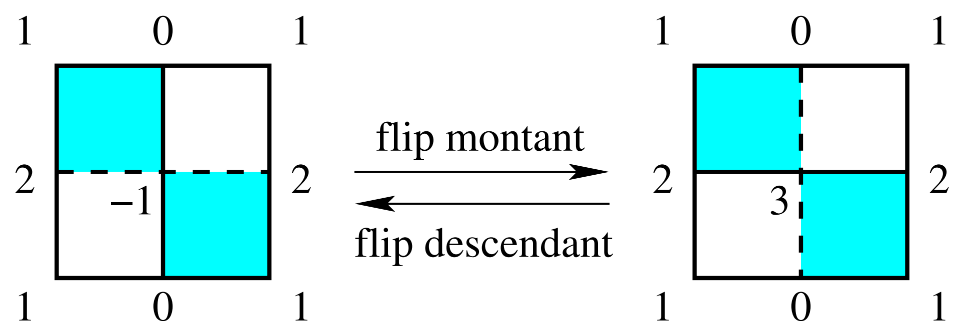
Exemple de treillis de pavages



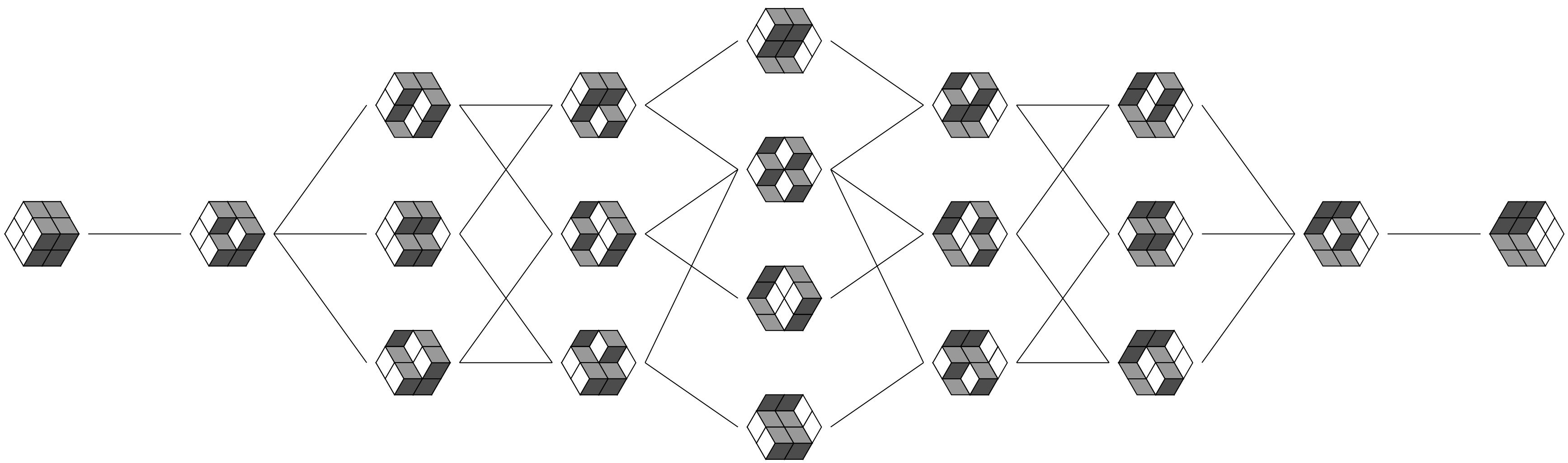


Exemple de treillis de pavages





Exemple de treillis de pavages



Les axes de la présentation

Que nous apprend la structure de treillis
pour l'étude des pavages ?

Les axes de la présentation

- Découpage des domaines à paver et treillis produit

Les axes de la présentation

- Découpage des domaines à paver et treillis produit
- Structure récursive du treillis

Les axes de la présentation

- Découpage des domaines à paver et treillis produit
- Structure récursive du treillis
- Généralisation de l'algorithme de Thurston

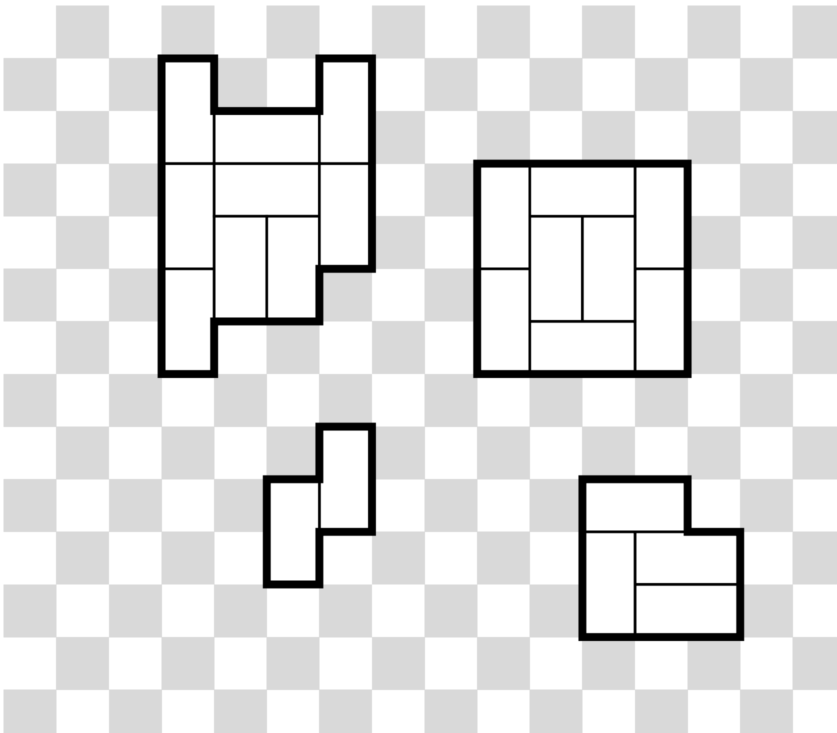
Les axes de la présentation

- Découpage des domaines à paver et treillis produit
- Structure récursive du treillis
- Généralisation de l'algorithme de Thurston
- Algorithmes

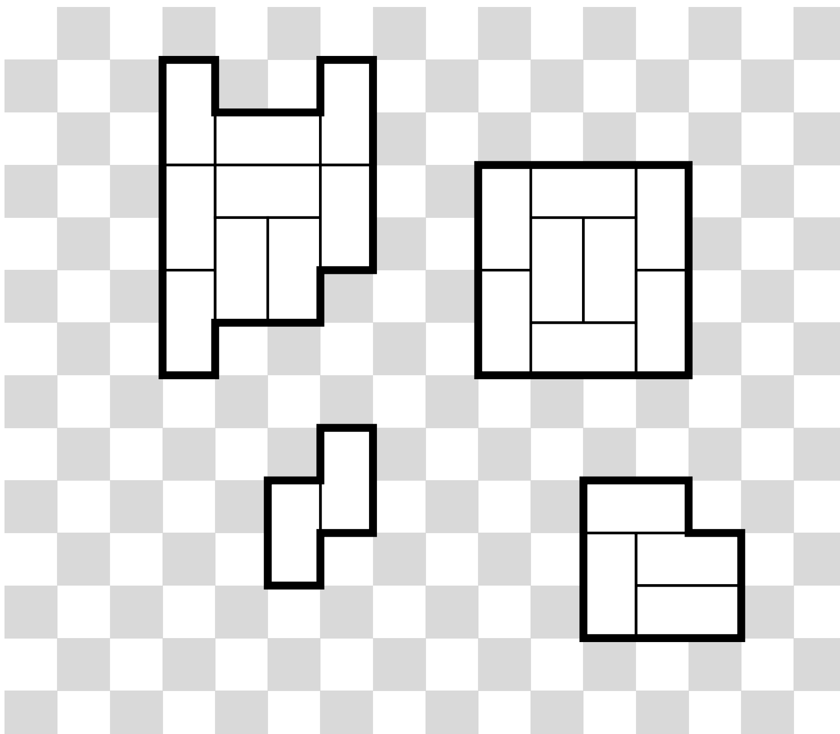
Première partie

Découpage des domaines

Domaines non connexes



Domaines non connexes



Le treillis des pavages d'un domaine non connexe est le produit des treillis des pavages des sous-domaines connexes.

$$\text{Treillis}(\mathscr{D}) = \text{Treillis}(\mathscr{D}_1)\times\text{Treillis}(\mathscr{D}_2)\times\text{Treillis}(\mathscr{D}_3)\times\text{Treillis}(\mathscr{D}_4)$$

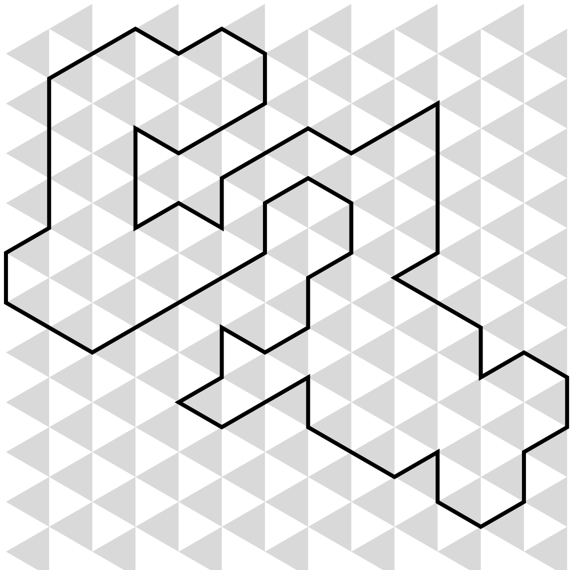
Domaines non connexes

$$\text{Treillis}(\mathscr{D}) = \text{Treillis}(\mathscr{D}_1) \times \text{Treillis}(\mathscr{D}_2) \times \text{Treillis}(\mathscr{D}_3) \times \text{Treillis}(\mathscr{D}_4)$$

<u>Conséquence</u>

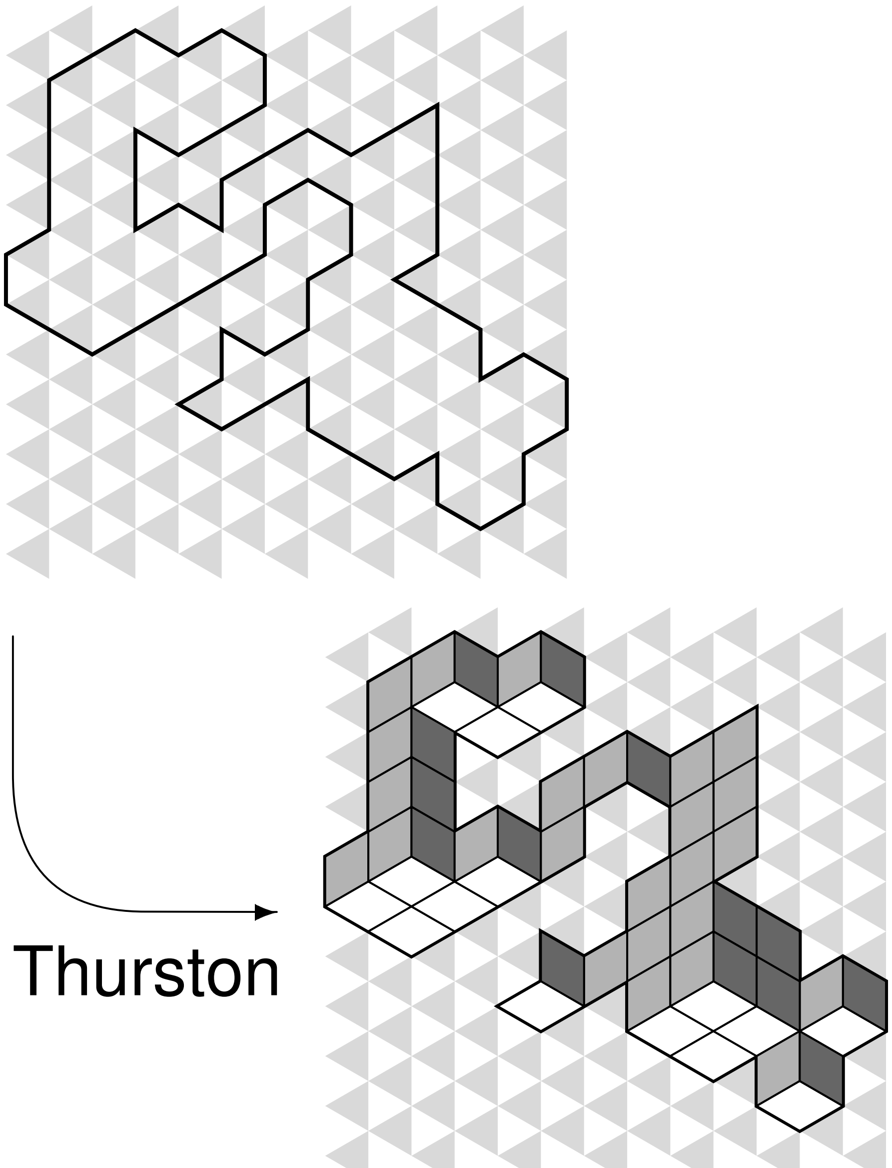
Pour connaître les pavages d'un domaine non connexe, il suffit de connaître les pavages des sous-domaines connexes.

Lignes de fracture

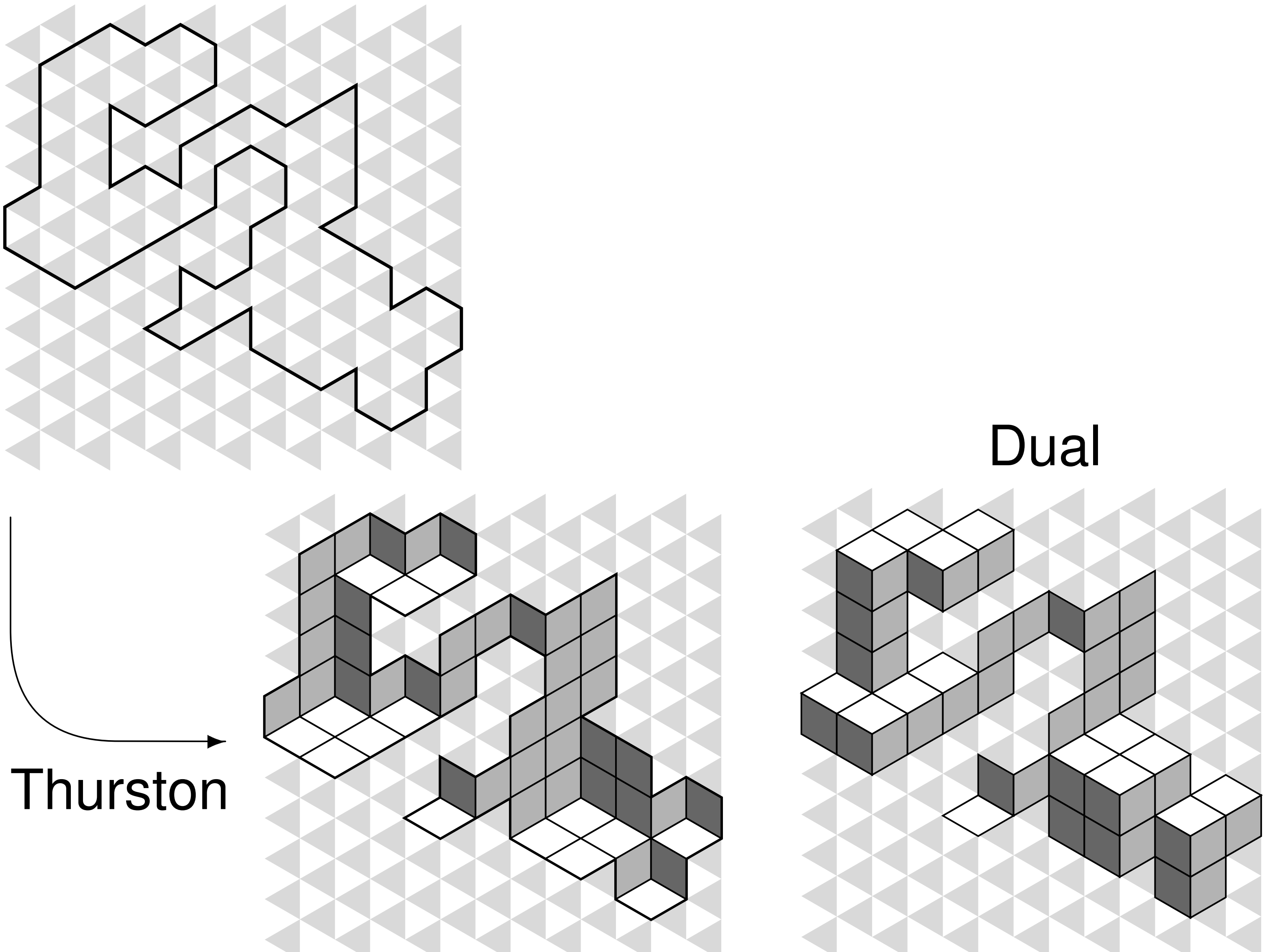


Peut-on découper un domaine connexe en sous-domaines indépendants, comme si le domaine n'était pas connexe ?

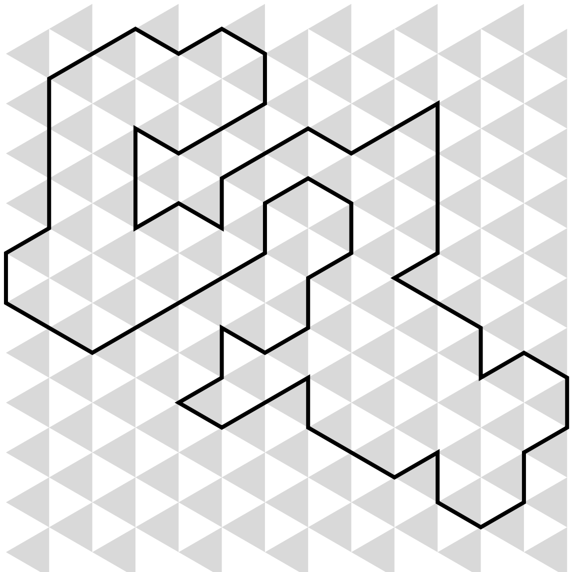
Lignes de fracture

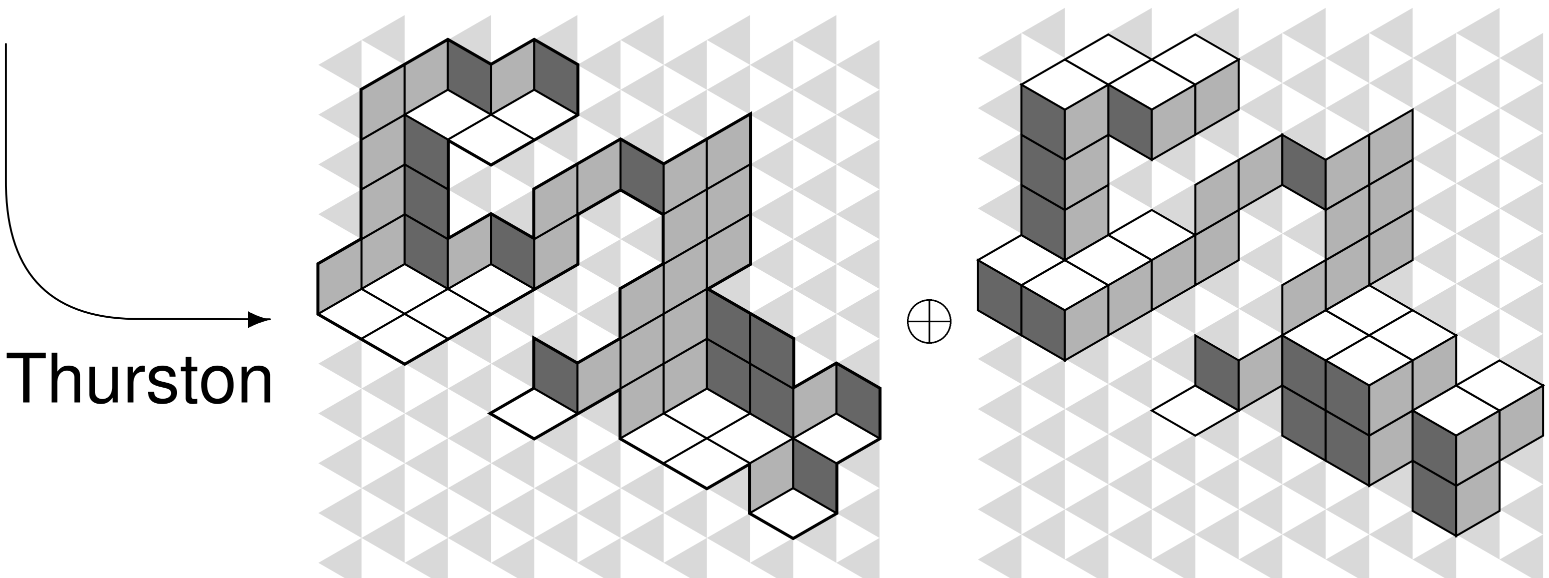


Lignes de fracture

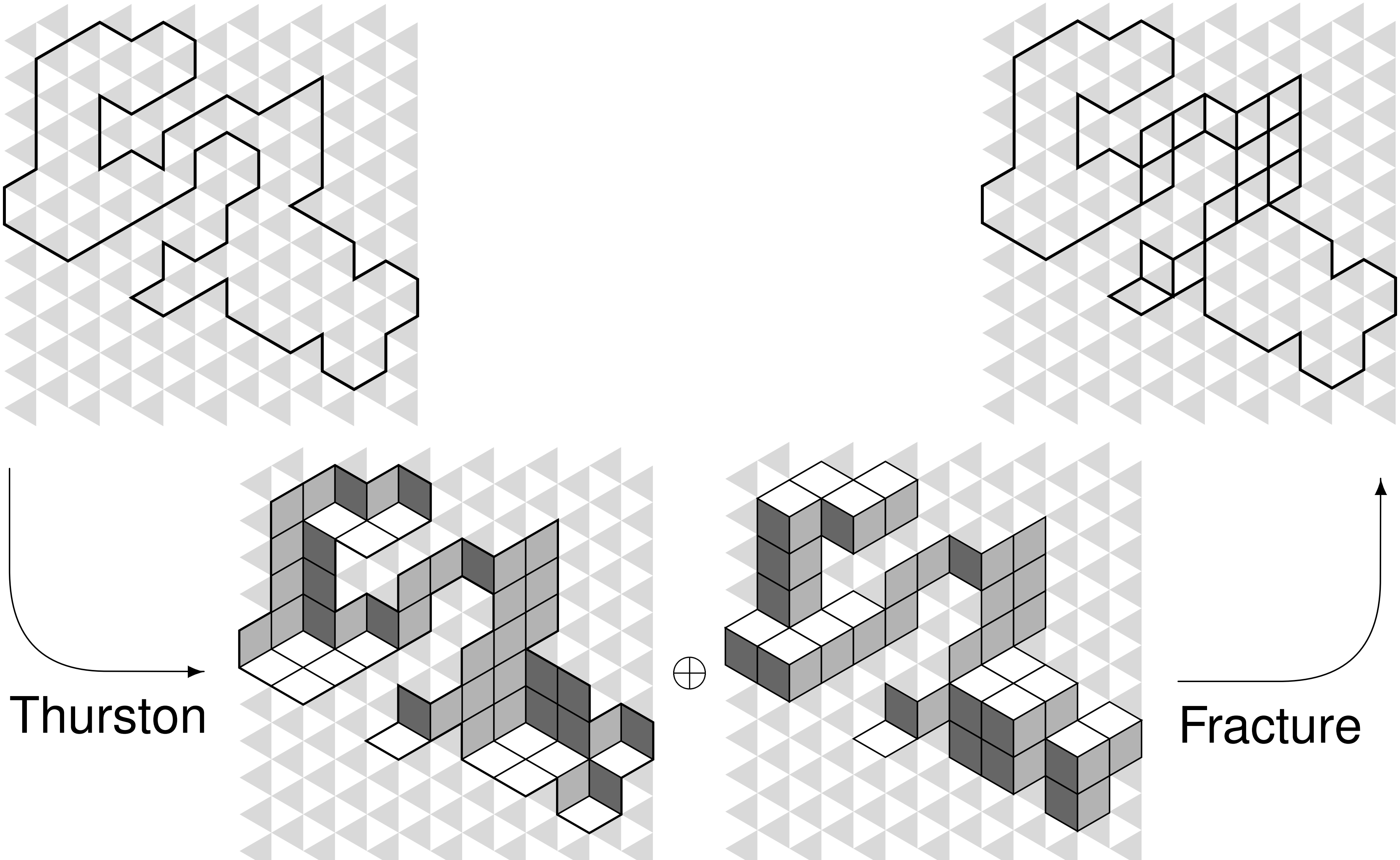


Lignes de fracture

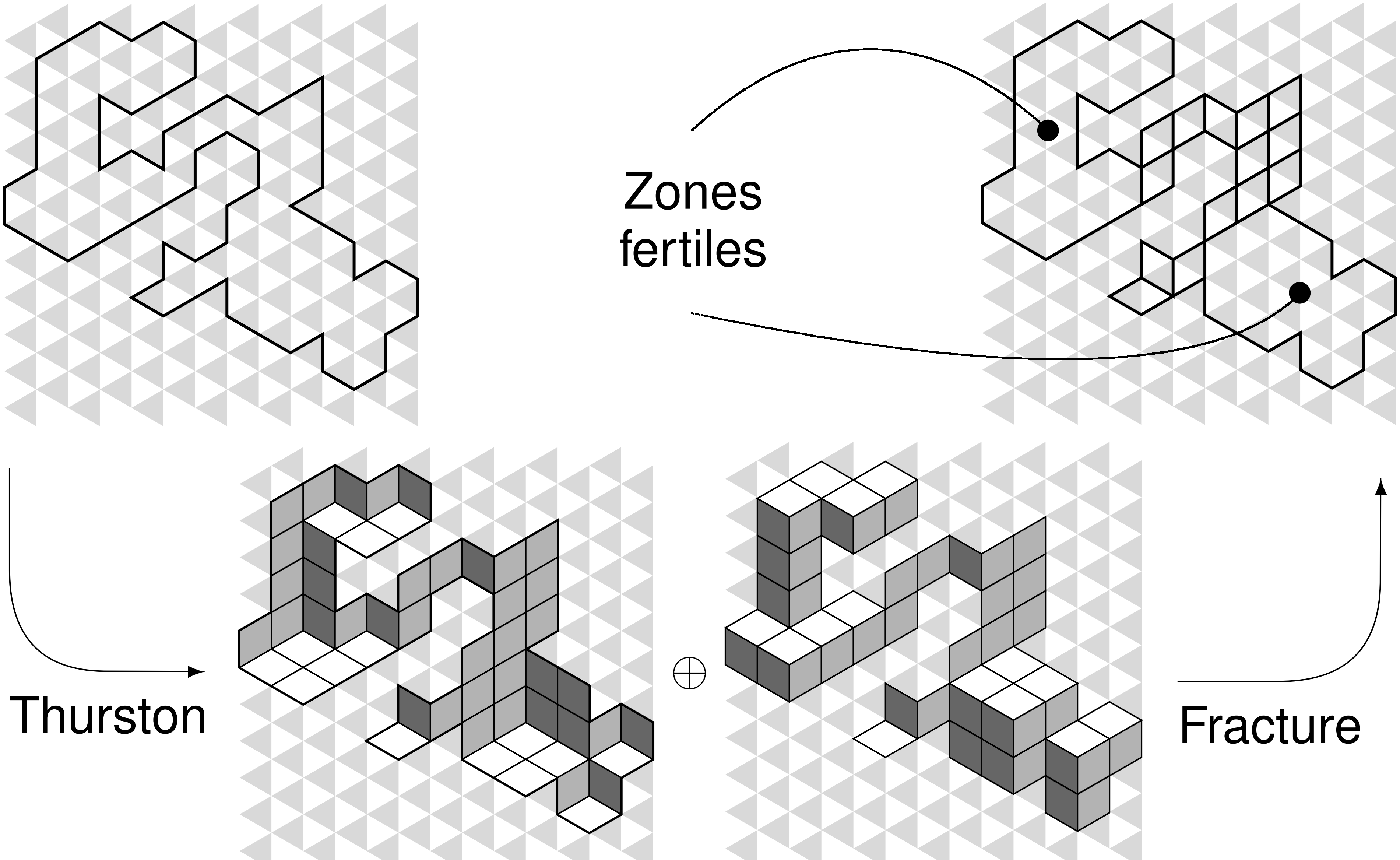




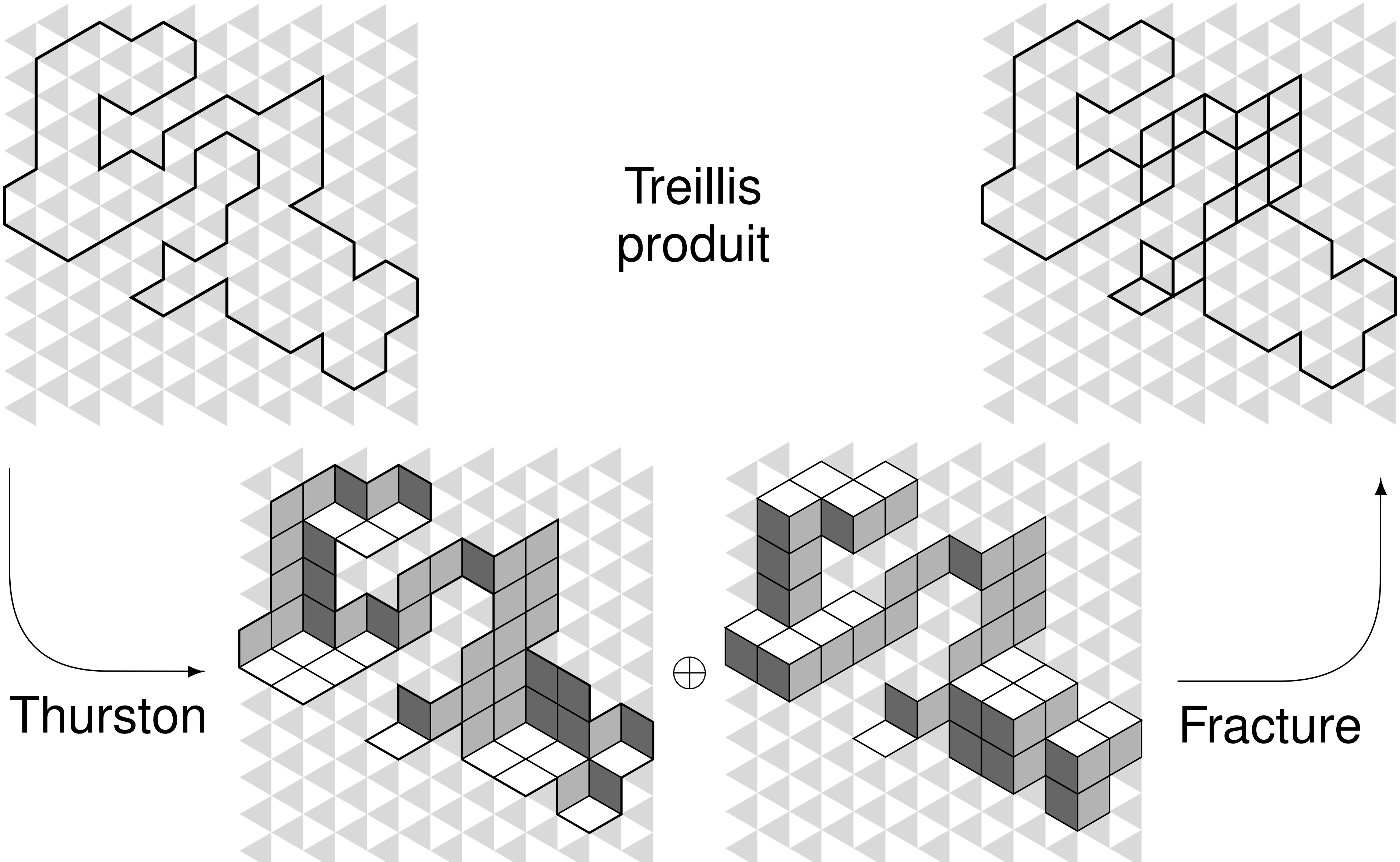
Lignes de fracture



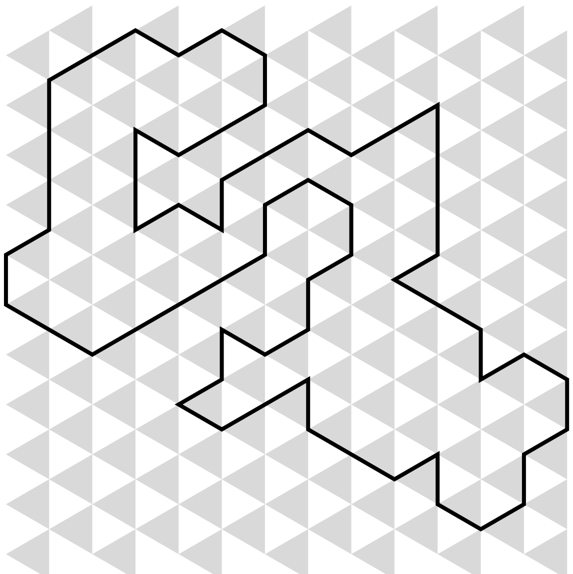
Lignes de fracture



Lignes de fracture

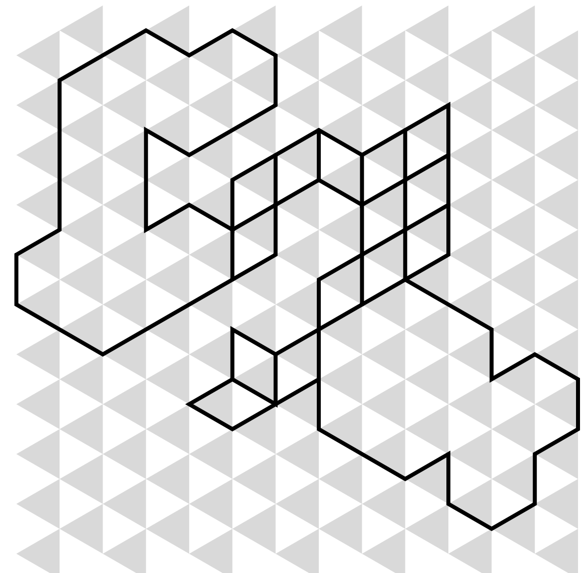


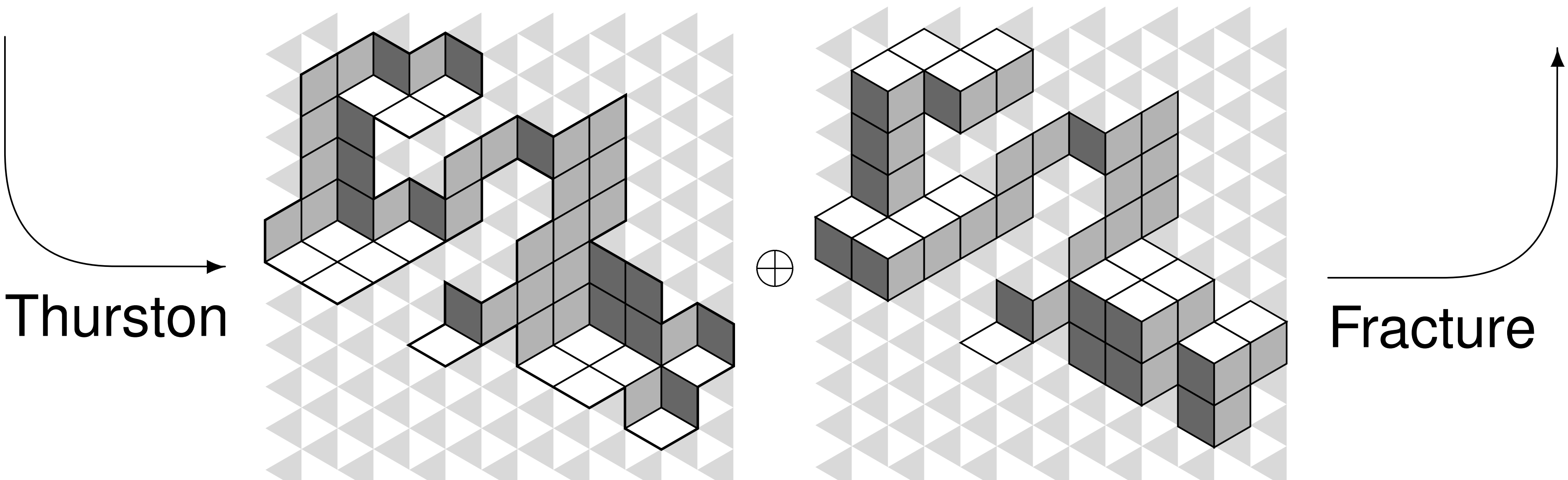
Lignes de fracture



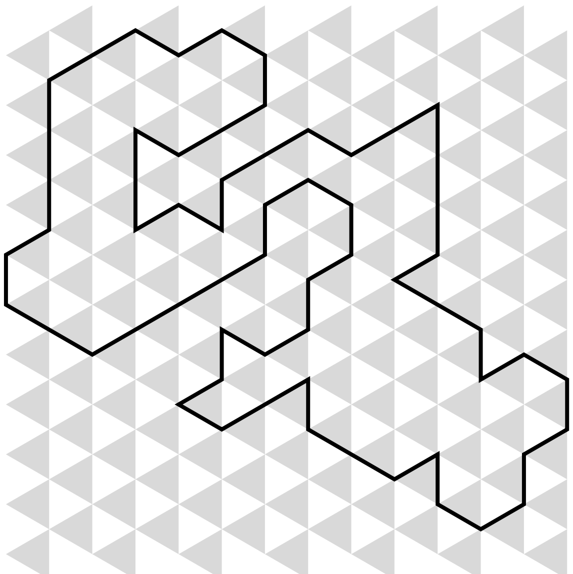
Théorème

Il n'existe aucun découpage plus fin qui permette d'obtenir le treillis comme produit.



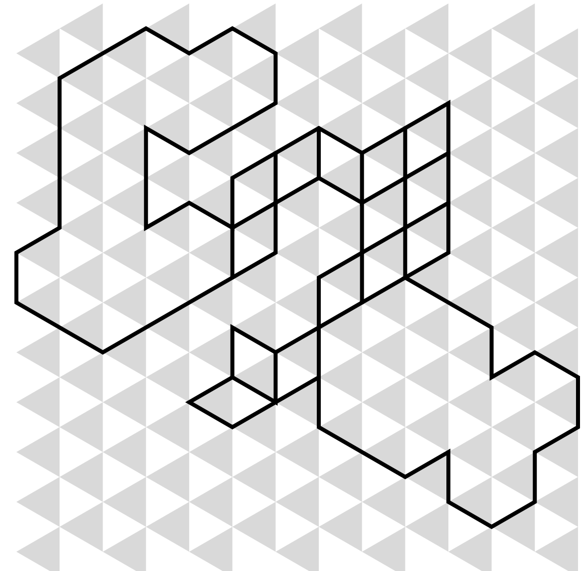


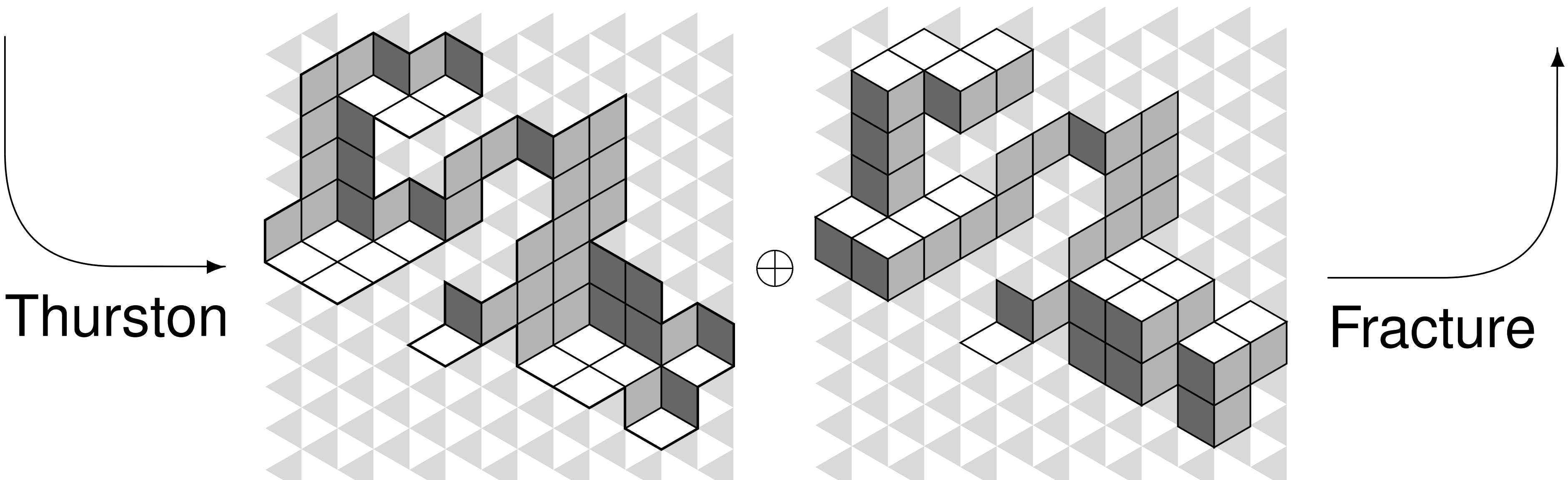
Lignes de fracture



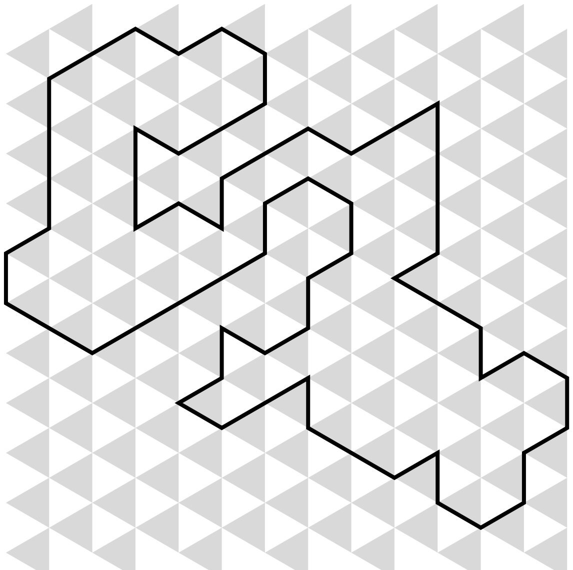
Idée de preuve

L'ordre des sup-irréductibles du treillis des pavages d'une zone fertile est connexe.



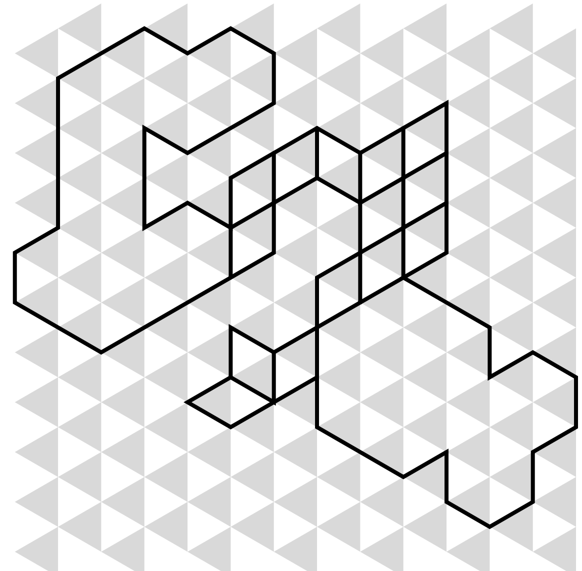


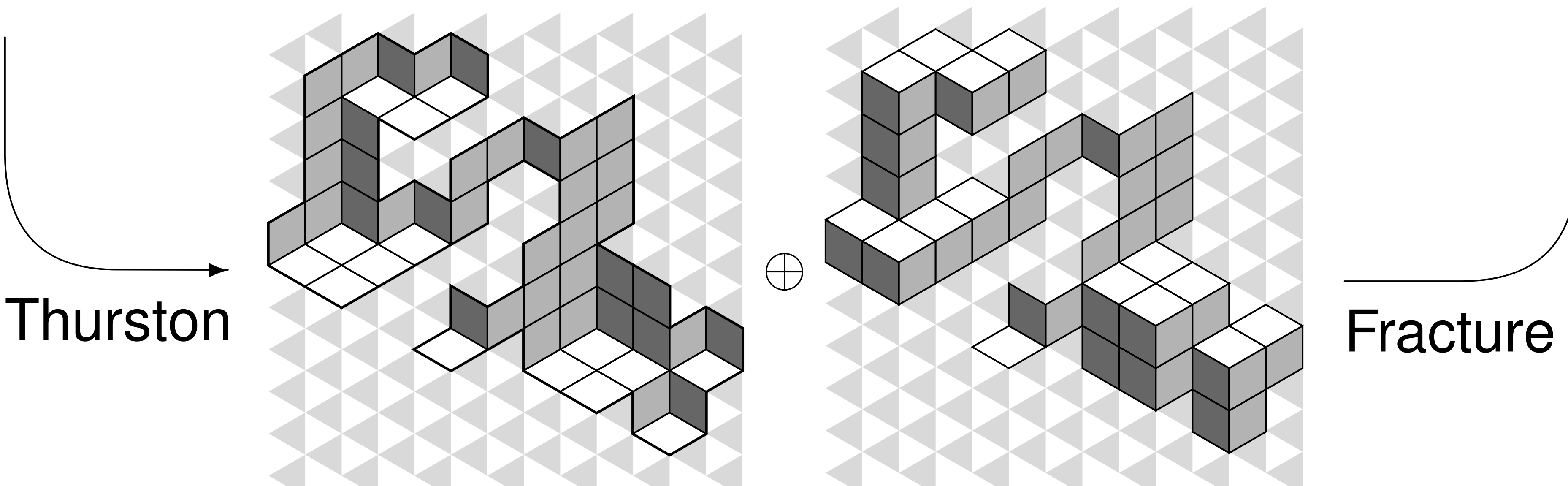
Lignes de fracture



<u>Conséquence</u>

Il suffit d’étudier les pavages des zones fertiles.

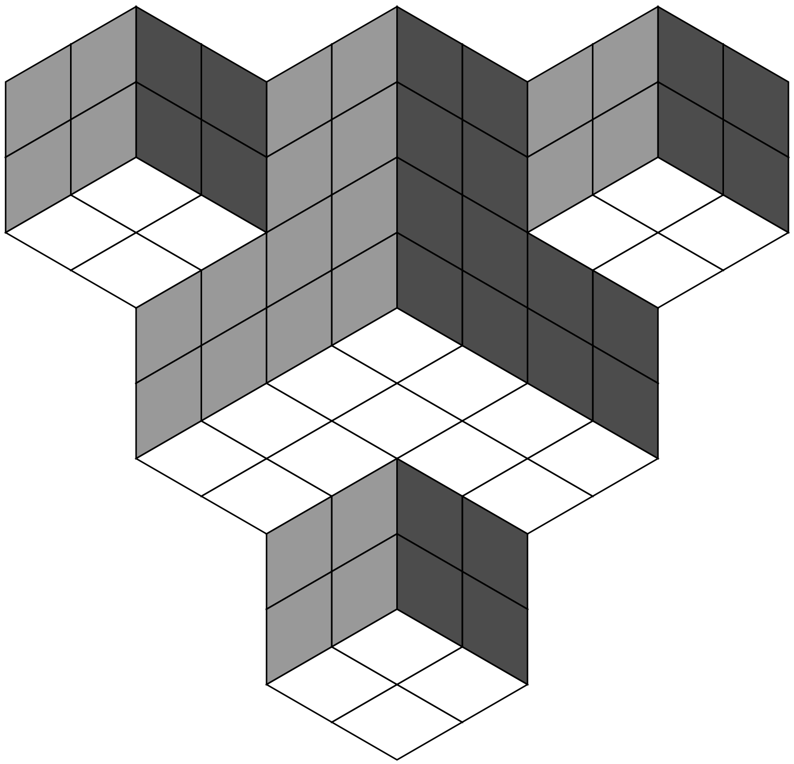




Deuxième Partie

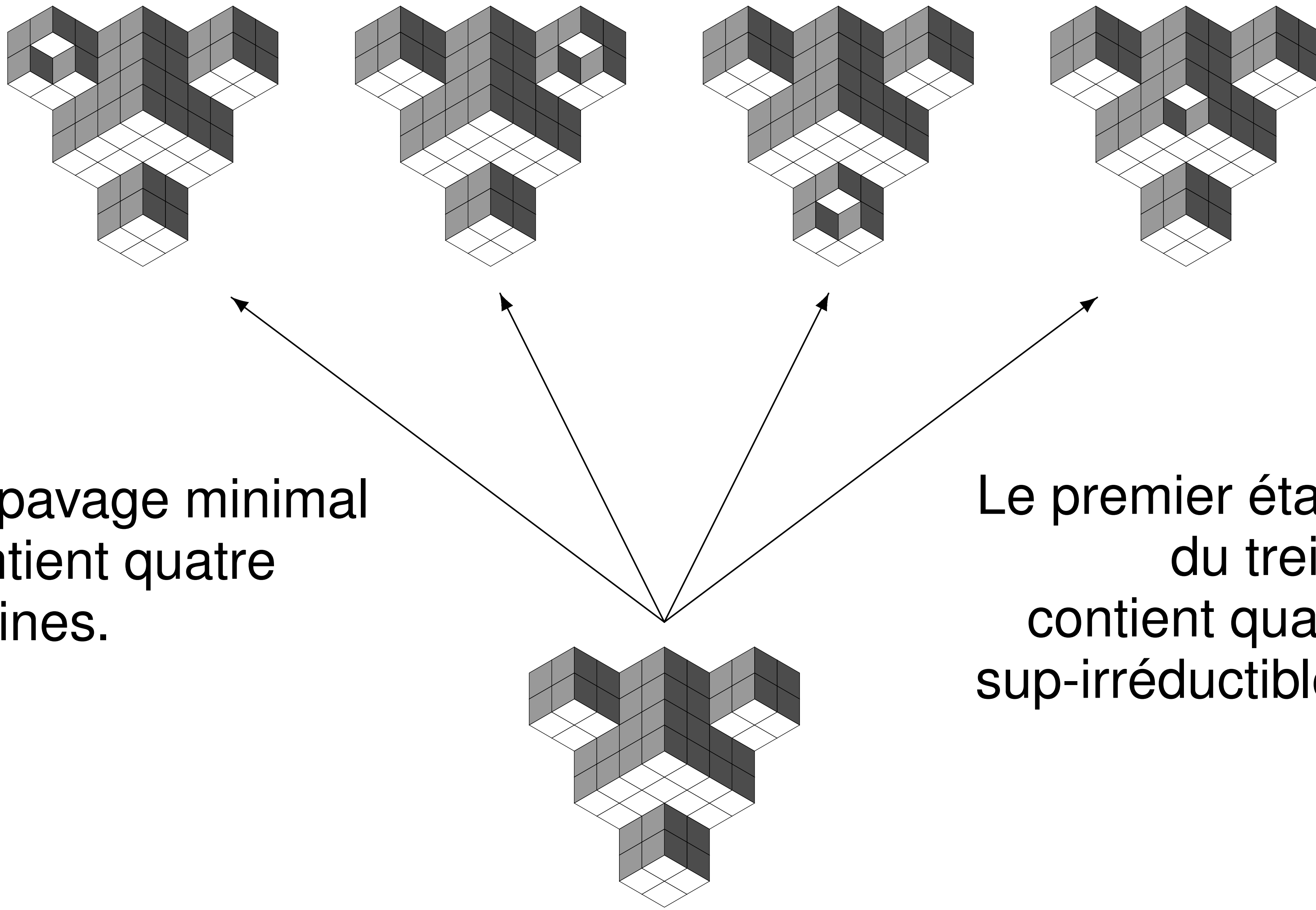
Structure récursive du treillis des pavages d'une zone fertile

Pavages principaux



Comment s'organisent les pavages d'une zone fertile ?

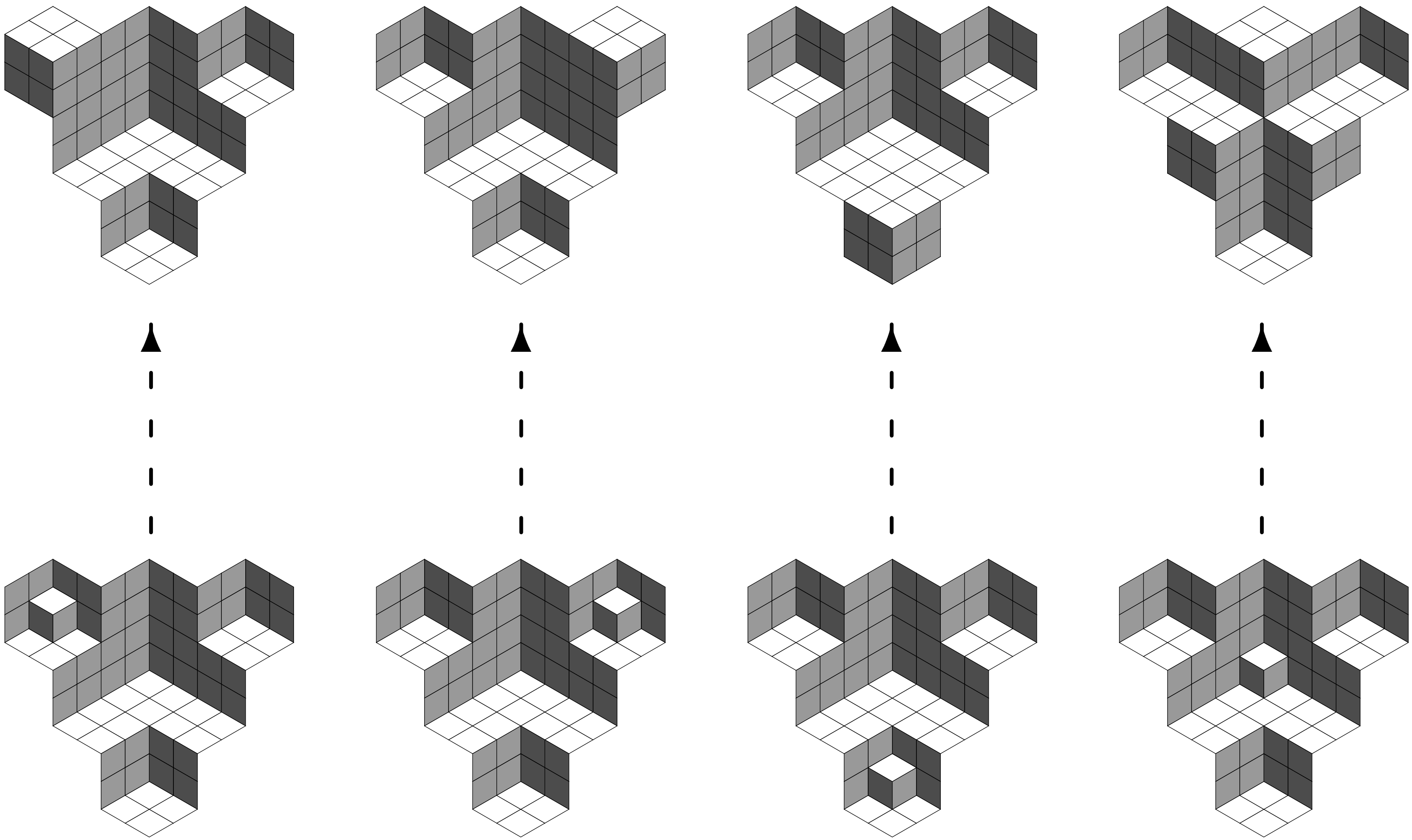
Pavages principaux



Le pavage minimal contient quatre graines.

Le premier étage du treillis contient quatre sup-irréductibles.

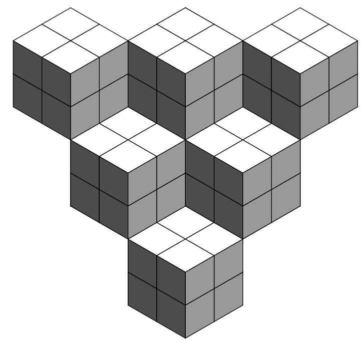
Pavages principaux

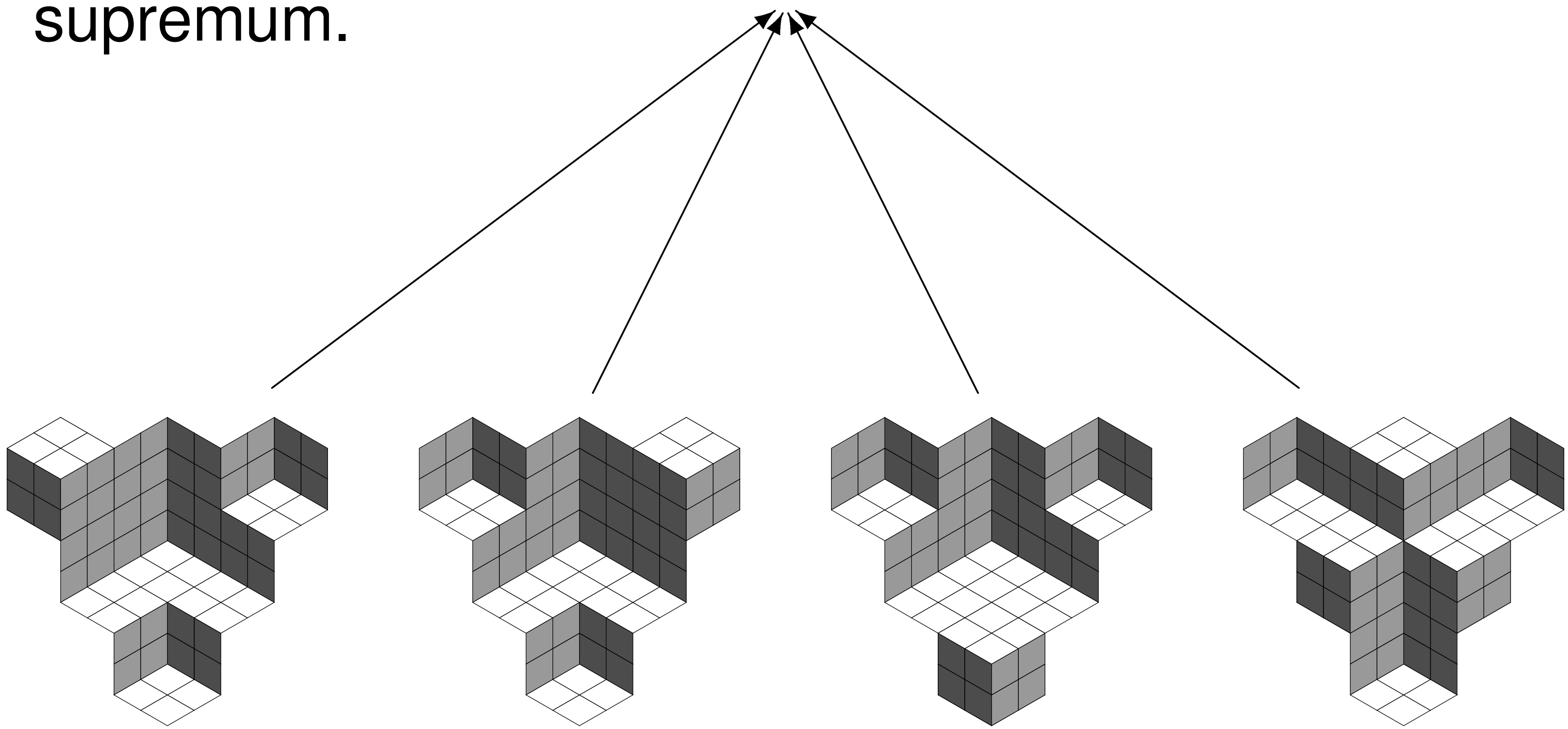


Dans chaque cas, on fige toutes les graines, sauf une,
et on effectue tous les flips possibles.

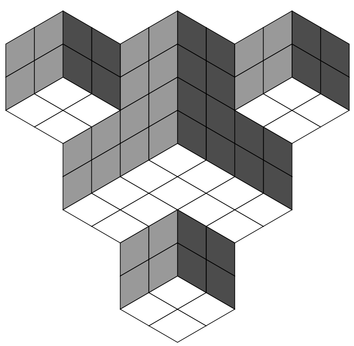
Pavages principaux

On prend le supremum.





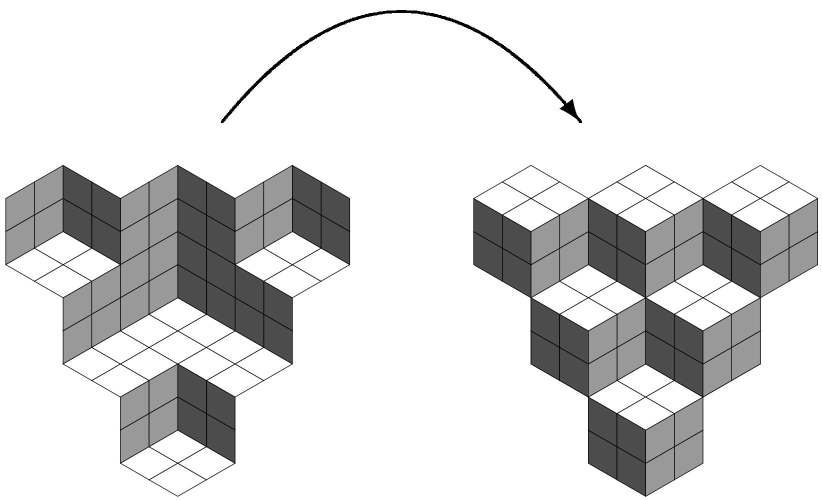
Pavages principaux



$\mathscr{D}^0$

Le pavage d'ordre 0
(Pavage minimal)

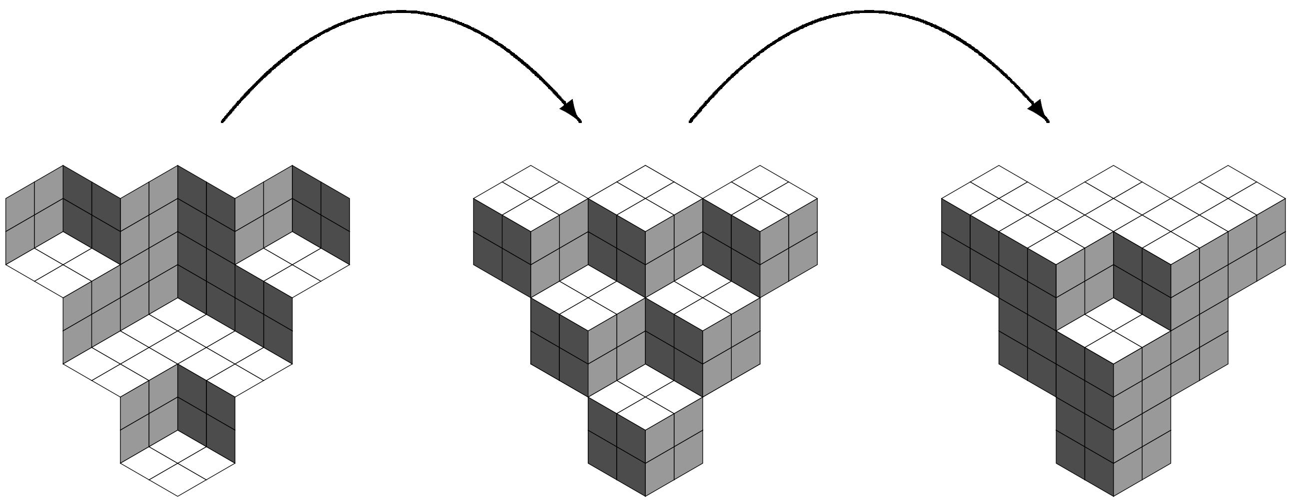
Pavages principaux



$\mathscr{D}^0$ $\mathscr{D}^1$

Le pavage d’ordre 1

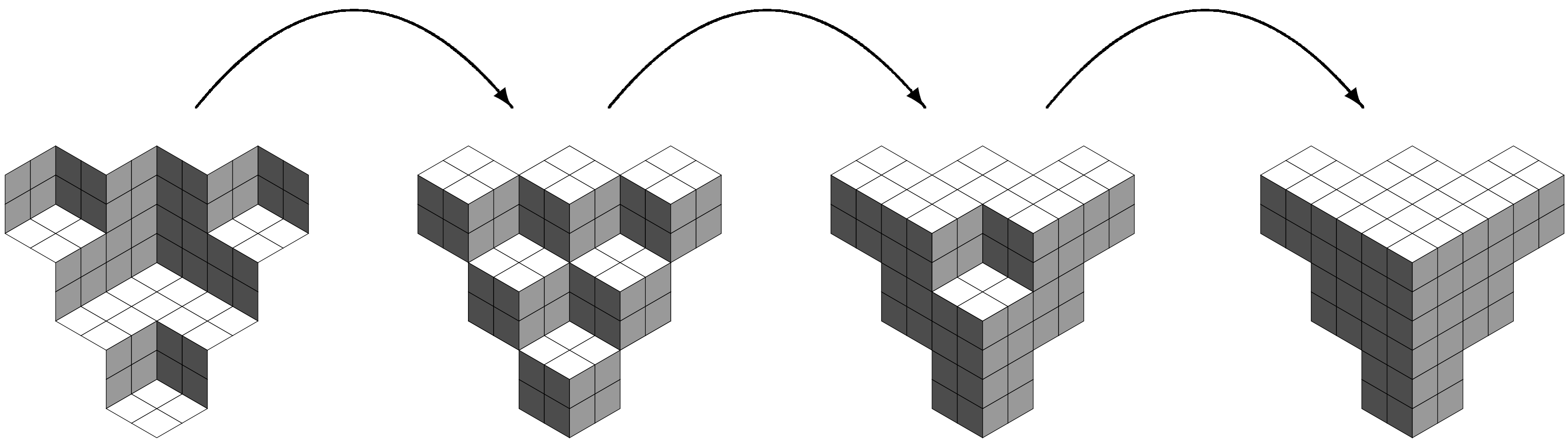
Pavages principaux



$\mathscr{D}^0$ $\mathscr{D}^1$ $\mathscr{D}^2$

Le pavage d'ordre 2

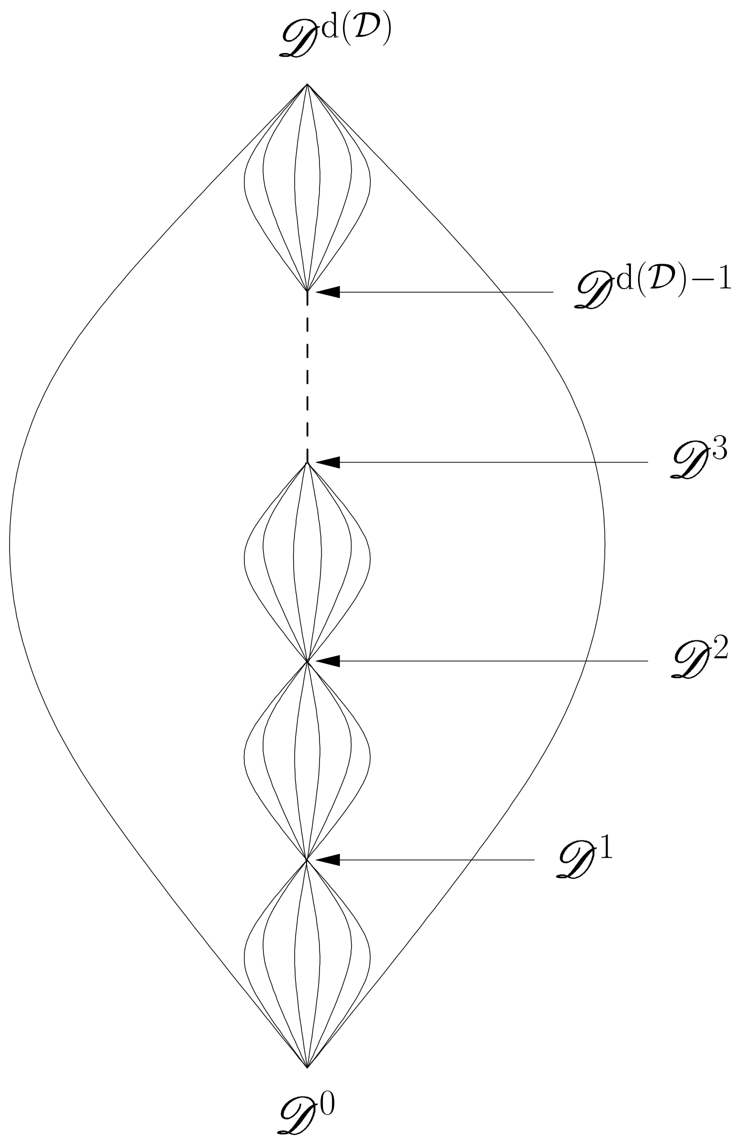
Pavages principaux



$\mathscr{D}^0$ $\mathscr{D}^1$ $\mathscr{D}^2$ $\mathscr{D}^3$

Le pavage d'ordre 3
(Pavage maximal)

Construction récursive du treillis

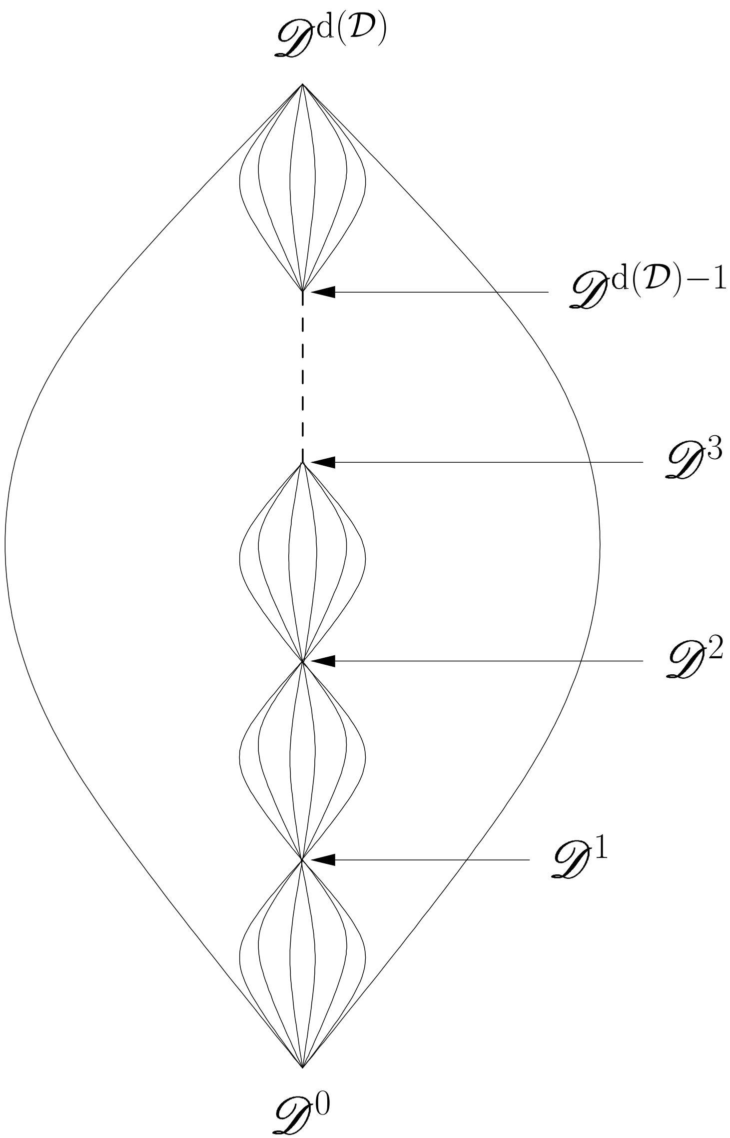


$\mathscr{D}^0$ est le pavage minimal ;

$\mathscr{D}^{\mathsf{d}(\mathscr{D})}$ est le pavage maximal.

Ce sont les pavages constructibles avec l'algorithme de Thurston.

Construction récursive du treillis



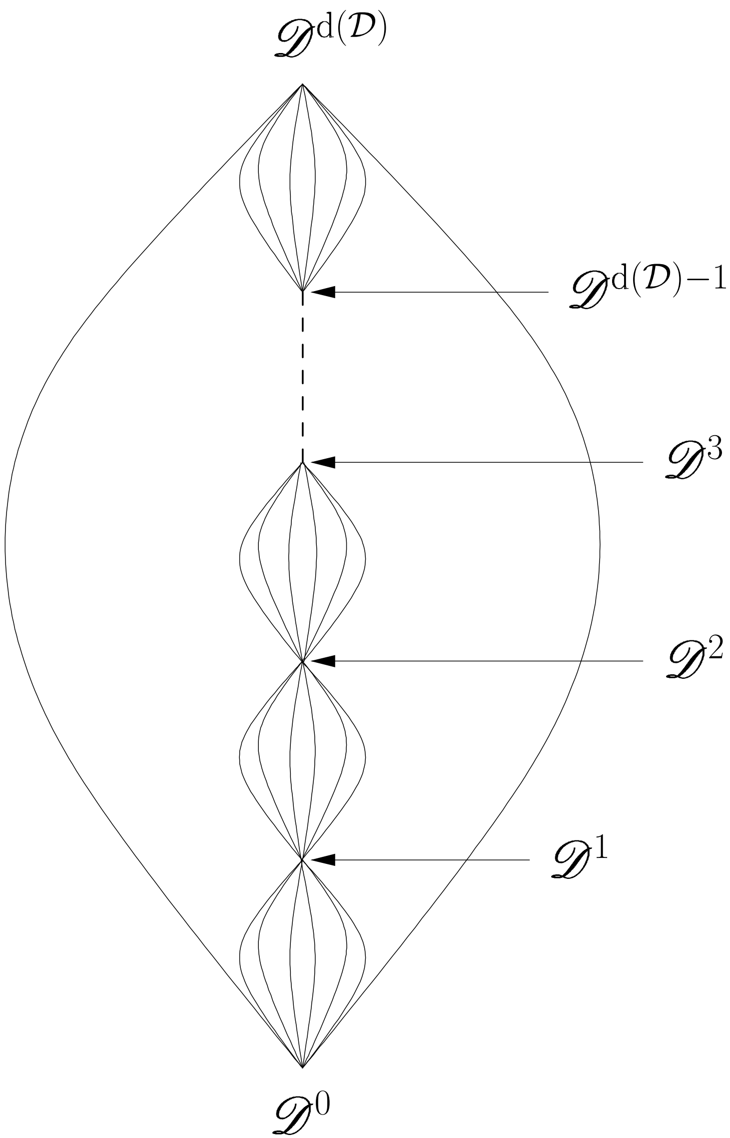
$\mathscr{D}^0$ est le pavage minimal ;

$\mathscr{D}^{\mathsf{d}(\mathscr{D})}$ est le pavage maximal.

Ce sont les pavages constructibles avec l'algorithme de Thurston.

Les pavages principaux $\mathscr{D}^k$ interpolent entre ces pavages.

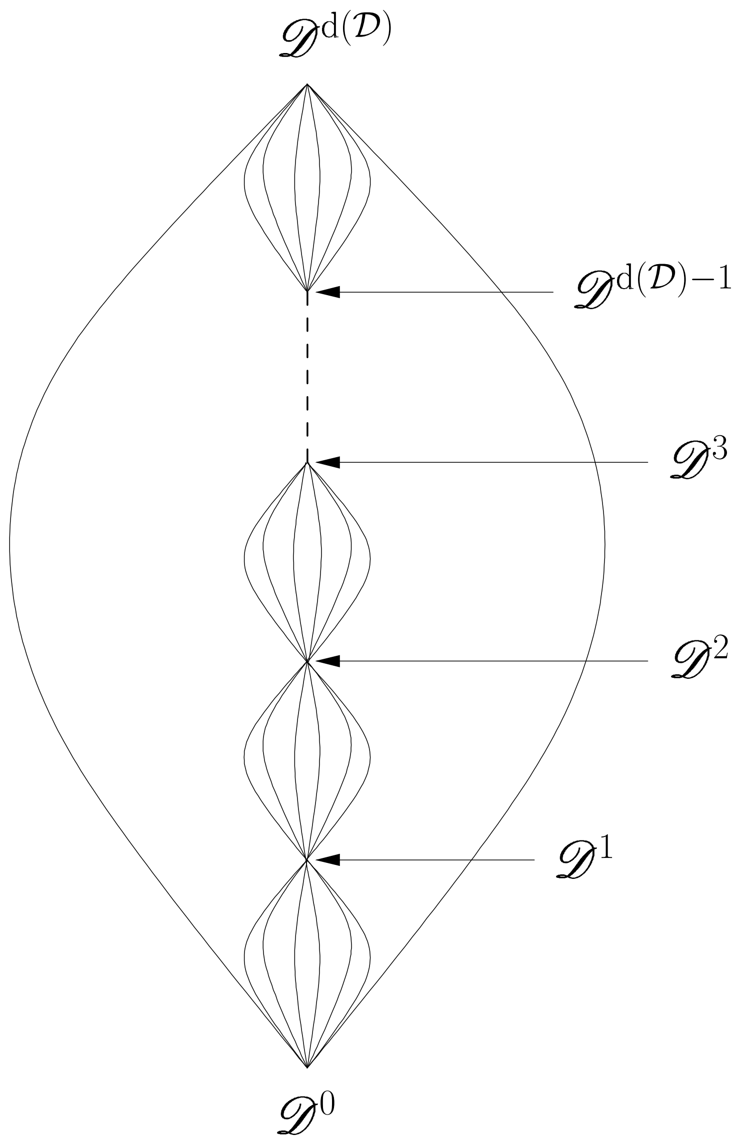
Construction récursive du treillis



Les pavages principaux $\mathscr{D}^k$ interpolent entre ces pavages.

Les intervalles $[\mathscr{D}_k \; ; \mathscr{D}_{k+1}]$ forment une chaîne maximale.

Construction récursive du treillis



Les pavages principaux $\mathscr{D}^k$ interpolent entre ces pavages.

Les intervalles $[\mathscr{D}_k \,;\, \mathscr{D}_{k+1}]$ forment une chaîne maximale.

<u>Théorème</u>

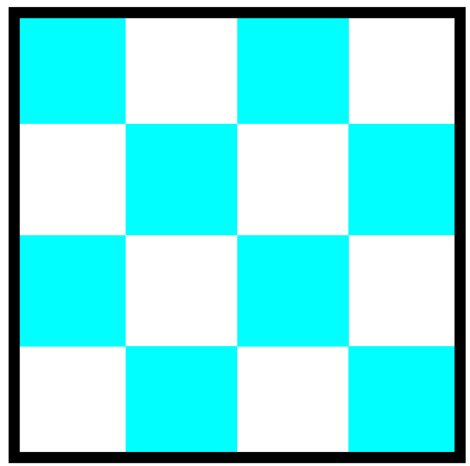
De $[\mathscr{D}_0 \,;\, \mathscr{D}_k]$ et $[\mathscr{D}_k \,;\, \mathscr{D}_{k+1}]$ on peut déduire $[\mathscr{D}_0 \,;\, \mathscr{D}_{k+1}]$.

Troisième partie

Généralisation de l’algorithme de Thurston

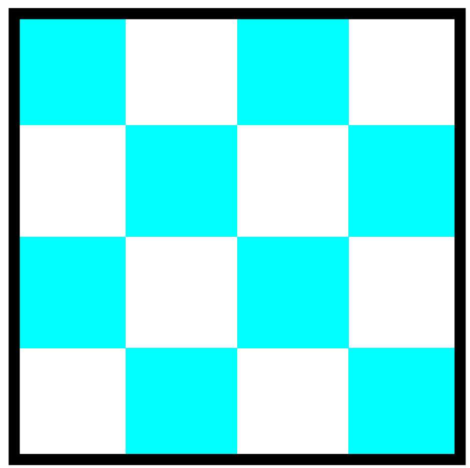
L’algorithme de Thurston

Comment déterminer si un domaine est pavable ?



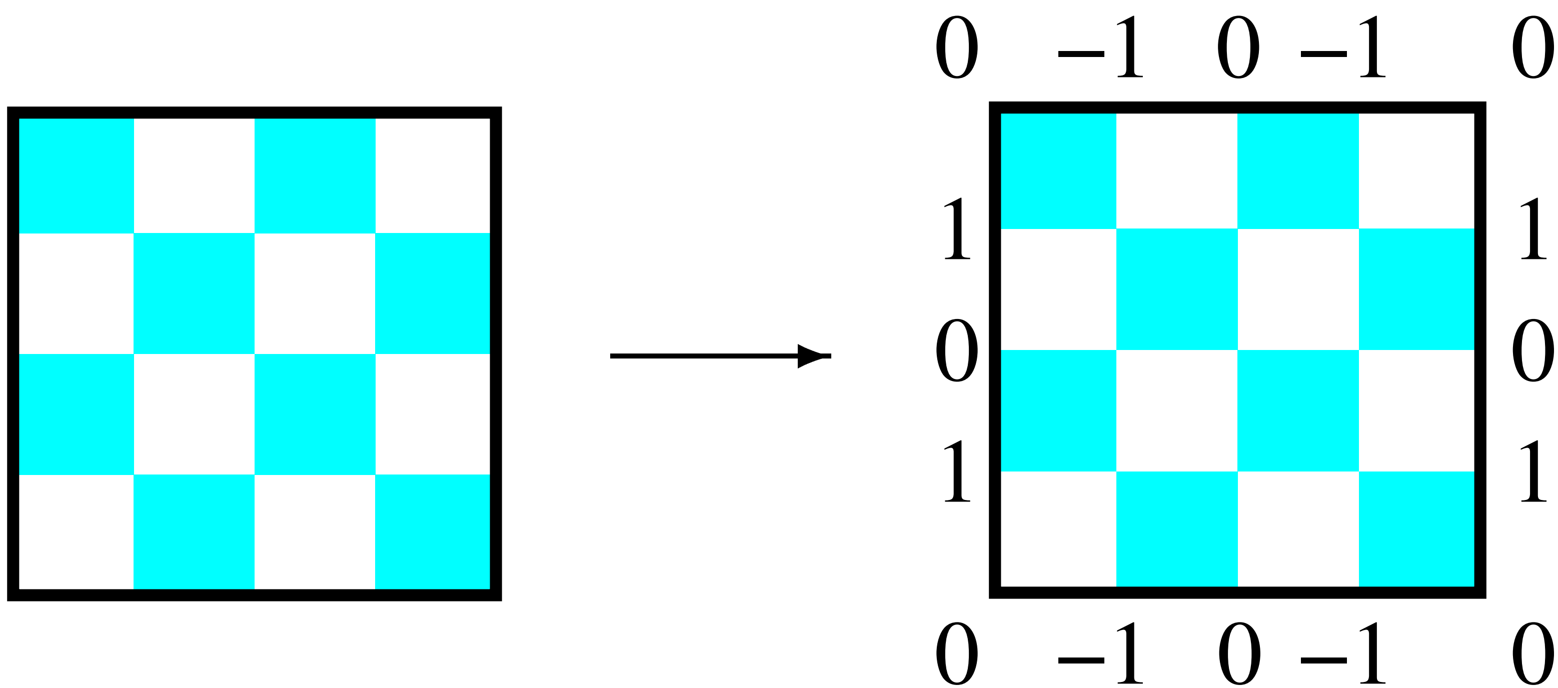
L'algorithme de Thurston

Comment déterminer si un domaine est pavable ?



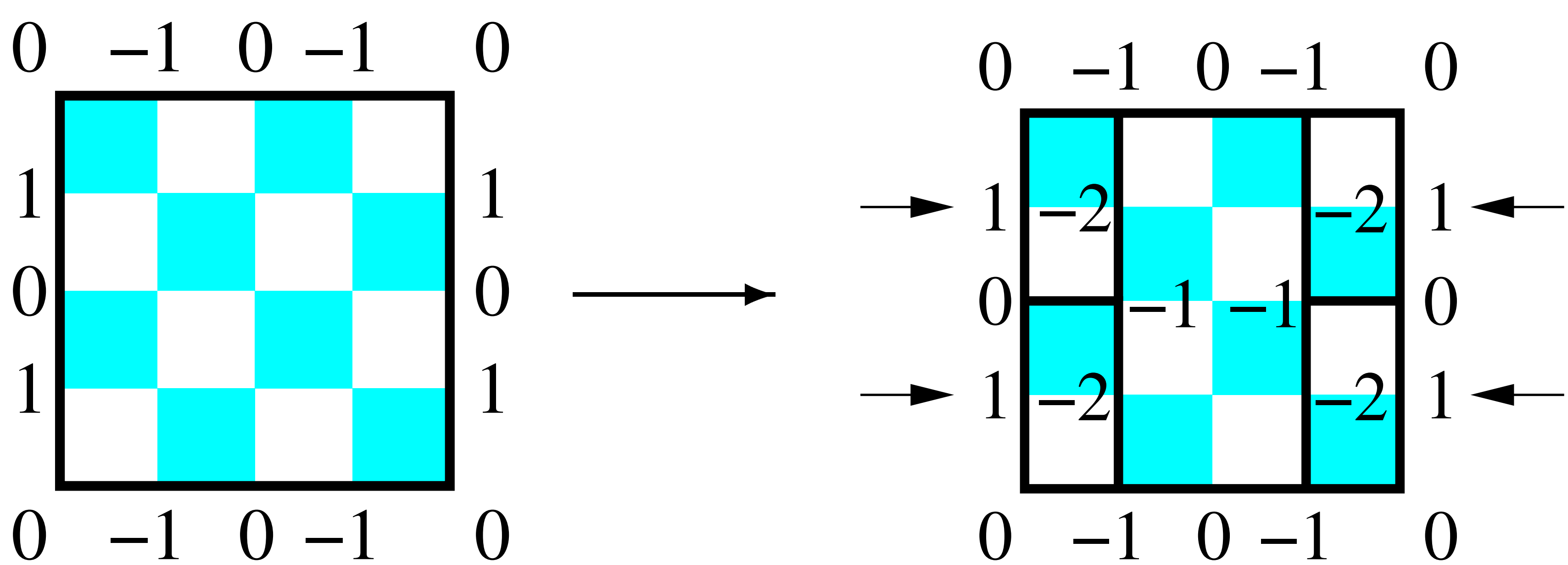
Idée : chercher un pavage dans lequel les maxima locaux de la fonction de hauteur se trouvent sur la frontière.

L'algorithme de Thurston



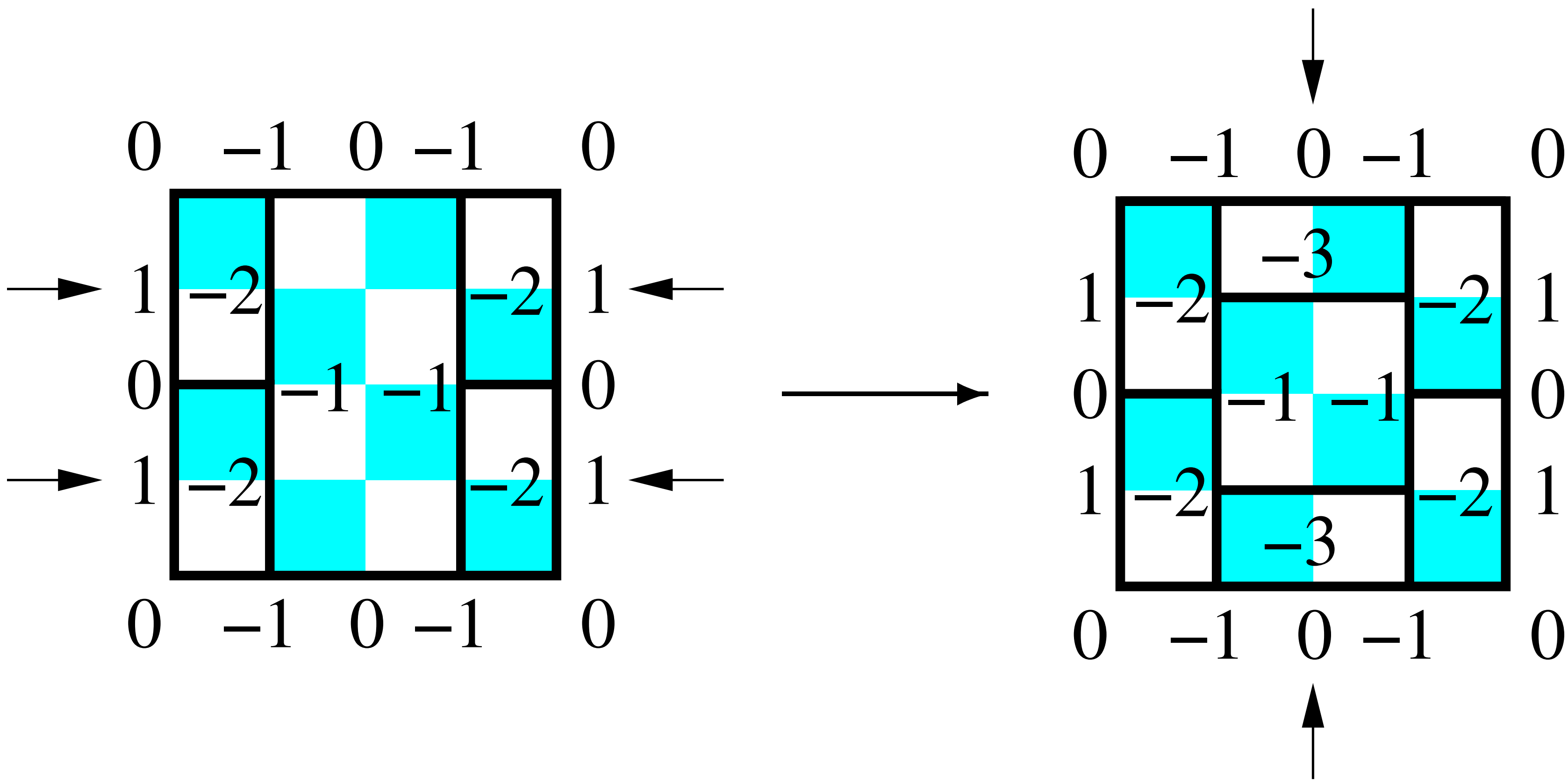
On place les hauteurs sur la frontière.

L’algorithme de Thurston



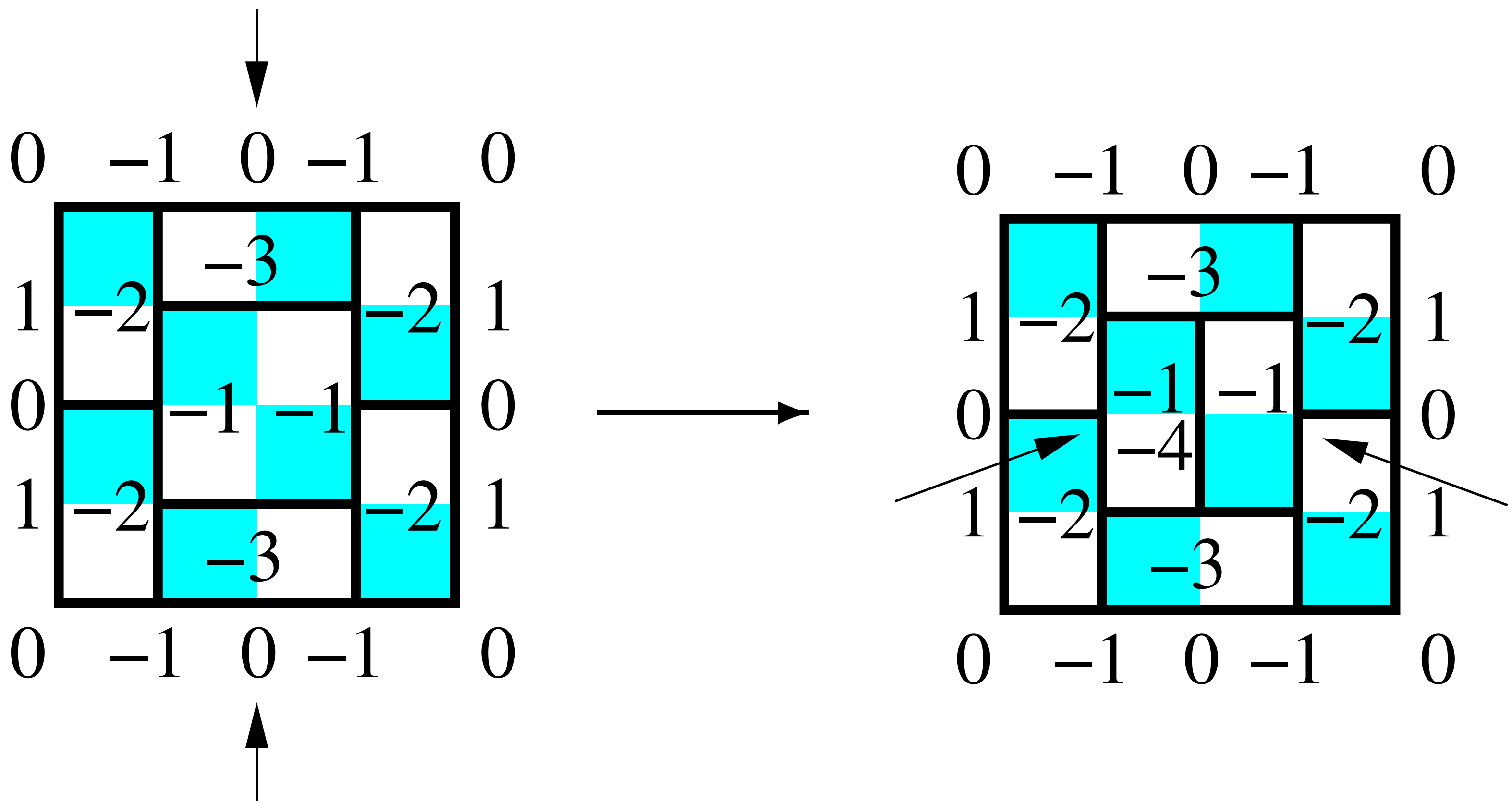
On recouvre chaque sommet de hauteur maximale de l’unique manière qui ne crée pas un maximum local.

L'algorithme de Thurston



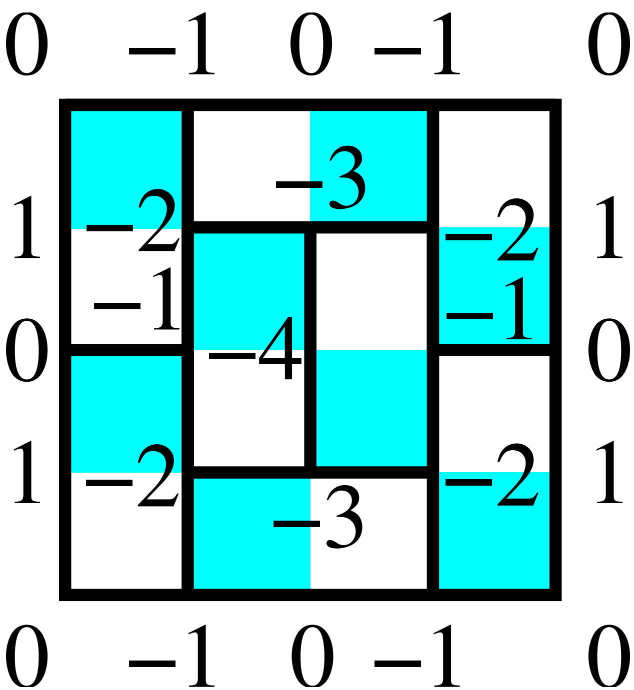
On continue sur le domaine restant...

L'algorithme de Thurston



...jusqu'à ce que tout le domaine soit recouvert.

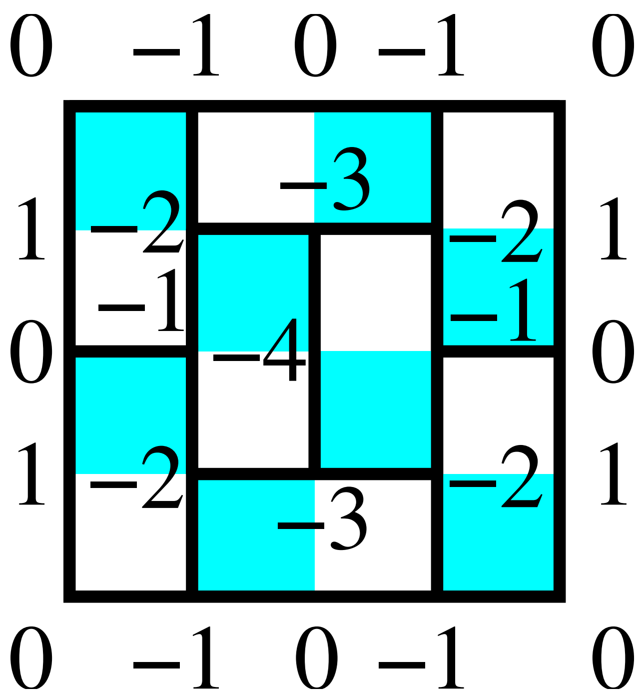
L'algorithme de Thurston



Idée

Les maxima locaux de la fonction de hauteur se trouvent sur la frontière.

L'algorithme de Thurston



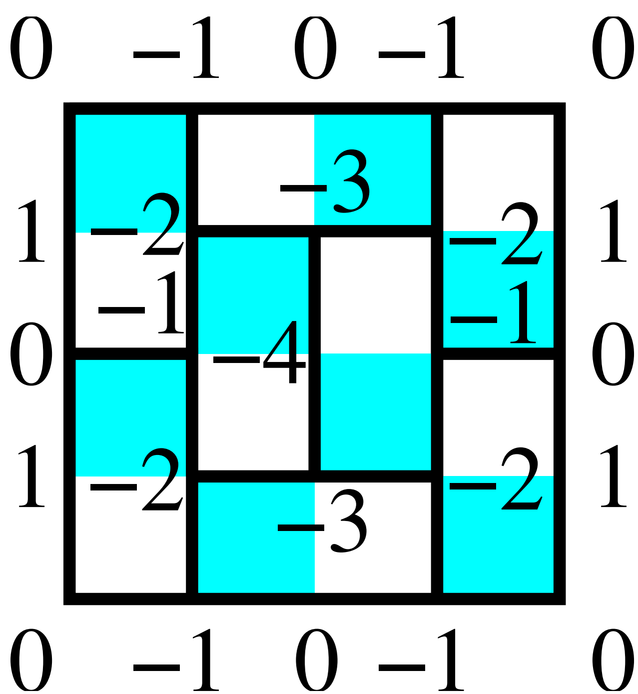
Idée

Les maxima locaux de la fonction de hauteur se trouvent sur la frontière.

Réinterprétation

C'est l'élément minimal du treillis.

L'algorithme de Thurston



Réinterprétation

C'est l'élément minimal du treillis.

Conclusion

L'algorithme de Thurston construit l'idéal vide de l'ordre des sup-irréductibles du treillis.

Généralisation de Thurston

Peut-on adapter l'algorithme de Thurston pour constuire n'importe quel idéal de l'ordre des sup-irréductibles du treillis ?

Généralisation de Thurston

Définition

Un sup-irréductible du treillis est un pavage qui n'admet qu'un seul antécédent.

Généralisation de Thurston

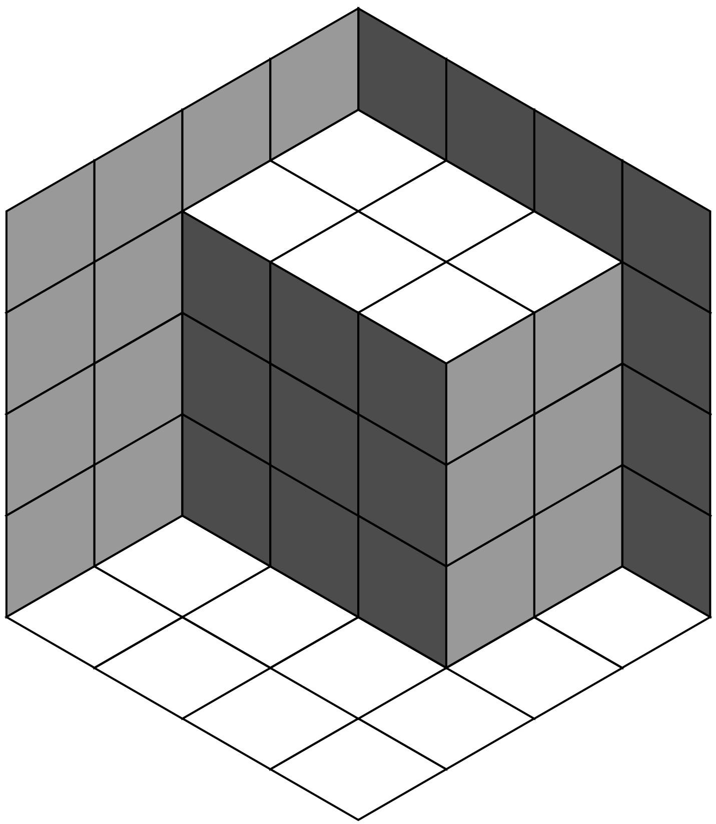
Définition

Un sup-irréductible du treillis est un pavage qui n'admet qu'un seul antécédent.

Caractérisation

Sa fonction de hauteur admet un unique maximum local.

Généralisation de Thurston



Définition

Un sup-irréductible du treillis est un pavage qui n'admet qu'un seul antécédent.

Caractérisation

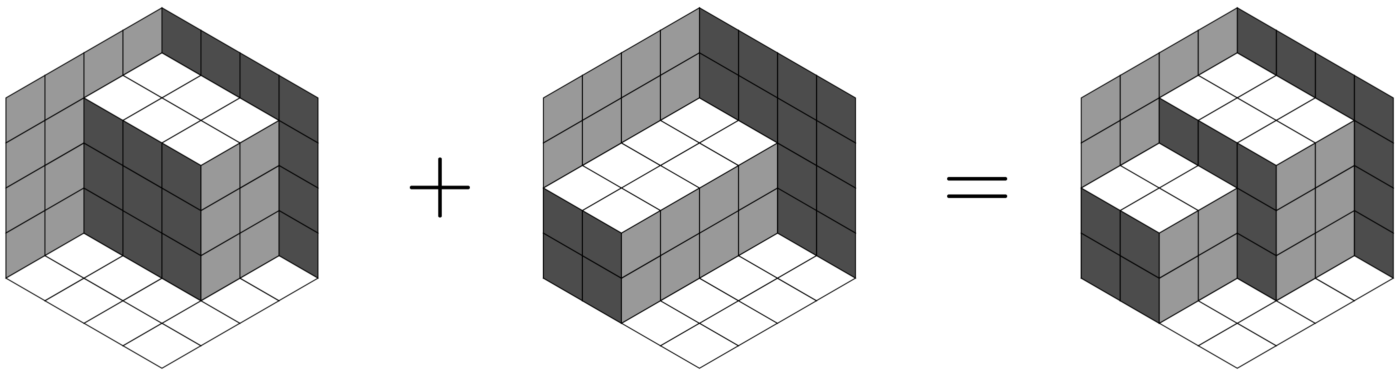
Sa fonction de hauteur admet un unique maximum local.

Conclusion

C'est un cône.

Généralisation de Thurston

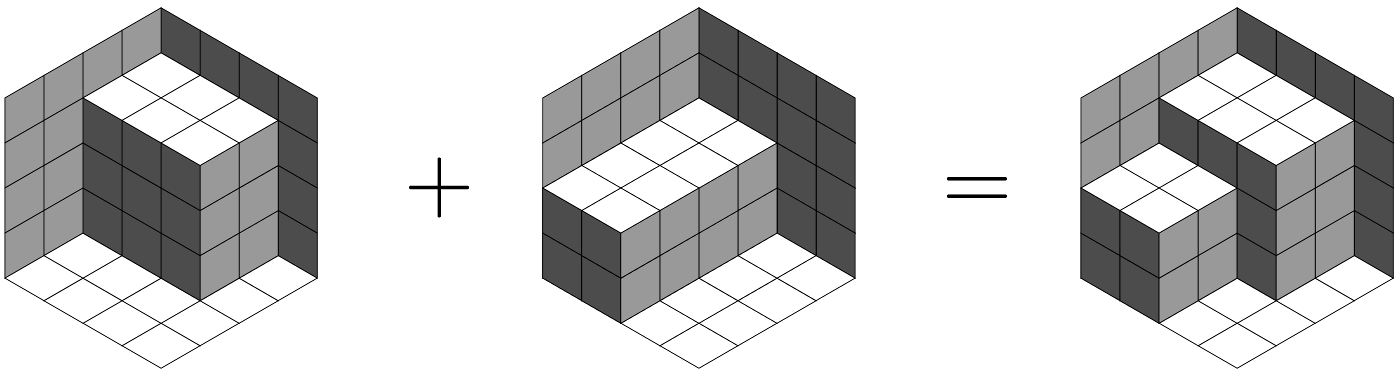
Superposition de sup-irréductibles



Peut-on obtenir n'importe quel pavage de cette manière ?

Généralisation de Thurston

Superposition de sup-irréductibles

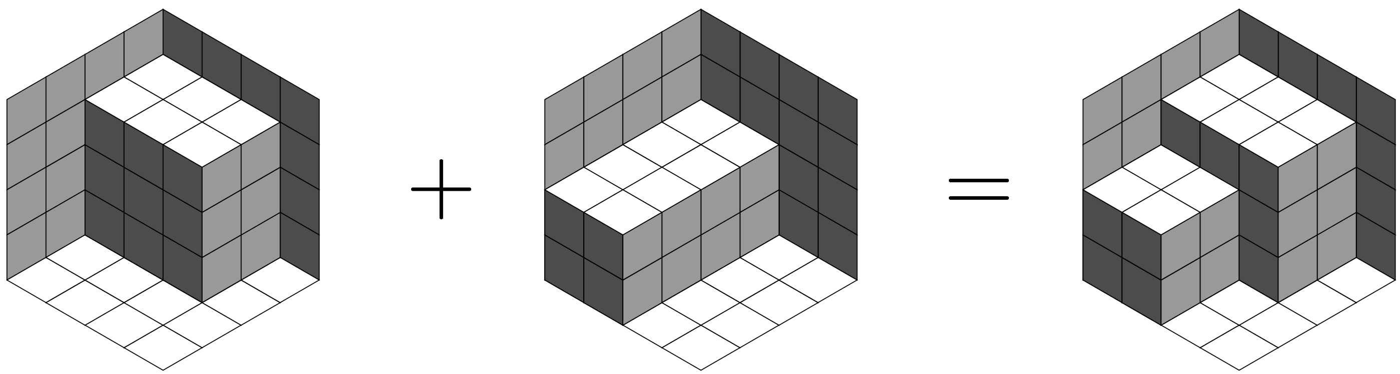


Théorème de Birkhoff

Tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre de ses sup-irréductibles.

Généralisation de Thurston

Superposition de sup-irréductibles



Théorème de Birkhoff

Tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre de ses sup-irréductibles.

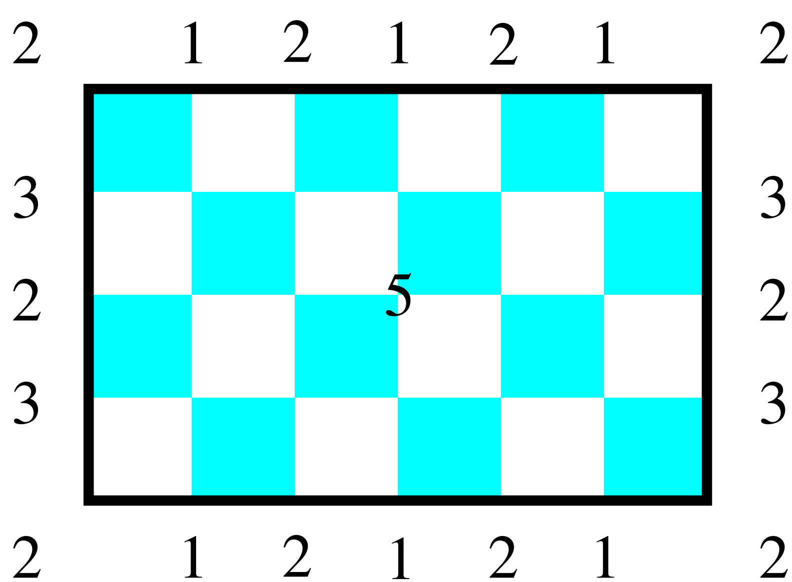
Conclusion

Tout pavage peut s'obtenir comme superposition de cônes.

Généralisation de Thurston

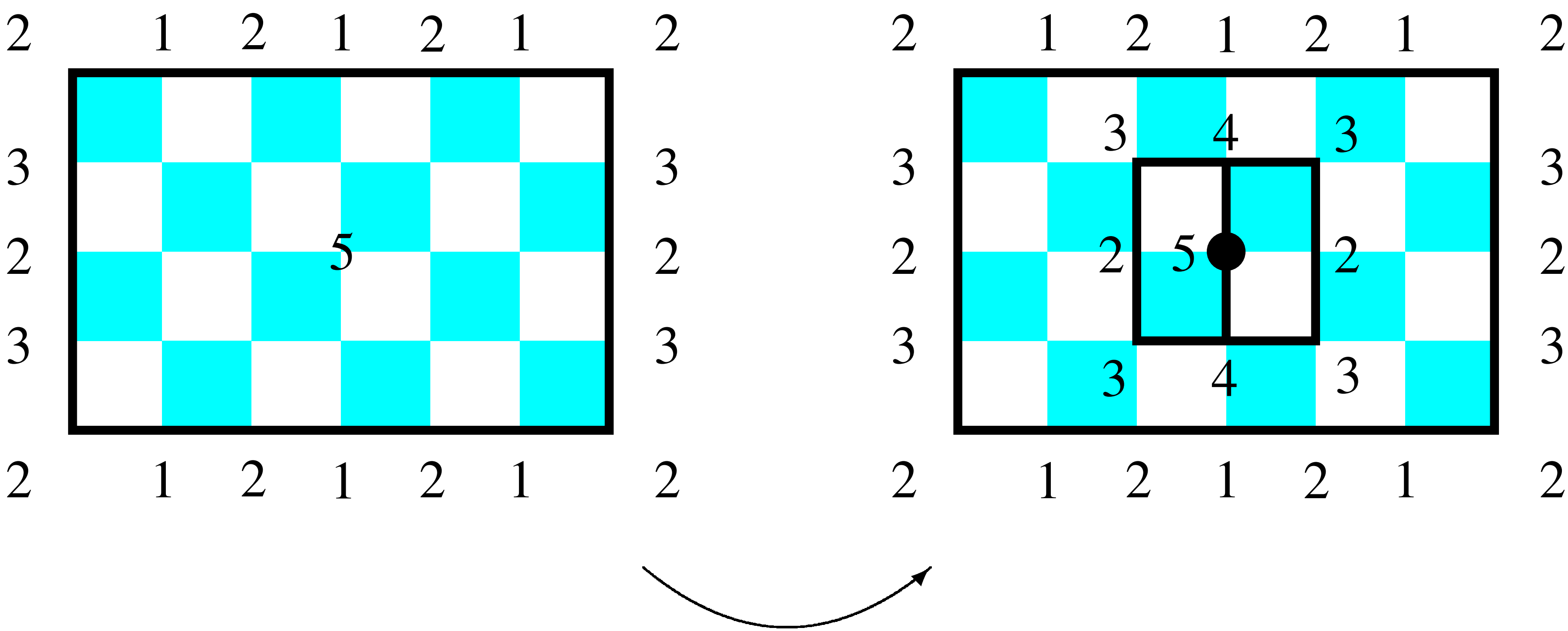
Mise en œuvre

On impose des valeurs en un nombre arbitraire de sommets.



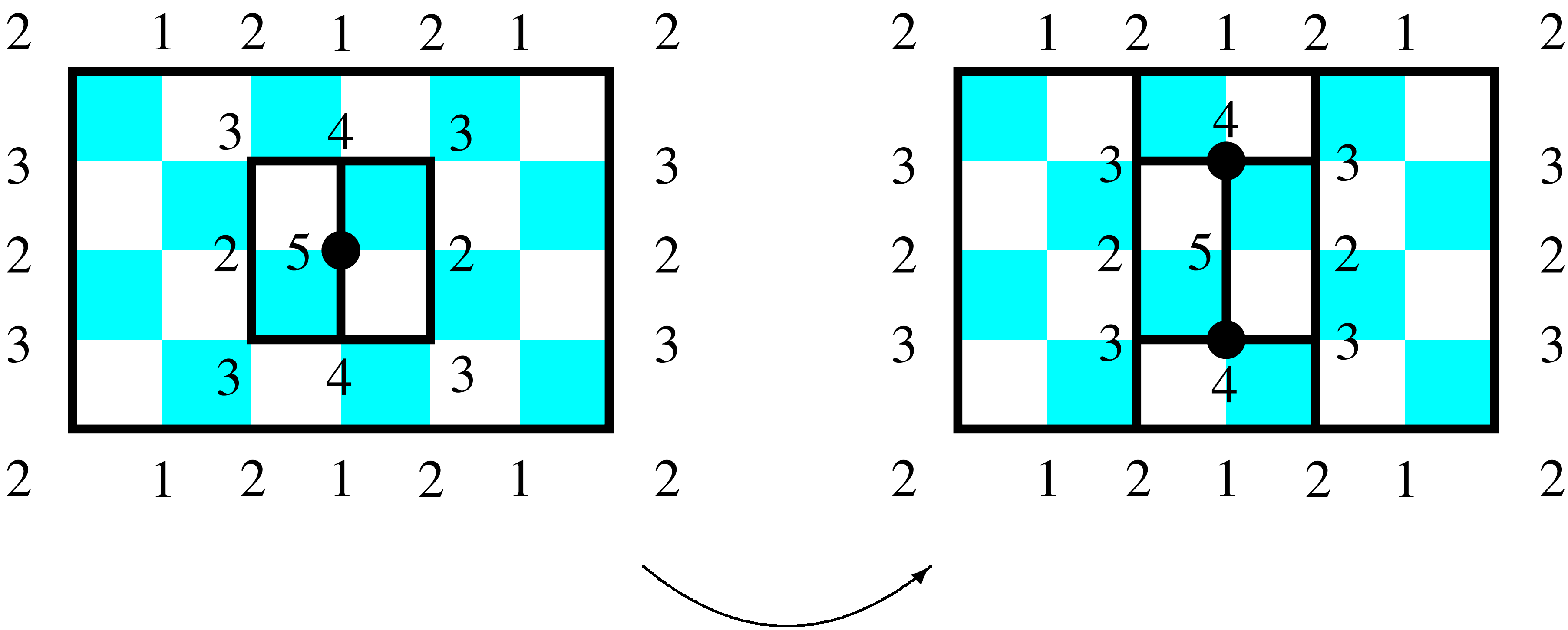
Généralisation de Thurston

On procède par ligne de niveau...



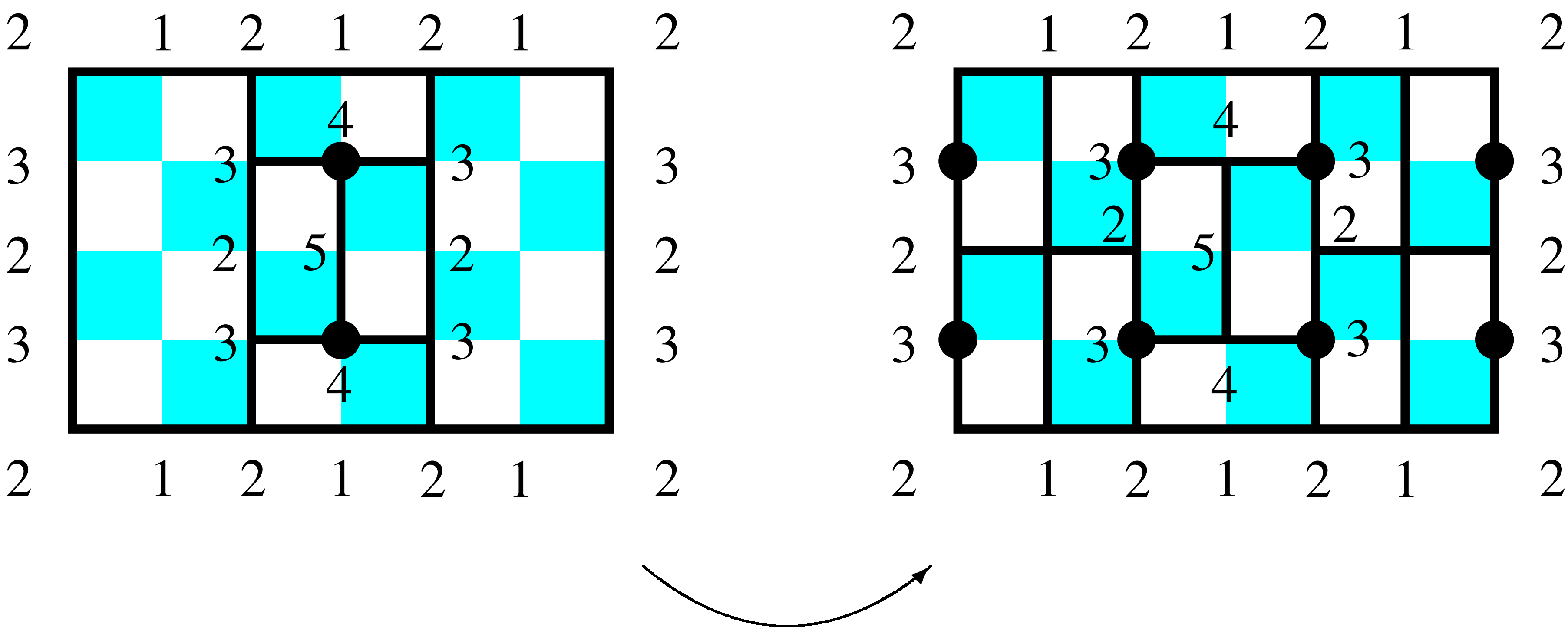
Générilisation de Thurston

...en couvrant les maxima rencontrés de
l'unique manière qui ne crée pas de maximum local...



Généralisation de Thurston

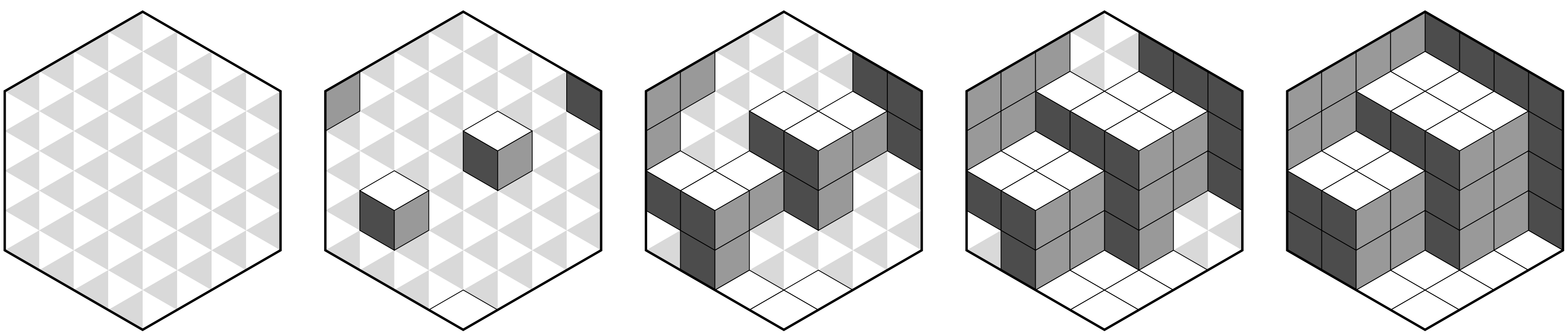
...jusqu'à ce que tout le domaine soit recouvert.



Généralisation de Thurston

L'algorithme de Thurston généralisé :

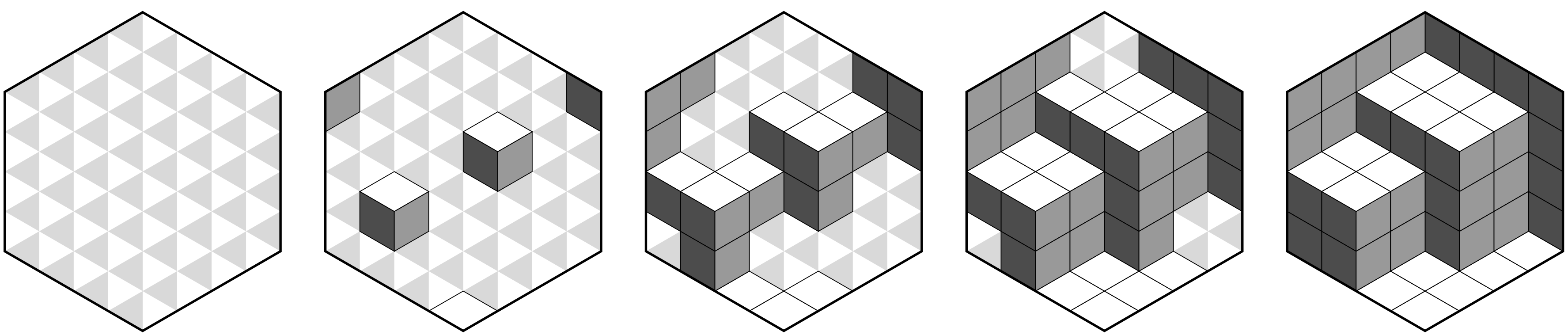
- permet de construire n'importe quel pavage ;



Généralisation de Thurston

L'algorithme de Thurston généralisé :

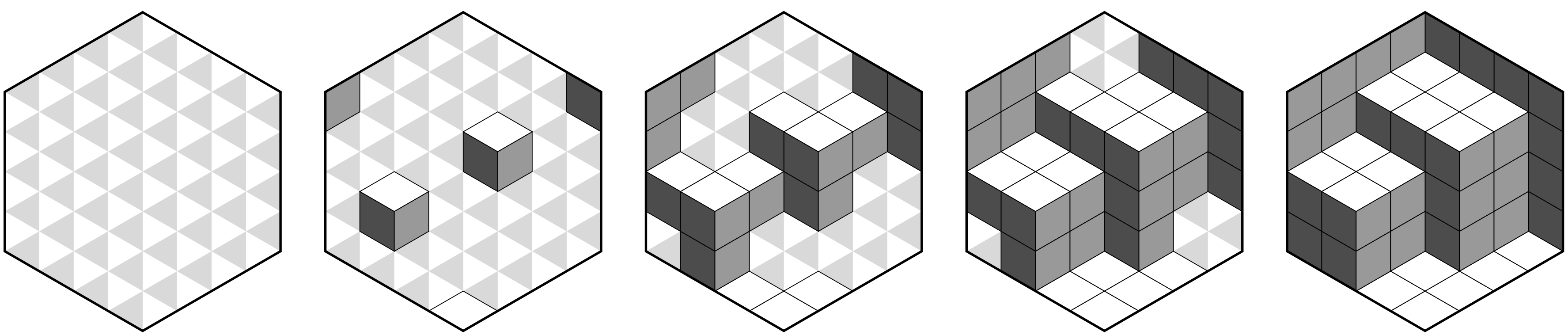
- permet de construire n'importe quel pavage ;
- est linéaire en le nombre de cellules ;



Généralisation de Thurston

L'algorithme de Thurston généralisé :

- permet de construire n'importe quel pavage ;
- est linéaire en le nombre de cellules ;
- s'exécute en l'espace mémoire nécessaire pour stocker un pavage.



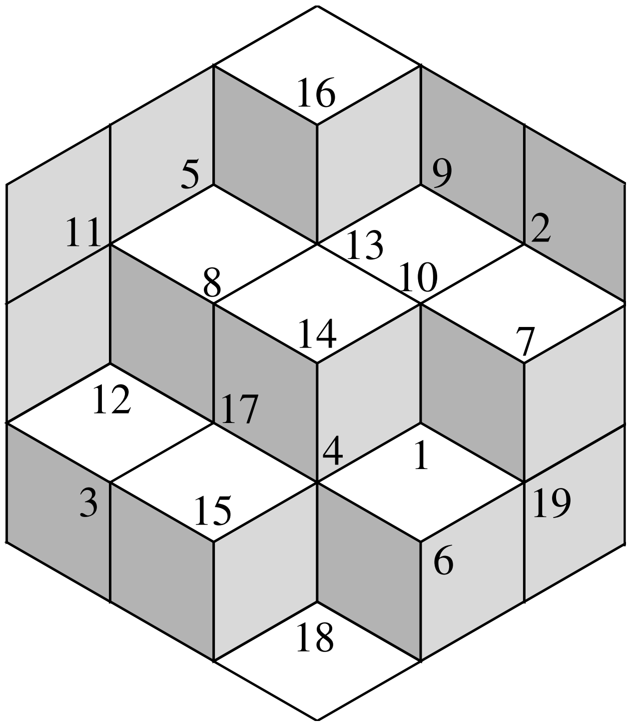
Quatrième partie

Algorithmes

Génération exhaustive

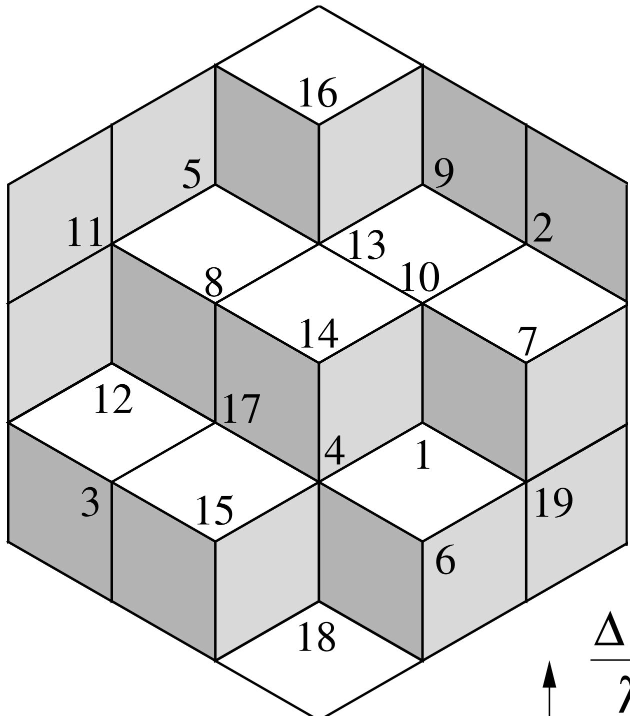
Comment engendrer tous les pavages d'un domaine ?

Génération exhaustive



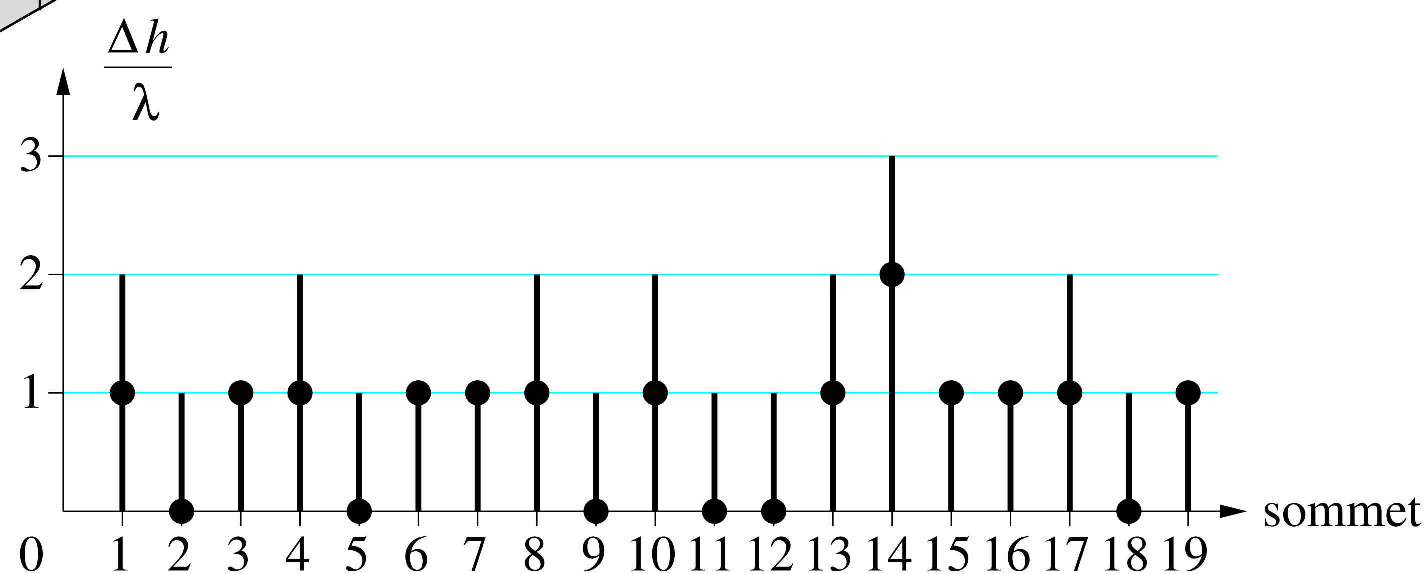
Imposons une numérotation arbitraire des sommets.

Génération exhaustive

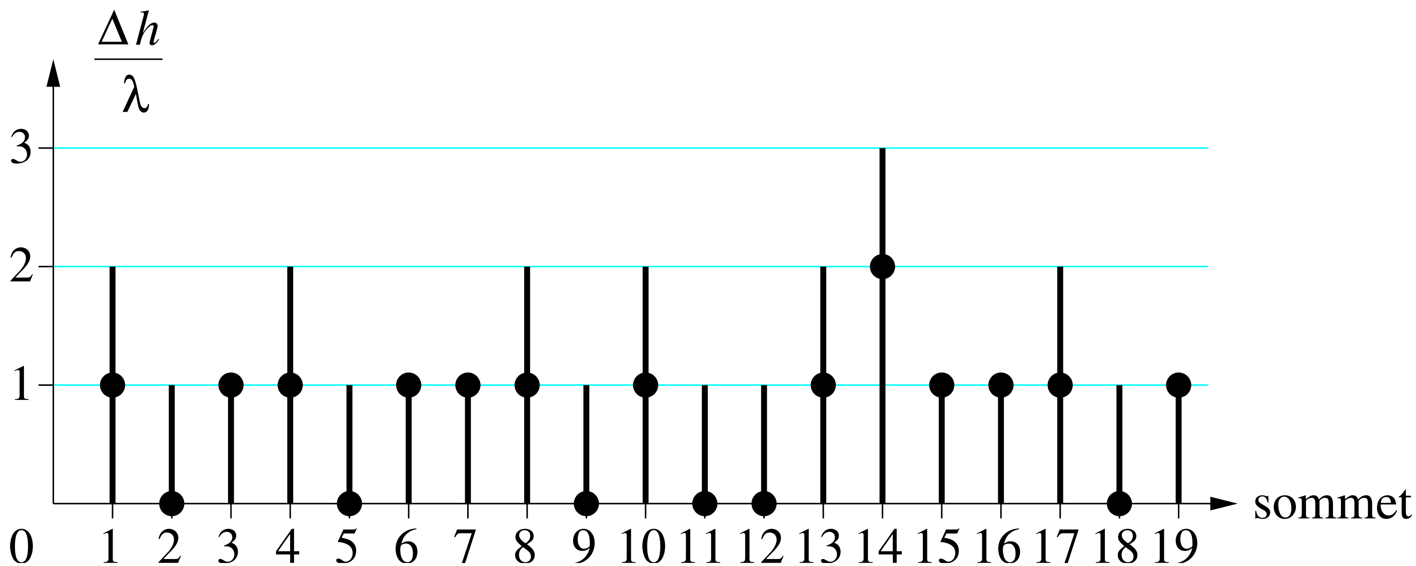


Imposons une numérotation arbitraire des sommets.

Notons pour chaque sommet sa hauteur normalisée.



Génération exhaustive



En lisant la hauteur normalisée sommet par sommet, on code le pavage par un mot :

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Génération exhaustive

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Pour trouver le successeur lexicographique d'un mot codant un pavage :

- trouver le sommet de plus grand numéro (i_0) qui correspond à un maximum local de la fonction de hauteur ;
- augmenter sa hauteur normalisée de 1 ;
- calculer avec l'algorithme de Thurston généralisé le plus petit pavage ayant les mêmes hauteurs normalisées pour $1 \leqslant i \leqslant i_0$.

Génération exhaustive

Algorithme de génération exhaustive des pavages

- Construire le pavage minimal avec l'algorithme de Thurston ;
- appeler récursivement la fonction successeur.

Génération exhaustive

Algorithme de génération exhaustive des pavages

- Construire le pavage minimal avec l'algorithme de Thurston ;
- appeler récursivement la fonction successeur.

Complexité

- temps : nombre de pavages $\times$ nombre de cellules ;
- espace : celui pour stocker un pavage.

Génération exhaustive

Algorithme de génération exhaustive des pavages

- Construire le pavage minimal avec l'algorithme de Thurston ;
- appeler récursivement la fonction successeur.

Complexité

- temps : nombre de pavages $\times$ nombre de cellules ;
- espace : celui pour stocker un pavage.

Conclusion

L'algorithme est optimal en temps et en espace.

Algorithmes reliés

Génération des intervalles

- Adapter le choix de i_0 ;
- insérer un infimum.

Algorithmes reliés

Génération des intervalles

- Adapter le choix de i_0 ;
- insérer un infimum.

Génération des sup-irréductibles

- Calculer les pavages minimal et maximal du domaine ;
- en déduire la gamme des hauteurs normalisées de chaque sommet ;
- pour chaque sommet et chacune de ses hauteurs normalisées non nulles, calculer au moyen de l'algorithme de Thurston généralisé l'infimum des pavages dans lesquels le sommet porte cette hauteur.

Algorithmes reliés

Génération des arcs du treillis

Méthode « pavages $+$ flips »

- Calculer les pavages comme précédemment ;
- pour chaque pavage, déterminer les sommets en lesquels la fonction de hauteur atteint un minimum local ;
- pour chacun de ces sommets, effectuer un flip et ajouter au treillis l'arête ainsi déterminée.

Algorithmes reliés

Génération des arcs du treillis

Méthode par les sup-irréductibles

- Calculer les sup-irréductibles comme précédemment ;
- calculer leur ordre de la manière suivante :
  - pour chaque sup-irréductible, déterminer les sommets en lesquels la fonction de hauteur atteint un minimum local ;
  - tout voisin d'un sommet minimal non relié à celui-ci donne un sup-irréductible immédiatement supérieur en ajoutant 1 à sa hauteur normalisée puis en appliquant l'algorithme de Thurston généralisé ;
- utiliser un algorithme générique pour engendrer les idéaux de cet ordre.

Conclusion

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.
- Ce découpage est le plus fin possible pour le produit.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.
- Ce découpage est le plus fin possible pour le produit.
- L'algorithme de Thurston est vu comme cas particulier.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.
- Ce découpage est le plus fin possible pour le produit.
- L'algorithme de Thurston est vu comme cas particulier.
- Le théorème de Birkhoff donne un cadre à l'idée intuitive de cône.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.
- Ce découpage est le plus fin possible pour le produit.
- L'algorithme de Thurston est vu comme cas particulier.
- Le théorème de Birkhoff donne un cadre à l'idée intuitive de cône.
- On construit un algorithme optimal en temps et en espace pour générer les pavages d'un domaine.

Conclusion

- La structure de treillis a permis de mettre en perspective les résultats classiques.
- On peut ramener l'étude à des zones élémentaires du domaine, les zones fertiles.
- Le treillis de leurs pavages a une structure récursive.
- Ce découpage est le plus fin possible pour le produit.
- L'algorithme de Thurston est vu comme cas particulier.
- Le théorème de Birkhoff donne un cadre à l'idée intuitive de cône.
- On construit un algorithme optimal en temps et en espace pour générer les pavages d'un domaine.
- On en déduit plusieurs autres algorithmes.

Pavages d'un hexagone $3 \times 3 \times 2$